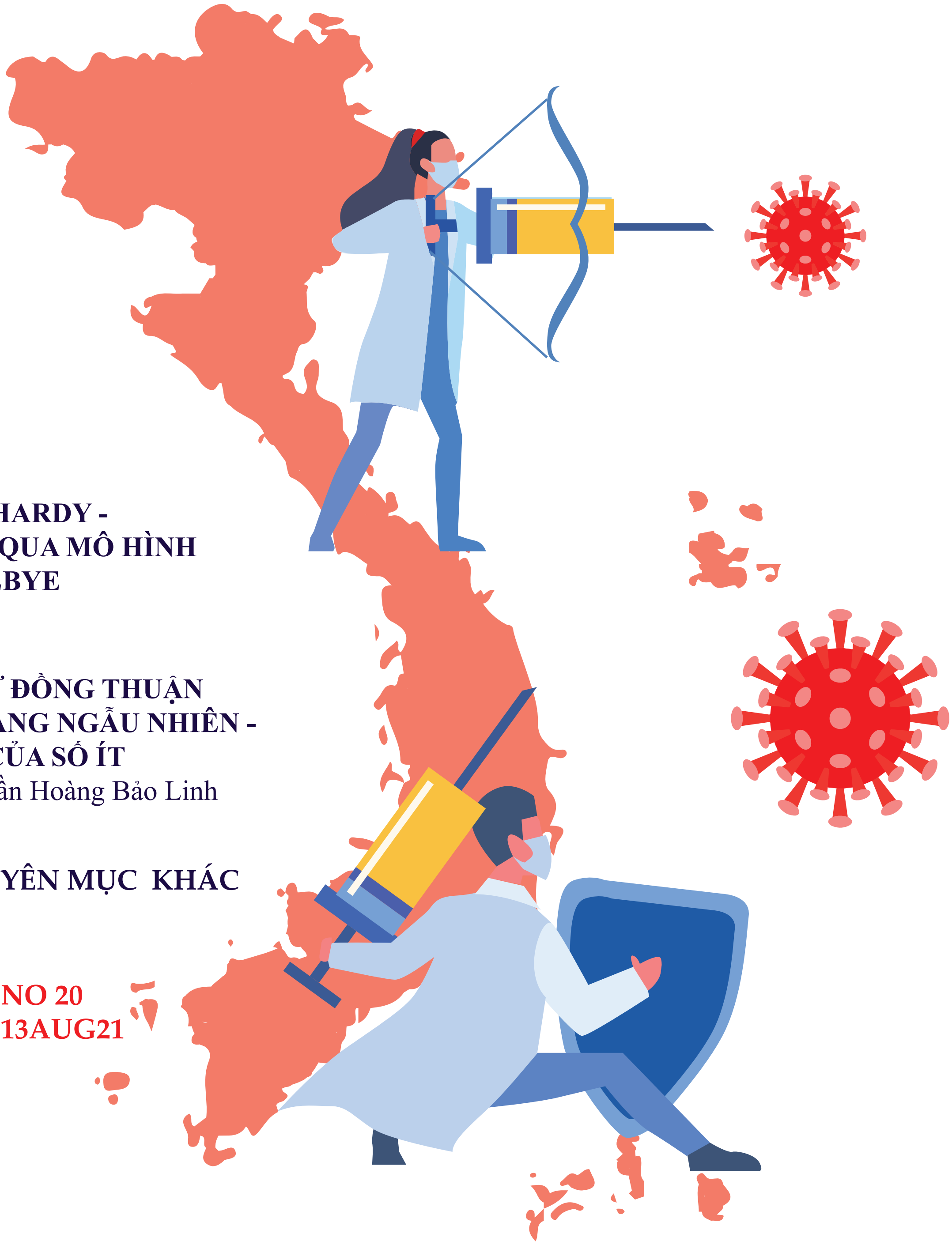
Epsilon
Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán



CÔNG THỨC HARDY - RAMANUJAN QUA MÔ HÌNH CHẤT RẮN DEBYE
Đàm Thanh Sơn

ĐẠT ĐƯỢC SỰ ĐỒNG THUẬN TRÊN CÁC MẠNG NGẪU NHIÊN - QUYỀN LỰC CỦA SỐ ÍT
Vũ Hà Văn & Trần Hoàng Bảo Linh

VÀ CÁC CHUYÊN MỤC KHÁC

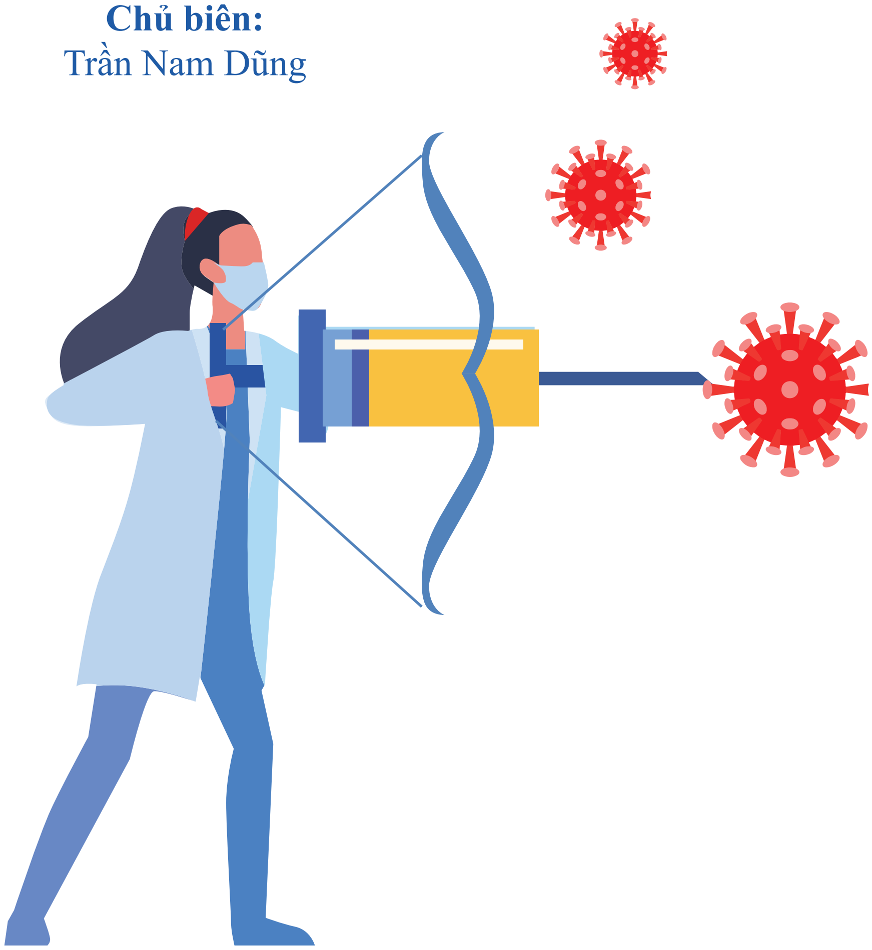
NO 20
13AUG21

"… với độ giãn cách này thì xác suất lây nhiễm không bù lại được với xác suất virus bị chết do kháng thể của người sinh ra. Dịch vì thế phải hết."
Nguyễn Lê Anh
(Đỉnh dịch?)

"Trong tất cả các hình phẳng có chu vi bằng nhau thì hình tròn có diện tích lớn nhất."
Trịnh Đào Chiến
(Câu chuyện về bài toán đẳng chu trong hình học phẳng)

Biên tập viên:
Lê Viết Ân
Võ Quốc Bá Cẩn
Trần Quang Hùng
Nguyễn Văn Huyện
Lê Phúc Lữ
Tống Hữu Nhân
Nguyễn Tất Thu
Đặng Nguyễn Đức Tiến

Chủ biên:
Trần Nam Dũng



LỜI NGỎ

Epsilon đã đi được một chặng đường gần 7 năm, và chúng tôi đã tiến tới cột mốc 20!

Vào những ngày khởi đầu của Epsilon, phần lớn chúng tôi đều chỉ là những chàng trai trẻ, ngày nay, phần lớn chúng tôi đều đã trở thành những ông bố. Tóc chúng tôi cũng đã bạc nhiều hơn, sức chúng tôi cũng đã mệt mỏi. Nhưng chúng tôi biết, với đam mê, chúng tôi sẽ không dừng lại, với sự chia sẻ, chúng tôi sẽ được tiếp sức, và chúng tôi vẫn luôn tin rằng đi nhiều người, ta sẽ đi rất xa....

Vâng, chúng tôi vẫn biết, cuộc chiến với Covid-19 vẫn đang còn đó, chúng ta vẫn đang ở trong thời khắc khó khăn nhất. Nhưng, *cho dù cuộc chiến sẽ còn cam go, vất vả, nhưng chúng ta vẫn luôn lạc quan tiến về phía trước. Và dường như những hoàn cảnh khắc nghiệt chưa bao giờ là rào cản cho những sáng tạo, cho những phát minh, cho những tìm kiếm mới. "Học nhi tri – Hành nhi tri – Du nhi tri – Khốn nhi tri". Học để biết, hành để biết, giao du để biết và trải qua gian khó để biết. Không có điều kiện giao du trực tiếp, chúng ta có thể giao du trên mạng. Khó khăn vì covid-19 lại tạo cho những phương thức giao tiếp mới, những động lực sáng tạo mới."*[1].

Per aspera ad astra.[2]

[1]Chúng tôi một lần nữa muốn lập lại thông điệp này từ Epsilon 19
[2]Hết cơn bĩ cực, tới hồi thái lai

MỤC LỤC

CÔNG THỨC HARDY-RAMANUJAN QUA MÔ HÌNH CHẤT RẮN DEBYE

Đàm Thanh Sơn
Chicago, Mỹ

Bạn nào đã xem cuốn phim *The Man Who Knew Infinity* chắc sẽ nhớ một công thức đóng vai trò rất quan trọng trong phim: Công thức về hàm phân hoạch số nguyên, được Hardy và Ramanujan tìm ra năm 1918. Hàm phân hoạch $p(n)$ định nghĩa rất đơn giản. Lấy ví dụ số 4, số này có thể biểu diễn bằng 5 cách khác nhau thành tổng các số nguyên:

$$\begin{aligned}
4 &= 4\\
4 &= 3+1\\
4 &= 2+2\\
4 &= 2+1+1\\
4 &= 1+1+1+1
\end{aligned}$$

Như vậy $p(4) = 5$. Tương tự $p(5) = 7$, $p(10) = 42$. Nhưng khi n tăng cao thì $p(n)$ tăng lên rất nhanh, ví dụ, $p(200) = 3.972.999.029.388$. Trong phim MacMahon tính con số này bằng tay, không rõ bằng phương pháp nào. Hardy và Ramanujan tìm ra công thức cho tiệm cận của $p(n)$ với n lớn

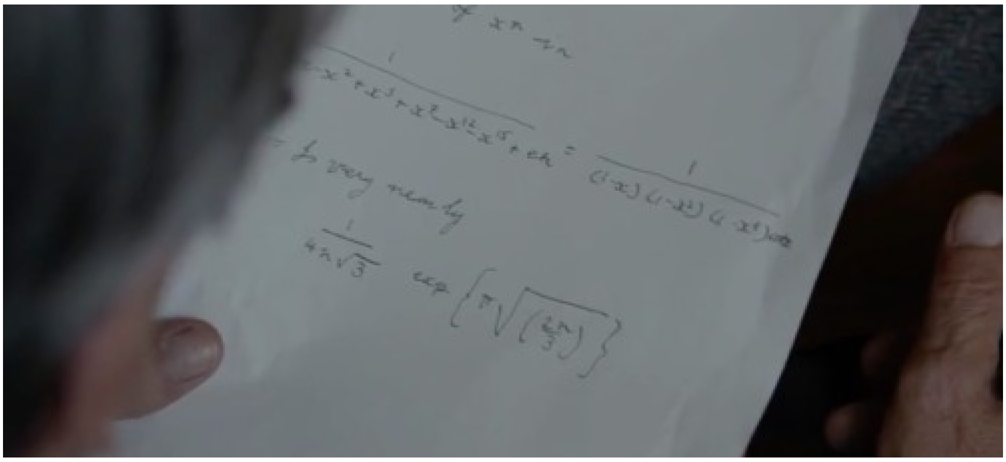
$$p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right).$$

Nếu ta thay n = 200 vào công thức này thì ta sẽ tìm được $p(200) = 4,10 \times 10^{12}$, sai số 3.2% so với kế quả chính xác. Khi n càng lớn thì sai số này càng bé.

Có vẻ phương pháp mà Hardy và Ramanujan dùng để tìm được công thức này khá phức tạp. Trong bài này chúng ta sẽ dùng vật lý để tiếp cận công thức Hardy-Ramanujan. Tìm được toàn bộ tiệm cận của $p(n)$ thì hơi khó, ta sẽ chỉ nhắm vào phần quan trọng nhất, phần exp thôi. Nói cách khác, chúng ta sẽ chứng minh:

$$\ln p(n) \approx \pi\sqrt{\frac{2n}{3}}.$$

Để tìm được công thức này, chúng ta sẽ dùng một cách tiếp cận không chính quy. Ta sẽ dùng mô hình Debye của nhiệt dung của chất rắn. Công trình này của Debye được viết năm 1912, vài năm trước khi Hardy và Ramanujan công bố công thức cho p(n). Có lẽ Hardy và Ramanujan không biết về công trình của Debye.



Hình 1: Một cảnh trong phim

Trước Debye người ta đã biết định luật Petit-Dulon, theo đó nhiện dung của một khối chất rắn là một hằng số không phụ thuộc vào nhiệt độ. Tuy nhiên thí nghiệm cho thấy định luật Petit-Dulon chỉ đúng ở nhiệt độ đủ cao, định luật này bị vi phạm ở nhiệt độ thấp. Einstein là người đầu tiên chỉ ra mối liên hệ giữa sự vi phạm định luật Petit-Dulon với cơ học lượng tử. Trong mô hình của Einstein, nhiệt dung là hằng số nếu nhiệt độ cao nhưng tiến tới 0 khi nhiệt độ giảm tới 0. Tuy nhiên trong mô hình của Einstein nhiệt dung tiến tới 0 nhanh hơn so với đo được trong thực nghiệm. Năm 1912 Debye đưa ra mô hình giải thích được sự biến thiên của nhiệt dung của chất rắn. Cách tiếp cận của Debye hết sức mới mẻ. Debye không nhìn chất rắn như một tập hợp các nguyên tử, ông nhìn chất rắn là một khí tạo ra bởi các hạt phonon - lượng tử của sóng âm thanh. Trong mô hình Debye, các nguyên tử chỉ là cái nền cho các hạt phonon lan truyển.

Để liên hệ với công thức Hardy-Ramanujan ta chỉ cần xem xét một chất rắn 1 chiều. Để dễ tưởng tượng, ta sẽ xét một chiếc dây đàn, căng giữa hai điểm A và B. Ta chọn trục x của hệ toạ độ chạy theo đường thẳng nối hai điểm A và B. Nếu độ dài dây đàn là L thì tại A ta chọn $x = 0$, tại $Bx = L$.

Khi ta gẩy đàn sẽ có sóng lan truyền trên dây đàn. Sóng này coi như là âm thanh trong môi trường một chiều. Để cho đơn giản ta giả sử dây đàn chỉ dao động theo chiều y. Trạng thái của dây đàn tại một thời điểm nào đó được mô tả bởi hàm $y = y(x)$. Giả sử vận tốc lan truyền của sóng là v. Do hai đầu dây đàn bị đóng cứng, sóng trên dây đàn phải là sóng đứng, và biên độ của sóng biến thiên theo toạ độ và thời gian theo công thức

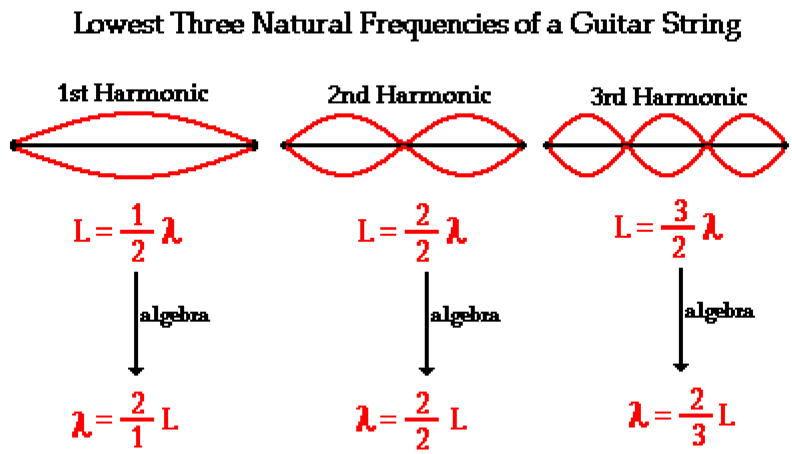
$$y = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \alpha_k) \sin\left(k\frac{\pi x}{L}\right).$$

Trong công thức trên ω_1 là tần số cơ bản của dao động của dây đàn

$$\omega_1 = \frac{\pi v}{L},$$

và các hoạ ba (harmonic) cao hơn có tần số $\omega_k = k\omega_1$ với $k = 2, 3, \ldots$

Bây giờ ta lượng tử hoá cái dây đàn. Mỗi tần số ω_k nay tương đương với một dao động tử điều hoà, và dây đàn là một tổ hợp các dao động tử điểu hoà với tần số ω_1, ω_2, v.v. Các mức năng



lượng của dao động tử điều hoà với tần số ω là $\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$. Như vậy để mô tả trạng thái lượng tử của dây đàn, ta cần một số vô hạn các số lượng tử $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ trong đó n_k là số lượng tử của dao động tử với tần số $\omega_k = k\omega_1$. Như vậy

$$E = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hbar k \omega_1 n_k,$$

trong đó E_0 là năng lượng của trạng thái cơ bản. Để đơn giản từ nay ta sẽ đo năng lượng của dây đàn từ E_0, tức là cho $E_0 = 0$.

Bây giờ có thể nhận ra một điều như sau:

Có $p(n)$ trạng thái lượng tử của dây đàn với năng lượng $n\hbar\omega_1$.

Đây chính là điểm liên hệ giữa vật lý và công thức Hardy-Ramanujan. Nghĩ một lúc các bạn sẽ thấy điều này hầu như là hiển nhiên. Ví dụ ở mức năng lượng $4\hbar\omega_1$ có năm trạng thái:

$$\begin{aligned}
&n_4 = 1,\ n_k = 0, k \neq 4 \\
&n_3 = n_1 = 1,\ n_k = 0, k \neq 1, 3 \\
&n_2 = 2,\ n_k = 0, k \neq 2 \\
&n_2 = 1, n_1 = 2,\ n_k = 0, k \neq 1, 2 \\
&n_1 = 4,\ n_k = 0, k \neq 1
\end{aligned}$$

Khi đã biết số trạng thái có năng lượng $n\hbar\omega_1$ bằng $p(n)$, ta kết luận $\ln p(n)$ chính là entropy khi năng lượng bằng $n\hbar\omega_1$, theo định nghĩa của entropy qua tập thống kê vi chính tắc (micro-canonical ensenble).

Nhưng trong vật lý thống kê, ta có thể dùng tập thống kê chính tắc (canonical ensemble) để tính entropy của dây đàn, thay vì dùng vi chính tắc. Bình thường tính toán dùng tập thống kê chính tắc bao giờ cũng đơn giản hơn là dụng tập vi chính tắc.

Một điểm làm đơn giản bài toán là khi nhiệt độ lớn hơn tần số dao động cơ bản, ta có thể bỏ qua hiệu ứng bề mặt của hai đầu dây đàn. Bây giờ dây đàn có thể coi là một chất khí phonon một chiều. Bài toán như vậy được đưa về dạng một chiều của bài toán mà Debye đã giải quyết năm 1912 khi ông tính được nhiệt dung của chất rắn ở nhiệt độ thấp.

Bạn có thể làm tiếp những tính toán còn lại nếu bạn nào đã học vật lý thống kê; coi như đây là bài tập cho bạn. Bạn có thể tính entropy trực tiếp, hoặc tính nhiệt dung rồi lấy tích phân để tìm entropy. Kết quả là mô hình Debye của chất rắn cho ta phần exponent của công thức Hardy-Ramanujan.

$$\ln p(n) \approx \pi \sqrt{\frac{2n}{3}}.$$

Cách tiếp cận vật lý cho công thức Hardy-Ramanujan trên đây có trong cuốn B. Zwiebach, A First Course in String Theory.

ĐẠT ĐƯỢC SỰ ĐỒNG THUẬN TRÊN CÁC MẠNG NGẪU NHIÊN QUYỀN LỰC CỦA SỐ ÍT

Vũ Hà Văn, Trần Hoàng Bảo Linh

GIỚI THIỆU

Chiều 24/7, GS Vũ Hà Văn có bài báo cáo ở Viện nghiên cứu cao cấp về toán (VIASM) về một kết quả mới của anh và học trò là Trần Hoàng Bảo Linh. Do hội nghị được tổ chức dưới hình thức online nên tôi (Trần Nam Dũng) may mắn được nghe bài báo cáo này. Trong một tiếng đồng hồ, Vũ Hà Văn bằng một giọng nói dí dỏm, hài hước đã trình bày rất dễ hiểu về một vấn đề thú vị: Làm thế nào để đạt được sự đồng thuận. Nhận thấy rằng một chủ đề như vậy sẽ lôi cuốn các bạn trẻ yêu toán, tôi quyết định "*dựng*" lại bài nói chuyện của GS Văn theo trí nhớ và những ghi chép của mình.

Tôi cũng có liên hệ với Trần Hoàng Bảo Linh để xin lại bản nháp của bài báo, chủ yếu để không có những sai sót trong những công thức quan trọng.

Tiêu đề của bài viết này chính là tiêu đề của bài báo viết chung của Vũ Hà Văn và Trần Hoàng Bảo Linh, bài báo có phần tóm tắt như sau.

Một cộng đồng gồm n cá thể chia thành hai phe, Đỏ và Xanh. Các cá nhân được kết nối bởi mạng xã hội, ảnh hưởng đến màu của họ. Mỗi người thay đổi màu mỗi ngày theo đa số hàng xóm của anh ấy/cô ấy. Đỏ (Xanh) thắng nếu mọi người trong cộng đồng trở thành Đỏ (Xanh) tại một thời điểm nào đó.

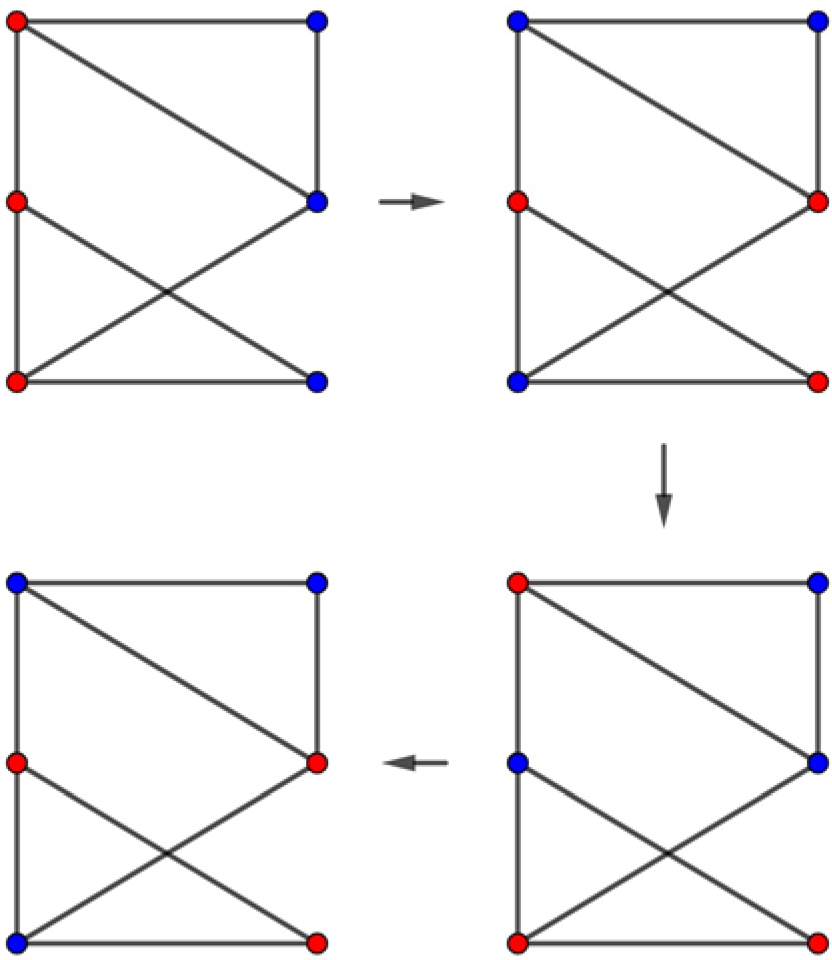
Chúng tôi nghiên cứu quá trình này khi mạng cơ sở là đồ thị Erdos-Renyi ngẫu nhiên $G(n, p)$. Với trạng thái ban đầu cân bằng ($\frac{n}{2}$ người trong mỗi phe), rõ ràng là mỗi màu sẽ chiến thắng với xác suất như nhau.

Nghiên cứu của chúng tôi cho thấy rằng đối với bất kỳ hằng số p và ε nào, tồn tại một hằng số c sao cho nếu một phe có ít nhất $\frac{n}{2} + c$ cá thể ở trạng thái ban đầu, thì sau đó phe đó sẽ thắng với xác suất ít nhất là $1 - \varepsilon$. Điều đáng ngạc nhiên ở đây là c không phụ thuộc vào n, dân số của cộng đồng. Khi $p = \frac{1}{2}$ và $\varepsilon = 0.1$, người ta có thể đặt $c = 5$, nghĩa là ban đầu một phe có $\frac{n}{2} + 5$ thành viên. Nói cách khác, một phe chỉ cần thêm 5 người để giành chiến thắng trong một cuộc bầu cử với tỷ lệ cược áp đảo. Chúng tôi cũng tổng quát hóa kết quả thành $p = p_n = o(1)$ trong một bài báo riêng.

1. Quy tắc đa số (Majority rule)

Xin giải thích quy tắc đa số qua ví dụ sau. Giả sử có n người thuộc về hai phe Xanh và Đỏ mà ta sẽ ký hiệu là B (Blue) và R (Red). Những người quen nhau (có kết nối xã hội) được nối bởi một đoạn thẳng. Mỗi ngày, họ sẽ đổi màu theo quy tắc số đông: Nếu số hàng xóm của một người (những người quen) có số đông màu gì thì họ sẽ đổi theo màu đó. Nếu có sự cân bằng về màu trong số các hàng xóm thì họ vẫn giữ màu như cũ. Sự cập nhật được xảy ra đồng loạt.

Ta lấy ví dụ $n = 6$ và trạng thái ban đầu như sau thì các ngày tiếp theo, các cá thể sẽ đổi màu theo quy tắc đa số như hình minh họa:



Hình 1:

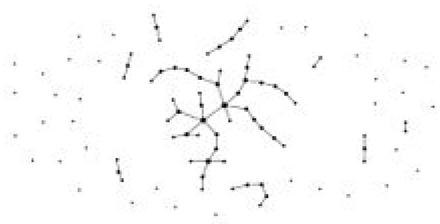
và tiếp theo ta thấy sẽ có sự tuần hoàn.

Ta hoàn toàn có thể viết code để giả lập quá trình này cho một đồ thị bất kỳ và một cách phân chia màu bất kỳ. Trong bài báo của các tác giả có đường dẫn đến một giả lập như vậy. [1]

2. Đồ thị ngẫu nhiên Erdos-Renyi

Trong lý thuyết đồ thị, mô hình Erdős – Rényi là một trong hai mô hình có liên quan chặt chẽ với nhau để tạo ra các đồ thị ngẫu nhiên hoặc sự phát triển của một mạng ngẫu nhiên. Chúng được đặt theo tên của các nhà toán học Hungary Paul Erdős và Alfréd Rényi, những người lần đầu tiên giới thiệu một trong các mô hình vào năm 1959, trong khi Edgar Gilbert đã giới thiệu mô hình kia cùng lúc và độc lập với Erdős và Rényi. Trong mô hình của Erdős và Rényi, tất cả các đồ thị trên một tập đỉnh cố định (n) với một số cạnh cố định đều có khả năng như nhau (p), trong mô hình được đưa ra bởi Gilbert, mỗi cạnh có một xác suất cố định tồn tại hoặc vắng mặt, độc lập với các cạnh khác. Các mô hình này có thể được sử dụng trong phương pháp xác suất để chứng minh sự tồn tại của các đồ thị thỏa mãn các thuộc tính khác nhau hoặc để cung cấp một định nghĩa chặt chẽ về ý nghĩa của một thuộc tính đối với hầu hết các đồ thị.

Có hai biến thể có mối quan hệ chặt chẽ với nhau của mô hình đồ thị ngẫu nhiên Erdős–Rényi.



Hình 2: Một đồ thị được sinh bởi mô hình nhị thức của Erdős và Rényi ($p = 0.01$)

Trong mô hình $G(n, M)$, một đồ thị được chọn ngẫu nhiên với xác suất bằng nhau từ tập hợp tất cả các đồ thị có n và M cạnh. Các đỉnh được coi là có nhãn, có nghĩa là các đồ thị thu được từ nhau bằng cách hoán vị các đỉnh được coi là khác biệt. Ví dụ, trong mô hình $G(3, 2)$, có ba đồ thị hai cạnh trên ba đỉnh có nhãn (một đồ thị cho mỗi lựa chọn của đỉnh giữa trong đường hai cạnh) và mỗi trong ba đồ thị này được bao gồm với xác suất $\frac{1}{3}$.

Trong mô hình $G(n, p)$, một đồ thị được xây dựng bằng cách kết nối các nút có nhãn một cách ngẫu nhiên. Mỗi cạnh được đưa vào biểu đồ với xác suất p, độc lập với mọi cạnh khác. Tương tự, xác suất để tạo ra mỗi đồ thị có n đỉnh và M cạnh là

$$p^M (1-p)^{C_n^2 - M}.$$

Tham số p trong mô hình này có thể được coi là một hàm trọng số, khi p tăng từ 0 đến 1, mô hình ngày càng có nhiều khả năng bao gồm các đồ thị có nhiều cạnh và ngày càng ít có khả năng bao gồm các đồ thị có ít cạnh. Đặc biệt, trường hợp $p = \frac{1}{2}$ tương ứng với trường hợp tất cả $2^{C_n^2}$ đồ thị trên n đỉnh được chọn với xác suất bằng nhau.

[1] https://github.com/thbl2012/majority-dynamics-simulation

3. Quyền lực của số ít

Xét một đồ thị ngẫu nhiên $G(n, p)$. Nếu ban đầu hai phe có quân số bằng nhau ($\frac{n}{2}$ người mỗi phe) thì do tính đối xứng, xác suất để mỗi bên thắng sẽ bằng nhau và bằng $q < \frac{1}{2}$ (do còn khả năng hòa, tức quá trình sẽ dừng lại hoặc tuần hoàn mà không có bên nào áp đảo được bên kia).

Câu hỏi đặt ra là, một phe cần phải "*chiêu mộ*" ít nhất bao nhiêu người của phe kia (ví dụ có c người của phe Xanh chuyển sang phe Đỏ) để đảm bảo giành thắng lợi (với xác suất cao, ví dụ 90%, hay $1 - \varepsilon$).

Một cách tự nhiên ta nghĩ rằng con số này sẽ là một hàm số phụ thuộc vào n, chẳng hạn là $\sqrt{n}$. Thế nhưng, rất ngạc nhiên là kết quả không phải như vậy. Số c hóa ra không phụ thuộc vào n mà chỉ phụ thuộc vào p và ε.

Định lý 1 (Quyền lực của số ít). *Hãy xem xét quá trình (đa số) trên* $G\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

Giả sử rằng rằng phe Đỏ có ít nhất $\frac{n}{2} + 5$ *đỉnh ở trạng thái ban đầu, trong đó* $n \geqslant 1000$. *Khi đó Đỏ trận thắng sau ngày thứ tư với xác suất ít nhất là* 90%.

Ý tưởng chứng minh định lý là quan sát điều gì sẽ xảy ra với phe Đỏ (phe đông hơn) sau ngày thứ nhất, rồi ngày thứ hai và các ngày tiếp sau.

Vào ngày thứ nhất, số lượng các hàng xóm Đỏ và Xanh của mỗi nút v đều là đại lượng ngẫu nhiên nhị thức, có trung bình bằng $\frac{n}{2} + c$ và $\frac{n}{2} - c$ tương ứng. Định lý giới hạn trung tâm khi đó suy ra rằng phần lớn khối lượng của chúng tập trung trong một khoảng độ dài $\Theta(\sqrt{n})$ xung quanh kỳ vọng tương ứng của chúng. Một khoảng con có độ dài không đổi trong khoảng sẽ có khối lượng $\Theta(n^{-\frac{1}{2}})$. Do đó, người ta kỳ vọng rằng xác suất để số Đỏ vượt quá số Xanh (trong vùng lân cận cụ thể đó) là $\frac{1}{2} + \Omega(n^{-\frac{1}{2}})$. Vì vậy, chúng ta kỳ vọng rằng số nút Đỏ sau ngày đầu tiên là $\frac{n}{2} + \Omega(\sqrt{n})$. Các ý tưởng trực quan này sau đó đã được hiện thực hóa bằng các bổ đề khá kỹ thuật (Bổ đề 9 trong [1]).

Tiếp theo, chúng ta phân tích tình hình sau ngày đầu tiên. Rõ ràng, nếu người ta đổi màu sau ngày 1 và kiểm tra đồ thị, phân phối của nó không còn là $G(n, p)$. Do đó, chúng ta không thể áp dụng phương pháp tương tự trong việc chứng minh Bổ đề 9 cho những ngày sau đó. Thay vào đó, chúng ta sử dụng "*đối số thu hẹp*" lập luận rằng có khả năng phe Xanh sẽ đơn điệu thu hẹp lại thành rỗng, bất kể sự lựa chọn của các thành viên, do cấu trúc của G.

Cốt lõi của lập luận thu hẹp của chúng ta là bất đẳng thức Hoeffding, một kết quả cổ điển về tổng các biến ngẫu nhiên độc lập.

Vì là một bài báo cáo mang tính giới thiệu nên GS Văn không đi chi tiết vào các chứng minh kỹ thuật. Ông cũng thông báo rằng kết quả tổng quát cũng đã được Linh Trần và ông hoàn thành và trình bày trong một bài báo khác. Cuối buổi hội thảo, GS Văn đã cùng trao đổi về các biến thể cũng như các bài toán liên quan cùng các mô hình thực tế.

Các bạn đọc quan tâm có thể tìm hiểu thêm trong bài báo [1] dưới đây.

Tài liệu tham khảo

[1] Linh Tran, Van Vu: *Reaching a consensus on random networks: A power of few* https://arxiv.org/abs/1911.10279.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Erdos-Renyi_model

ĐỈNH DỊCH?

Nguyễn Lê Anh

GIỚI THIỆU

Trong hơn một năm qua, thầy Nguyễn Lê Anh luôn đưa ra các dự đoán trước và rất chính xác về tình hình Covid-19 trên thế giới cũng như ở Việt Nam. Vậy làm thế nào để có thể dự đoán chính xác trong điều kiện thiếu thốn thông tin và mọi thứ còn quá mới như vậy? Trong số Epsilon 20 này, chúng tôi trân trọng giới thiệu với độc giả bài viết phổ thông của thầy Lê Anh cách thức hình thành dự đoán, trong đó quan trọng nhất chính là việc hình thành tư duy của dự đoán này.

Phần đông mọi người tin theo lập luận không có đỉnh dịch vì "thả con virus ra lại bùng phát tiếp".

Trước hết nói về đỉnh dịch. Cần phải có một định nghĩa về đỉnh dịch trước khi nói nó ở đâu. Đỉnh dịch không hẳn là thời điểm có nhiều ca nhiễm nhất trong ngày, nó là cực đại của một đường cong dự báo. Vậy khi chưa có đường cong dự báo mà nói tới đỉnh dịch thì chỉ là loại "lang băm". Vậy có hay không một đường cong dự báo?

Vào thời điểm của đợt dịch đầu tiên, gần như mọi người đều đã quên, khi ấy tất cả đều rất hoang mang, và không một ai nghĩ tới việc dịch sẽ kết thúc. Tôi thì không. Tôi không tin các thông tin trên các phương tiện thông tin đại chúng. Tôi lần tìm những bài báo khoa học. Khi ấy còn có rất ít báo cũng như hầu như trên khắp thế giới chưa có ai được coi là chuyên gia. Tôi bắt đầu từ việc phân tích các dữ liệu của đợt dịch Vũ Hán. Tôi cần phải biết là có hay không dịch ở Vũ Hán. Tôi suy nghĩ mãi và nhận thấy, Trung Quốc phong tỏa toàn bộ Vũ Hán. Vậy cái gì chứng minh là Trung Quốc đang phong tỏa Vũ Hán? Khi ấy tôi đang nghiên cứu về nguồn gốc bụi ở Hà Nội. Tôi chợt nhận ra bụi từ các tỉnh quẩn về Hà Nội rất nhiều. Tiếp theo tôi nhận ra một lượng lớn bụi từ đâu tới và chiếm ở tầng cao. Tôi lặng lẽ theo dõi bụi từ Trung Quốc ngay từ tháng 10 năm 2019. Đứng trước câu hỏi, "Có đúng là Trung Quốc đang phong tỏa Vũ Hán hay không?" tôi lặng lẽ đi kiểm tra tình trạng ô nhiễm ở khu vực này. Tôi giật mình khi thấy một vùng rộng tới 1000km quanh Vũ Hán không có bụi mịn trong nhiều ngày. Vậy đúng là các hoạt động sản xuất đang bị đóng băng. Tôi hiểu là dịch Corona là có thật. Tôi đi tìm các bài báo. Hầu như không có bài báo nào vào thời điểm Vũ Hán đang có dịch. Tôi tìm được giải mã gen của con Corona, khoảng 30kb. Tôi định đi phân tích cơ chế hoạt động của nó, nhưng khi ước tính thời gian để làm việc này lên tới 2 năm. Thế là tôi quyết định thôi và chuyển sang làm mô hình kiểu như vật lý. Lúc ấy tôi chưa hề biết gì về sự tồn tại của cái gọi là hệ phương trình dịch tễ.

Tôi suy nghĩ cơ thể sẽ phải tự khỏi sau một số ngày. Sau khi cho Excel tính thô thì thấy dịch tuy có tăng nhanh nhưng sẽ kết thúc rất nhanh. Vậy là có đỉnh dịch, và không nhất thiết là cả cộng đồng bị lây nhiễm hết. Tôi còn nhớ có những trận cháy rừng mà vẫn có rất nhiều cây không bị cháy, vậy dịch bệnh cũng thế. Tôi lập trình mô phỏng dựa theo phân tích quá trình lây nhiễm theo quan hệ công việc, quan hệ gia đình, và quan hệ ngẫu nhiên. Kết quả là tôi nhận ra đồ thị của nó na ná như đồ thị lây nhiễm của SAR. Tôi cho rằng tính toán chỉ cần đúng 10% là tốt lắm, vậy nên tôi đi tìm công thức ốp vào được dạng đồ thị do máy tính ra. Có một điều nhiều bạn không biết, khoa học không phải là nói ra những câu tù mù. Phần quan trọng nhất của một lý thuyết khoa học là làm thể nào đơn giản hóa được sự phức tạp mà vẫn bảo đảm được độ chính xác cần thiết. Nếu các bạn mô tả dịch bệnh thông qua 100 tham số thì cái ấy khó có thể được coi là khoa học. Tôi mô tả sự lây nhiễm chính xác tới mức 10% mà chỉ cần 2 thông số. Vậy tôi tin là mình đang nắm được bản chất của vấn đề. Tôi cần phải tìm 2 tham số dựa trên các dữ liệu thực tế. Chắc chắn không thể có mô hình nào tính ra đươc đồ thị lây nhiễm, bởi họ cần quá nhiều tham số, và các tham số ấy là do họ "phịa" ra. Các dữ liệu tự nó không đúng do thời điểm bị nhiễm bệnh không thật sự rõ ràng. Như thế tôi càng tin là các mô hình không phải là của tôi đều không dùng được. Tôi có dạng đường cong và tôi chỉ vệc ốp nó để lấy thông số. Và tôi đã làm được điều ấy. Có điều tôi phải có đủ dữ liệu.

Vậy tôi cần bao nhiêu dữ liệu? Do dữ liệu rất không rõ ràng nên tôi phải có một vài tuần dữ liệu. Tôi cũng đã có thể tìm cách giải phương trình dịch tễ. Trên thế giới nhiều người đi giải phương trình này. SIR[1] là sự chi li hóa phương trình Volter về cá. Nó là hệ phương trình có các tham số là hằng số. Có thể dùng phương pháp số để giải phương trình này. Để giải phương trình này thì chỉ cần thay đạo hàm bằng sai phân từ hiện tại tới quá khứ. Tuy nhiên như thế thì sai số tích lũy sẽ lớn. Người ta thay đạo hàm bằng sai phân nhưng lấy từ tương lai trở lại. Vậy là phải giải hệ phương trình tuyến tính ma trận thưa. Muốn đạt được độ chính xác cao hơn người ta phải dùng công thức xấp xỉ đạo hàm tốt hơn. Nói như vậy để bạn nào thích thì tự mà làm chứ đừng bấm bấm mấy cái trình có sẵn. Tuy nhiên, việc giải được hệ phương trình SIR chính xác chỉ là một trò vui toán học, thực tế cần cái khác.

Chúng ta muốn biết dịch thực sự sẽ thế nào? Như tôi đã nói tôi cảm thấy họ đường con 2 tham số của tôi là đủ tốt, vậy tôi cho là nó phải là nghiệm của SIR. Tuy nhiên SIR thì không có lời giải giải tích đơn giản, vậy thì làm thế nào? Vấn đề là ở chỗ muốn SIR nhận cái họ hàm của tôi là nghiệm thì cần 2 yếu tố. Yếu tố thứ nhất các hệ số của SIR không phải là hằng số. Cái này thì không sao, miễn nó gần như là hằng số là ổn. Yếu tố thứ hai là lời giải chỉ cần gần với họ nghiệm của tôi là được. Vậy là là ổn. Họ hàm của tôi chỉ cần 2 tham số nhưng lại là nghiệm gần đúng của SIR. Tôi còn cần phải đưa ra lý giải vì sao lại chỉ cần 2 tham số. Tôi suy nghĩ mãi và phát hiện ra một điều, tôi cần phải biết thực trạng của bệnh dịch trong tương lai thực chứ không phải là mô hình giả định. Rõ ràng là dịch phụ thuộc nhiều vào các sự kiện và các phản ứng của chính quyền. Phản ứng của chính quyền thì tôi chưa thể biết. Tôi cũng chưa thể biết người dân Việt Nam này họ nghĩ ra ... những trò ma mãnh gì. Tuy nhiên tôi chợt nhận ra là con người chỉ có thể làm chủ khi anh ta còn chưa bị đe dọa trước cái chết. Đứng trước nỗi sợ hãi của cái chết ai cũng như ai, phải tuân thủ theo các quy luật nhất định nào đấy. Tôi gọi nó là văn hóa. Văn hóa là các nguyên lý định hướng tư duy của một cộng đồng dân cư. Chức năng lớn nhất của văn hóa là duy trì sự tồn tại. Vậy là tôi chạm vào mô hình văn hóa. Ở đây là văn hóa giao tiếp. Văn hóa thì thay đổi rất ít, ngay cả hệ thống lãnh đạo cũng xuất hiện trên nền văn hóa dân tộc, vậy thì tôi không cần phải biết chính quyền sẽ ra các sắc lệnh gì, tôi chỉ cần có một mô hình về sự lây nhiễm. Tôi cho rằng có một khoảng giãn cách xã hội mà theo đó nếu lớn hơn thì nền kinh tế sẽ suy sụp, và nếu nhỏ hơn thì dịch bệnh sẽ bùng phát. Rõ ràng là một khi khoảng giãn cách ở một khu vực nào đó mà nhỏ thì dịch bùng phát. Khi ấy chính quyền phải tìm cách làm cho khoảng

[1] SIR (Susceptible – Infectious – Recovered) là một mô hình toán học thường được dùng trong dịch tễ học.

Định lý (Nguyễn Lê Anh). Hàm phân bố số ca nhiễm mới từng ngày và số bệnh nhân đang nhiễm xấp xỉ dạng "Hàm số mũ mà số mũ là đa thức bậc 2 theo căn của thời gian"

Xét hệ phương trình Kermack & McKendrick

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI$$
$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I$$
$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

S là số những người có thể bị nhiễm bệnh, I là những bệnh nhân đang bị nhiễm, và R là số bệnh nhân hoặc tử vong, hoặc đã hồi phục (không bị nhiễm lại). Trên thực tế α và β không phải là hằng số.

Chọn $I = ce^{-\frac{(\varphi(t)-a)^2}{b}}$

$$-ce^{-\frac{(\varphi(t)-a)^2}{b}} 2\frac{\varphi(t)-a}{b}\varphi'(t) = \alpha SI - \beta I = ce^{-\frac{(\varphi(t)-a)^2}{b}}(\alpha S - \beta)$$

$$2\varphi(t)\varphi'(t) - 2a\varphi'(t) = -b\alpha S + \beta b$$

$$\begin{cases} 2\varphi(t)\varphi'(t) = \beta b \\ 2a\varphi'(t) = b\alpha S \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\varphi(t)^2)' = \beta b & \Rightarrow \varphi(t) = \sqrt{\beta bt + \gamma} \\ S = \dfrac{\beta a}{\alpha\varphi(t)} & \Rightarrow S = \dfrac{a\beta}{\alpha}\dfrac{1}{\sqrt{\beta bt + \gamma}} \end{cases}$$

Như vậy $I = ce^{-\frac{(\sqrt{\beta bt+\gamma}-a)^2}{b}}$

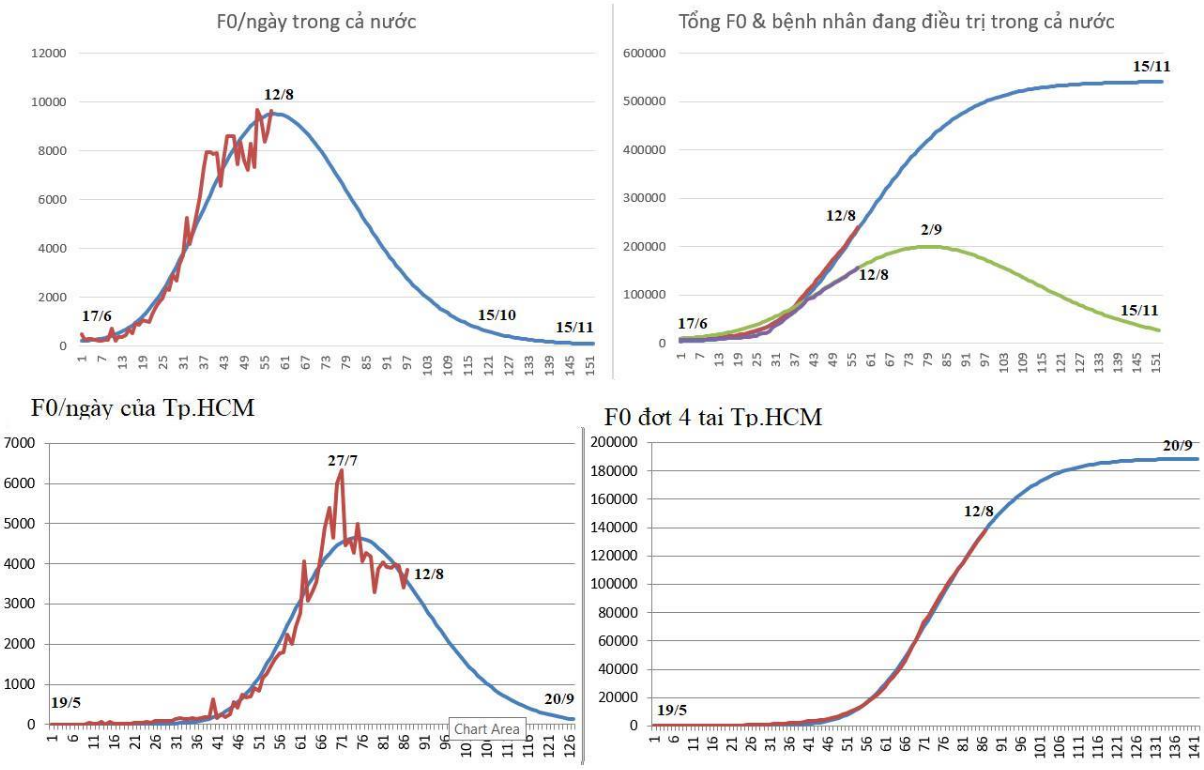
$$S = S_0 + \int_0^t \frac{-a\beta}{\sqrt{\beta bt + \gamma}} ce^{-\frac{(\sqrt{\beta bt+\gamma}-a)^2}{b}} dt = S_0 - \frac{2ac}{b}\int_0^{\sqrt{\beta bt+\gamma}} e^{-\frac{(\tau-a)^2}{b}} d\tau$$

$$\alpha = \frac{a\beta}{\sqrt{\beta bt + \gamma}\left(S_0 - \frac{2ac}{b}\int_0^{\sqrt{\beta bt+\gamma}} e^{-\frac{(\tau-a)^2}{b}} d\tau\right)}$$

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI = \frac{-ac\beta}{\sqrt{\beta bt + \gamma}} e^{-\frac{(\sqrt{\beta bt+\gamma}-a)^2}{b}} \approx -2ac\beta\left(a - \sqrt{a^2-1}\right)e^{-\frac{(\sqrt{\beta bt+\gamma}-\sqrt{a^2-1})^2}{b}}$$

$$\frac{dS}{dt} \approx -c\beta e^{-\frac{(\sqrt{\beta bt+\gamma}-\sqrt{a^2-1})^2}{b}}$$

giãn cách lớn thêm ra. Tôi lập mô hình game với sự tấn công làm giảm độ giãn cách và thời gian phản ứng để làm cho nó quay trở lại độ giãn cách ban đầu. Với độ giãn cách này thì xác suất lây nhiễm không bù lại được với xác suất virus bị chết do kháng thể của người sinh ra. Dịch vì thế phải hết. Vậy là tôi đi đến mô hình game, giống như bóng đá và nhận thấy dạng hàm của tôi mô



Hình 1: Dự báo tình hình dịch vào ngày 13 tháng 8 năm 2021.

tả đủ tốt trận đấu.

Như thế các bạn có trình độ lùn đừng nghĩ là mọi thứ được tự do. Bất luận cái gì có trong thực tế cũng chịu sự ràng buộc nhất định. Và cũng chính vì vậy mà đường cong phản ánh được sự diễn biến thực của dịch.

VÌ SAO KHÔNG?

Nguyễn Lê Anh

GIỚI THIỆU

Liên tục trong 7 số Epsilon gần đây, chúng tôi luôn có chuyên mục phám phá lịch sử thông qua tư duy lô-gích và phương pháp suy luận khoa học. Chúng tôi muốn giới thiệu với độc giả chúng ta có thể làm được những gì với tư duy toán học, thông qua những nghiên cứu miệt mài của nhà toán học Nguyễn Lê Anh. Trong số này, chúng tôi tiếp tục đăng những ghi ghép của ông, những nổ lực không ngừng nghỉ cùng với những khám phá mới. Đây cũng là lời kêu gọi cộng đồng trong việc cùng chung tay xây dựng một tài liệu lịch sử cho dân tộc chúng ta - dân tộc Việt Nam.

Tôi muốn biết về sắt bởi tôi muốn biết nguyên nhân vì sao Bà Trưng lại thua Mã Viện, mặc dù cũng tiêu diệt hơn một nửa tức hơn 10 nghìn quân của Mã Viện.

Marx đã nói rất rõ là sức sản xuất có quan hệ tương ứng với quan hệ sản xuất. Và sức sản xuất thì được xác định thông qua công nghệ chế tác công cụ lao động. Thời kỳ đồ đá con người chế tác ra các loại vũ khi để đánh nhau với thú dữ. Khi ấy họ tồn tại dưới dạng bầy đàn. Đồ đồng giúp cho sức lao động tăng đến mức mỗi người có thể tạo ra được lượng đồ ăn nhiều hơn nhu cầu bản thân sử dụng. Đồ đồng là sự bắt đầu của chế độ chiếm hữu nô lệ. Nô lệ thì cũng như là con vật, không có đủ đồ ăn hay ốm yếu thì bị chủ giết bỏ. Các cuộc chiến tranh săn bắt nô lệ xảy ra liên miên. Không có hậu cần, các cuộc chiến không thể đi quá xa, nên lượng nô lệ bắt được giảm dần. Đồ sắt là sự bắt đầu của các loại vũ khí dài nhẹ mà sắc, chiếm ưu thế trong các cuộc chiến với vũ khí bằng đồng. Hơn thế sắt được dùng để làm trục xe kéo, dùng để đóng móng cho ngựa, tức là tạo ra sự chủ động hậu cần. Nhờ có đồ sắt mà các cuộc viễn chinh xuất hiện. Phạm vi các cuộc săn bắt nô lệ lớn dần, lượng nô lệ bắt về càng ngày càng nhiều. Xuất hiện các thành phố đông dân. Do đông dân mà phải cần tới luật pháp và từ đó sinh ra khái niệm quốc gia. Quốc gia để lại dấu ấn là các nền văn minh. Vậy để nhận ra được tầm cỡ của cuộc chiến 20 nghìn quân mỗi bên vào đầu Công Nguyên chúng ta phải đi tìm hiểu về kỷ nguyên đồ sắt.

Ở Việt Nam, thời đại luyện kim đồng thau được cho là tiếp theo của văn hóa Phùng Nguyên (niên đại 4000-3500 năm cách ngày nay). Đối với đồ sắt, các phát hiện khảo cổ mới chỉ cho thấy có dấu hiệu khả nghi về sự tồn tại của nghề luyện sắt từ thế kỷ 2-3 trước Công Nguyên. Đó là những vết tích nghi là lò luyện sắt, hòn quặng sắt, xỉ sắt hình giọt nước tại di chỉ Đồng Mỏm thuộc xã Diễn Thọ huyện Diễn Châu tỉnh Nghệ An. Các hiện vật gỉ sắt không rõ hình dạng cũng được phát hiện tại di chỉ Đường Mây, Cổ Loa, Hà Nội. Tuy nhiên những dấu hiệu khả nghi này chưa đủ để khẳng định đã có công nghệ luyện kim sắt ở Bắc Bộ.

Khẳng định về sự tồn tại của công nghệ luyện kim sắt là rất khó. Trước hết là bản thân sắt rất dễ bị oxy hóa. Ở khu vực nhiệt đới nóng ẩm mưa nhiều lại cạnh biển như Bắc Bộ, rất khó có thể tìm được một dụng cụ nào bằng sắt vào khoảng trước đầu công nguyên.

Nhiều bạn chưa hiểu về cách ước lượng tuổi của các cổ vật. Một cái trống đồng thì chả thể nói tới việc tuổi của nó. Người ta tính tuổi của trống đồng thông qua các hiện vật có thể tính được tuổi đi kèm. Vì thế mà chả thể nói được tuổi của một cái trống vớt được ở lòng sông. Và cũng chả thể nói được tuổi của cái trống khi mà nó đã được chùi cọ sạch sẽ. Đối với đồ sắt có niên đại trước Công Nguyên nhiều khi chỉ còn lại một lớp đất có một ít gỉ oxit sắt. Để xác định được tuổi của nó người ta phải tìm hiểu các loại vi sinh vật dính ở đấy. Như thế các hiện vật khảo cổ bằng sắt chẳng những rất hiếm mà xác định chính xác tuổi lại còn khó hơn. Vậy chúng ta không nên hạn chế việc tìm hiểu thời đại đồ sắt trong một khu vực dân cư mà nên mở rộng ra với một không gian lớn hơn để nhìn ra sự di cư, nhìn ra sự trao đổi công nghệ. Để tìm hiểu về công nghệ chế tác sắt thời đại Bà Trưng thì nên bắt đầu nghiên cứu khảo cổ thời đại đồ sắt từ các quốc gia lân cận.

Gỗ bắt đầu bốc cháy ở 300 độ C, và khi cháy nó tạo ra hơi cháy, tại nơi đó nhiệt độ lên đến 600 độ C. Các loại gạch gốm chỉ được nung ở tầm 600 độ C. Nó màu đỏ và mềm. Để có được gốm cứng như sứ thì phải nung được tới nhiệt độ khoảng 900 độ C. Nhiệt độ than củi có thể đạt đến 1000 độ C, vì thế đồ gốm có thể xuất hiện, một cách tình cờ, ở tất cả các cộng đồng người tiền sử. Nhìn vào màu sắc và độ cứng của gốm là chúng ta biết được nhiệt độ nung, biết được mức độ công nghệ của họ, và từ đây là mức độ văn minh. Muốn có được sứ thì đất sét phải được nung ở nhiệt độ cao hơn. Nếu để trong lò nung sứ một cục đồng hẳn là nó sẽ chảy ra, từ đây chúng ta có thể đồng nhất việc xuất hiện công nghệ luyện kim đồng với ghề gốm sứ. Tức tạo ra được nhiệt độ 1084.62 độ C. Nhiệt độ này phải được tạo ra một thời gian khá lâu, vậy lò nung phải lớn và được cung cấp đủ oxy. Vậy là phải có hoặc hệ thống khí phải thổi mạnh vào lò lớn, hoặc phải phải đốt bằng than đá. Thổi vào lò lớn có vẻ không khả thi nếu đúc các sản phẩm có độ tinh sảo cao, vậy nếu bề mặt của đồ đồng mà có các hoa văn trang trí thì hẳn là phải đổ dung dịch đồng vào khuôn và như thế lò phải được đốt bằng than đá.

Nhiệt độ cháy ngay bề mặt cục than đá là 2500 độ C, nhưng nhiệt độ giảm nhanh theo số mũ, vậy nếu lò đốt mà nhỏ không tạo ra đủ năng lượng làm chảy sắt.

Công nghệ nấu chảy đồng ngẫu nhiên phát hiện ra, nhưng nấu chảy sắt là không hề đơn giản. Cần phải tạo được nhiệt độ cao hơn 1538 độ C. Điều này không hề đơn giản, và là bí quyết công nghệ. Vậy đường đi của công nghệ luyện kim sắt thế nào, đến được Đại Việt vào khi nào?

Công nghệ luyện kim sắt được cho là đã xuất hiện ở Trung Á và vùng đồng bằng Ấn Độ vào khoảng thời gian 3200 năm về trước. Công nghệ này đã lan truyền ra tới khu vực Tứ Xuyên, và có thể coi Xuân Thu Chiến Quốc là bắt đầu cuộc chiến tranh chinh phục của nền văn minh công nghệ đồ Sắt. Xuân Thu Chiến Quốc 771TCN đến 476TCN, và các cuộc đánh chiếm tiếp theo cho đến hết thời Tần, vào khoảng năm 210 TCN.

Như vậy có thể là do chăn thả gia súc mà đã tạo ra sự giao tiếp Đông-Tây, công nghệ luyện kim sắt tới được vùng Tứ Xuyên vào khoảng 770 năm trước Công Nguyên.

Phương pháp Thermoluminescence được Aitken phác thảo (1985, 1998) để áp dụng cho một hạt cát thạch anh. Theo nguyên lý, nếu tinh thể thạch anh ở lâu dưới ánh sáng mặt trời thì các điện tử bị vướng trong các lỗ hổng của nó sẽ nhận đủ năng lượng và thoát ra ngoài. Khi tinh thể bị che lấp dưới đất sâu, các điện tử tự do sẽ bị vướng vào các lỗ hổng thạch anh. Tinh thể sẽ có dư điện tích âm. Khi được làm nóng điện tử dư này sẽ được giải phóng ra và phát sáng. Đo số lượng hạt ánh sáng thoát ra này người ta sẽ phát hiện được thời gian hạt thạch anh bị vùi lấp sâu dưới đất. Phương pháp này rẻ tiền nhưng độ chính xác không cao.

Tại các di chỉ khảo cổ ở Taungthaman thuộc Myanmar người ta tìm thấy lưỡi câu cá trong mộ chôn cùng người. Phương pháp xác định tuổi bằng Thermoluminescence cho kết quả mẫu vật 186a1 có tuổi khoảng 680BC-240BC. Vậy là luyện kim sắt đã di chuyển tới Myanmar vào khoảng từ 250 năm trước Công Nguyên.

Tại Campuchia các di chỉ khảo cổ dọc theo sông Cửu Long cho thấy chúng thuộc văn hóa Óc Eo.

Óc Eo là di chỉ ở núi Ba Thê huyện Thoại Sơn, tỉnh An Giang. Người ta đã tìm thấy nhiều loại tiền xu trong đó có tiền xu La Mã. Có tiền xu có hình Antoninus Pius và một bản sao của tiền xu Marcus Aurelius với một mặt để trống. Những đồng tiền La Mã cho thấy Óc Eo là một thương cảng lớn của vương quốc Phù Nam từ thế kỷ I đến thế kỷ VII. Gò Ô Chùa cách xa bờ biển hiện nay đến 150km. Qua nghiên cứu một số mẫu than tro bằng phương pháp cacbon C-14, kết quả cho thấy làng cổ gò Ô Chùa đã tồn tại cách ngày nay khoảng 3000 đến 2000 năm. Người ta đã tìm thấy ở gò Ô Chùa nhiều dụng cụ gốm làm muối giống như ở châu Âu vào thời kỳ 3000-2000 năm trước đây. Khoảng 20000 năm trước mực nước biển thấp hơn ngày nay 120 m, nhưng ở thời điểm 5000 năm trước, mực nước biển lại cao hơn đến 5m so với ngày nay. Sau đó, nước biển dần thấp xuống tới mực nước như ngày nay. Như thế gò Ô Chùa xưa là ven biển. Các nhà khảo cổ Việt - Đức đã Họ đã thực hiện khoan lấy mẫu trầm tích và khẳng định các lớp đất xung quanh địa điểm này là tầng trầm tích biển có niên đại bằng với trung tâm nấu muối Gò Ô Chùa.

Nhà địa lý Hy Lạp Claudius Ptolemaeus đã sang phương Đông hồi đầu Công Nguyên bằng đường thủy, đã tả một nơi mà ông gọi là Kattigara. R.A. Stein thì cho rằng lời văn miêu tả phù hợp với khung cảnh Bình Trị Thiên, tuy nhiên đa số trong giới học giả cho Kattigara là Óc Eo.

Như vậy để có thể hiểu ra được thời đại Bà Trưng chúng ta cần phải tìm hiểu cổ sử của không chỉ các quốc gia từ Trung Quốc cho tới Ấn Độ, các nước như Myanmar, Lào, Thái Lan, Campuchia, mà còn cả giao lưu giữa Đông và Tây. Vậy là chúng ta cần phải biết và nên dạy cho học sinh phổ thông vốn kiến thức về lịch sử và khảo cổ các nền văn minh từ các quốc gia trong khư vực và cả thế giới.

Rõ ràng lịch sử của dân tộc chúng ta liên quan tới mọi ngóc ngách của thế giới, liên quan tới mọi sự kiện lớn xảy ra trên địa cầu này, trong hệ mặt trời này. Chủ nhân của một lịch sử hoành tráng như vậy thì dân tộc chúng ta đâu có thể là dân tộc hèn kém.

Vì sao không nghiên cứu đến tận cùng để hiểu?

Tuyển chọn các bài toán số học thi tuyển sinh 10 Chuyên 2021

Lê Phúc Lữ (ĐH Khoa học tự nhiên TPHCM)
Nguyễn Nam (THPT Chuyên Nguyễn Du, Đăk Lăk)
Đào Trọng Toàn (THPT Chuyên Bến Tre)

Tóm tắt

Bên dưới, nhóm tác giả có tổng hợp gần 100 bài toán Số học trong đề thi tuyển sinh THPT Chuyên của các tỉnh, khối chuyên trên cả nước. Có một số nơi mà trong đề thi không có ra dạng Toán này, nhưng có một số nơi khác thì ra khá nhiều. Nhìn một cách tổng quát, các đề thi đều tập trung vào phần phương trình nghiệm nguyên, là một khía cạnh dễ khai thác và cũng khá quen thuộc đối với học sinh THCS. Xin cám ơn các thầy cô, các bạn học sinh của group facebook "Hướng tới Olympic Toán VN" đã hỗ trợ nhóm tác giả hoàn thành tài liệu này.

1. Các bài toán có lời giải

Bài toán 1 (Thái Bình). *Giả sử n là số tự nhiên thỏa mãn $n(n+1)+7$ không chia hết cho 7. Chứng minh rằng $4n^3-5n-1$ không là số chính phương.*

Lời giải. Theo đề bài thì $n, n+1$ không chia hết cho 7. Ta có

$$4n^3-5n-1=(n+1)(4n^2-4n-1)$$

và dễ thấy nếu $\gcd(n+1, 4n^2-4n-1)=d$ thì có ngay $d|7$. Nếu $d=1$, ta phải có cả hai số trên là số chính phương, nhưng điều này không thể do

$$(2n-2)^2<4n^2-4n-1<(2n-1)^2, \forall n \geq 1.$$

Do đó $d=7$, kéo theo $7|n+1$, cũng vô lý. □

Bài toán 2 (Vũng Tàu). *Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $(xy-1)^2=x^2+y^2$.*

Lời giải. Ta viết lại

$$x^2y^2-2xy+1=x^2+y^2 \text{ hay } (x+y+xy)(x+y-xy)=1.$$

Từ đó ta suy ra hai thừa số cùng bằng 1 hoặc cùng bằng -1. Đến đây thì giải hệ là được các giá trị $(x,y)=(0;\pm1),(\pm1;0)$. □

Bài toán 3 (Tây Ninh). *Tìm nghiệm nguyên của*

$$x^2 - 2y(x-y) = 2(x+1).$$

Lời giải. Ta viết lại phương trình thành

$$2y^2 - 2xy + x^2 - 2x - 2 = 0.$$

Coi đây là phương trình theo biến y thì ta có $\Delta' = x^2 - 2(x^2 - 2x - 2) \geq 0$ hay $-1 \leq x \leq 5$.

Từ đó xét các trường hợp để thu được $(x, y) = (0; \pm 1), (4; 1), (4; 3)$. □

Bài toán 4 (Hà Nam). *Giải phương trình nghiệm nguyên*

$$x^3 + y^2 - x + 3z = 2021.$$

Lời giải. Chú ý rằng $x^3 - x$ luôn chia hết cho 3, còn 2021 chia 3 dư 2 nên y^2 chia 3 dư 2. Đây là điều vô lý. □

Bài toán 5 (Cần Thơ). *Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn*

$$x^2 + 5y^2 + 4xy + 2x + 4y - 3 = 0.$$

Lời giải. Phương trình đã cho viết lại thành

$$(x + 2y + 1)^2 + (y-2)(y+2) = 0.$$

Do đó $(y-2)(y+2) \leq 0$ nên $-2 \leq y \leq 2$. Đến đây thử trực tiếp được $y = 0, y = \pm 2$. □

Bài toán 6 (Bình Phước).

1. *Tìm nghiệm nguyên của $(2x+y)(x-y) + 3(2x+y) - 5(x-y) = 22$.*
2. *Cho hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$. Chứng minh rằng $2a + 2b + 1$ là số chính phương.*

Lời giải.

1) Phương trình đã cho viết lại thành

$$(2x + y - 5)(x - y + 3) = 7.$$

Xét các trường hợp có thể xảy ra, ta tìm được $(x, y) = (-2; 8), (-2; 2)$.

2) Ta có

$$(a-b)(2a + 2b + 1) = b^2.$$

Đặt $d = \gcd(a - b, 2a + 2b + 1)$ thì $d^2 | b^2$ nên $d | b$. Suy ra $d | a$ nên kéo theo $d | 2(a+b)$, từ đó có $d | 1$ nên $d = 1$.

Do đó, $a - b$ và $2a + 2b + 1$ là số chính phương. □

Bài toán 7 (Hà Nội).

1. *Cho x là số thực khác 0 sao cho $x + \frac{2}{x}$ và x^3 đều hữu tỷ. Chứng minh rằng x hữu tỷ.*
2. *Tìm tất cả các cặp số (x, y) nguyên sao cho $x^2 + 5xy + 6y^2 + x + 2y - 2 = 0$.*
3. *Chứng minh rằng với mọi n nguyên thì $n^2 + n + 16$ không chia hết cho 49.*

Lời giải.

1) Ta có

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} + 4$$

nên $x^2 + \frac{4}{x^2}$ hữu tỷ, kéo theo $x^2 + 2 + \frac{4}{x^2} \in \mathbb{Q}$. Mặt khác, vì $x^3 \in \mathbb{Q}$ nên $\frac{8}{x^3} \in \mathbb{Q}$ và

$$x^3 - \frac{8}{x^3} = \left(x - \frac{2}{x}\right)\left(x^2 + 2 + \frac{4}{x^2}\right) \in \mathbb{Q}.$$

Từ đó có ngay $x - \frac{2}{x} \in \mathbb{Q}$ nên x hữu tỷ.

2) Ta viết lại phương trình thành

$$(x + 2y)(x + 3y + 1) = 2.$$

Từ đó xét các trường hợp để có $(x, y) = (1; 0), (-2; 0), (6; -2), (3; -2)$.

3) Ta có

$$n^2 + n + 16 = (n + 4)(n - 3) + 28$$

nên để có $49 | n^2 + n + 16$, ta cần có $n + 4$ hoặc $n - 3$ chia hết cho 7. Mà hai số này cách nhau 7 đơn vị nên chúng đều phải chia hết cho 7, khi đó dễ dàng có 28 chia hết cho 49, vô lý. $\square$

Bài toán 8 (Vĩnh Phúc).

1. *Cho các số nguyên x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$. Chứng minh rằng $24 | xyz$.*
2. *Tìm tất cả các bộ ba số nguyên (a, b, c) sao cho $(a + b + c)^2 - 2a + 2b$ là các số chính phương.*

Lời giải.
1) Từ giả thiết thì $x^2 + y^2 + z^2$ chẵn nên trong các số x, y, z, phải có ít nhất một số chẵn, giả sử là x. Khi đó, $4 | x^2$ và $4 | 2xyz$ nên $4 | y^2 + z^2$, từ đó dễ thấy phải có y, z đều chẵn. Ngoài ra, nếu x, y, z đều không chia hết cho 3 thì x^2, y^2, z^2 chia 3 dư 1 nên $3 | x^2 + y^2 + z^2$. Vì thế $3 | 2xyz$, mâu thuẫn. Do đó $3 | xyz$, kết hợp với trên thì có $24 | xyz$.

2) Đặt $M = (a + b + c)^2 - 2a + 2b$ thì ta có

$$(a + b + c)^2 + 2(a + b + c) + 1 > M \text{ và } (a + b + c)^2 - 2(a + b + c) + 1 < M.$$

Do đó $M = (a + b + c)^2$ và thay vào có ngay $a = b$. Vậy các bộ số nguyên cần tìm là $a = b$ và c tùy ý. $\square$

Bài toán 9 (Lào Cai).

1. *Tìm tất cả các bộ số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 - 2x + 2y^2 = 2(xy + 1)$.*
2. *Tìm số nguyên tố p lớn nhất sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y thỏa mãn*
$$x^3 + y^3 - p = 6xy - 8.$$

Lời giải.

1) Coi phương trình đã cho là bậc hai theo biến x, tính delta theo y và chặn được $1 \le y \le 3$. Giải ra được $(x, y) = (0; 1), (4; 1), (4; 3)$.

2) Ta viết lại
$$(x + y + 2)(x^2 + y^2 + 4 - xy - 2x - 2y) = p.$$
Vì $x + y + 2 > 1$ nên cần có $x^2 + y^2 + 4 - xy - 2x - 2y = 1$ và $x + y + 2 = p$. Thế $y = p - 2 - x$ vào, ta được $x^2 + (p - 2 - x)^2 + 4 - x(p - 2 - x) - 2x - 2(p - 2 - x) = 1$ hay
$$3x^2 - 3x(p - 2) + p^2 - 6p + 11 = 0.$$
Tiếp tục tính delta, ta thu được $4 \le p \le 8$ nên $p \le 7$. Thử trực tiếp với $p = 7$ có $(x, y) = (2, 3)$ thỏa mãn. Do đó, giá trị lớn nhất cần tìm là 7. □

Bài toán 10 (Phú Thọ).

1. *Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(x^2y - xy + y)(x + y) = 3x - 1$.*
2. *Tìm các số nguyên tố p, q thỏa mãn đồng thời:*
   i. *$p^2q + p$ chia hết cho $p^2 + q$.*
   ii. *$pq^2 + q$ chia hết cho $q^2 - p$.*

Lời giải.

1) Viết lại đề bài thành
$$y(x^2 - x + 1)(x + y) = 3x - 1$$
nên $x^2 - x + 1 | 3x - 1$. Suy ra
$$x^2 - x + 1 | (3x - 1)(3x - 2) = 9x^2 - 9x + 2.$$
Do $9x^2 - 9x + 2 = 9(x^2 - x + 1) - 7$ nên đưa về $x^2 - x + 1 | 7$. Suy ra $x^2 - x + 1 \in \{1, 7\}$. Giải ra có ngay $x = 0, x = 1$.

2) Nếu $p = q$ thì ta cần có $p^3 + p$ chia hết cho $p^2 + p$ hay $p^2 + 1$ chia hết cho $p + 1$, kéo theo 2 chia hết cho $p + 1$, vô lý. Nếu p, q phân biệt, ta có $\gcd(p, p^2 + q) = \gcd(q, q^2 - p) = 1$ nên phải có
$$p^2 + q | pq + 1 \text{ và } q^2 - p | pq + 1.$$
Từ $p^2 + q | pq + 1$, ta có $p^2 + q \le pq + 1$ nên $q \ge p + 1$. Từ $q^2 - p | pq + 1$, ta có $q^2 - p \le pq + 1$ hay $q(q - p) \le p + 1 \le q$ hay $q - p \le 1$. Do đó ta phải có $q = p + 1$ nên $(p, q) = (2; 3)$. Thử lại các giá trị này, ta thấy thỏa mãn. □

Bài toán 11 (Vĩnh Long).

1. *Chứng minh rằng tổng các bình phương của 6 số nguyên liên tiếp thì không thể là số chính phương.*
2. *Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2y + 2xy + y = 32x$.*

Lời giải.

1) Trong 6 số nguyên liên tiếp thì có 3 số chẵn và 3 số lẻ, mà bình phương của số chẵn thì chia hết cho 4, trong khi bình phương của số lẻ thì chia 4 dư 1. Vì thế nên tổng các số đã cho chia 4 dư 3, không thể là số chính phương.

2) Ta viết lại đề bài thành
$$y(x+1)^2 = 32x.$$
Suy ra $(x+1)^2|32x$, mà $\gcd(x, x+1) = 1$ nên ta có ngay $(x+1)^2|32$, từ đó $(x+1)^2 = 4$ hoặc 16 và giải ra được $x = 1, x = 3$. □

Bài toán 12 (Đăk Lăk).

1. *Tìm tất cả các số tự nhiên n, k để $n^4 + 4^{2k+1}$ là số nguyên tố.*
2. *Tìm tất cả các số nguyên dương x, y sao cho $x^4 - x^2 + 2x^2y - 2xy + 2y^2 - 2y - 36 = 0$.*

Lời giải.

1) Ta có hằng đẳng thức
$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2)$$
nên từ đề bài, nếu đặt
$$p = n^4 + 4^{2k+1} = n^4 + 4 \cdot (2^k)^4$$
thì ta phải có
$$n^2 - 2 \cdot 2^k n + 2 \cdot 4^k = 1$$
hay $(n - 2^k)^2 + 4^k = 1$. Từ đây dễ dàng tìm được $k = 0$ và $n = 1$. Thử lại được $p = 5$ thỏa mãn.

2) Ta viết lại đề bài thành
$$(x^2 + y - 1)^2 + (x - y)^2 = 37 = 1^2 + 6^2$$
nên xét trực tiếp các trường hợp, ta có ngay $(x, y) = (2; 3)$. □

Bài toán 13 (Tiền Giang). *Cho m, n là các số nguyên dương thỏa mãn $m^2 + n^2 + m$ chia hết cho mn. Chứng minh rằng m là số chính phương.*

Lời giải. Theo giả thiết thì $m^2 + n^2 + m$ chia hết cho m nên $m|n^2$. Đặt $n^2 = km$ với $k \in \mathbb{Z}$. Khi đó

$$m^2 + n^2 + m = m(m + k + 1)$$

nên ta đưa về $n|m + k + 1$.

Từ đây dễ thấy $\gcd(k, m) = 1$ nên cả m, k phải đều là các số chính phương. □

Bài toán 14 (Kiên Giang).

1. *Cho m, p, r là các số nguyên tố thỏa mãn $mp + 1 = r$. Chứng minh rằng $m^2 + r$ hoặc $p^2 + r$ là số chính phương.*

2. *Tìm tất cả các số nguyên tố q sao cho tồn tại n nguyên dương để $n^2 + 22q$ là lũy thừa với số mũ nguyên dương của 11.*

Lời giải.

1) Theo đề thì $r > p$ và $r > m$. Nếu cả m, p đều lẻ thì kéo theo $mp + 1$ chẵn nên r chẵn, vô lý. Vì thế phải có m hoặc p chẵn. Giả sử m chẵn thì $m = 2$. Khi đó $2p + 1 = r$ và có

$$p^2 + r = (p + 1)^2$$

là số chính phương.

2) Ta có $n^2 + 22q > 11$ nên cần có $n^2 + 22q = 11^k$ với $k \geq 2$. Từ đó dễ có $11|n$. Thay vào suy ra $11^2|22q$ nên $q = 11$. Chọn $n = 33$ thì có $33^2 + 22 \cdot 11 = 11^3$ thỏa mãn. Vì thế $q = 11$. □

Bài toán 15 (Đà Nẵng). *Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(x^2 - y^2)^2 = 1 + 20y$.*

Lời giải. Dễ thấy (x, y) là nghiệm thì $(-x, y)$ cũng là nghiệm nên ta đưa về xét $x \geq 0$. Ngoài ra, nếu $y < 0$ thì $y \leq -1$ nên $1 + 20y < 0$, không thỏa. Do đó, ta chỉ xét $y \geq 0$.

- Nếu $(x - y)^2 = 1$ thì ta có ngay $(x + y)^2 = 1 + 20y$ nên giải hệ này là xong, thu được $(x, y) = (\pm 1; 0), (\pm 5; 4), (\pm 5, 6)$.

- Nếu $(x - y)^2 > 1$ thì $(x - y)^2 \geq 4$ và $1 + 20y \geq 4(x + y)^2 \geq 4y^2$ và thu được $0 \leq y \leq 5$. Kiểm tra trực tiếp thấy không thỏa.

□

Bài toán 16 (Bình Thuận).

1. *Gọi A là số tạo thành khi viết liên tục các số từ 1 đến 2021 thành một dãy liên tiếp, tức là*

$$A = 12345 \ldots 20202021.$$

Hỏi A có bao nhiêu chữ số và chữ số thứ 2021 của A tính từ trái là mấy?

2. *Cho p, x, y là các số tự nhiên thỏa mãn $px^2 + x = (p+1)y^2 + y$. Chứng minh rằng $x - y$ là số chính phương.*

3. *Cho a, b là các số nguyên dương mà $a^2 - ab + \frac{3}{2}b^2$ chia hết cho 25. Chứng minh rằng a, b cùng chia hết cho 25.*

Lời giải.

1) Đếm số lượng chữ số của số có $1, 2, 3, 4$ chữ số không vượt quá 2021, ta được A có tất cả

$$9 + 180 + 2700 + 4088 = 6977$$

chữ số. Tiếp theo, vì $9 + 180 < 2021 < 9 + 180 + 2700$ nên chữ số cần tìm sẽ thuộc một số có 3 chữ số nào đó $\overline{abc}$. Ta có $\frac{1}{3}(2021 - 9 - 180) = 610\frac{2}{3}$ nên số cần tìm là chữ số thứ hai của số có 3 chữ số thứ 611 (tức là số 710). Vì thế, chữ số cần tìm là 1.

2) Ta viết lại đề thành
$$(x-y)(p(x+y)+1) = y^2.$$
Gọi $d = \gcd(x-y, p(x+y)+1)$ thì $d^2|y^2$ nên $d|y$. Do đó $d|x$ nên $d|p(x+y)$ và kéo theo $d|1$ nên $d = 1$. Do đó, hai số $x - y$ và $p(x+y)+1$ là nguyên tố cùng nhau và vì tích của chúng chính phương nên bản thân mỗi số cũng phải là số chính phương.

3) Theo đề bài thì $2a^2 - 2ab + 3b^2$ chia hết cho 25. Ta có

$$2a^2 - 2ab + 3b^2 - 15b^2 = 2(a-3b)(a+2b)$$

nên suy ra $a - 3b$ hoặc $a + 2b$ chia hết cho 5. Tuy nhiên hai số này có hiệu là $5b$ chia hết cho 5 nên chúng cùng chia hết cho 5. Vì thế $25|15b^2$ nên $5|b$, từ đó có ngay $5|a$. □

Bài toán 17 (Cao Bằng). *Tìm tất cả các cặp số nguyên (a, b) sao cho*

$$a^4 - 2a^3 + 10a^2 - 18a - 16 = 4b^2 + 20b.$$

Lời giải. Ta viết lại đề bài thành

$$(2a^2 - 2a + 9)^2 = (4b+10)^2 + 45$$

hay
$$(2a^2 - 2a - 4b - 1)(2a^2 - 2a + 4b + 19) = 45.$$
Dễ thấy tổng của hai biểu thức trong hai dấu ngoặc là dương, mà tích của chúng cũng dương nên cả hai đều phải dương. Đến đây ta xét các trường hợp là được. □

Bài toán 18 (Nghệ An).

1. *Tìm tất cả các số tự nhiên x, y sao cho $x^3 = 1993 \cdot 3^y + 2021$.*

2. *Tìm tất cả số nguyên dương n sao cho $\frac{n-23}{n+89}$ là bình phương của một số hữu tỷ dương.*

Lời giải.

1) Nếu $y = 0$ thì $x^3 = 4041$, không thỏa mãn. Nếu $y = 1$ thì có ngay $x = 20$. Xét $y \geq 2$, ta viết lại phương trình thành

$$x^3 - 8000 = (x - 20)(x^2 + 20x + 400) = 1993(3^y - 3).$$

Ta thấy vế phải chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9. Tuy nhiên, từ $3|x^3 - 8000$, ta có x chia 3 dư 2 nên $x - 20$ chia hết cho 9, kéo theo vế phải cũng chia hết cho 9, vô lý.

2) Theo đề thì phải có $(n - 3)(n + 89)$ là số chính phương. Ta đưa về

$$(n + 33)^2 - k^2 = 3136$$

với $k \in \mathbb{Z}^+$. Từ đó xét các trường hợp để có $n \in \{32, 37, 73, 86, 167, 361, 752\}$. □

Bài toán 19 (Sóc Trăng). *Tìm tất cả số nguyên dương n để $n^5 + n^4 + 1$ là số nguyên tố.*

Lời giải. Ta có phân tích

$$n^5 + n^4 + 1 = (n^2 + n + 1)(n^3 - n + 1)$$

nên một trong hai thừa số này phải là 1.

- Nếu $n^2 + n + 1 = 1$ thì có $n = 0$ hoặc $n = -1$, thử lại không thỏa.
- Nếu $n^3 - n + 1 = 1$ thì có $n = 0, n = \pm 1$ nên thử lại có $n = 1$ thỏa mãn.

□

Bài toán 20 (Nam Định).

1. *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn $x^2y^2(y - x) = 5xy^2 - 27$.*
2. *Cho $p_1, p_2, \ldots, p_{12}$ là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_{12}^2$ chia hết cho 12.*

Lời giải.

1) Ta viết lại đề bài thành

$$xy^2(x^2 + 5 - xy) = 27.$$

Do y^2 là ước chính phương của 27 nên $y = 1$ hoặc $y = 3$, từ đó thay vào được $(x, y) = (1; 3)$.

2) Vì các số nguyên tố đã cho đều lớn hơn 3 nên không chia hết cho 3, suy ra bình phương của chúng chia 3 dư 1 và tổng bình phương của chúng sẽ đồng dư với 12 modulo 3, tức là chia hết cho 3. □

Bài toán 21 (Bình Dương). *Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $a = b - c = \frac{b}{c}$. Chứng minh rằng $a + b + c$ là lập phương của một số nguyên.*

Lời giải. Theo giả thiết thì $b = a + c$ nên $a + b + c = 2b$. Ta có $b - c = \frac{b}{c}$ nên $c(b - c) = b$ hay $c^2 - bc - b = 0$ có nghiệm nguyên. Ta có $\Delta = b^2 + 4b$ là số chính phương.

Đặt $b^2 + 4b = k^2$ với $k \in \mathbb{N}$ thì $(b + 2)^2 - k^2 = 4$ nên

$$(b + 2 + k)(b + 2 - k) = 4.$$

Chú ý rằng chênh lệch giữa hai thừa số là chẵn nên chúng chỉ có thể cùng là 2 hoặc cùng là -2, khi đó $b + 2 + k = b + 2 - k$ nên $k = 0$ và $b = 0$ hoặc $b = -4$.

Trong cả hai trường hợp, ta đều có $2b$ là lập phương đúng. □

Bài toán 22 (Lâm Đồng).

1. *Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $a + b + 20c = c^3$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 6.*
2. *Cho $B = 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2022}$. Chứng minh rằng $B + 2$ không là số chính phương.*

Lời giải.

1) Ta có $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$ chia hết cho 6 với mọi $x \in \mathbb{Z}$. Suy ra $(a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c)$ chia hết cho 6. Chú ý rằng $a + b + c = c^3 - c - 18c$ chia hết cho 6 nên ta có

$$6 | a^3 + b^3 + c^3.$$

2) Ta có $\frac{B}{2} = 1 + 2 + \cdots + 2^{2021}$ nên $B - \frac{B}{2} = 2^{2022} - 1$ hay $B = 2^{2023} - 2$. Từ đó có $B + 2 = 2^{2023}$ là một lũy thừa mũ lẻ của 2,không thể là số chính phương. □

Bài toán 23 (Bến Tre). *Giải phương trình nghiệm nguyên*

$$x^2y - xy + 2x - 1 = y^2 - xy^2 - 2y.$$

Lời giải. Ta viết lại

$$xy(x + y) - y(x + y) + 2(x + y) = 1$$

hay $(x + y)(xy - y + 2) = 1$. Đến đây xét các trường hợp hai thừa số cùng bằng 1 hoặc cùng bằng -1, giải ra được $(x, y) = (0; 1), (2; -1), (-2; 1), (2; -3)$. □

Bài toán 24 (Khánh Hòa). *Với mọi số nguyên dương n, chứng minh rằng*

$$A = \sqrt{n^2 + n^2(n + 1)^2 + (n + 1)^2}$$

là số nguyên nhưng không phải là số chính phương.

Lời giải. Ta có

$$n^2 + n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 = (n^2+n+1)^2.$$

Do đó $A = n^2 + n + 1$, tuy nhiên dễ thấy với $n > 0$ thì

$$n^2 < A < (n+1)^2$$

nên A không thể là số chính phương. □

Bài toán 25 (Quảng Ngãi).

1. *Cho a là số nguyên lẻ không chia hết cho 3. Chứng minh rằng $a^2 - 2021^2$ chia hết cho 24.*
2. *Cho các số nguyên tố p, q sao cho $p + q^2$ là số chính phương. Chứng minh rằng $p = 2q + 1$ và $p^2 + q^{2021}$ không phải là số chính phương.*

Lời giải.

1) Vì a không chia hết cho 3 nên a^2 chia 3 dư 1, mà 2021^2 cũng thế nên $3 | a^2 - 2021^2$. Lại có a lẻ nên viết $a = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a^2 - 1 = 4k(k+1)$ chia hết cho 8. Từ đó dễ dàng có $a^2 - 2021^2$ chia hết cho 8 và biểu thức đã cho chia hết cho 24.

2) Đặt $p + q^2 = a^2$ với $a \in \mathbb{Z}^+$. Khi đó $p = (a-q)(a+q)$ nên phải có $a - q = 1$ và $a + q = p$. Từ đó có ngay $p = 2q + 1$. Tiếp theo, giả sử phản chứng rằng $p^2 + q^{2021} = b^2$ với $b \in \mathbb{Z}^+$.

Khi đó $q^{2021} = (b-p)(b+p)$ nên tồn tại $m, n \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $m + n = 2021$ và

$$b - p = q^m, \; b + p = q^n.$$

Suy ra

$$2p = q^n - q^m \text{ hay } q^n - q^m = 4q + 2.$$

Từ đó có $q^m(q^{n-m} - 1) = 2(2q+1)$. Dễ thấy $\gcd(q^m, 2q+1) = 1$ nên $q^m | 2$, kéo theo $q = 2, m = 1$ nên $2^{n-1} - 1 = 5$, kéo theo $2^{n-1} = 6$, vô lý. Vì thế, không thể có $p^2 + q^{2021}$ là số chính phương được. □

Bài toán 26 (Bình Định).

1. *Tìm tất cả các số nguyên dương x sao cho $x^2 - x + 13$ là số chính phương.*
2. *Tìm tất cả n nguyên dương để $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.*

Lời giải.
1) Ta có $(x-1)^2 < x^2 - x + 13 < (x+4)^2$ với mọi $x \in \mathbb{Z}^+$ nên có

$$x^2 - x + 13 \in \{x^2, (x+1)^2, (x+2)^2, (x+3)^2\}.$$

Giải ra được $x = 13, x = 4$ là các nghiệm nguyên thỏa mãn.

2) Dễ thấy $n = 1$ không thỏa, còn $n = 2$ thì biểu thức đã cho là 25, là số chính phương. Xét $n > 2$ và đặt $A = n^4 + n^3 + 1$ thì ta có $4A$ cũng chính phương. Chú ý rằng

$$(2n^2 + n - 1)^2 < 4A < (2n^2 + n)^2.$$

Do đó, không tồn tại số $n > 2$ thỏa mãn. Vì thế $n = 2$ là số duy nhất cần tìm. □

Bài toán 27 (Hà Tĩnh). *Tìm các số nguyên m, n sao cho*

$$m(m+1)(m+2) = n^2.$$

Lời giải. Với $m < -2$ thì $m(m+1)(m+2) < 0$, không thỏa. Dễ thấy $m \in \{-2, -1, 0\}$ thì đều có $n^2 = 0$ tức là $n = 0$. Xét $m > 0$, ta xét các trường hợp:

- Nếu m lẻ thì các số $m, m+1, m+2$ đôi một nguyên tố cùng nhau nên chúng đều phải là các số chính phương, dễ thấy không thỏa.
- Nếu m chẵn thì $\gcd(m, m+2) = 2$ nên $m+1$ lẻ và trong hai số $m, m+2$ có một số chia hết cho 4 còn số kia chia 4 dư 2, kéo theo số mũ của 2 trong tích $m(m+1)(m+2)$ là lẻ, không thỏa.

Do đó, phương trình chỉ có ba nghiệm như trên. □

Bài toán 28 (Đồng Tháp). *Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn*

$$16x^4 + y^4 = 4x(x+y) - 1.$$

Lời giải. Đặt $2x = a$ thì a chẵn. Ta viết lại

$$a^4 + y^4 = a(a+2y) - 1$$

hay

$$a^4 + y^4 + y^2 + 1 = (a+y)^2.$$

Nếu $a = 0$ thì $y^4 + y^2 + 1 = y^2$, không tồn tại y. Nếu $y = 0$ thì $a^4 + 1 = a^2$, cũng không tồn tại a. Do đó, ta xét $ay \neq 0$. Tuy nhiên, nếu $ay < 0$ thì

$$(a+y)^2 < a^2 + y^2 \leq a^4 + y^2$$

nên cũng không thỏa. Vì thế xét $ay > 0$. Để ý rằng nếu (a, y) thỏa mãn thì $(-a, -y)$ cũng thế nên xét $a > 0, y > 0$. Ta có đánh giá quen thuộc

$$a^4 + y^4 \geq \frac{(a+y)^4}{8}$$

nên từ đẳng thức trên, ta có

$$(a+y)^2 > \frac{(a+y)^4}{8},$$

kéo theo $(a+y)^2 < 8$ nên $(a+y)^2 = 4$. Mà $a, y \geq 1$ nên $a + y \geq 2$, từ đó phải có $a = y = 1$, không thỏa mãn vì a chẵn. Do đó, không tồn tại x, y thỏa mãn đề bài. □

Bài toán 29 (Quốc học Huế).

1. *Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^2 - 2^y \cdot x - 4^{21} \cdot 9 = 0$.*

2. *Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) sao cho*

$$x^2y - xy^2 - 2x^2 - 3y^2 + 10xy - 16x + 21y = 100.$$

Lời giải.

1) Coi đây là phương trình biến x, ta có

$$\Delta = (2^y)^2 + 4 \cdot 4^{21} \cdot 9 = 4^y + 9 \cdot 4^{22}$$

phải là số chính phương.

- Nếu $y = 22$ thì kiểm tra được Δ không chính phương.
- Nếu $y < 22$ thì $\Delta = 4^y(1 + 9 \cdot 4^{22-y})$ là số chính phương, kéo theo $1 + 9 \cdot 4^{22-y}$ chính phương, vô lý vì $9 \cdot 4^{22-y}$ đã là số chính phương.
- Nếu $y > 22$ và viết $\Delta = 4^{22}(4^{y-22} + 9)$. Từ đó đưa về xét $4^{y-22} + 9$ là số chính phương, tức là có hai số chính phương cách nhau 9 đơn vị. Khi đó, chỉ có thể $4^{y-22} + 9 = 25$ hay $4^{y-22} = 16$, kéo theo $y = 24$. Từ đó có $x = 9 \cdot 2^{21}$.

2) Ta viết lại

$$x^2(y - 2) - x(y^2 - 10y + 16) - 3y^2 + 21y - 30 = 70$$

hay

$$(y - 2)(x + 3)(x - y + 5) = 70.$$

Ta thấy $(x + 3) - (y - 2) = x - y + 5$ nên ta phân tích số 70 thành tích của ba số mà số này bằng tổng hai số kia. Dễ thấy chỉ có thể là $2 \cdot 5 \cdot 7$ (loại $-2, -5, -7$ do tích âm).

Từ đó thử các trường hợp và giải ra được $(x, y) = (4; 4), (4; 7)$. $\square$

Bài toán 30 (Thanh Hóa).

1. *Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 4y + 6 = 0$.*
2. *Tìm tất cả các bộ ba (x, y, z) nguyên dương sao cho*

$$\sqrt{xy} + \sqrt{xz} - \sqrt{yz} = y \text{ và } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

3. *Cho số tự nhiên $n \geq 2$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p - 1$ chia hết cho n và $n^3 - 1$ chia hết cho p. Chứng minh rằng $n + p$ là số chính phương.*
4. *Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $\frac{p^2-p}{2} - 1$ là lập phương đúng.*

Lời giải.

1) Ta viết lại
$$x^2 - 2x(y+1) + 2y^2 - 4y + 6 = 0.$$
Coi đây là phương trình bậc hai theo biến x, ta có
$$\Delta' = (y+1)^2 - (2y^2 - 4y + 6) = -y^2 + 6y - 5 \geq 0$$
nên $1 \leq y \leq 5$. Đến đây thử các trường hợp là được.

2) Ta có $\sqrt{x}(\sqrt{y} + \sqrt{z}) = \sqrt{y}(\sqrt{z} + \sqrt{y})$ nên $x = y$. Từ đó có $\frac{2}{x} + \frac{1}{z} = 1$ nên
$$z = \frac{x}{x-2} = 1 + \frac{2}{x-2}.$$
Suy ra $x - 2|2$ nên $x = 4$ hoặc $x = 3$. Do đó $(x, y, z) = (3; 3; 3)$ hoặc $(4; 4; 2)$.

3) Dễ thấy $\gcd(p, n) = 1$. Theo đề bài thì $n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)$ chia hết cho p.

Nếu $p|n - 1$ thì $p \leq n - 1$ (vì $n - 1 > 0$), mà $n|p - 1$ nên $p - 1 \geq n$, mâu thuẫn. Do đó ta phải có $n^2 + n + 1$ chia hết cho p. Ngoài ra vì $n|p - 1$ nên $p - 1 \geq n$.

Từ đó suy ra $n^2 + n + 1 - p$ chia hết cho p. Mặt khác $n^2 + n + 1 - p$ cũng chia hết cho n nên ta có $n^2 + n + 1 - p$ chia hết cho np. Vì $n^2 + n + 1$ chia hết cho p nên $n^2 + n + 1 - p \geq 0$, tuy nhiên nếu $n^2 + n + 1 - p > 0$ thì ta có $n^2 + n + 1 - p \geq np \geq n(n+1)$, vô lý. Vì thế $n^2 + n + 1 = p$ nên $n + p = (n+1)^2$ là số chính phương.

4) Nếu $p = 2$ thì $\frac{p^2-p}{2} - 1 = 0$, thỏa mãn. Xét $p > 2$ thì p lẻ và
$$x^3 = \frac{p^2 - p}{2} - 1 > 0,$$
trong đó $x \in \mathbb{Z}$. Ta có $p^2 - p - 2 = 2x^3$ nên
$$p(p-1) = 2(x+1)(x^2 - x + 1).$$
Vì $\gcd(p, p-1) = 1$ nên nếu p chia hết cho $x + 1$ thì $p = x + 1$, thay vào thấy không thỏa. Nếu $p - 1$ chia hết cho $x + 1$ thì đặt $p - 1 = k(x+1)$ với $k \in \mathbb{Z}^+$. Khi đó
$$k(x+1)p = 2(x+1)(x^2 - x + 1)$$
nên $kp = 2(x^2 - x + 1)$. Vì p lẻ nên k phải chẵn, đặt $k = 2m$ với $m \in \mathbb{Z}^+$, thay vào có
$$mp = x^2 - x + 1.$$
Đặt $x + 1 = y \geq 2$ thì ta có
$$x^2 - x + 1 = (y-1)^2 - (y-1) + 1 = y^2 - 3y + 1$$
nên ta đưa về $y|p - 1$ và $p|y^2 - 3y + 1$. Suy ra $y^2 - 3y + 1 - p$ chia hết cho y, p và dễ thấy $\gcd(y, p) = 1$ nên $yp|y^2 - 3y + 1 - p$. Rõ ràng $y^2 - 3y + 1$ phải dương và $y^2 - 3y + 1 \geq p$.

- Nếu $y^2 - 3y + 1 - p > 0$ thì ta có $y^2 - 3y + 1 - p \geq yp \geq y(y+1)$, vô lý.
- Nếu $p = y^2 - 3y + 1 = x^2 - x + 1$, khi đó $p - 1 = 2(x+1)$ nên $x^2 - x + 1 = 2(x+1) + 1$, không có nghiệm nguyên.

Vì thế nên $p = 2$ là giá trị duy nhất thỏa mãn. □

Bài toán 31 (PTNK TPHCM).

1. *Tìm số tự nhiên n sao cho $(2n+1)^3 + 1$ chia hết cho 2^{2021}.*
2. *Cho n, p là các số tự nhiên, p nguyên tố thỏa mãn $\frac{2n+2}{p}$ và $\frac{4n^2+2n+1}{p}$ đều là các số nguyên. Chứng minh rằng hai số trên không thể đồng thời là số chính phương.*

Lời giải.

1) Ta có $(2n+1)^3 + 1 = (2n+2)(4n^2+2n+1)$, mà $4n^2 + 2n + 1$ lẻ nên cần có $2^{2021} | 2n + 2$ hay $2^{2020} | n + 1$. Từ đó tìm được $n = 2^{2020}k - 1$ với $k \in \mathbb{Z}^+$.

2) Từ $4n^2 + 2n + 1$ chia hết cho p, ta có p lẻ nên $p | n + 1$. Từ đó có $p | 4n^2 + 2n + 1 = (4n-2)(n+1) + 3$ nên $p = 3$. Tiếp theo, giả sử phản chứng rằng cả

$$\frac{2n+2}{3} \text{ và } \frac{4n^2+2n+1}{3}$$

đều chính phương. Suy ra tồn tại m nguyên dương để

$$\frac{2n+2}{3} \cdot \frac{4n^2+2n+1}{3} = m^2$$

hay

$$(2n+1)^3 = 9m^2 - 1 = (3m-1)(3m+1).$$

Vì m chẵn nên $3m-1, 3m+1$ là hai số lẻ liên tiếp, kéo theo $\gcd(3m-1, 3m+1) = 1$. Do đó cả hai số $3m-1, 3m+1$ đều là các lập phương đúng. Tuy nhiên, không thể có hai lập phương đúng cách nhau 2 đơn vị nên điều trên là vô lý. Bài toán được giải quyết. □

Bài toán 32 (Chuyên KHTN Hà Nội).

1. *Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho n chia cho $7, 9, 11, 13$ thì có số dư lần lượt là $3, 4, 5, 6$.*
2. *Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn $3^x + 29 = 2^y$.*

Lời giải.

1) Theo giả thiết thì $2n+1$ chia $7, 9, 11, 13$ cũng sẽ dư $7, 9, 11, 13$ nên $2n+1$ chia hết cho tích $7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 = 9009$. Vì thế $2n + 1 \geq 9009$ nên $n \geq 4504$ và thử thấy $n = 4504$ thỏa mãn.

2) Nếu $x = 1$ thì có ngay $y = 5$. Xét $x \geq 2$, ta có $9|2^y - 29$ nên $2^y - 2$ chia hết cho 9. Đặt $y = 6k + r$ với $k \in \mathbb{N}$ và $r \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ thì $2^y - 2 = (2^6)^k \cdot 2^r - 2 \equiv 2^r - 2$ theo mod 9.

Thử trực tiếp các số r từ 0 đến 5, chỉ có $r = 1$ thỏa mãn. Do đó $y = 6k+1$ nên $2^y - 2 = 2(64^k - 1)$ chia hết cho 7 nên $3^x + 27$ chia hết cho 7. Vì thế nên $7|3^x - 1$. Lại đặt $x = 6h + r$ với $h \in \mathbb{N}$ và $r \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ tương tự trên, ta suy ra $r = 0$ và $x = 6h$.

Do đó $3^x - 1 = (3^6)^h - 1$ chia hết cho $3^3 - 1 = 26$ nên $13|3^x - 1$. Vì thế nên

$$3^x + 29 \equiv 4 \pmod{13}.$$

Suy ra $2^y \equiv 4 \pmod{13}$, tuy nhiên, vì $y = 6k + 1$ nên

$$4 \equiv 2 \cdot 64^k \equiv 2 \cdot (-1)^k \pmod{13}.$$

Dễ thấy điều trên là không thể xảy ra với mọi số tự nhiên k. Vậy nên $(x, y) = (1; 5)$. $\square$

Bài toán 33 (ĐHSP Hà Nội).

1. *Cho a, b là các số hữu tỷ. Chứng minh rằng nếu $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ hữu tỷ thì $a = b = 0$.*
2. *Tìm tất cả số nguyên dương N sao cho N có thể biểu diễn duy nhất ở dạng $\frac{x^2+y}{xy+1}$ với x, y nguyên dương.*
3. *Cho a, b, c là các số nguyên dương là lũy thừa của 2. Biết rằng phương trình*
$$ax^2 - bx + c = 0$$
có hai nghiệm nguyên. Chứng minh rằng hai nghiệm đó phải bằng nhau.

Lời giải.

1) Đặt $n = a\sqrt{2} + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Ta có $n - a\sqrt{2} = b\sqrt{3}$ nên

$$3b = (n - a\sqrt{2})^2 = n^2 - 2an\sqrt{2} + 2a \in \mathbb{Q}$$

kéo theo $a\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, điều này chỉ xảy ra khi $a = 0$. Khi đó $b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ nên cũng có $b = 0$.

2) Với $N = 1$ thì ta có thể chọn $(x, y) = (1; 1), (1; 2)$ đều có $N = \frac{x^2+y}{xy+1}$, không thỏa.

Xét $N > 1$, để ý có $(x, y) = (N^2, N)$ thỏa mãn nên luôn có ít nhất một cách biểu diễn. Ta sẽ chứng minh cách này là duy nhất. Ta có $xy + 1|x^2 + y$ nên

$$xy + 1|y(x^2 + y) - x(xy + 1) \text{ hay } xy + 1|y^2 - x.$$

Ngoài ra, vì $N \geq 2$ nên ta có $x^2 + y \geq 2xy + 2$ nên phải có $x > y$. Khi đó $|y^2 - x| < xy + 1$ nên để có $xy + 1|y^2 - x$ thì phải có $y^2 - x = 0$ hay $x = y^2$. Thay vào $N = \frac{y^4+y}{y^3+1} = y$ nên bộ số (x, y) xác định duy nhất.

3) Đặt $a = 2^m, b = 2^n, c = 2^k$ với $m, n, k \in \mathbb{N}$. Gọi hai nghiệm của phương trình đã cho là x_1, x_2 thì theo định lý Viete, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{b}{a} = 2^{n-m} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = 2^{k-m} \end{cases}.$$

Từ đây ta có x_1, x_2 là các số nguyên dương và cũng đều là lũy thừa của 2. Đặt $x_1 = 2^r, x_2 = 2^s$ với $r, s \in \mathbb{N}$. Khi đó $2^r + 2^s = 2^{n-m}$. Nếu $r \neq s$, ta giả sử $r > s$ thì có

$$2^{n-m} = 2^s(2^{r-s} + 1)$$

nên 2^{n-m} có ước lẻ lớn hơn 1, vô lý. Vì thế nên phải có $r = s$ và kéo theo $x_1 = x_2$. □

Bài toán 34 (Bắc Ninh). *Tìm tất cả các số nguyên dương n có tính chất: với mỗi số nguyên dương a lẻ mà $a^2 \leq n$ thì n chia hết cho a.*

Lời giải. Chú ý rằng nếu có số lẻ $a \geq 5$ thì các số $a, a-2, a-4$ là đôi một nguyên tố cùng nhau. Vì thế nếu n chia hết cho các số như thế thì nó sẽ chia hết cho tích $a(a-2)(a-4)$. Ta xét các trường hợp sau

1. Nếu $n \leq 8$ thì số lẻ a mà $a^2 \leq$ chỉ có 1 nên tất cả các số nguyên dương n này thỏa mãn.
2. Nếu $9 \leq n \leq 24$ thì ta phải xét thêm số $a = 3$ nên chỉ có các số chia hết cho 3 mới thỏa mãn, tức là $n = 9, 12, 15, 18, 21, 24$.
3. Nếu $25 \leq n \leq 48$ thì ta lại xét thêm số $a = 5$ nên chỉ có các số chia hết cho 15 mới thỏa mãn, tức là $n = 30, n = 45$.
4. Nếu $49 \leq n \leq 80$ thì lại có thêm số $a = 7$ nên cần có n chia hết cho 105, rõ ràng không tồn tại số như thế.

Tiếp theo, xét $n \geq 81$ và đặt $n = k^2 + r$ với $k \geq 9$ nguyên dương và r nguyên thỏa mãn $0 \leq r \leq 2k$. Khi đó, nếu k lẻ thì các số $k, k-2, k-4$ đều là ước của n (theo nhận xét đầu tiên); còn nếu k chẵn thì $k-1, k-3, k-5$ là ước của n. Khi đó, ta luôn có

$$(k-1)(k-3)(k-5) \leq n \leq k^2 + 2k.$$

Dễ thấy đánh giá này sẽ sai khi $k \geq 9$. Vậy nên tất cả các số n cần tìm là

$$n \in \{1, 2, \dots, 8, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 30, 45\}.$$

□

2. Các bài toán tự giải

Bài toán 35 (Quảng Trị).

1. *Tìm tất cả các số nguyên n để $n - 1989$ và $n - 2022$ là các số chính phương.*
2. *Biết rằng $x^2 - ax + b + 2 = 0$ có hai nghiệm đều nguyên. Chứng minh rằng $2a^2 + b^2$ là hợp số.*

Bài toán 36 (Ninh Bình). *Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) sao cho*

$$7(x + 2y)^3(y - x) = 8y - 5x + 1.$$

Bài toán 37 (Hậu Giang). *Tồn tại hay không số nguyên tố p sao cho $p^2 + 2021$ cũng là số nguyên tố?*

Bài toán 38 (Đồng Nai).

1. *Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $5x^2 + 3y^2 + 4xy - 2x + 8y + 8 \leq 0$.*
2. *Hỏi trong 2021 số nguyên dương đầu tiên, có bao nhiêu số không chia hết cho 7 và không chia hết cho 11?*

Bài toán 39 (Ninh Thuận). *Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn*

$$y^2 + 3y = x^4 + x^2 + 18.$$

Bài toán 40 (Lai Châu). *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì*

$$2004 | 2005^n + 60^n - 1897^n - 168^n.$$

Bài toán 41 (Gia Lai). *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$x^2 - 2y(x - y) = 2(x - 1).$$

Bài toán 42 (Kon Tum). *Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn*

$$x^3y - x^3 - 1 = 2x^2 + 2x + y.$$

Bài toán 43 (Bắc Ninh). *Tìm tất cả các số nguyên (x, y) thỏa mãn*

$$x(1 + x + x^2) = 4y(y - 1).$$

Bài toán 44 (Hải Dương). *Tìm tất cả các bộ số nguyên (x, y, z) thỏa mãn*

$$x^2 + 4y^2 + z^2 + 2(xz + 2x + 2z) = 396 \text{ và } x^2 + y^2 = 3z.$$

Bài toán 45 (Hải Phòng). *Tìm các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn*

$$y^4 + 2y^2 - 3 = x^2 - 3x.$$

Bài toán 46 (Kon Tum). *Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số dạng $\overline{357abc}$ sao cho số này chia hết cho $3, 5$ và 7.*

Bài toán 47 (Hòa Bình). *Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên $n \le 2021$ mà $n^3 + 2021$ chia hết cho 6?*

Bài toán 48 (Yên Bái).

1. *Chứng minh rằng nếu n là số nguyên thì $n^2 + 2022$ không là lũy thừa của 3.*
2. *Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p^2 + 3p + 2021$ cũng là số nguyên tố.*

Bài toán 49 (Quảng Bình). *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho*

$$n^2 - 2n - 7 \text{ và } n^2 - 2n + 12$$

đều là lập phương của hai số nguyên dương nào đó.

Bài toán 50 (Thái Nguyên).

1. *Tìm n nguyên dương để $A = 4n^3 + 2n^2 - 7n - 5$ là một số chính phương.*
2. *Tìm các số nguyên tố p, q sao cho phương trình $x^2 - px + q = 0$ có các nghiệm đều nguyên.*

Bài toán 51 (Hải Dương). *Tìm tất cả các số tự nhiên $\overline{abcd}$ thỏa mãn đồng thời: $\overline{abcd}$ chia hết cho 3 và $\overline{abc} - \overline{bda} = 650$.*

Bài toán 52 (Hưng Yên). *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$2x^2 + 5y^2 + 4x = 4y + 4xy + 19.$$

Bài toán 53 (ĐH Khoa học Huế). *Tìm tất cả các số tự nhiên $a > 1, b > 1$ để $ab - 1$ chia hết cho $(a-1)(b-1)$.*

Bài toán 54 (Cà Mau). *Tất cả học sinh lớp 9 của trường THCS Tân Tiến tham gia xếp hàng đồng diễn thể dục, mỗi hàng không quá 25 học sinh. Nếu xếp mỗi hàng 16 học sinh thì còn thừa một em, nếu bớt đi một hàng thì có thể chia đều tất cả học sinh vào các hàng còn lại sao cho học sinh mỗi hàng bằng nhau. Tính số lượng học sinh.*

Bài toán 55 (Quảng Ninh). *Cho hình lăng trụ đứng, đáy là tam giác vuông, chiều cao bằng 6. Số đo ba cạnh của đáy là nguyên. Số đo diện tích toàn phần của lăng trụ bằng số đo thể tích của nó. Tính số đo ba cạnh của đáy lăng trụ.*

Bài toán 56 (Đăk Nông). *Tìm tất cả các số nguyên (x, y) thỏa mãn*

$$x^2 + 3y^2 + 4xy - 2x - 4y - 2 = 0.$$

Bổ Đề Hoán Vị (2)

Tạ Hồng Quảng, Nguyễn Văn Huyện

Bất đẳng thức hoán vị luôn là một trong những chủ đề khó và thú vị, đặc biệt là các bài toán có dấu bằng không bình thường, lệch tâm, lệch biên, lượng giác,... chúng rất khó để tìm các đánh giá trung gian mà vẫn đảm bảo dầu bằng. Thông thường những bài toán dạng này chúng ta sử dụng kỹ thuật pqr để đưa về khảo sát cực trị của hàm số theo q, theo r hoặc phân tích về dạng tổng các bình phương, ...

Trong bài viết này, tác giả sẽ giới thiệu cách xử lý lớp bất đẳng thức hoán vị có dạng

$$f\left(\frac{a^k}{b}+\frac{b^k}{c}+\frac{c^k}{a},\, ab+bc+ca,\, a+b+c\right) \geqslant 0, \quad k=1,\,2,\,3.$$

Trường hợp $k=1$ đã được giới thiệu trong [1], bài viết sẽ giới thiệu sơ về trường hợp $k=2$ và tập trung khai thác $k=3$.

Với $a,\, b,\, c$ là ba số thực dương, ký hiệu $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$ và $r=abc$.

1. Trường hợp $k=2$

Bổ đề 1. *(Võ Quốc Bá Cẩn) Giả sử $a+b+c=1$ và đặt $q=\frac{1-t^2}{3}$, với $0\leqslant t<1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqslant \frac{1+2t+5t^2+4t^3-3t^4}{(2t+1)(1-t^2)}. \tag{1}$$

Lời giải. Đặt

$$M=\frac{1+2t+5t^2+4t^3-3t^4}{(2t+1)(1-t^2)},$$

ta cần chứng minh

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqslant M.$$

Chuyển sang pqr [1] như sau

$$q(p^2-2q)-pr+p(a-b)(b-c)(c-a) \geqslant 2Mr,$$

[1]Xem thêm tại: https://wp.me/p7ChCZ-ht

hay là

$$q(1-2q)-(2M+1)r \geqslant (a-b)(b-c)(a-c).$$

Ta chứng minh

$$q(1-2q)-(2M+1)r \geqslant 0. \tag{2}$$

Thật vậy, ta có

$$q(1-2q)-(2M+1)r = \frac{(2t^2+1)(1-t^2)}{9} - \frac{3(1+2t+3t^2+2t^3-2t^4)r}{(1+2t)(1-t^2)}.$$

Mặt khác, từ

$$0 \leqslant 27(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = 4(p^2-3q)^3-(2p^3-9pq+27r)^2,$$

ta được

$$0 < r \leqslant r_0 = \frac{p(9q-2p^2)+2(p^2-3q)\sqrt{p^2-3q}}{27} = \frac{(1+2t)(1-t)^2}{27}, \tag{3}$$

và

$$\begin{aligned}\frac{(2t^2+1)(1-t^2)}{9} - \frac{3(1+2t+3t^2+2t^3-2t^4)}{(1+2t)(1-t^2)} \cdot \frac{(1+2t)(1-t)^2}{27}\\ = \frac{2t^3(2t+1)(1-t)}{9(t+1)} > 0.\end{aligned}$$

Cho nên (2) đúng. Quay trở lại bài toán, ta cần chứng minh

$$q(1-2q)-(2M+1)r \geqslant (a-b)(b-c)(a-c),$$

hay là

$$q(1-2q)-(2M+1)r \geqslant \sqrt{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}.$$

Bình phương hai vế và nhóm lại theo r như sau

$$[q(1-2q)-(2M+1)r]^2 \geqslant q^2(p^2-4q)-2p(2p^2-9q)r-27r^2,$$

hoặc

$$(M^2+M+7)r^2+[(2M+1)q^2-(M+5)q+1]r+q^4 \geqslant 0. \tag{4}$$

Lưu ý rằng

$$M^2+M+7 = \frac{9(t^4-t^3+2t+1)^2}{(2t+1)^2(t-1)^2(t+1)^2},$$

$$(2M+1)q^2-(M+5)q+1 = -\frac{2(1-t^2)(t^4-t^3+2t+1)}{3(2t+1)},$$

nên (4) tương đương với

$$\frac{9(t^4-t^3+2t+1)^2}{(2t+1)^2(t-1)^2(t+1)^2} \cdot r^2 - \frac{2(1-t^2)(t^4-t^3+2t+1)}{3(2t+1)} + \frac{(1-t^2)^4}{81} \geqslant 0,$$

thu gọn thành

$$\frac{1}{81}\left[\frac{27(t^4-t^3+2t+1)}{(2t+1)(1-t^2)} \cdot r - (1-t^2)^2\right]^2 \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a, b, c là ba nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (a-b)(b-c)(c-a) \leqslant 0 \\ x^3 - x^2 + \dfrac{1-t^2}{3} \cdot x - \dfrac{(2t+1)(1-t^2)^3}{27(t^4-t^3+2t+1)} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Chứng minh hoàn tất. □

Nhận xét. Nếu $a+b+c=1$, từ bất đẳng thức quen thuộc $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca)$ ta được $q \leqslant \frac{1}{3}$. Do đó ta luôn có thể đặt $q = \frac{1-t^2}{3} \leqslant \frac{1}{3}$, với $0 \leqslant t \leqslant 1$, nhưng vì $q > 0$ nên chỉ có trường hợp $0 \leqslant t < 1$.

2. Các bài toán ứng dụng

Bài toán 1. *(Phạm Hữu Đức) Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \geqslant \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}.$$

Lời giải. Chuẩn hóa $a+b+c=1$ và đặt $q = \frac{1-t^2}{3}$ với $0 \leqslant t < 1$, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant 5 - 12q,$$

hay là

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant 4t^2 + 1.$$

Sử dụng (1), ta đưa bài toán về chứng minh

$$\frac{1+2t+5t^2+4t^3-3t^4}{(2t+1)(1-t^2)} \geqslant 4t^2 + 1,$$

thu gọn thành

$$\frac{t^2[8t^3+1+(t-1)^2]}{(2t+1)(1-t^2)} \geqslant 0.$$

Hiển nhiên đúng, nên bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. □

Bài toán 2. *(Michael Rozenberg) Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant \frac{37(a^2+b^2+c^2) - 19(ab+ac+bc)}{6(a+b+c)}.$$

Lời giải. Chuẩn hóa $a+b+c=1$, và viết bất đẳng thức lại như sau

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant \frac{31}{6}t^2 + 1.$$

Sử dụng (1), ta đưa bài toán về chứng minh

$$\frac{1+2t+5t^2+4t^3-3t^4}{(2t+1)(1-t^2)} \geqslant \frac{31}{6}t^2+1,$$

thu gọn thành

$$\frac{t^2(62t^3+13t^2-26t+5)}{6(2t+1)(1-t^2)} \geqslant 0.$$

Lưu ý rằng

$$62t^3+13t^2-26t+5 = \frac{31}{50}t(10t-3)^2 + \frac{251}{5}\left(t-\frac{1579}{5020}\right)^2 + \frac{16759}{502000} > 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. Bài toán được chứng minh. □

Bài toán 3. *(Tạ Hồng Quảng) Với $a+b+c=1$, chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqslant \frac{804q^2-633q+127}{16(1-2q)}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqslant \frac{268t^4+97t^2+16}{16(2t^2+1)}.$$

Sử dụng (1), ta cần chứng minh

$$\frac{1+2t+5t^2+4t^3-3t^4}{(2t+1)(1-t^2)} \geqslant \frac{268t^4+97t^2+16}{16(2t^2+1)},$$

thu gọn thành

$$\frac{t^2(1-2t)^2(134t^3+177t^2+90t+31)}{16(2t+1)(2t^2+1)(1-t^2)} \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=0$ hoặc $t=\frac{1}{2}$, tức $a=b=c$ hoặc a, b, c là nghiệm của

$$\begin{cases} (a-b)(b-c)(c-a) \leqslant 0 \\ x^3-x^2+\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{62}=0=0 \end{cases}$$

Chứng minh hoàn tất. □

3. Bài tập rèn luyện

Bài tập 1. (Tạ Hồng Quảng) Với $a+b+c=1$, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+\frac{155(ab+bc+ca)}{32(a^2+b^2+c^2)} \geqslant \frac{307}{64}.$$

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+\frac{2945}{32}(ab+bc+ca) \geqslant \frac{3667}{128}.$$

Bài tập 2. (Michael Rozenberg) Tìm hằng số dương k lớn nhất để bất đẳng thức luôn đúng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant\frac{k(a^2+b^2+c^2)-(k-3)(ab+bc+ca)}{a+b+c}.$$

Bài tập 3. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant\sqrt{\frac{61(a^2+b^2+c^2)-46(ab+bc+ca)}{5}}.$$

Bài tập 4. (Nguyễn Văn Thạch) Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant 3\sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2+b^2+c^2}}.$$

Bài tập 5. (Võ Quốc Bá Cẩn) Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant 3\sqrt[6]{\frac{a^6+b^6+c^6}{3}}.$$

4. Trường hợp $k=3$

Bổ đề 2. *(Tạ Hồng Quảng) Giả sử $a+b+c=1$ và đặt $q=\frac{1}{t^2+3}$ với $t\geqslant 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geqslant\frac{t^5+t^4+2t^3+4t^2+t+1}{(t+1)(t^2+3)}. \tag{6}$$

Lời giải. Đặt

$$M=\frac{t^5+t^4+2t^3+4t^2+t+1}{(t+1)(t^2+3)},$$

ta chứng minh

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geqslant M.$$

Chuyển sang pqr như sau

$$pq(p^2-3q)-(p^2-5q)r+(p^2-q)(a-b)(b-c)(c-a)\geqslant 2Mr,$$

hay là

$$pq(p^2-3q)+(5q-p^2-2M)r\geqslant(p^2-q)(a-b)(b-c)(a-c),$$

hoặc

$$q(1-3q)+(5q-1-2M)r\geqslant(1-q)(a-b)(b-c)(a-c).$$

Ta chứng minh

$$q(1-3q)+(5q-1-2M)r\geqslant 0. \tag{7}$$

Thật vậy, với $q = \frac{1}{t^2+3}$, ta có $r \leqslant \frac{q^2}{3p} = \frac{1}{3(t^2+3)^2}$, và

$$q(1-3q) + (5q-1-2M)r = \frac{t^2}{(t^2+3)^2} - \frac{t^2(2t^3+2t^2+5t+9)\cdot r}{(t+1)(t^2+3)}$$
$$= \frac{t^2}{t^2+3}\left(\frac{1}{t^2+3} - \frac{(2t^3+2t^2+5t+9)\cdot r}{t+1}\right),$$

đồng thời

$$\frac{1}{t^2+3} - \frac{2t^3+2t^2+5t+9}{t+1}\cdot\frac{1}{3(t^2+3)^2} = \frac{t(t^2+t+4)}{3(t+1)(t^2+3)^2} \geqslant 0.$$

Cho nên bất đẳng thức (7) đúng. Quay trở lại bài toán, ta cần chứng minh

$$q(1-3q) + (5q-1-2M)r \geqslant (1-q)(a-b)(b-c)(a-c),$$

hay là

$$q(1-3q) + (5q-1-2M)r \geqslant (1-q)\sqrt{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}.$$

Bình phương hai vế và nhóm lại theo r như sau

$$\left[q(1-3q) + (5q-1-2M)r\right]^2 \geqslant (1-q)^2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2,$$
$$\left[q(1-3q) + (5q-1-2M)r\right]^2 \geqslant (1-q)^2\left[q^2(1-4q) + 2(9q-2)r - 27r^2\right],$$

tương đương với

$$\left[13q^2-(5M+16)q+M^2+M+7\right]r^2 - \left[12q^3-(3M+14)q^2+(M+7)q-1\right]r + q^5 \geqslant 0.$$

Thay giá trị của q và M theo t, ta được

$$13q^2-(5M+16)q+M^2+M+7 = \frac{(t^4+t^3+t^2+3t+3)^2}{(t+1)^2(t^2+3)},$$
$$12q^3-(3M+14)q^2+(M+7)q-1 = \frac{2(t^4+t^3+t^2+3t+3)}{(t+1)(t^2+3)^3}.$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{(t^4+t^3+t^2+3t+3)^2}{(t+1)^2(t^2+3)}\cdot r^2 - \frac{2(t^4+t^3+t^2+3t+3)}{(t+1)(t^2+3)^3}\cdot r + \frac{1}{(t^2+3)^5} \geqslant 0,$$

thu gọn lại dưới dạng

$$\frac{1}{t^2+3}\left[\frac{t^4+t^3+t^2+3t+3}{t+1}\cdot r - \frac{1}{(t^2+3)^2}\right]^2 \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a,\ b,\ c$ là ba nghiệm của

$$\begin{cases} (a-b)(b-c)(c-a) \leqslant 0 \\ x^3 - x^2 + \dfrac{x}{t^2+3} - \dfrac{t+1}{(t^4+t^3+t^2+3t+3)(t^2+3)^2} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Chứng minh hoàn tất. $\square$

Nhận xét. Tương tự như trên, với $a+b+c=1$ ta có thể đặt $q = \frac{1}{t^2+3} \leqslant \frac{1}{3}$, với $t \geqslant 0$.

5. Các bài toán ứng dụng

Bài toán 4. *(Michael Rozenberg) Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+2(ab+bc+ca)\geqslant 3(a^2+b^2+c^2). \tag{9}$$

Lời giải. Chuẩn hoá $a+b+c=1$ và đặt $q=\frac{1}{t^2+3}$ với $t\geqslant 0$, khi đó

$$3(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)=3p^2-8q=3-8q=3-\frac{8}{t^2+3}.$$

Sử dụng (6), ta đưa bài toán về chứng minh

$$\frac{t^5+t^4+2t^3+4t^2+t+1}{(t+1)(t^2+3)}\geqslant 3-\frac{8}{t^2+3},$$

thu gọn thành

$$\frac{t^2(t^3+t^2-t+1)}{(t+1)(t^2+3)}\geqslant 0. \tag{10}$$

Dễ thấy (10) đúng nên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. □

Bài toán 5. *(Sladjan Stankovik) Chứng minh rằng*

$$(a-b)^2\left(\frac{a}{b}-\frac{2}{3}\right)+(b-c)^2\left(\frac{b}{c}-\frac{2}{3}\right)+(c-a)^2\left(\frac{c}{a}-\frac{2}{3}\right)\geqslant 0.$$

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$3\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)+7(ab+bc+ca)\geqslant 10(a^2+b^2+c^2).$$

Chuẩn hóa $a+b+c=1$ và viết lại dưới dạng

$$3\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)+\frac{27}{t^2+3}\geqslant 10.$$

Sử dụng (6), ta đưa bài toán về chứng minh

$$\frac{3(t^5+t^4+2t^3+4t^2+t+1)}{(t+1)(t^2+3)}+\frac{27}{t^2+3}\geqslant 10,$$

thu gọn lại thành

$$\frac{t^2(3t^3+3t^2-4t+2)}{(t+1)(t^2+3)}\geqslant 0.$$

Bài toán được chứng minh. □

Bài toán 6. *(Trần Quốc Anh) Chứng minh rằng bất đẳng thức dưới đây luôn đúng*

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geqslant (k+1)(a^2+b^2+c^2)-k(ab+bc+ca),$$

với mọi $0 \leqslant k \leqslant k_0$, *với* k_0 *là nghiệm dương của phương trình* $k^3-5k^2+26k-51=0$.

Lời giải. Chuẩn hoá $a+b+c=1$, ta có

$$(k+1)(a^2+b^2+c^2)-k(ab+bc+ca)=k+1-\frac{3k+2}{t^2+3}.$$

Sử dụng (6), ta đưa bài toán về chứng minh

$$\frac{t^5+t^4+2t^3+4t^2+t+1}{(t+1)(t^2+3)} \geqslant k+1-\frac{3k+2}{t^2+3},$$

hay là

$$\frac{t^2\left[t^3+t^2+(1-k)t+3-k\right]}{(t+1)(t^2+3)} \geqslant 0.$$

Ta chứng minh

$$f(k)=t^3+t^2+(1-k)t+3-k \geqslant 0.$$

Thật vậy

- Nếu $0 \leqslant k < \frac{2}{3}$, thì hiển nhiên $f(k) \geqslant 0$.
- Nếu $\frac{2}{3} \leqslant k \leqslant k_0$, đặt $m^2=3k-2$, ta có

$$f(k)=f\left(\frac{m^2+2}{3}\right)=t^3+t^2-\frac{(m^2-1)t}{3}+\frac{7-m^2}{3}$$
$$=\frac{2(31-3m^2-m^3)}{27}+\frac{(3t+2m+1)(m-3t-1)^2}{27}.$$

  Lưu ý rằng $k \leqslant k_0 < 3$, nên

$$31-3m^2-m^3=37-9k-\sqrt{(3k-2)^3}=-\frac{27(k^3-5k^2+26k-51)}{37-9k+\sqrt{(3k-2)^3}}=0.$$

  Do đó

$$f(k)=\frac{(3t+2m+1)(m-3t-1)^2}{27} \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=0$ hoặc $t=\frac{\sqrt{3k-2}-1}{3}$

- Với $t=0$, ta được $a=b=c$.
- Với $t=\frac{\sqrt{3k-2}-1}{3}$, phần này bạn đọc có thể dựa vào (8) để tìm a, b, c.

Chứng minh hoàn tất. □

Nhận xét. Giá trị cụ thể của k_0 là

$$k_0 = \frac{\sqrt[3]{1828 + 372\sqrt{93}}}{6} - \frac{106}{3\sqrt[3]{1828 + 372\sqrt{93}}} + \frac{5}{3} \approx 2.581$$

Trường hợp $k = 2$ ta được bất đẳng thức (9).

Bài toán 7. *(Tạ Hồng Quảng, Nguyễn Văn Huyện) Với $a + b + c = 1$, chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} + \frac{1417(ab + bc + ca)}{144} \geqslant \frac{65}{18} + \frac{(4 - 13q)^2}{1 + 141q}.$$

Lời giải. Ta viết bất đẳng thức lại như sau

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} + \frac{1417}{144(t^2 + 3)} \geqslant \frac{65}{18} + \frac{(2t - 1)^2(2t + 1)^2}{(t^2 + 144)(t^2 + 3)}.$$

Sử dụng (6), ta cần chứng minh

$$\frac{t^5 + t^4 + 2t^3 + 4t^2 + t + 1}{(t + 1)(t^2 + 3)} + \frac{1417}{144(t^2 + 3)} \geqslant \frac{65}{18} + \frac{(2t - 1)^2(2t + 1)^2}{(t^2 + 144)(t^2 + 3)},$$

thu gọn thành

$$\frac{(36t^3 + 72t^2 + 5t + 1)(2t - 1)^2}{144(t + 1)(t^2 + 3)} \geqslant \frac{(2t - 1)^2(2t + 1)^2}{(t^2 + 144)(t^2 + 3)},$$

hay là

$$\frac{t^2(2t - 1)^2(36t^3 + 72t^2 + 4613t + 9217)}{144(t + 1)(t^2 + 3)(t^2 + 144)} \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 0$ hoặc $t = \frac{1}{2}$, tức $a = b = c$ hoặc a, b, c là nghiệm của

$$\begin{cases} (a - b)(b - c)(c - a) \leqslant 0 \\ x^3 - x^2 + \dfrac{4}{13}x - \dfrac{384}{13351} = 0 \end{cases}$$

Chứng minh hoàn tất. □

Bài toán 8. *(Nguyễn Văn Huyện) Với $a + b + c = 1$, chứng minh rằng*

$$4\left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}\right) + 18(ab + bc + ca) \geqslant 19(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3(1 - 4q)^2}{3 - 8q}.$$

Lời giải. Viết bất đẳng thức lại như sau

$$4\left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}\right) + 56q - 19 \geqslant \frac{3(1 - 4q)^2}{3 - 8q},$$

hay là
$$4\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)-\frac{19t^2+1}{t^2+3} \geqslant \frac{3(t-1)^2(t+1)^2}{(3t^2+1)(t^2+3)}.$$
Áp dụng (6), ta cần chứng minh
$$\frac{4(t^5+t^4+2t^3+4t^2+t+1)}{(t+1)(t^2+3)}-\frac{19t^2+1}{t^2+3} \geqslant \frac{3(t-1)^2(t+1)^2}{(3t^2+1)(t^2+3)},$$
tương đương với
$$\frac{(4t^3+12t^2+9t+3)(t-1)^2}{(t+1)(t^2+3)} \geqslant \frac{3(t-1)^2(t+1)^2}{(3t^2+1)(t^2+3)},$$
thu gọn thành
$$\frac{4t^2(t-1)^2(3t^3+9t^2+7t+3)}{(t+1)(t^2+3)(3t^2+1)} \geqslant 0.$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=0$ hoặc $t=1$, tức $a=b=c$ hoặc $a,\ b,\ c$ là nghiệm của
$$\begin{cases} x^3-x^2+\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{72}=0 \\ (a-b)(b-c)(c-a) \leqslant 0 \end{cases} \tag{11}$$
Chứng minh hoàn tất. □

Bài toán 9. *(Tạ Hồng Quảng) Với $a+b+c=2$, chứng minh rằng*
$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geqslant \frac{(q+4)(3-2q)}{q}.$$

Lời giải. Viết lại bài toán dưới dạng điều kiện $a+b+c=1$
$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geqslant \frac{(q+1)(3-8q)}{4q},$$
hay là
$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geqslant \frac{(t^2+4)(3t^2+1)}{4(t^2+3)}.$$
Sử dụng (6), ta cần chứng minh
$$\frac{t^5+t^4+2t^3+4t^2+t+1}{(t+1)(t^2+3)} \geqslant \frac{(t^2+4)(3t^2+1)}{4(t^2+3)},$$
thu gọn thành
$$\frac{t^2(t-1)^2(t+3)}{4(t+1)(t^2+3)} \geqslant 0.$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=0$ hoặc $t=1$. □

Bài toán 10. *(Nguyễn Văn Huyện) Với $a+b+c=1$, chứng minh rằng*

$$9\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)+221(ab+bc+ca)\geqslant 94(a^2+b^2+c^2)+\frac{17(1-7q)^2}{17-49q}.$$

Lời giải. Viết bất đẳng thức lại như sau

$$9\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)+\frac{409}{t^2+3}\geqslant 94+\frac{17(t-2)^2(t+2)^2}{(17t^2+2)(t^2+3)}.$$

Sử dụng (6), ta cần chứng minh

$$\frac{9(t^5+t^4+2t^3+4t^2+t+1)}{(t+1)(t^2+3)}+\frac{409}{t^2+3}\geqslant 94+\frac{17(t-2)^2(t+2)^2}{(17t^2+2)(t^2+3)},$$

thu gọn thành

$$\frac{(9t^3+45t^2+68t+34)(t-2)^2}{(t+1)(t^2+3)}\geqslant\frac{17(t-2)^2(t+2)^2}{(17t^2+2)(t^2+3)},$$

hay là

$$\frac{t^2(t-2)^2(153t^3+765t^2+1157t+583)}{(t+1)(t^2+3)(17t^2+2)}\geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $t=0$ hoặc $t=2$, tức $a=b=c$ hoặc $a,\ b,\ c$ là nghiệm của

$$\begin{cases} x^3-x^2+\dfrac{x}{7}-\dfrac{3}{1813}=0 \\ (a-b)(b-c)(c-a)\leqslant 0 \end{cases}$$

Chứng minh hoàn tất. □

Bài toán 11. *(Nguyễn Văn Huyện) Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+39(ab+bc+ca)\geqslant 13(a^2+b^2+c^2).$$

Lời giải. Chuẩn hóa $a+b+c=1$, ta viết bất đẳng thức lại như sau

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+\frac{65}{t^2+3}\geqslant 13.$$

Áp dụng (6), ta cần chứng minh

$$\frac{t^5+t^4+2t^3+4t^2+t+1}{(t+1)(t^2+3)}+\frac{65}{t^2+3}\geqslant 13,$$

thu gọn thành

$$\frac{(t+3)(t^2-t-3)^2}{(t+1)(t^2+3)}\geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, tức a, b, c là nghiệm của

$$\begin{cases} x^3 - x^2 + \dfrac{13-\sqrt{13}}{78}x + \dfrac{3-\sqrt{13}}{702} = 0 \\ (a-b)(b-c)(c-a) \leqslant 0 \end{cases}$$

Chứng minh hoàn tất. ☐

Bài toán 12. *(Tạ Hồng Quảng) Với $a + b + c = 1$, chứng minh rằng*

$$4\left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}\right) + 56q \geqslant 19 + \frac{(292 - 795q)(1-4q)^2}{27q(3-8q)}.$$

Lời giải. Ta viết bất đẳng thức lại như sau

$$4\left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}\right) + \frac{56}{t^2+3} - 19 \geqslant \frac{(292t^2+81)(t-1)^2(t+1)^2}{27(3t^2+1)(t^2+3)}.$$

Áp dụng (6), ta cần chứng minh

$$\frac{4(t^5+t^4+2t^3+4t^2+t+1)}{(t+1)(t^2+3)} + \frac{56}{t^2+3} - 19 \geqslant \frac{(292t^2+81)(t-1)^2(t+1)^2}{27(3t^2+1)(t^2+3)},$$

hay là

$$\frac{(4t^3+12t^2+9t+3)(t-1)^2}{(t+1)(t^2+3)} \geqslant \frac{(292t^2+81)(t-1)^2(t+1)^2}{27(3t^2+1)(t^2+3)},$$

thu gọn thành

$$\frac{8t^2(t-1)^2(2t-1)^2(t+4)}{27(t+1)(t^2+3)(3t^2+1)} \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$ hoặc $t = 1$. ☐

6. Bài tập rèn luyện

Bài tập 6. (Tạ Hồng Quảng, Nguyễn Văn Huyện) Với $a + b + c = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} + \frac{28q^2}{3(1-2q)} \geqslant \frac{29}{12} + \frac{37(1-4q)^2}{37-99q}.$$

Bài tập 7. (Tạ Hồng Quảng) Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}\right)^2 + \frac{45}{2}(ab+bc+ca)^2 \geqslant \frac{95}{8}(a^2+b^2+c^2)^2$$

Bài tập 8. (Tạ Hồng Quảng) Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} + \frac{28(ab+bc+ca)^2}{(a+b+c)^2} \geqslant 3(a+b+c)^2.$$

Bài tập 9. (Tạ Hồng Quảng) Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} + \frac{12(ab + bc + ca)^2}{(a + b + c)^2} \geqslant 4(a^2 + b^2 + c^2).$$

Bài tập 10. (Tạ Hồng Quảng) Với $a + b + c = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} + \frac{2863(ab + bc + ca)^2}{18} \geqslant \frac{907}{126}.$$

Kết thúc bài viết, xin chân thành cám ơn các độc giả đã dành thời gian theo dõi, hy vọng trong số các bạn sẽ có người tìm được giải pháp tương tự cho $k > 3$.

Tài liệu tham khảo

[1] https://nguyenhuyenag.files.wordpress.com/2020/07/bo-de-hoan-vi.pdf

[2] https://artofproblemsolving.com/community/c6t243f6h432676

[3] *Chuyên đề Bất Đẳng Thức Hiện Đại*, Võ Quốc Bá Cẩn.

CÁC BÀI TOÁN TẬP HỢP CÓ NHIỀU ĐIỀU KIỆN

Võ Thịnh Phát
Trường THPT chuyên Thoại Ngọc Hầu, An Giang
Khóa 2019 – 2022

Qua bài viết này, tác giả muốn giới thiệu một lớp các bài toán có chứa một hay nhiều tập hợp có nhiều điều kiện ràng buộc với nhau. Các ràng buộc này có thể là giữa hai tập hợp với nhau hoặc cũng có thể là giữa các phần tử trong cùng một tập hợp. Khi đó, ta cần những nhận xét hay nhìn nhận tinh tế để sử dụng khéo léo các điều kiện đó.

1. Kiến thức chuẩn bị

1.1. Nguyên lý quy nạp

Ta thường dự đoán các tính chất trong tập hợp, hoặc một nhóm các phần tử có công thức chung thuộc một tập hợp nào đó. Khi đó, công cụ quy nạp hỗ trợ rất đắc lực trong việc chứng minh dự đoán.

Để chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n, ta thực hiện hai bước :

- **Bước cở sở :** Kiểm tra mệnh đề đúng với $P(0)$ (có khi là $P(1)$)
- **Bước quy nạp :** Giả sử mệnh đề đúng đến $n = k$, tức là $P(k)$ đúng. Dựa vào đó, ta sẽ chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng.

1.2. Phương pháp phản chứng

Cơ sở của phương pháp phản chứng là : $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$ với A, B là hai khẳng định.

Vậy để chứng minh mệnh đề $A \Rightarrow B$, ta sẽ giả sử điều ngược lại với B, từ đó bằng các lập luận, ta sẽ chỉ ra điều vô lý.

Cụ thể hơn, trong các bài toán tập hợp, để chứng minh $a \in A$, ta có thể giả sử $a \notin A$, từ đó chỉ ra điều vô lý.

1.3. Nguyên lý cực hạn

Trong tập hợp hữu hạn phần tử luôn luôn tồn tại phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất.

Hệ quả : *Mọi tập con của tập hợp số tự nhiên luôn chứa phần tử nhỏ nhất. Đôi lúc, ta sẽ gọi phần tử nhỏ nhất này ra và làm việc với nó để thu thêm các dữ kiện khác.*

1.4. Nguyên lý bao hàm và loại trừ

Cho n tập hợp $A_1, A_2, ..., A_n$. Khi đó

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<t} |A_i \cap A_j \cap A_t| - \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

2. Bài tập

Bài 1 (GGTH 2010). Tìm tất cả các tập hợp con khác rỗng A, B, C của tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện :

(i) $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset$

(ii) $A \cup B \cup C = \mathbb{N}^*$

(iii) Nếu $a \in A, b \in B, c \in C$ thì $a + c \in A, b + c \in B, a + b \in C$.

Lời giải. Do A, B, C là các tập con của tập hợp các số nguyên dương nên theo nguyên lý cực hạn thì A, B, C sẽ chứa phần tử nhỏ nhất. Gọi a, b, c lần lượt là phần tử nhỏ nhất của các tập A, B, C. Ta sẽ chứng minh $1 \notin C$.

Thật vậy, giả sử $1 \in C$ thì $1 + a \in A$. Từ đó suy ra A chứa tất cả các số không nhỏ hơn a. Tương tự, B sẽ chứa tất cả các số không nhỏ hơn b. Điều này mâu thuẫn vì A, B rời nhau. Vậy $1 \notin C$.

Khi đó, ta có thể giả sử $1 \in A$. Ta sẽ chứng minh $2 \in B$. Ta xét các trường hợp sau :

- Nếu $2 \in C$ thì $3 \in A$. Xét $b \in B, c \in C$ thì $b + c \in B$ nên suy ra $b + 2k \in B$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Lại chú ý rằng nếu $b \in B$ thì do $1 \in A$ nên $b + 2k + 1 \in C$. Từ đây suy ra A hữu hạn, mâu thuẫn.
- Nếu $2 \in A$ thì $1 + c, 2 + c \in A$ và $c_1 = 1 + c + b, c_2 = 2 + c + b \in C$. Rõ ràng $(c_1, c_2) = 1$ và ta cũng có $1 + xc_1 \in A, 1 + yc_2 \in B$. Theo phương trình Diophante bậc nhất thì rõ ràng tồn tại x, y nguyên dương sao cho $1 + xc_1 = 1 + yc_2 + b$ (mâu thuẫn).

Từ đó suy ra $1 \in A, 2 \in B$ và $3 \in C$. Dễ dàng kiểm tra được :

$$A = \{3k + 1 | k \in \mathbb{N}^*\}, B = \{3k + 2 | k \in \mathbb{N}^*\}, C = \{3k | k \in \mathbb{N}^*\}$$

Vậy A, B, C lần lượt là các tập hợp chứa các số dạng $3k+1, 3k+2, 3k$ hoặc $3k+2, 3k+1, 3k$ với $k \in \mathbb{Z}^*$ theo thứ tự đó. □

Bài 2. Cho A là tập con của tập hợp các số hữu tỉ dương $\mathbb{Q}^+$, thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây :

(i) $1 \in A$

(ii) $x \in A$ thì $x + 1 \in A$.

(iii) Nếu $x \in A$ thì $\frac{1}{x} \in A$.

Chứng minh rằng $A = \mathbb{Q}^+$.

Lời giải. Từ các điều kiện của giả thiết, ta thấy A chứa các số có dạng $k, \frac{1}{k}$ và với mọi $x \in A$ thì $x + k \in A$ với mọi k nguyên dương. Mặt khác, vì hễ x thuộc A thì $\frac{1}{x} \in A$ nên để có điều phải chứng minh, ta chỉ cần chỉ ra rằng với p bất kỳ thuộc $\mathbb{N}^*$, A chứa tất cả các số có dạng $\frac{p}{q}$, mà $q \in \mathbb{N}^*$ và $1 < q < p$.

Thật vậy, xét dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{p}{q}$ và với mọi $n \geqslant 1$ thì : $x_{n+1} = \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ nếu $x_n \neq 0$, ngược lại $x_{n+1} = 0$ nếu $x_n = 0$.

Ta thấy (x_n) là dãy hữu tỉ dương, và nếu tồn tại t là số nhỏ nhất sao cho $x_t = 0$ thì $x_n = 0$ với mọi $n \geqslant t$, đồng thời $\left\{\frac{1}{x_{t-1}}\right\} = x_t = 0$, nên $\frac{1}{x_{t-1}} \in \mathbb{N}^* \subseteq A$, suy ra $x_{t-1} \in A$, từ đó $x_{t-2} = k + x_{t-1} \in A, k \in \mathbb{N}^*$ nào đó. Tiếp tục thực hiện tương tự, ta thu được $x_1 = \frac{p}{q} \in A$.

Ngược lại, nếu không tồn tại số t có tính chất vừa xét thì $x_n \in (0, 1)$ với mọi n. Khi đó, q_n là mẫu số của x_n khi viết ở dạng phân số tối giản thì (q_n) là dãy nguyên dương, vô hạn và giảm ngặt, đây là điều vô lý.

Từ các lập luận trên, ta suy ra $A = \mathbb{Q}^*$. □

Bài 3. Cho tập hợp $X = \{1, 2, ..., 396\}$. Gọi $S_1, S_2, ..., S_k$ là k tập con khác nhau của X thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau :

(i) $|S_1| = |S_2| = ... = |S_k| = 198$

(ii) $|S_i \cap S_j| \leqslant 99, \ \forall i, j \in \mathbb{N}^*, 1 \leqslant i < j \leqslant k.$

Chứng minh rằng $k \leqslant 6^{50}$.

Lời giải. Từ điều kiện (ii) ta thấy mỗi bộ 100 phần tử chỉ có thể được chứa tối đa trong 1 tập hợp. Ta đếm các bộ $\{x_1, x_2, ..., x_{100}, M\}$, trong đó $x_i \in X$ với mọi i và M là một trong các tập S_i, M chứa $x_1, x_2, ..., x_{100}$.

- Số cách chọn M là k. Số cách chọn 100 phần tử trong M là C_{198}^{100}.
- Số cách chọn $x_1, x_2, ..., x_100$ từ X là C_{396}^{100}. Với mỗi bộ 100 phần tử như vậy, có tối đa 1 tập S_i thỏa mãn S_i chứa $x_1, x_2, ..., x_{100}$.

Do đó, ta có : $k \cdot C_{198}^{100} \leqslant C_{396}^{100} \Leftrightarrow k \leqslant 6^{50}$. □

Bài 4. Cho tập hợp A thỏa mãn $\mathbb{Z} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ và thỏa mãn đồng thời các điều kiện :

1. Nếu $x, y \in A$ thì $xy, x + y \in A$
2. $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \in A$ với mọi số tự nhiên n.

Chứng minh $\dfrac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^{2021}} \in A$.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp $\sqrt{n} \in A$ với mọi số tự nhiên n.

Trước hết $\sqrt{0} = 0 \in A$. Giả sử khẳng định đúng đến $n \geqslant 0$. Ta có : $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \in A$ và $-1 \in A$, $\sqrt{n} \in A$, nên : $-\sqrt{n} \in A$. Suy ra : $(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) - \sqrt{n} = \sqrt{n+1} \in A$. Theo quy nạp thì khẳng định được chứng minh.

Vì thế với mọi số tự nhiên n :

$$\sqrt{n+1} + (-\sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \in A$$

Theo (i) thì $x \in A$ thì x^{2021} cũng thuộc A. Nên ta có điều phải chứng minh. □

Bài 5 (Hà Nam Ninh 2021). Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, ..., 2020\}$. Ta chia S thành hai tập con khác rỗng rời nhau A và B thỏa mãn các điều kiện sau :

(i) $13 \in A$

(ii) Nếu $a \in A, b \in B, a + b \in S$ thì $a + b \in B$.

(iii) Nếu $a \in A, b \in B, ab \in S$ thì $ab \in A$.

a) Chứng minh rằng $1 \in B$

b) Tìm số phần tử của tập hợp A.

Lời giải. a) Nhận xét :

- Nếu $m > n$ đều thuộc A thì $m - n$ thuộc A.
- Nếu $mn, m \in B$ thì $n \in B$.

Do đó, vì B khác rỗng nên $1 \in B$.

b) Từ đó, ta suy ra : $14, 27, ..., 13k + 1 \in B$ $(k = 1, 2, ..., 155)$

Nếu 2 (hoặc 3, 4, 6) thuộc A thì 1 thuộc A. Do đó 2, 3, 4, 6 thuộc B.

Ta lại có :

$$5 = \frac{40}{2.2.2}; 7 = \frac{14}{2}; 8 = \frac{40}{5}; 10 = \frac{40}{2.2}; 11 = \frac{66}{2.3}; 12 = \frac{144}{2.3}$$

đều thuộc B.

Vậy $1, 2, 3, ..., 12$ thuộc B. Suy ra : $14, 15, ..., 25$ thuộc B, từ đó : $27, 28, ..., 38$ thuộc B.

Do đó : nếu n không chia hết cho 13 thì n thuôc B. Mà $13 \in A$ nên $13.2, 13.3, ..., 13.14$ đều thuộc A.

Suy ra : $13^2 = 13.14 - 13 \in A$. Vậy nếu n chia hết cho 13 thì n thuộc A.

Cho nên $|A| = 155$. □

Bài 6. Cho 2021 số thực dương $a_1, a_2, ..., a_{2021}$ và F là một tập con của $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây :

(i) $a_k^2 \in F$ với mỗi chỉ số k, đồng thời $a_1 + a_2 + ... + a_{2021} \in F$

(ii) Nếu $x, y \in F, y \neq 0$ thì $x - y \in F$ và $\dfrac{x}{y} \in F$

Chứng minh rằng $a_k \in F$ với mỗi chỉ số k.

Lời giải. Để ý rằng $0 = a_1^2 - a_1^2 \in F, 1 = \dfrac{a_1^2}{a_1^2} \in F$, từ đó cứ $x \in F$ thì sẽ phải có được $-x = 0 - x \in F$ và với $x \neq 0, x \in F$ thì $\dfrac{1}{x} \in F$. Do đó, cứ với $x, y \in F$ thì cũng sẽ có $x + y \in F$ và $xy \in F$.

Ta sẽ chứng minh quy nạp rằng : *Với mỗi số nguyên dương n, các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ và F là tập con của $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện dưới đây :*

(i) $a_k^2 \in F$ với mỗi chỉ số k, đồng thời $a_1 + a_2 + ... + a_{2021} \in F$

(ii) Nếu $x, y \in F, y \neq 0$ thì $x - y \in F$ và $\frac{x}{y} \in F$

Khi đó, $a_k \in F$ với mỗi chỉ số k.

Thật vậy trường hợp $n = 1$ là hiển nhiên. Giả sử khẳng định đúng tới $n \in \mathbb{N}^*$, ta xét $n + 1$ số thực dương $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ thỏa mãn : $a_k^2 \in F$ với mỗi chỉ số k, đồng thời $a_1 + a_2 + ..a_{k+1} \in F$. Xét tập K xác định như sau :

$$K = \{x + a_1 y : x, y \in F\}$$

Do tính chất của F nên với $u, v \in K$ ta sẽ có : $u + v, u - v, uv \in K$. Bây giờ giả sử $u, v \in K, v \neq 0$, ta viết $v = x + a_1 y$ với $x, y \in F$, ta xét các trường hợp sau :

1) Nếu $x - a_1 y = 0$ và $y \neq 0$, khi đó $a_1 = \frac{x}{y} \in F$ nên $v = x + a_1 y \in F$ từ đó ta thấy là $\frac{1}{v} \in F \subset K$ do vậy $\frac{u}{v} = u.\frac{1}{v} \in K$.

2) Nếu $y = 0$ thì $v = x \in F$ và $x \neq 0$ nên $\frac{1}{v} \in F \subset K$ để cũng có $\frac{u}{v} \in K$.

3) Nếu $x - a_1 y \neq 0$ thế thì $m = x^2 - a_1^2 y^2 \in F \setminus 0$ do giả thiết, từ đó sẽ kéo theo $\frac{x}{m}, \frac{-y}{m} \in F$ và có $\frac{1}{v} = \frac{x}{m} - \frac{a_1 y}{m} \in K$ kéo theo $\frac{u}{v} \in K$.

Vậy, cứ với $u, v \in K$ thì $u \pm v \in K, uv \in K$ và khi $v \neq 0$ thì $\frac{u}{v} \in K$. Do giả thiết quy nạp và việc $a_k^2 \in F \subset K$, $\sum\limits_{2 \leqslant k \leqslant n+1} a_k = \left(\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n+1} a_k\right) - a_1 \in K$ cho nên sẽ có được $a_k \in K$ với mỗi $k > 1$. Ta viết $a_2 = s + a_1 t$, với $s, t \in F$ và xét

- Nếu $t = 0$, khi đó $a_2 = s \in F$ nên $\sum\limits_{2 \neq k} a_k \in F$ và $a_k^2 \in F$ với mỗi chỉ số k, vì thế theo giả thiết quy nạp sẽ có $a_i \in F$ với mọi chỉ số i từ 1 đến $n + 1$.

- Nếu $s = 0$, thì $a2 = ta_1$ với $t \in F$ và $t > 0$ nên

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n+1} a_k = (1 + t) a_1 + \sum_{2 < k \leqslant n+1} a_k \in F$$

Xét bộ $((1 + t)a_1, a_3, \ldots, a_{n+1})$ thỏa giả thiết quy nạp (để ý $(1 + t) \in F$), vì thế $a_k \in F$ với mỗi $k > 2$ còn $a_1 \in F$ do $(1 + t)a_1 \in F$ và $a_1 = \frac{(t + 1)a_1}{t + 1}$, từ $a_1 \in F$ và $t \in F$ ta cũng có $a_2 = ta1 \in F$.

- Nếu $st \neq 0$, ta có $2st \in F \setminus 0, a_2^2, s, t, a_1^2 \in F$ nên $a_1 = \frac{a_2^2 - s^2 - t^2 a_1^2}{2st} \in F$.

Vì $\sum\limits_{2 \leqslant k \leqslant n+1} a_k = \left(\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n+1} a_k \right) - a_1 \in F$, nên bộ $(a_2, a_3, \ldots, a_{n+1})$ thỏa giả thiết quy nạp, nên có $a_k \in F$ với mỗi chỉ số $k > 1$.

Các luận xét vừa rồi, cho ta điều cần chứng minh. □

Bài 7 (KHTN 2020). Tìm tất cả các tập hợp A, B thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :

$i.$ $A \cup B = \mathbb{Z}$

$ii.$ Nếu $x \in A$ thì $x - 1 \in B$

$iii.$ Nếu $x \in B$ và $y \in B$ thì $x + y \in A$

Lời giải. **Trường hợp 1.** Nếu $0 \in B$, từ (iii), với $y = 0$, ta suy ra với mọi $x \in B$ thì $x \in A$. Cho nên : $B \subseteq A$. Mà $A \cup B = \mathbb{Z}$, suy ra : $A = \mathbb{Z}$. Kết hợp (ii), suy ra : $B = \mathbb{Z}$.

Trường hợp 2. Nếu $0 \notin B \Rightarrow 0 \in A$. Từ (ii), suy ra : $-1 \in B$

Ta sẽ chứng minh, với $\forall k \in \mathbb{N}$ thì : $2k$ thuộc A nhưng không thuộc B; $2k + 1$ thuộc B nhưng không thuộc A.

Thật vậy, nếu $1 \in A \Rightarrow 0 \in B$ (vô lý). Suy ra : $1 \in B, 1 \notin A$.

Giả sử khẳng định đúng n. Khi đó :

Nếu $2k + 2 \in B$, vì $-1 \in B$, suy ra : $2k + 1 \in A$ (vô lý)

Do đó : $2k + 2 \notin B \Rightarrow 2k + 2 \in A$. Từ đó : $2k + 3 \notin A \Rightarrow 2k + 3 \in B$

Vậy khẳng định đúng.

Bây giờ, giả sử $\exists k' < 0$ mà $2k' \in B$. Chọn k sao cho $|k| > |k'| \Rightarrow 2k + 1 + 2k' \in \mathbb{A}$ (vô lý)

Suy ra : $2k'$ thuộc A nhưng không thuộc B với mọi k' nguyên âm.

Chứng minh tương tư, $2k' + 1$ thuộc B nhưng không thuộc A, với mọi k' thuộc $\mathbb{Z}^-$

Vậy : $(A, B) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, hoặc $(A, B) = (2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} + 1)$ □

Bài 8. Xét tập hợp A gồm các số nguyên dương, thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :

(i) Số lớn nhất thuộc A là 100;

(ii) Với mỗi số x thuộc A, mà x không phải là số nhỏ nhất thuộc A, luôn tồn tại ba số a, b, c (không nhất thiết đôi một khác nhau) thuộc A sao cho $x = a + b + c$.

Hỏi tập A có tối đa bao nhiêu phần tử ?

Lời giải. Xét tập A thỏa mãn các điều kiện của đề bài. Giả sử tập A có n phần tử, và các phần tử của A là $a_1, a_2, ..., a_n$.

Vì $100 \in A$ (theo giả thiết), và 100 không chia hết cho 3 nên từ giả thiết (ii) suy ra phải có $n \geqslant 3$.

Không mất tính tổng quát giả sử

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n \tag{1}$$

Khi đó, theo giả thiết (i), ta được

$$a_n = 100 \tag{2}$$

Với mỗi phần tử a_k, $2 \leqslant k \leqslant n$, theo giả thiết (ii), tồn tại các số a, b, c (không nhất thiết đôi một khác nhau) thuộc A, sao cho :

$$a_k = a + b + c \tag{3}$$

và do 1 nên hiển nhiên phải có

$$a, b, c \in \{a_1, ..., a_{k-1}\} \tag{4}$$

Từ đó, suy ra : $a_2 = a_1 + a_1 + a_1 = 3a_1$

Giả sử với mọi $k = 1, 2, ..., m$, m là một số nguyên dương thỏa mãn $2 \leqslant m < n$, ta đã có : $a_k = l_k.a_1$, trong đó l_k là các số nguyên dương lẻ. Xét a_{m+1}. Theo 3 và 4, ta có :

$$a_{m+1} = x + y + z \tag{5}$$

trong đó x, y, z là các số (không nhất thiết đôi một khác nhau) thuộc tập hợp $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$.

Theo giả sử nêu trên, mỗi số x, y, z đều bằng một số lẻ lần a_1, do đó, từ (5) suy ra : a_{m+1} cũng bằng một lẻ lần a_1.

Vì vậy, theo nguyên lý quy nạp, với mọi $k = 1, 2, ..., n$, a_k bằng một lẻ lần a_1. Nghĩa là, với mọi $k = 1, 2, ..., n$, ta có :

$$a_k = l_k.a_1$$

trong đó l_k là các số nguyên dương lẻ.

Do 1 và 2, ta có : $1 = l_1 < l_2 < ... < l_n$ và $100 = l_n \cdot a_1$

Từ đó, suy ra : n không vượt quá số số lẻ trong phạm vi từ 1 đến l, với l là ước ương lẻ lớn nhất của 100; suy ra : $n \geqslant 13$.

Xét tập hợp A gồm các số : $a_k = (2k - 1).4, k = 1, 2, ...13$

Rõ ràng số lớn nhất $a_13 = 100$ và với k là số nguyên dương tùy ý thì :

$$a_k = (2k-1)\cdot 4 = (2(k-1)-1)\cdot 4 + 4 + 4 = a_{k-1} + a_1 + a_1.$$

Cho nên tập A vừa xét thỏa các điều kiện đề bài. Vậy tập A có tối đa 13 phần tử. □

Bài 9. Cho $S = \{1, 2, ..., 10\}$. Giả sử tồn tại $k \geqslant 2$ tập hợp con $A_1, A_2, ..., A_k$ của S sao cho :

(i) $|A_i| \geqslant 5, \forall i = 1, 2, .., k$;

(ii) $|A_i \cap A_j| \geqslant 2, \forall i \neq j$.

Tìm giá trị lớn nhất của k.

Lời giải. Ta đếm số bộ $(a, \{A_i, A_j\{)$ thỏa mãn phần tử a thuộc hai tập con A_i, A_j theo hai cách.

Cách thứ nhất : Với mỗi $a \leqslant 10$ đặt f_a là số tập chứa a.

Khi đó, số bộ trên là $\sum\limits_{a=1}^{10} C_{f_a}^2 = \sum\limits_{a=1}^{10} \dfrac{f_a^2 - f_a}{2}$

Cách thứ hai : Với mỗi cặp $\{A_i, A_j\}$ có không quá 2 phần tử a cùng thuộc hai tập này.

Do đó, số bộ không vượt quá $2C_n^k = k^2 - k$.

Từ đó, ta có bất đẳng thức : $2k^2 - 2k \geqslant \sum\limits_{a=1}^{10} (f_a^2 - f_a)$

Đặt $S = \sum\limits_{a=1}^{10} f_a$ thì theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có :

$$2k^2 - 2k \geqslant \frac{S^2}{10} - S = \frac{S(S-10)}{10}$$

Lại có $S \geqslant 5k \geqslant 10$ do mỗi tập hợp không có quá 5 phần tử. Vì thế nên

$$2k^2 - 2k \geqslant \frac{5k(5k-10)}{10}$$

(do $S - 10 \geqslant 5k - 10$, $S \geqslant 5k > 0$) dẫn tới $k \leqslant 6$.

Xét $k = 6$, ta xây dựng các tập như sau :

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A_2 = \{1, 2, 6, 7, 8\}, A_3 = \{3, 4, 6, 8, 9\}$$

$$A_4 = \{1, 5, 6, 9, 10\}, A_5 = \{2, 4, 7, 9, 10\}, A_6 = \{3, 5, 7, 8, 10\}$$

Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là $k = 6$. □

Bài 10 (USA MO 2001). Cho tập $S \subseteq \mathbb{Z}$ thỏa mãn :

(i) Tồn tại $a, b \in S$ sao cho $(a, b) = (a-2, b-2) = 1$

(ii) Nếu $x, y \in S$ thì $x^2 - y \in S$

Chứng minh rằng $S = \mathbb{Z}$.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh $1 \in S$. Khi đó ta có $0 \in S, -1 \in S, -2 \in S$. Giả sử ta có $m \in S,\ \forall |m| \leqslant n$.

Xét $n+1$. Nếu $n+1 = t^2$ thì $|t| \leqslant n$, suy ra $t \in S$ do đó $n+1 = t^2 - 0 \in S$.

Nếu $t^2 < n+1 < (t+1)^2$ thì $n+1 = t^2 + m$ $(0 < m \leqslant 2t)$, vì thế $0 < m \leqslant 2t \leqslant t^2 \leqslant n$ nên $m \in S, -m \in S$, hay $n+1 = t^2 - (-m) \in S$. Do vậy ta chỉ cần chứng miinh $1 \in S$.

Giả sử $a, b, c \in S$ khi đó :

$$(a^2 - b^2) + c = a^2 - (b^2 - c) \Rightarrow (a^2 - b^2) + c \in S$$

Từ đó theo quy nạp ta suy ra $n(a^2 - b^2) + c \in S,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Tương tự :

$$n(a^2 - b)^2 + c \in S,\ \forall n \in \mathbb{Z}^-$$

Vậy $n(a^2 - b^2) + c \in S,\ \forall n \in \mathbb{Z}$

Theo điều kiện (i) tồn tại $a, b \in S$ sao cho $(a, b) = (a-2, b-2) = 1$. Đặt $A = a^2 - b^2, B = a^3(a-2), C = b^3(b-2)$, suy ra $B = (a^2 - a)^2 - a^2, C = (b^2 - b)^2 - b^2$. Ta suy ra :

$$c + mA + nB + pC \in S,\ \forall m, n, p \in \mathbb{Z}, c \in S$$

Đặt $(A, B, C) = d$. Nếu $d > 1$ suy ra tồn tại p nguyên tố và $p|d \Rightarrow a^2 - b^2 \vdots p$ mà $(a, b) = 1$ suy ra hoặc $(a+b) \vdots p$ hoặc $(a-b) \vdots p$. Lại có $a^3(a-2) \vdots p \Rightarrow a - 2 \vdots p$ (ngược lại $a \vdots p \Rightarrow b \vdots p$ mâu thuẫn với $(a, b) = 1$).

Tương tự $b - 2 \vdots p \Rightarrow (a-2, b-2) > 1$ mẫu thuẫn với điều kiện hai của bài toán. Vậy $(A, B, C) = 1$ suy ra tồn tại m, n, p sao cho $mA + nB + pC = 1 - c$, hay $1 \in S$. Từ đó, ta có điều phải chứng minh. $\square$

3. Bài tập tự luyện

Bài tập 1. Cho tập A khác rỗng là một tập con của $\mathbb{Z}^+$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :

(i) Với mọi $a, b, c \in A$, ta có : $(a, b, c) = 1$.

(ii) Với mọi $b, c \in A$, tồn tại $a \in A, a \neq b, c$ sao cho : $a|bc$

Chứng minh rằng tập hợp A có không quá 3 phần tử.

Bài tập 2. Cho tập hợp X có n phần tử và m là tập con khác rỗng $T_1, T_2, ..., T_m$ thỏa mãn :

(i) $|T_i| = 4,\ i = \overline{1, m}$

(ii) Với mọi $i, j \in X$, tồn tại duy nhất k sao cho $(i, j) \subseteq T_k$

(iii) Với mọi $1 \leqslant i < j \leqslant m$ thì $|T_i \cap T_j| = 1$

Tìm tất cả giá trị có thể của m, n.

Bài tập 3. Xét các tập hợp $A \subseteq \mathbb{N}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :

(i) $|A| \geqslant 2$

(ii) Với mọi $a, b \in A;\ a > b$ thì $\dfrac{ab}{a^2 - b^2} \in A$

Tìm tất cả các tập hợp A như thế.

Bài tập 4 (GGTH 2012). Trong chương trình Gặp gỡ toán học lần IV có tổng cộng 673 tựa sách và quyết định tổ chức đăng ký mua sách cho các thành viên tham gia. Sau khi thu phiếu đăng ký, ban tổ chức phát hiện ba điều thu vị sau :

(i) Tất cả các bạn đều đăng ký mua đúng ba tựa sách và không có hai bạn nào mua cả ba tựa sách giống nhau.

(ii) Hai bạn bất kỳ đăng ký mua giống nhau ít nhất một tựa sách.

(iii) Không có tựa sách nào được tất cả các thành viên đăng ký mua.

Chứng minh rằng ở kỳ Gặp gỡ toán học lần này có nhiều nhất 2011 bạn tham gia giao lưu và học tập.

Gợi ý: Phát biểu lại bài toán dưới dạng ngôn ngữ tập hợp như sau :

Cho tập $A = \{1, 2, ..., 673\}$ và $M = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ là một họ các tập hợp con phân biệt của tập A thỏa mãn đồng thời :

(i) $|A_i| = 3, \ \forall i = 1, 2, ..., n$

(ii) $A_i \cap A_j \neq \emptyset, \ \forall 1 \leqslant i < j \leqslant n$

(iii) $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \emptyset$

Chứng minh rằng $|M| \leqslant 2011$.

Bài tập 5 (Putnam 2016). Xét 2016 tập hợp $A_1, A_2, ..., A_2016$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện :

(i) $|A_i| = 20, \ \forall i = 1, 2, ..., 2016$

(ii) $|A_i \cap A_j| = 1, \ \forall 1 \leqslant i < j \leqslant 2016$

Chứng minh rằng $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \neq \emptyset$

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Duy Liên, 23 bài toán số học tổ hợp hay và khó.

[2] Group hướng tới Olympic toán Việt Nam.

[3] Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi cấp Tỉnh các năm

[4] Tạp chí Pi - Số 3, tập 2 năm 2019.

[5] Tạp chí toán học và tuổi trẻ.

[6] https://artofprroblemsolving.com

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ TRONG ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 NĂM 2021

Trần Nam Dũng
Thành phố Hồ Chí Minh

GIỚI THIỆU

Lâu nay tôi cũng thỉnh thoảng ngó nghiêng một chút các đề thi chuyên toán tuyển sinh 10 để soạn bài cho mấy cậu học trò. Nhưng là case by case thôi. Đợt này nhớ chiến dịch của Lê Phúc Lữ, tự dưng được làm quen với hàng loạt các đề thi mới và tôi bắt đầu để ý đến đặc điểm các đề thi. Tôi nhận thấy rằng bất đẳng thức và cực trị xuất hiện hầu hết trong các đề thi (có lẽ phải trên 80%). Xem kỹ hơn tôi thấy các bài này khá là khó (không biết có phải vì lâu ngày tôi không làm bất đẳng thức không). Thực sự nhiều bài có thể lấy làm đề thi VMO. Tuy nhiên, các đề khó nhưng lại không mới, cho nên sẽ vẫn có ai đó giải được, mà nhìn lời giải ngắn gọn chúng ta sẽ tưởng là các bài đó đơn giản. Thực tế thì một bài toán khó hay dễ không chỉ nhìn lời giải mà biết được, chúng ta phải xông vào làm thì mới biết. Vì thế tôi đã thử tập hợp lại các bài bất đẳng thức trong đề thi vừa rồi và thử giải. Thú thật là nhiều bài tôi lúng túng, phải tham khảo gợi ý của các bạn trong nhóm "*Hướng tới Olympic toán VN*". Xin cảm ơn các bạn đó.

Trong bài viết này, tôi sử dụng 36 bài toán thi của các trường và các tỉnh (các trường thi sau tôi không kịp đưa vào), giải và có những bình luận. Các ý kiến của tôi về các bài toán là chủ quan. Tôi sẽ rất vui nếu nhận được các lời giải, bình luận, ý kiến khác từ bạn đọc.

Bản thân tôi luôn cho rằng các bài toán thi tuyển sinh 10 rất quan trọng. Khi ra một đề toán, chúng ta phải cân nhắc rất nhiều yếu tố: vừa có tính thách thức, vừa có tính gợi mở và đặc biệt là không đánh đố, đề thi nên có tính thẩm mỹ, gọn, đẹp. Trong 36 đề toán mà tôi trích dẫn có những đề hay, đẹp nhưng cũng có những đề quá xấu xí, cồng kềnh, gọi là "*nhìn thấy đã không muốn làm*". Học tập rất cần cảm xúc, rất cần những bài toán đẹp, ý tưởng đẹp, lời giải đẹp. Đừng làm xấu xí toán học, làm cho nó trở nên "*kinh khủng*".

1. Đề bài

Bài toán 1 (Gia Lai). *Cho x, y là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x + y = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = (5x^2 + 7y)(5y^2 + 7x) + 151xy.$$

Lời giải. Bài này cơ bản, phù hợp với thi tuyển sinh 10. Đặt $t = xy$ và sử dụng điều kiện $x + y = 2$ ta tính được P theo t như sau

$$P = 25t^2 - 10t + 280 = (5t - 1)^2 + 279.$$

Đến đây thì dễ rồi. □

Bài toán 2 (Quảng Bình). *Cho $x, y, z \in [5, 7]$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{xy + 1} + \sqrt{yz + 1} + \sqrt{zx + 1} > x + y + z.$$

Lời giải. Mẹo chính của bài này là $x, y \in [5, 7]$ suy ra $|x - y| \leqslant 2$. Từ đó

$$1 + xy \geqslant \frac{(x - y)^2}{4} + xy = \frac{(x + y)^2}{4}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $|x - y| = 2$. Vì là mẹo nên bài này khó bình luận. □

Bài toán 3 (Đại học Khoa học, Huế). *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$3(ab + bc + ca) \leqslant (a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ca).$$

Lời giải. Bài này thì quá cơ bản rồi. Vế trái chỉ là $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqslant 0$. Còn vế phải thì dùng $a^2 < a(b + c)$ là xong □

Bài toán 4 (Tây Ninh). *Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$T = 2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x).$$

Bài này là khá khó đối với học sinh THCS.

Lời giải 1. Ta dự đoán giá trị lớn nhất là 3 đạt được khi $x = y = z = 1$. Để xuất hiện đánh giá liên quan đến x^2y, y^2z, z^2x, ta sử dụng điều kiện để suy ra $(1 - x^2)(1 - y) \geqslant 0$. Suy ra

$$-x^2y \leqslant 1 - x^2 - y.$$

Cộng bất đẳng thức này và các bất đẳng thức tương tự, ta có

$$-x^2y - y^2z - z^2x \leqslant 3 - (x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z).$$

Từ đó

$$\begin{aligned} T &= 2(x^3 + y^3 + z^3) - x^2y - y^2z - z^2x \\ &\leqslant 2(x^3 + y^3 + z^3) + 3 - (x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z) \\ &= 3 - x(1 - x)(1 + 2x) - y(1 - y)(1 + 2y) - z(1 - z)(1 + 2z) \leqslant 3 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$. □

Lời giải. Trước hết ta chứng minh $2x^3 - x^2y \leqslant 2x - xy$. Thật vậy, điều cần chứng minh tương đương với

$$2x(1-x^2) - xy(1-x^2) \geqslant 0 \Leftrightarrow x(1-x^2)(2-y) \geqslant 0.$$

Tương tự

$$2y^3 - y^2z \leqslant 2y - yz, 2z^3 - z^2x \leqslant 2z - zx.$$

Suy ra

$$T \leqslant 2(x+y+z) - (xy+yz+zx). \tag{1}$$

Ta lại có

$$(1-x)(1-y) + (1-y)(1-z) + (1-z)(1-x) \geqslant 0.$$

Suy ra

$$3 + xy + yz + zx - 2(x+y+z) \geqslant 0. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $T \leqslant 3$. Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $x = y = z = 1$. □

Lời giải 3. Dành cho các thầy cô giáo và các bạn học sinh THPT.

Nếu để ý T là biểu thức thuần nhất bậc 3

$$T(ka, kb, kc) = k^3 T(a, b, c),$$

ta sẽ thấy GTLN của T sẽ phải đạt được khi có một biến nào đó bằng 1. Chẳng hạn $z = 1$. Khi đó thì

$$T = 2(x^3+y^3+1)-x^2y-y^2-x \leqslant x^2+x+y^2+y+3-1-x^2y-y^2-x = 3-(1-x^2)(1-y) \leqslant 3.$$

Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là .3 □

Bài toán 5 (Bình Dương). *Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng:*

$$10x^2 + 10y^2 + z^2 \geqslant 4.$$

Dấu bằng xảy ra khi nào?

Lời giải. Ý tưởng là dùng AM-GM có trọng số. Các hệ số của x, y giống nhau nên x, y có vai trò như nhau. Ta tách

$$\left(10 - \frac{a^2}{2}\right)x^2 + \left(10 - \frac{a^2}{2}\right)y^2 + \frac{a^2x^2 + z^2}{2} + \frac{a^2y^2 + z^2}{2} \geqslant (20 - a^2)xy + axz + ayz.$$

Ta chọn a sao cho vế trái là hằng số, tức là $20 - a^2 = a$. Giải ra được $a = 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$ và $4x = 4y = z$, tức là khi $x = y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{3}$.

Bài này được tính là khá thách thức. □

Bài toán 6 (Cần Thơ). *Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{(x+2)^2}{y+z} + \frac{(y+2)^2}{z+x} + \frac{(z+2)^2}{x+y} \geqslant 12.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ở dạng phân thức, ta có

$$VT \geqslant \frac{(x+y+z+6)^2}{2(x+y+z)}.$$

Tiếp tục áp dụng AM-GM cho hai số $x+y+z$ và 6 thì

$$(x+y+z+6)^2 \geqslant 4(x+y+z).6 = 24(x+y+z).$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Nếu quen cách dùng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz như ở trên thì cũng ở dạng cơ bản. □

Bài toán 7 (Tiền Giang). *Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$M = \frac{1}{a^2+2b^2+3} + \frac{1}{b^2+2c^2+3} + \frac{1}{c^2+2a^2+3}.$$

Lời giải. Bài này khá khó chịu nếu không liên hệ được với bài toán quen thuộc sau:

Cho $abc = 1$ khi đó

$$\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} = 1.$$

Ta có

$$a^2+2b^2+3 = (a^2+b^2) + (b^2+1) + 2 \geqslant 2(ab+b+1).$$

Từ đó

$$\frac{1}{a^2+2b^2+1} \leqslant \frac{1}{2(ab+b+1)}.$$

Từ đó GTLN cần tìm bằng $\frac{1}{2}$, đạt được khi $a = b = c = 1$. □

Bài toán 8 (Quảng Nam). *Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$H = \frac{x^2}{9z+zx^2} + \frac{y^2}{9x+xy^2} + \frac{z^2}{9y+yz^2}.$$

Lời giải. Ý đầu tiên để giải bài này là đưa điều kiện về $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ rồi đặt $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$. Điều kiện $a+b+c = 1$ dĩ nhiên là dễ sử dụng hơn.

Lúc này thì

$$H = \frac{a}{9b^2+1} + \frac{b}{9c^2+1} + \frac{c}{9a^2+1}.$$

Ta dùng AM-GM để đánh giá các số hạng của H như sau

$$\frac{a}{9b^2+1} = \frac{a+9ab^2-9ab^2}{9b^2+1} = a - \frac{9ab^2}{9b^2+1} \geqslant a - \frac{9ab^2}{6b} = a - \frac{3ab}{2}.$$

Cộng bất đẳng thức này và các bất đẳng thức tương tự, ta suy ra (ở đây ta dùng bất đẳng thức quen thuộc $3(ab + bc + ca) \leqslant (a + b + c)^2$)

$$H \geqslant a + b + c - \frac{3}{2}(ab + bc + ca) \geqslant 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$, tức là khi $x = y = z = 3$. □

Bài toán 9 (Ninh Thuận). *Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = \frac{1}{8}$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{xy + yz + zx} - \frac{1}{x + y + z} \leqslant \frac{2}{3}.$$

Lời giải. Bài này nhẹ nhàng. Ý tưởng là sử dụng đánh giá trung gian để đưa về một biến. Đặt

$$x + y + z = \frac{6}{t^2}.$$

Sử dụng đánh giá $(xy + yz + zx)^2 \geqslant 3xyz(x + y + z)$, ta sẽ suy ra

$$(xy + zy + zx)^2 \geqslant \frac{9}{4t^2}.$$

Suy ra $xy + yz + zx \geqslant \frac{3}{2t}$. Từ đó

$$\frac{1}{xy + yz + zx} - \frac{1}{x + y + z} \leqslant \frac{2t}{3} - \frac{t^2}{6} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}(t - 2)^2 \leqslant \frac{2}{3}.$$

Lưu ý, cách đặt chỉ giúp chúng ta làm việc với các số đẹp hơn, không phải bí quyết của cách giải. Nếu ta đặt $x + y + z = t$ cũng được. □

Bài toán 10 (Nghệ An). *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca \leqslant 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \sqrt{a + b} + \sqrt{b + c} + \sqrt{c + a} - \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2(a + b)}} - \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2(b + c)}} - \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2(c + a)}}.$$

Lời giải. Bài này là rất khó đối với mức THCS. Đã phân thức lại còn chứa căn, có điều kiện, lại cồng kềnh, bốn thứ gộp lại.

Để giải bài toán, ta cần vài đánh giá để đơn giản bớt biểu thức P. Trước hết, ta có bất đẳng thức phụ $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leqslant a + b - \sqrt{ab}$.

Bất đẳng thức này thu được bằng cách viết lại thành $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2} \leqslant \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ rồi nhân lượng liên hợp.

Từ đây suy ra

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2(a + b)}} \leqslant \frac{a + b - \sqrt{ab}}{\sqrt{a + b}} = \sqrt{a + b} - \sqrt{\frac{ab}{a + b}}.$$

Từ đó
$$P \geqslant \sqrt{\frac{ab}{a+b}} + \sqrt{\frac{bc}{b+c}} + \sqrt{\frac{ca}{c+a}}.$$
Đến đây thì dễ thở hơn rồi. Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$ thì $x + y + z \leqslant 3$ và ta cần giá trị nhỏ nhất của
$$Q = \sqrt{\frac{1}{x+y}} + \sqrt{\frac{1}{y+z}} + \sqrt{\frac{1}{z+x}}.$$
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có
$$Q \geqslant \frac{9}{\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}} \geqslant \frac{9}{\sqrt{3(x+y+y+z+z+x)}} \geqslant \frac{9}{\sqrt{3 \cdot 6}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$
Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$ tức là khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{\sqrt{2}}$ đạt được khi $a = b = c = 1$. □

Bài toán 11 (Bà Rịa – Vũng Tàu). *Xét các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*
$$S = \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab}.$$

Lời giải. Bài này rất khó, chỉ một trong hai giá trị cần tìm đã là đủ khó rồi. Có thể "*đoán*" được giá trị nhỏ nhất là 1 và giá trị lớn nhất là $\sqrt{2}$ (bài toán gốc là như vậy), nhưng xử lý tiếp thế nào?

Ý tưởng chung là tìm cách "*quy đồng mẫu số*" bằng một đánh giá trung gian.

Ở chiều giá trị lớn nhất, ta sẽ chứng minh rằng
$$\frac{a}{1+bc} \leqslant \frac{a\sqrt{2}}{a+b+c} \tag{3}$$
Điều này sẽ luôn đúng khi $a = 0$ còn với $a > 0$ thì tương đương với
$$(a+b+c)^2 \leqslant 2(1+bc)^2.$$
Khai triển ra và áp dụng giả thiết, điều này tương đương với
$$2ab + 2ac \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + 2b^2c^2 + 2bc \Leftrightarrow (a-b-c)^2 + 2b^2c^2 \geqslant 0.$$
Dấu bằng xảy ra khi $a = b + c$ và $bc = 0$. Từ đây ta tìm được giá trị lớn nhất của S là $\sqrt{2}$ đạt được, chẳng hạn khi $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}, c = 0$.

Ở chiều giá trị nhỏ nhất, ta lại phải dùng một đánh giá khác, chú ý rằng $a \leqslant 1$ nên
$$a + abc \leqslant a + \frac{a(b^2+c^2)}{2} = a + \frac{a(1-a^2)}{2} = a + \frac{a(1+a)(1-a)}{2} \leqslant a + \frac{1 \cdot 2(1-a)}{2} = 1.$$
Cho nên $\frac{a}{1+bc} = \frac{a^2}{a+abc} \geqslant a^2$. Cộng các bất đẳng thức tương tự lại ta có $S \geqslant a^2 + b^2 + c^2$. Dấu bằng xảy ra, chẳng hạn khi $a = 1, b = c = 0$. □

Bài toán 12 (Quảng Trị). *Cho a, b, c là các số thực tùy ý*

(a) Chứng minh rằng $4(a^2 - ab + b^2) \geqslant (a+b)^2$.

(b) Chứng minh rằng

$$4(a^2+b^2)(b^2-bc+c^2)(3c^2+2ca+3a^2) \geqslant (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2.$$

Lời giải. Bài này rất cơ bản. Câu (b) cũng cứ tách ra từng nhóm mà làm. □

Bài toán 13 (Thái Bình). *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2 = 3abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$T = \frac{a}{3a^2+2b^2+c^2} + \frac{b}{3b^2+2c^2+a^2} + \frac{c}{3c^2+2a^2+b^2}.$$

Lời giải. Ta dùng AM-GM để đánh giá mẫu số

$$3a^2+2b^2+c^2 \geqslant 6\sqrt[6]{a^6b^4c^2} = 6a\sqrt[3]{b^2c}.$$

Từ đó

$$\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2} \leqslant \frac{1}{6\sqrt[3]{b^2c}}.$$

Cộng bất đẳng thức này và các bất đẳng thức tương tự cho hai số hạng còn lại, ta có

$$T \leqslant \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{b^2c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c^2a}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}}\right). \tag{4}$$

Tiếp tục dùng AM-GM ta có

$$\frac{2}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{b^2c}}.$$

Tương tự

$$\frac{2}{c} + \frac{1}{a} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{c^2a}}, \frac{2}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{a^2b}}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{\sqrt[3]{b^2c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c^2a}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}} \tag{5}$$

Kết hợp (4) và (5), ta được

$$T \leqslant \frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{ab+bc+ca}{abc} \leqslant \frac{1}{6}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{abc} = \frac{1}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Đây là một bài toán khá khó. □

Bài toán 14 (Quảng Ninh). *Cho hai số thực x, y. thỏa mãn $0 < x < y \leqslant 8$ và $xy \leqslant 4x + 3y$. Chứng minh*

$$x^2 + y^2 \leqslant 100.$$

Lời giải. Đây là bài toán khó và đẹp.

Trước hết, để ý rằng nếu $x < 6$ thì hiển nhiên là

$$x^2 + y^2 < 6^2 + 8^2 = 100,$$

nên tiếp theo ta chỉ cần xét trường hợp $x \geqslant 6$.

Ta khai thác điều kiện $x < y \leqslant 8$ và $xy \leqslant 4x + 3y$, $(8-x)(8-y) \geqslant 0$. Suy ra $xy + 64 \geqslant 8x + 8y$, suy ra $4x + 3y + 64 \geqslant 8x + 8y$. Từ đó $4x + 5y \leqslant 64$.

Vì $6 \leqslant x < y \leqslant 8$ nên $y - x \leqslant 2$. Suy ra $(y-x)^2 \leqslant 2(y-x)$. Từ đây suy ra

$$x^2 + y^2 \leqslant 2xy + 2(y-x) = 8x + 6y + 2(y-x) = 6x + 8y$$

$$= \frac{3}{2}(4x + 5y) + \frac{y}{2} \leqslant \frac{3}{2} \cdot 64 + \frac{8}{2} = 100.$$

Chứng minh hoàn tất. □

Bài toán 15 (Lào Cai). *(a) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + y \leqslant \frac{2}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$A = 53x + 53y + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}.$$

(b) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 3$. Chứng minh rằng

$$x^4 + y^4 + z^4 + x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3 + x + y + z.$$

Lời giải. Hai bài này đều khá cơ bản.

(a) Ta dự đoán điểm rơi là $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ nên sẽ dùng AM-GM tương ứng với điểm rơi này:

$$27x + 27x + \frac{1}{x^2} \geqslant 3\sqrt[3]{27^2} = 27.$$

Hay là $54x + \frac{1}{x^2} \geqslant 27$. Tương tự $54y + \frac{1}{y^2} \geqslant 27$. Từ đó

$$A = 54x + \frac{1}{x^2} + 54y + \frac{1}{y^2} - (x+y) \geqslant 27 + 27 - \frac{2}{3} = \frac{160}{3}.$$

(b) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$x^4 + y^4 + z^4 + 3 = (x^4 + 1) + (y^4 + 1) + (z^4 + 1) \geqslant 2(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 6.$$

Suy ra $x^4 + y^4 + z^4 \geqslant 3$.

Lại áp dụng AM-GM ta có

$$x^3 + y^3 + z^3 + x + y + z \geqslant 2(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geqslant 2(x + y + z).$$

Suy ra $x^3 + y^3 + z^3 \geqslant x + y + z$. □

Bài toán 16 (Khánh Hòa). *Cho các số thực* $x_1, x_2, \dots, x_{21}$ *thỏa mãn* $x_1, x_2, \dots, x_{21} \geqslant -2$ *và* $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{21}^3 = 12$. *Chứng minh rằng*

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{21} \leqslant 18.$$

Lời giải. Bài này tuy kỹ thuật nhẹ nhàng nhưng có thể xếp vào bài toán khó. Ý tưởng là ta tìm cách đánh giá x_i qua x_i^3 bằng các biểu thức hiển nhiên dương. Biểu thức thứ nhất hiển nhiên là $x_i + 2$ (từ điều kiện $x_i \geqslant -2$). Còn biểu thức thứ hai là một bình phương dạng $(x_i + a)^2$. Để chỉ xuất hiện x_i^3 và x_i ta chọn $a = -1$.

Vậy là ta dùng

$$(x_i + 2)(x_i - 1)^2 \geqslant 0.$$

Suy ra $x_i^3 - 3x_i + 2 \geqslant 0$, hay $x_i^3 + 2 \geqslant 3x_i$.

Cho $i = 1, 2, \dots, 21$ rồi cộng lại, ta được

$$12 + 42 \geqslant 3(x_1 + x_2 + ... + x_{21}).$$

Suy ra

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{21} \leqslant 18.$$

Chứng minh hoàn tất. □

Bài toán 17 (PTNK, ĐHQG TP HCM). *Cho dãy* n *số thực* $x_1, x_2, \dots, x_n$ $(n \geqslant 5)$ *thỏa mãn điều kiện* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n$ *và* $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. *Chứng minh rằng*

(a) Nếu $x_n \geqslant \frac{1}{3}$ *thì* $x_1 + x_2 \leqslant x_n$.

(b) Nếu $x_n \leqslant \frac{2}{3}$ *thì tồn tại số nguyên dương* $k < n$, *sao cho*

$$\frac{1}{3} \leqslant x_1 + x_2 + \dots + x_k \leqslant \frac{2}{3}.$$

Lời giải. Tương tự như bài trên, bài này kỹ thuật nhẹ nhàng nhưng là bài toán khó. Và hai ý về cơ bản là không liên quan đến nhau.

(a) Giả sử ngược lại $x_1 + x_2 > x_n \geqslant \frac{1}{3}$. Khi đó $x_2 > 0$ và vì thế $x_n > 0$ với mọi $n > 2$. Lúc này

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + (...) + x_n > \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai và ta có $x_1 + x_2 \leqslant x_n$.

(b) Xét hai trường hợp. Trường hợp thứ nhất $x_n \geqslant \frac{1}{3}$. Khi đó thì

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = 1 - x_n,$$

sẽ $\leqslant \frac{2}{3}$ và $\geqslant \frac{1}{3}$ và ta có $k = n - 1$ là số nguyên dương cần tìm.

Trường hợp thứ hai, $x_n < \frac{1}{3}$. Khi đó $x_k < \frac{1}{3}$ với mọi k. Vì

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1,$$

nên sẽ tồn tại số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geqslant \frac{1}{3}.$$

Ta chứng minh với số k này

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leqslant \frac{2}{3}.$$

Thật vậy, nếu ngược lại

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k > \frac{2}{3},$$

thì

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_k) - x_k > \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

mâu thuẫn với cách chọn k. □

Lưu ý, ở câu (a) có một cái bẫy. Nếu chứng minh trực tiếp mà sử dụng đánh giá

$$\frac{2}{3} \geqslant x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \geqslant x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 2(x_1 + x_2),$$

rồi suy ra $x_1 + x_2 \leqslant \frac{1}{3}$ là ta phạm sai lầm ở dấu bất đẳng thức thứ hai: Ở đây x_i là số thực và có thể âm.

Bài toán 18 (Lâm Đồng). *Cho a, b, c là các số dương và $a + b + c = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{a^3}{a^2 + 4ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + 4bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + 4ca + a^2}.$$

Lời giải. Bài này sử dụng một đánh giá trung gian, xem hướng dẫn ở bài 21. □

Bài toán 19 (Hà Nam). *Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z \leqslant 1$. Chứng minh*

$$\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(\frac{1}{y^2} - 1\right)\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) \geqslant 512.$$

Lời giải. Sử dụng điều kiện $x + y + z \leqslant 1$ ta có

$$\frac{1}{x^2} - 1 \geqslant \frac{(x + y + z)^2}{x^2} - 1 = \frac{(2x + y + z)(y + z)}{x^2}.$$

Từ đó chỉ cần chứng minh

$$(2x + y + z)(y + z)(2y + z + x)(z + x)(2z + x + y)(x + y) \geqslant 512x^2y^2z^2.$$

Cái cuối này dùng AM-GM là ra. □

Thú vị là bất đẳng thức này "*tương đương*" với bất đẳng thức IMO 2001 nổi tiếng: *Cho a, b, c là các số thực dương, khi đó*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1.$$

Các bạn thử thiết lập sự tương đương đó nhé! Đương nhiên, tuy là "*tương đương*" nhưng bất đẳng thức IMO khó hơn.

Bài toán 20 (Daklak). *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c \leqslant 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{b(a^2+1)^2}{a^2(b^2+1)}+\frac{c(b^2+1)^2}{b^2(c^2+1)}+\frac{a(c^2+1)^2}{c^2(a^2+1)}.$$

Lời giải. Đặt $x=\frac{a^2+1}{a}$, $y=\frac{b^2+1}{b}$, $z=\frac{c^2+1}{c}$, thì

$$P=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\begin{aligned}P=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} &\geqslant x+y+z=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant a+b+c+\frac{9}{a+b+c}\\ &=\left(a+b+c+\frac{4}{a+b+c}\right)+\frac{5}{a+b+c} \geqslant 4+\frac{5}{2}=\frac{13}{2}.\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{2}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{13}{2}$. □

Bài này không khó nhưng phát biểu cồng kềnh, xấu xí, là ghép nối cơ học của hai bài toán.

Bài toán 21 (Bình Phước). *Cho a, b, c là các số dương*

(a) *Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} \geqslant a-\frac{b}{2}.$$

(b) *Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

Lời giải. Ý (a) tất nhiên là không khó. Ta chỉ cần biến đổi tương đương.

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} \geqslant a-\frac{b}{2} \Leftrightarrow 2a^3 \geqslant 2a^3+2ab^2-ba^2-b^3 \Leftrightarrow b(a-b)^2 \geqslant 0.$$

Hơn nữa, đây là gợi ý quan trọng để giải ý (b) (cũng là gợi ý để giải các bài 19.

Thật vậy, do

$$a^2 + ab + b^2 \leqslant \frac{3}{2}(a^2 + b^2),$$

nên

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} \geqslant \frac{2}{3}\left(a - \frac{b}{2}\right) = \frac{2a}{3} - \frac{b}{3}.$$

Cộng bất đẳng thức này và các bất đẳng thức tương tự cho hai số hạng còn lại, ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. □

Bài toán 22 (Quảng Ngãi). *Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau và thỏa mãn điều kiện $(c + a)(c + b) = 4$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{1}{(c+b)^2} \geqslant 1.$$

Đây là một bài toán khá khó đối với trình độ THCS.

Lời giải. Đặt $x = c + a$, $y = c + b$ thì $xy = 4$ và $(a - b)^2 = (x - y)^2$, thì $x \neq y$ và $xy = 4$. Ta quy về bài toán chứng minh

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geqslant 1. \tag{6}$$

Không mất tính tổng quát có thể giả sử $x, y > 0$. Ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{xy}{(x-y)^2} + \frac{xy}{x^2} + \frac{xy}{y^2} \geqslant 4. \tag{7}$$

Đặt $t = \frac{x}{y} \neq 1$, bất đẳng thức cuối cùng này tương đương với

$$\frac{t}{(t-1)^2} + t + \frac{1}{t} \geqslant 4,$$

hay là

$$t^2 + t^2(t-1)^2 + (t-1)^2 \geqslant 4t(t-1)^2,$$

hoặc

$$t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1 \geqslant 0,$$

$$t^2 - 6t + 11 - \frac{6}{t} + \frac{1}{t^2} \geqslant 0. \tag{8}$$

Đặt $u = t + \frac{1}{t}$, thì (8), tương đương

$$u^2 - 2 - 6u + 11 \geqslant 0 \Leftrightarrow (u-3)^2 \geqslant 0.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Kỹ thuật trong bài này khá hay. Phép đặt $x = c + a$, $y = c + b$ là khá tự nhiên. Bước chuyển từ (6)) sang (7) là bước "*thuần nhất hóa*", còn bước đặt $t = \frac{x}{y}$ lại là bước "*chuẩn hóa*".

Bài toán 23 (Đắk Nông). *Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a, b \in [2021, 2022]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$A = (a+b)\left(\frac{2021}{a} + \frac{2021}{b}\right).$$

Lời giải. Bài này cơ bản. Việc đưa các số $2021, 2022$ vào chỉ làm rối thêm, bớt đẹp. Cứ để a, b thuộc $[1, 2]$ và tìm GTNL của

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

thì chân phương hơn.

Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 2 + \frac{a^2+b^2}{ab}.$$

Ta có $(2022a - 2021b)(2022b - 2021a) \geqslant 0$ nên từ đây suy ra

$$2021 \cdot 2022(a^2+b^2) \leqslant (2021^2 + 2022^2)ab,$$

$$2021 \cdot 2022(a^2+b^2) \leqslant (20212 + 20222)ab.$$

Suy ra

$$\frac{a^2+b^2}{ab} \leqslant \frac{2021^2+2022^2}{2021 \cdot 2022}.$$

Từ đó tìm được giá trị lớn nhất cần tìm là

$$4042 + \frac{2021(2021^2+2022^2)}{2021 \cdot 2022} = 6064 + \frac{2021^2}{2022}.$$

Lời giải hoàn tất. □

Bài toán 24 (Hòa Bình). *Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 4$. Chứng minh*

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} \geqslant 1.$$

Lời giải. Bài này cơ bản, phù hợp đề thi tuyển sinh 10. Ta chỉ cần áp dụng AM-GM hai lần

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} \geqslant \frac{4}{xy+xz} = \frac{4}{x(y+z)} \geqslant \frac{4}{\left(\frac{x+y+z}{2}\right)^2} = 1.$$

Chứng minh hoàn tất. □

Bài toán 25 (Vĩnh Long). *Cho số thực x thỏa mãn $1 \leqslant x \leqslant 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T = \frac{3+x}{x} + \frac{6-x}{3-x}.$$

Lời giải. Bài này cơ bản, đẹp, phù hợp với đề tuyển sinh 10. Ta có

$$T = 1 + \frac{3}{x} + 1 + \frac{3}{3-x} = 2 + \frac{9}{x(3-x)}.$$

Để tìm min, max của T ta chỉ cần tìm min, max của $x(3-x)$. Ta có

$$x(3-x) = \frac{9}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \leqslant \frac{9}{4}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{3}{2}$.

Mặt khác, do $1 \leqslant x \leqslant 2$ nên $-\frac{1}{2} \leqslant x - \frac{3}{2} \leqslant \frac{1}{2}$. Suy ra $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}$. Suy ra

$$x(3-x) = \frac{9}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \geqslant \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 1$ hoặc $x = 2$.

Từ đó giá trị lớn nhất của T bằng $2 + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}$ đạt được khi $x = 1$ hoặc $x = 2$. Giá trị nhỏ nhất của T bằng $2 + 4 = 6$, đạt được khi $x = \frac{3}{2}$. □

Bài toán 26 (Kiên Giang). *Cho x, y, z là các số thực lớn hơn 2021 và thỏa mãn*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{2021}.$$

Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức sau

$$\sqrt{x+y+z} \geqslant \sqrt{x-2021} + \sqrt{y-2021} + \sqrt{z-2021}.$$

Lời giải. Đặt $a = \frac{x}{2021}, b = \frac{y}{2021}, c = \frac{z}{2021}$ thì $a, b, c > 1$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$. Ta chứng minh

$$\sqrt{a+b+c} \geqslant \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1}.$$

Đây là bài toán thi Olympic của Iran. Cách giải là dùng Cauchy-Schwarz ở dạng

$$\sqrt{(x+y+z)(a+b+c)} \geqslant \sqrt{xa} + \sqrt{yb} + \sqrt{zc},$$

cho các số $\frac{a-1}{a}, \frac{b-1}{b}, \frac{c-1}{c}$ và a, b, c với chú ý $\frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-1}{c} = 1$.

Bài toán của Iran rất đẹp, nhưng bài toán chế biến này thì không còn đẹp nữa. Bản thân tôi không thích kiểu "*sáng tác*" này cho lắm. □

Bài toán 27 (Bình Định). *Cho các số thực x, y. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T = \frac{x-y}{x^4 + y^4 + 6}.$$

Lời giải. Bài này cơ bản. Gợi ý $(x-y)^2 \leqslant 2(x^2+y^2)$ và $x^4 + y^4 \geqslant \frac{(x^2+y^2)^2}{2}$. □

Bài toán 28 (Bình Định). *Cho x, y, z là ba số dương thỏa $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng*

$$P = \frac{1 - x^2}{x + yz} + \frac{1 - y^2}{y + zx} + \frac{1 - z^2}{z + xy} \geqslant 6.$$

Lời giải. Sử dụng thuần nhất hóa

$$1 - x^2 = (x + y + z)^2 - x^2 = (2x + y + z)(y + z),$$

$$x + yz = x(x + y + z) + yz = (x + y)(x + z).$$

Từ đó nếu đặt $a = y + z, b = z + x, c = x + y$, thì

$$VT = \frac{(b + c)a}{bc} + \frac{(c + a)b}{ca} + \frac{(a + b)c}{ab} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b}.$$

Chứng minh hoàn tất. □

Bài toán 29 (Cà Mau). *Cho a, b là hai số thực dương sao cho $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$. Chứng minh*

$$\sqrt{3a + b} + \sqrt{3b + a} \leqslant 2\sqrt{3a + b} \cdot \sqrt{3b + a}.$$

Lời giải. Đây là một bài toán đẹp. Cách giải cũng khá chân phương, giống như giải phương trình chứa căn vậy.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho hai căn thức vế trái, ta có

$$\sqrt{3a + b} + \sqrt{3b + a} \leqslant \sqrt{2(3a + b + 3b + a)} = \sqrt{8a + 8b}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh sẽ đúng nếu ta chứng minh được

$$\sqrt{8a + 8b} \leqslant 2\sqrt{(3a + b)(3b + a)}.$$

Ta biến đổi tương đương

$$\sqrt{8a + 8b} \leqslant 2\sqrt{(3a + b)(3b + a)},$$

hay là

$$2(a + b) \leqslant (3a + b)(3b + a),$$

hoặc

$$3(a + b)^2 + 4ab - 2(a + b) \geqslant 0. \tag{9}$$

Đặt $ab = t^2$. Theo giả thiết $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$, suy ra $a + b + 2t = 1$, tức là $a + b = 1 - 2t$. Thay vào (9), ta cần chứng minh

$$3(1 - 2t)^2 + 4t^2 - 2(1 - 2t) \geqslant 0,$$

hay

$$16t^2 - 8t + 1 \geqslant 1 \Leftrightarrow (4t - 1)^2 \geqslant 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = \frac{1}{4}$, từ đây tính được $a = b = \frac{1}{4}$. □

Bài toán 30 (Bình Định). *Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a + 2b \geqslant 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{3a^2 + a^2b + \frac{9ab^2}{2} + (8+a)b^3}{ab}.$$

Lời giải. Bài này thật xấu xí. Không hiểu tại sao lại phát biểu một bài toán xấu như vậy. Và đây là một bài khá khó. Gợi ý điểm rơi là $a = \frac{3}{2}, b = \frac{3}{4}$. □

Bài toán 31 (Thanh Hóa). *Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = 15\sqrt{3(x^4 + y^4 + z^4)} + \frac{xy + yz + zx}{x^2y + y^2z + z^2x}.$$

Lời giải. Bài này cơ bản nhưng dùng nhiều đánh giá trung gian. Gợi ý

$$\sqrt{3(x^4 + y^4 + z^4)} \geqslant x^2 + y^2 + z^2,$$

và $3(x^2y + y^2z + z^2x) \leqslant (x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)$. □

Bài toán 32 (Hải Phòng). *Cho các số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng*

$$\frac{x\sqrt{xy}}{\sqrt{2x+y}} + \frac{y\sqrt{yz}}{\sqrt{2y+z}} + \frac{z\sqrt{zx}}{\sqrt{2z+x}} \geqslant \sqrt{3xyz}.$$

Lời giải. Bài này khá cơ bản đối với các bạn quen sử dụng AM-GM và Cauchy-Schwarz để đánh giá.

Chia hai vế của bất đẳng thức cho $\sqrt{3xyz}$ ta đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng

$$\frac{x}{\sqrt{3z(2x+y)}} + \frac{y}{\sqrt{3x(2y+z)}} + \frac{z}{\sqrt{3y(2z+x)}} \geqslant 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho mẫu thức, ta có

$$\sqrt{3z(2x+y)} \leqslant \frac{3z + 2x + y}{2},$$

cùng các bất đẳng thức tương tự. Do đó

$$VT \geqslant \frac{2x}{3z + 2x + y} + \frac{2y}{3x + 2y + z} + \frac{2z}{3y + 2z + x}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$\sum \frac{2x}{3z + 2x + y} \geqslant \frac{(2x + 2y + 2z)^2}{2x(3z + 2x + y) + 2y(3x + 2y + z) + 2z(3y + 2z + x)} = 1.$$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh. □

Bài toán 33 (Yên Bái). *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $18abc = a + 2b + 3c$. Chứng minh*

$$(1 + a^2)(1 + 4b^2)(1 + 9c^2) \geqslant 8.$$

Lời giải. Bài này cơ bản. Đặt $x = a, y = 2b, z = 3c$ thì $3xyz = x + y + z$ ta cần chứng minh

$$(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) \geqslant 8.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $3xyz = x + y + z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz}$. Từ đây suy ra $xyz \geqslant 1$.

Lại áp dụng AM-GM thì ta có

$$(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) \geqslant 2x \cdot 2y \cdot 2z = 8xyz \geqslant 8.$$

Chứng minh hoàn tất. □

Bài toán 34 (Ninh Bình). *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = \frac{1}{2x + 3y + 3z} + \frac{1}{3x + 2y + 3z} + \frac{1}{3x + 3y + 2z}.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geqslant \frac{16}{a + b + c + d},$$

cho các biểu thức ở vế trái. □

Bài toán 35 (Phú Thọ). *Cho ba số dương x, y, z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{xz}{y^2 + yz} + \frac{y^2}{xz + yz} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{z}}{2\sqrt{x}}.$$

Lời giải. Đây là một bài toán khó. Lời giải thông qua vài phép đánh giá, rồi dự đoán điểm rơi.

Đặt $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}$ thì $\frac{x}{z} = ab$ và

$$\begin{aligned} P &= \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} + \frac{1}{2\sqrt{ab}} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{a}{b+1} + 1 + \frac{b}{a+1} + \frac{1}{2\sqrt{ab}} - \frac{3}{2} \\ &= (a + b + 1)\left(\frac{1}{b+1} + \frac{1}{a+1}\right) + \frac{1}{2\sqrt{ab}} - \frac{3}{2} \geqslant \frac{4(a+b+1)}{a+b+2} + \frac{1}{a+b} - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Đặt $t = a + b$ thì

$$P - 2 \geqslant \frac{4(t+1)}{t+2} + \frac{1}{t} - \frac{7}{2} = \frac{8t(t+1) + 2(t+2) - 7t(t+2)}{2t(t+2)} = \frac{t^2 - 4t + 4}{2t(t+2)} = \frac{(t-2)^2}{2t(t+2)} \geqslant 0.$$

Suy ra $P \geqslant 2$. Dấu bằng xảy ra khi $t = 2$, tức $a = b = 1$, hay $x = y = z$. □

Bài toán 36 (Bình Thuận). *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{2xz}{x^2 + 2yz + 3} + \frac{2yx}{y^2 + 2zx + 3} + \frac{2zy}{z^2 + 2xy + 3} \leqslant 1.$$

Lời giải. Ý tưởng chính là thay thế các mẫu số bằng một mẫu số chung thông qua đánh giá. Hãy chứng minh rằng $x^2 + 2yz + 3 \geqslant 2(xy + yz + zx)$ bằng cách thay 3 bằng $\frac{(x+y+z)^2}{3}$. $\square$

MỘT SỐ BÀI TOÁN SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP DỒN BIẾN TOÀN MIỀN

Võ Quốc Bá Cẩn

GIỚI THIỆU

Bài toán bất đẳng thức trong đề thi IMO 2021 (bài số 2, ngày thi thứ nhất) là một trong những bài toán khó nhất của kỳ thi năm nay. Trong 619 thí sinh tham dự cuộc thi, chỉ có 16 thí sinh đạt trọn vẹn điểm 7 và có đến 522 thí sinh đạt điểm 0 ở bài này.

Trong các ý tưởng tiếp cận bài toán hay và khó này, ý tưởng sử dụng phương pháp quy nạp kết hợp với phương pháp dồn biến toàn miền là một hướng đi hết sức tự nhiên. Dồn biến toàn miền là một phương pháp giảm biến rất hiệu quả đối với các bất đẳng thức nhiều biến. Trong bài viết này, chúng tôi sẽ giới thiệu một số bài toán có thể sử dụng phương pháp này để giải.

Bài toán 1. *Cho số nguyên $n \geqslant 4$ và các số thực không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Chứng minh rằng*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \geqslant 4\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1}, \tag{1}$$

trong đó các chỉ số được xét theo chu kỳ n.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n. Với $n = 4$, bất đẳng thức (1) trở thành

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 \geqslant 4(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1),$$

hay

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 \geqslant 4(a_1 + a_3)(a_2 + a_4).$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM. Như vậy, khẳng định của bài toán đúng với $n = 4$. Bây giờ, giả sử khẳng định đúng đến n $(n \geqslant 4)$, ta sẽ chứng minh

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^2 \geqslant 4\sum_{i=1}^{n+1} a_i a_{i+1} \tag{2}$$

với mọi số thực không âm $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Thay $(a_1, \ldots, a_{n+1})$ bởi $(x+b_1,\ \ldots,\ x+b_{n+1})$ với $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ là các số thực không âm và x là số thực thỏa mãn $x \geqslant -\min\{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{n+1}\}$. Bất đẳng thức (2) có thể được viết lại dưới dạng $f(x) \geqslant 0$, trong đó

$$f(x) = \left[\sum_{i=1}^{n+1}(x+b_i)\right]^2 - 4\sum_{i=1}^{n+1}(x+b_i)(x+b_{i+1}).$$

Ta có

$$f'(x) = 2(n+1)\sum_{i=1}^{n+1}(x+b_i) - 8\sum_{i=1}^{n+1}(x+b_i) = 2(n-3)\sum_{i=1}^{n+1} a_i \geqslant 0.$$

Suy ra $f(x)$ là hàm đồng biến trên miền $\big[-\min\{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{n+1}\},\ +\infty\big)$. Từ đó $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\min\{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{n+1}\}$. Như vậy, để chứng minh bất đẳng thức (2), ta chỉ cần xét $x = -\min\{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{n+1}\}$, tức trong các số a_i có một số bằng 0. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_{n+1} = 0$. Khi đó, bất đẳng thức (2) trở thành

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \geqslant 4\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1}.$$

Sử dụng giả thiết quy nạp, ta có

$$4\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} \leqslant 4\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2.$$

Bất đẳng thức (2) được chứng minh xong. Như vậy, khẳng định của bài toán cũng đúng đến $n+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có khẳng định đúng với mọi số nguyên $n \geqslant 4$. □

Bài toán 2. *Cho số nguyên $n \geqslant 4$ và các số thực không âm $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$. Chứng minh rằng*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geqslant \min\left\{\frac{n}{3},\ \frac{8}{3}\right\}\sum_{i=1}^{n} x_i(x_{i+1}+x_{i+2}+x_{i+3}), \tag{1}$$

trong đó các chỉ số được xét theo chu kỳ n.

Lời giải. Ta sẻ sử dụng quy nạp theo n. Với $n = 4$, bất đẳng thức (1) trở thành

$$\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2 \geqslant \frac{4}{3}\sum_{i=1}^{4} x_i(x_{i+1}+x_{i+2}+x_{i+3}).$$

Bất đẳng thức này đúng do

$$\sum_{i=1}^{4} x_i(x_{i+1}+x_{i+2}+x_{i+3}) = \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2 = \frac{3}{4}\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2.$$

Với $n = 5$, bất đẳng thức (1) trở thành

$$\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^5 \geqslant \frac{5}{3}\sum_{i=1}^{5} x_i(x_{i+1}+x_{i+2}+x_{i+3}).$$

Bất đẳng thức này đúng do

$$\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^5 - \frac{5}{3}\sum_{i=1}^{5} x_i(x_{i+1}+x_{i+2}+x_{i+3}) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{5}(x_i - 2x_{i+2} + x_{i+4})^2 \geqslant 0.$$

Với $n = 6$, bất đẳng thức (1) trở thành

$$\left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right)^2 \geqslant 2\sum_{i=1}^{6} x_i(x_{i+1}+x_{i+2}+x_{i+3}).$$

Bất đẳng thức này đúng do

$$\left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{6} x_i(x_{i+1}+x_{i+2}+x_{i+3}) = (x_1-x_4)^2 + (x_2-x_5)^2 + (x_3-x_6)^2 \geqslant 0.$$

Với $n = 7$, bất đẳng thức (1) trở thành

$$\left(\sum_{i=1}^{7} x_i\right)^2 \geqslant \frac{7}{3}\sum_{i=1}^{7} x_i(x_{i+1}+x_{i+2}+x_{i+3}).$$

Bất đẳng thức này đúng do

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{7} x_i(x_{i+1}+x_{i+2}+x_{i+3}) &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 7} x_i x_j = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{7} x_i\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{7} x_i^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{7} x_i\right)^2 - \frac{1}{14}\left(\sum_{i=1}^{7} x_i\right)^2 = \frac{3}{7}\left(\sum_{i=1}^{7} x_i\right)^2.\end{aligned}$$

Với $n = 8$, bất đẳng thức (1) trở thành

$$\left(\sum_{i=1}^{8} x_i\right)^2 \geqslant \frac{8}{3}\sum_{i=1}^{8} x_i(x_{i+1}+x_{i+2}+x_{i+3}).$$

Đặt $y_1 = x_1 + x_5$, $y_2 = x_2 + x_6$, $y_3 = x_3 + x_7$ và $y_4 = x_4 + x_8$, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{8} x_i(x_{i+1}+x_{i+2}+x_{i+3}) &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} y_i y_j = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} y_i\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} y_i^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} y_i\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\sum_{i=1}^{4} y_i\right)^2 = \frac{3}{8}\left(\sum_{i=1}^{4} y_i\right)^2 \\ &= \frac{3}{8}\left(\sum_{i=1}^{8} x_i\right)^2.\end{aligned}$$

Như vậy, bất đẳng thức (1) cũng đúng trong trường hợp $n = 8$. Bây giờ, giả sử bất đẳng thức (1) đúng đến n $(n \geqslant 8)$, ta sẽ chứng minh

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^2 \geqslant \frac{8}{3}\sum_{i=1}^{n+1} x_i(x_{i+1}+x_{i+2}+x_{i+3}) \qquad (2)$$

với mọi số thực không âm $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Thay $(x_1,\, x_2,\, \ldots, x_{n+1})$ bởi $(x + b_1,\, x + b_2,\, \ldots,\, x + b_{n+1})$ với $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ là các số thực không âm và x là số thực thỏa mãn $x \geqslant -\min\{b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_{n+1}\}$. Bất đẳng thức (2) có thể được viết lại dưới dạng $f(x) \geqslant 0$, trong đó

$$f(x) = \left[\sum_{i=1}^{n+1}(x+b_i)\right]^2 - \frac{8}{3}\sum_{i=1}^{n+1}(x+b_i)(3x+b_{i+1}+b_{i+2}+b_{i+3}).$$

Ta có

$$f'(x) = 2(n+1)\sum_{i=1}^{n+1}(x+b_i) - 14\sum_{i=1}^{n+1}(x+b_i) = 2(n-6)\sum_{i=1}^{n+1}x_i \geqslant 0.$$

Suy ra $f(x)$ là hàm đồng biến trên miền $\big[-\min\{b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_{n+1}\},\, +\infty\big)$. Từ đó $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\min\{b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_{n+1}\}$. Như vậy, để chứng minh bất đẳng thức (2), ta chỉ cần xét $x = -\min\{b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_{n+1}\}$, tức trong các số x_i có một số bằng 0. Không mất tính tổng quát, giả sử $x_{n+1} = 0$. Khi đó, bất đẳng thức (2) trở thành

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2 \geqslant \frac{8}{3}\left[\sum_{i=1}^{n-3}x_i(x_{i+1}+x_{i+2}+x_{i+3})+x_{n-2}(x_{n-1}+x_n)+x_{n-1}(x_n+x_1)+x_n(x_1+x_2)\right]. \quad (3)$$

Chú ý rằng $x_{n-2}(x_{n-1}+x_n) \leqslant x_{n-2}(x_{n-1}+x_n+x_1)$, $x_{n-1}(x_n+x_1) \leqslant x_{n-1}(x_n+x_1+x_2)$ và $x_n(x_1+x_2) \leqslant x_n(x_1+x_2+x_3)$. Từ các bất đẳng thức này và giả thiết quy nạp, ta có

$$\mathrm{VP}_{(3)} \leqslant \frac{8}{3}\sum_{i=1}^{n}x_i(x_{i+1}+x_{i+2}+x_{i+3}) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2.$$

Bất đẳng thức (2) được chứng minh. Điều này chứng tỏ khẳng định của bài toán cũng đúng với $n+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có khẳng định đúng với mọi số nguyên $n \geqslant 4$. □

Bài toán 3. *Cho số nguyên $n \geqslant 3$ và các số thực không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3$. Chứng minh rằng*

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2a_{i+1} + \frac{1}{n^2-7n+13}\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}a_ia_ja_k \leqslant 4,$$

trong đó các chỉ số được xét theo chu kỳ n.

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2a_{i+1} + \frac{1}{n^2-7n+13}\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}a_ia_ja_k \leqslant \frac{4}{27}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^3. \quad (1)$$

Bỏ qua điều kiện $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3$, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (1) đúng với mọi số thực không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bằng quy nạp theo n. Với $n = 3$, ta phải chứng minh

$$a_1^2a_2 + a_2^2a_3 + a_3^2a_1 + a_1a_2a_3 \leqslant \frac{4}{27}(a_1+a_2+a_3)^3.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử a_2 nằm giữa a_1 và a_3. Khi đó, ta có $a_3(a_2-a_1)(a_2-a_3)\leqslant 0$, suy ra $a_2^2a_3+a_3^2a_1\leqslant a_1a_2a_3+a_2a_3^2$. Sử dụng đánh giá này kết hợp với bất đẳng thức AM-GM, ta được

$$\begin{aligned}a_1^2a_2+a_2^2a_3+a_3^2a_1+a_1a_2a_3&\leqslant a_1^2a_2+a_1a_2a_3+a_2a_3^2+a_1a_2a_3=a_2(a_3+a_1)^2\\&=4\cdot a_2\cdot\frac{a_3+a_1}{2}\cdot\frac{a_3+a_1}{2}\leqslant 4\left(\frac{a_2+\frac{a_3+a_1}{2}+\frac{a_3+a_1}{2}}{3}\right)^3\\&=\frac{4}{27}(a_1+a_2+a_3)^3.\end{aligned}$$

Như vậy, bất đẳng thức (1) đúng với $n=3$. Bây giờ, giả sử bất đẳng thức (1) đúng đến n $(n\geqslant 3)$, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (trường hợp $n+1$ biến của bài toán)

$$\sum_{i=1}^{n+1}a_i^2a_{i+1}+\frac{1}{n^2-5n+7}\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n+1}a_ia_ja_k\leqslant\frac{4}{27}\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right)^3\tag{2}$$

cũng đúng với mọi $a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_{n+1}\geqslant 0$. Thay $(a_1,\,a_2,\,\ldots,a_{n+1})$ bởi $(x+b_1,\,x+b_2,\,\ldots,\,x+b_{n+1})$ với $b_1,b_2,\ldots,b_{n+1}$ là các số thực không âm và x là số thực thỏa mãn $x\geqslant-\min\{b_1,\,b_2,\,\ldots,\,b_{n+1}\}$. Bất đẳng thức (2) có thể được viết lại dưới dạng $f(x)\geqslant 0$, trong đó

$$f(x)=\frac{4}{27}\left[\sum_{i=1}^{n+1}(x+b_i)\right]^3-\sum_{i=1}^{n+1}(x+b_i)^2(x+b_{i+1})-\frac{1}{n^2-5n+7}\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n+1}(x+b_i)(x+b_j)(x+b_k).$$

Ta có

$$\begin{aligned}f'(x)=&\frac{4}{9}(n+1)\left[\sum_{i=1}^{n+1}(x+b_i)\right]^2-\sum_{i=1}^{n+1}(x+b_i)^2-2\sum_{i=1}^{n+1}(x+b_i)(x+b_j)\\&-\frac{n-1}{n^2-5n+7}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(x+b_i)(x+b_j)\\=&\frac{4}{9}(n+1)\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n+1}a_i^2-2\sum_{i=1}^{n+1}a_ia_{i+1}-\frac{n-1}{n^2-5n+7}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}a_ia_j.\end{aligned}$$

Vì $\sum_{i=1}^{n+1}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n+1}a_ia_{i+1}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right)^2$ và $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}a_ia_j\leqslant\frac{n}{2(n+1)}\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right)^2$ nên

$$\begin{aligned}f'(x)&\geqslant\left[\frac{4}{9}(n+1)-1-\frac{n(n-1)}{2(n+1)(n^2-5n+7)}\right]\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right)^2\\&=\frac{(n-2)\big[(n-3)(8n^2-2n-11)+2\big]}{18(n+1)(n^2-5n+7)}\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

Suy ra $f(x)$ là hàm đồng biến trên miền $\big[-\min\{b_1,\,b_2,\,\ldots,\,b_{n+1}\},\,+\infty\big)$. Từ đó $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=-\min\{b_1,\,b_2,\,\ldots,\,b_{n+1}\}$. Như vậy, để chứng minh bất đẳng thức (2), ta chỉ cần xét $x=-\min\{b_1,\,b_2,\,\ldots,\,b_{n+1}\}$, tức trong các số a_i có một số bằng 0. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_{n+1}=0$. Khi đó, bất đẳng thức (2) trở thành

$$\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2a_{i+1}+\frac{1}{n^2-5n+7}\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}a_ia_ja_k\leqslant\frac{4}{27}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^3.\tag{3}$$

Vì $n^2 - 5n + 7 \geqslant n^2 - 7n + 13$ và $\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 a_{i+1} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 a_{i+1}$ nên theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\mathrm{VT}_{(3)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 a_{i+1} + \frac{1}{n^2 - 7n + 13} \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} a_i a_j a_k \leqslant \frac{4}{27} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^3 = \mathrm{VP}_{(3)}.$$

Bất đẳng thức (2) được chứng minh xong. Như vậy, bất đẳng thức (1) cũng đúng đến $n+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có bất đẳng thức (1) đúng với mọi số nguyên $n \geqslant 3$. □

Bài toán 4 (Iran, 2006). *Cho số nguyên dương n và các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Chứng minh rằng*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i + x_j| \geqslant n \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Lời giải. Ta sẽ chứng minh khẳng định đã cho bằng quy nạp theo n. Với $n = 1$ và $n = 2$, khẳng định hiển nhiên đúng. Giả sử khẳng định đúng đến n $(n \geqslant 2)$, ta sẽ chứng minh

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} |x_i + x_j| \geqslant (n+1) \sum_{i=1}^{n+1} |x_i| \tag{1}$$

với mọi số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Thay $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ bởi $(x + a_1, x + a_2, \ldots, x + a_{n+1})$ với x là số thực nào đó. Bất đẳng thức (1) có thể được viết lại dưới dạng $f(x) \geqslant 0$, trong đó

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} |2x + a_i + a_j| - (n+1) \sum_{i=1}^{n+1} |x + a_i|.$$

Đặt $M = \max\left\{ -\frac{a_i + a_j}{2}, -a_i \right\}$ và $m = \min\left\{ -\frac{a_i + a_j}{2}, -a_i \right\}$. Với $x \geqslant M$, ta có $f(x)$ là hàm bậc nhất và đồng biến theo x nên $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = M$. Như vậy, ta chỉ cần chứng minh $f(M) \geqslant 0$, hay nói cách khác, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức (1) trong trường hợp $x_i = 0$ hoặc $x_i + x_j = 0$ với i, j là các chỉ số nào đó.

Với $x \leqslant m$, ta có $f(x)$ là hàm bậc nhất và nghịch biến theo x nên $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = m$. Như vậy, ta chỉ cần chứng minh $f(m) \geqslant 0$, hay nói cách khác, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức (1) trong trường hợp $x_i = 0$ hoặc $x_i + x_j = 0$ với i, j là các chỉ số nào đó.

Với $m \leqslant x \leqslant M$, ta có thể chia đoạn $[m, M]$ thành từng đoạn nhỏ, trong đó đầu mút của mỗi đoạn nhỏ đều là $-a_i$ hoặc $-\frac{a_i + a_j}{2}$, để khử dấu giá trị tuyệt đối trong các số hạng của $f(x)$. Ứng với mỗi đoạn nhỏ, ta thấy hàm số $f(x)$ thu được là một hàm tuyến tính theo x (một trường hợp riêng của hàm lồi và hàm lõm), do đó $f(x)$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong hai đầu mút của mỗi đoạn. Như vậy, để chứng minh bất đẳng thức $f(x) \geqslant 0$, ta chỉ cần xét x nhận giá trị tại đầu mút của mỗi đoạn nhỏ, hay nói cách khác, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức (1) trong trường hợp $x_i = 0$ hoặc $x_i + x_j = 0$ với i, j là các chỉ số nào đó.

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức (1) khi tồn tại chỉ số i sao cho $x_i = 0$ hoặc tồn tại hai chỉ số i, j phân biệt sao cho $x_i + x_j = 0$.

Trường hợp 1: Tồn tại chỉ số $\boldsymbol{i}$ sao cho $\boldsymbol{x_i = 0}$. Giả sử $x_{n+1} = 0$, khi đó ta có

$$\mathrm{VT}_{(1)} = 2\sum_{i=1}^{n+1}|x_i| + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}|x_i+x_j| = 2\sum_{i=1}^{n}|x_i| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i+x_j|$$

và

$$\mathrm{VP}_{(1)} = \sum_{i=1}^{n}|x_i| + n\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

Theo giả thiết quy nạp, ta có

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i+x_j| \geqslant n\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

Mặt khác, ta cũng có $2\sum_{i=1}^{n}|x_i| \geqslant \sum_{i=1}^{n}|x_i|$. Do đó, bất đẳng thức (1) đúng trong trường hợp này.

Trường hợp 2: Tồn tại hai chỉ số $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ phân biệt sao cho $\boldsymbol{x_i + x_j = 0}$. Không mất tính tổng quát, giả sử $x_n + x_{n+1} = 0$, khi đó ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{VT}_{(1)} &= 2\sum_{i=1}^{n+1}|x_i| + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}|x_i+x_j| \\
&= 2\sum_{i=1}^{n+1} + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}|x_i+x_j| + 2\sum_{i=1}^{n}|x_i+x_{n+1}| + 2\sum_{i=1}^{n-1}|x_i+x_n| \\
&= 4|x_n| + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}|x_i+x_j| + 2\sum_{i=1}^{n-1}\big(|x_n+x_i| + |x_n-x_i|\big)
\end{aligned}$$

và

$$\mathrm{VP}_{(1)} = (n-1)\sum_{i=1}^{n-1}|x_i| + 2\sum_{i=1}^{n-1}|x_i| + 2(n+1)|x_n|.$$

Theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}|x_i+x_j| \geqslant (n-1)\sum_{i=1}^{n-1}|x_i|.$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned}
4|x_n| + 2\sum_{i=1}^{n-1}\big(|x_n+x_i| + |x_n-x_i|\big) &= 4|x_n| + 2\sum_{i=1}^{n-1}\big(2\max\{|x_n|,\ |x_i|\}\big) \\
&\geqslant 4|x_n| + 2\sum_{i=1}^{n-1}(|x_n| + |x_i|) \\
&= 2(n+1)|x_n| + 2\sum_{i=1}^{n-1}|x_i|.
\end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức (1) cũng đúng trong trường hợp này. Tóm lại, bất đẳng thức (1) luôn đúng trong mọi trường hợp. Suy ra khẳng định bài toán cũng đúng trong trường hợp $n+1$ số. Theo nguyên lý quy nạp, ta có khẳng định đúng với mọi số nguyên dương n. □

Bài toán 5 (IMO, 2021). *Cho số nguyên dương n và các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Chứng minh rằng*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|a_i+a_j|} \geqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|a_i-a_j|}.$$

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề. *Cho các số thực $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$. Khi đó, hàm số*

$$f(x) = \sqrt{|x-a_1|} + \sqrt{|x-a_2|} + \cdots + \sqrt{|x-a_n|}$$

đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = a_i$ với i là một số nào đó thuộc $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Chứng minh. Với $x \geqslant a_n$, ta có $f(x) = \sqrt{x-a_1} + \sqrt{x-a_2} + \cdots + \sqrt{x-a_n}$ là hàm đồng biến theo x nên trên miền $[a_n, +\infty)$, $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = a_n$.

Với $x \leqslant a_1$, ta có $f(x) = \sqrt{a_1-x} + \sqrt{a_2-x} + \cdots + \sqrt{a_n-x}$ là hàm nghịch biến theo x nên trên miền $(-\infty, a_1]$, $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = a_1$.

Xét trường hợp tồn tại $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ sao cho $a_k \leqslant x \leqslant a_{k+1}$, ta có

$$f(x) = \sqrt{x-a_1} + \cdots + \sqrt{x-a_k} + \sqrt{a_{k+1}-x} + \cdots + \sqrt{a_n-x}.$$

Lúc này, bằng tính toán trực tiếp, ta thấy

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x-a_1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x-a_k}} - \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}-x}} - \cdots - \frac{1}{\sqrt{a_n-x}}\right)$$

là một hàm nghịch biến theo x nên $f(x)$ là một hàm lõm trên $[a_k, a_{k+1}]$. Từ đó suy ra, trên miền $[a_k, a_{k+1}]$, hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x \in \{a_k, a_{k+1}\}$. Bổ đề được chứng minh. ■

Trở lại bài toán, ta sẽ chứng minh khẳng định đã cho bằng quy nạp theo n. Với $n = 1$, khẳng định hiển nhiên đúng. Với $n = 2$, ta phải chứng minh

$$\sqrt{2|a_1|} + \sqrt{2|a_2|} + 2\sqrt{|a_1+a_2|} \geqslant 2\sqrt{|a_1-a_2|},$$

hay

$$\sqrt{|a_1|} + \sqrt{|a_2|} \geqslant \sqrt{2}\left(\sqrt{|a_1-a_2|} - \sqrt{|a_1+a_2|}\right).$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $|a_1| \geqslant |a_2|$. Với chú ý ở hai bất đẳng thức $|x| - |y| \leqslant |x-y|$ và $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \geqslant \sqrt{|x|+|y|}$, ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\left(\sqrt{|a_1-a_2|} - \sqrt{|a_1+a_2|}\right) &= \frac{\sqrt{2}\big(|a_1-a_2| - |a_1+a_2|\big)}{\sqrt{|a_1-a_2|} + \sqrt{|a_1+a_2|}} \leqslant \frac{\sqrt{2}\big|(a_1-a_2) - (a_1+a_2)\big|}{\sqrt{|a_1-a_2| + |a_1+a_2|}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}|a_2|}{\sqrt{|a_1+a_2| + |a_1-a_2|}} \leqslant 2\sqrt{|a_2|} \leqslant \sqrt{|a_1|} + \sqrt{|a_2|},\end{aligned}$$

trong đó đánh giá thứ hai đúng do $|a_1 + a_2| + |a_1 - a_2| \geqslant |(a_1 + a_2) - (a_1 - a_2)| = 2|a_2|$. Như vậy, khẳng định đã cho cũng đúng với $n = 2$.

Bây giờ, giả sử khẳng định đúng đến $n \geqslant 2$, ta sẽ chứng minh

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\sqrt{|a_i + a_j|} \geqslant \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\sqrt{|a_i - a_j|} \tag{1}$$

với mọi số thực $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Thay $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ bởi $(x + x_1, x + x_2, \ldots, x + x_{n+1})$ với x là số thực nào đó. Bất đẳng thức (1) trở thành

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\sqrt{|2x + x_i + x_j|} \geqslant \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\sqrt{|x_i - x_j|}.$$

Vế phải của bất đẳng thức trên không phụ thuộc vào x, còn vế trái là một hàm có dạng như trong bổ đề. Do đó, theo bổ đề trên, ta chỉ cần xét bất đẳng thức $x = -\frac{x_i + x_j}{2}$ với $i, j \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$. Điều này cũng có nghĩa là ta chỉ cần xét bất đẳng thức (1) tại trường hợp tồn tại $i, j \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ sao cho $a_i + a_j = 0$. Có hai khả năng xảy ra.

Khả năng 1: $\boldsymbol{i = j}$. Lúc này, ta thấy tồn tại $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ sao cho $a_i = 0$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a_{n+1} = 0$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{VT}_{(1)} &= \sum_{i=1}^{n+1}\sqrt{2|a_i|} + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\sqrt{|a_i + a_j|}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sqrt{2|a_i|} + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\sqrt{|a_i + a_j|} + 2\sum_{i=1}^{n}\sqrt{|a_i + a_{n+1}|}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|a_i + a_j|} + 2\sum_{i=1}^{n}\sqrt{|a_i|}
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
\mathrm{VP}_{(1)} &= 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\sqrt{|a_i - a_j|}\\
&= 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\sqrt{|a_i - a_j|} + 2\sum_{i=1}^{n}\sqrt{|a_i - a_{n+1}|}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|a_i - a_j|} + 2\sum_{i=1}^{n}\sqrt{|a_i|}.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức (1) trở thành

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|a_i + a_j|} \geqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|a_i - a_j|}.$$

Đây chính là trường hợp n số của bài toán, và do đó bất đẳng thức này đúng theo giả thiết quy nạp.

Khả năng 2: $\boldsymbol{i \neq j}$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_n + a_{n+1} = 0$. Ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{VT}_{(1)} &= \sum_{i=1}^{n+1} \sqrt{2|a_i|} + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} \sqrt{|a_i + a_j|} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \sqrt{2|a_i|} + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} \sqrt{|a_i + a_j|} + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{|a_i + a_n|} + 2\sum_{i=1}^{n} \sqrt{|a_i + a_{n+1}|} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} \sqrt{|a_i + a_j|} + 2\sqrt{2|a_n|} + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{|a_i + a_n|} + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{|a_i - a_n|}
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
\mathrm{VP}_{(1)} &= 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} \sqrt{|a_i - a_j|} \\
&= 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} \sqrt{|a_i - a_j|} + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{|a_i - a_n|} + 2\sum_{i=1}^{n} \sqrt{|a_i - a_{n+1}|} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} \sqrt{|a_i - a_j|} + 2\sqrt{2|a_n|} + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{|a_i + a_n|} + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{|a_i - a_n|}.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức (1) trở thành

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} \sqrt{|a_i + a_j|} \geqslant \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} \sqrt{|a_i - a_j|}.$$

Đây chính là trường hợp $n-1$ số của bài toán, và do đó bất đẳng thức này đúng theo giả thiết quy nạp. Tóm lại, khẳng định đã cho cũng đúng với $n+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có khẳng định đúng với mọi n nguyên dương. Phép chứng minh được hoàn tất. □

Bài toán 6. *Cho số nguyên $n \geqslant 3$ và các số thực không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa mãn $(S - a_1)\cdots(S - a_n) \neq 0$ với $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a_1}{\sqrt{S - a_n}} + \frac{a_2}{\sqrt{S - a_1}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{S - a_{n-1}}} \leqslant \frac{5}{4}\sqrt{S}. \tag{1}$$

Lời giải. Ta sẽ sử dụng phép quy nạp theo n. Với $n = 3$, bất đẳng thức (1) trở thành

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1 + a_2}} + \frac{a_2}{\sqrt{a_2 + a_3}} + \frac{a_3}{\sqrt{a_3 + a_1}} \leqslant \frac{5}{4}\sqrt{a_1 + a_2 + a_3}. \tag{2}$$

Đặt $x = \sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}}$, $y = \sqrt{\frac{a_2+a_3}{2}}$ và $z = \sqrt{\frac{a_3+a_1}{2}}$. Khi đó, ta có $a_1 = x^2+y^2-z^2$, $a_2 = y^2+z^2-x^2$ và $a_3 = z^2 + x^2 - y^2$. Không mất tính tổng quát, giả sử $x = \max\{x, y, z\}$. Từ đây, với chú ý $a_1, a_2, a_3 \geqslant 0$, ta có $\sqrt{y^2 + z^2} \geqslant x \geqslant \max\{y, z\}$. Bất đẳng thức (2) có thể được viết lại thành

$$\frac{x^2 + y^2 - z^2}{x} + \frac{y^2 + z^2 - x^2}{y} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2} \leqslant k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

trong đó $k = \frac{5\sqrt{2}}{4}$. Bất đẳng thức này tương đương với

$$x + y + z + \frac{(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)}{xyz} \leqslant k\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{3}$$

Với $y < z$, ta thấy vế trái của bất đẳng thức trên luôn nhỏ hơn hoặc bằng

$$x + y + z \leqslant \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} < k\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Xét trường hợp $\sqrt{y^2+z^2} \geqslant x \geqslant y \geqslant z > 0$. Thay $(x,\, y,\, z)$ bởi $(t+a,\, t+b,\, t+c)$ với $a \geqslant b \geqslant c > 0$, và t là số thực thỏa mãn các điều kiện $t > -c$ và $(t+b)^2 + (t+c)^2 \geqslant (t+a)^2$, tức $t \geqslant a - b - c + \sqrt{2(a-b)(a-c)} = t_0$. Bất đẳng thức (3) có thể được viết dưới dạng

$$h(t) = f(t) - (a-b)(b-c)(a-c)g(t) \geqslant 0,$$

trong đó

$$f(t) = k(t+c)\sqrt{(t+a)^2+(t+b)^2+(t+c)^2} - (t+c)(3t+a+b+c)$$

và

$$g(t) = \frac{3t+a+b+c}{(t+a)(t+b)}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{3(t+a)(t+b) - (3t+a+b+c)(2t+a+b)}{(t+a)^2(t+b)^2} \\ &= \frac{3xy - (x+y+z)(x+y)}{x^2y^2} < \frac{3xy - (x+y)^2}{x^2y^2} \leqslant \frac{3xy - 4xy}{x^2y^2} < 0 \end{aligned}$$

nên $g(t)$ là hàm nghịch biến trên miền $[t_0,\, +\infty)$. (4)

Mặt khác, ta cũng có

$$\begin{aligned} f'(t) &= k\sqrt{(t+a)^2+(t+b)^2+(t+c)^2} + \frac{k(t+c)(3t+a+b+c)}{\sqrt{(t+a)^2+(t+b)^2+(t+c)^2}} - (6t+a+b+4c) \\ &= k\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \frac{kz(x+y+z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - (x+y+4z) \\ &> \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} + \frac{\sqrt{3}z(x+y+z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - (x+y+4z) \\ &= \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \sqrt{3}z\right)\left(\sqrt{3} - \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên miền $[t_0,\, +\infty)$. (5)

Từ (4) và (5), ta suy ra $h(t)$ là hàm đồng biến trên miền $[t_0,\, +\infty)$. Suy ra $h(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = t_0$. Như vậy, để chứng minh bất đẳng thức $h(t) \geqslant 0$, ta chỉ cần xét trường hợp $t = t_0$, hay nói cách khác, ta chỉ cần xét trường hợp $x^2 = y^2 + z^2$ là đủ. Điều này tương đương với việc xét bất đẳng thức (2) tại $a_2 = 0$. Lúc này, bất đẳng thức (2) trở thành

$$\sqrt{a_1} + \frac{a_3}{\sqrt{a_3+a_1}} \leqslant \frac{5}{4}\sqrt{a_1+a_3},$$

hay

$$\sqrt{\frac{a_1}{a_3+a_1}}+\frac{a_3}{a_3+a_1}\leqslant\frac{5}{4}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sqrt{\frac{a_1}{a_3+a_1}}+\frac{a_3}{a_3+a_1}\leqslant\frac{a_1}{a_3+a_1}+\frac{1}{4}+\frac{a_3}{a_3+a_1}=\frac{5}{4}.$$

Như vậy, ta đã chứng minh được bất đẳng thức (1) đúng với $n=3$. Bây giờ, giả sử bất đẳng thức (1) đúng đến n $(n\geqslant 4)$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng trong trường hợp $n+1$ biến số. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_{n+1}=\max\{a_1,\, a_2,\, \ldots, a_{n+1}\}$. Đặt $b_1=a_1+a_{n+1}$, $b_2=a_2$, $b_3=a_3$, $\ldots$, $b_n=a_n$, lúc này rõ ràng $S=b_1+b_2+\cdots+b_n$. Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{a_1}{\sqrt{S-a_{n+1}}}+\frac{a_{n+1}}{\sqrt{S-a_n}}&\leqslant\frac{a_1}{\sqrt{S-a_n}}+\frac{a_{n+1}}{\sqrt{S-a_n}}=\frac{b_1}{\sqrt{S-b_n}},\\
\frac{a_2}{\sqrt{S-a_1}}&\leqslant\frac{a_2}{\sqrt{S-a_1-a_{n+1}}}=\frac{b_2}{\sqrt{S-b_1}},\\
\frac{a_3}{\sqrt{S-a_2}}&=\frac{b_3}{\sqrt{S-b_2}},\\
&\cdots\\
\frac{a_{n-1}}{\sqrt{S-a_{n-2}}}&=\frac{b_{n-1}}{\sqrt{S-b_{n-2}}}.
\end{aligned}$$

Sử dụng các đánh giá trên, kết hợp với giả thiết quy nạp, ta được

$$\frac{a_1}{\sqrt{S-a_{n+1}}}+\frac{a_2}{\sqrt{S-a_1}}+\cdots+\frac{a_{n+1}}{\sqrt{S-a_n}}\leqslant\frac{b_1}{\sqrt{S-b_n}}+\frac{b_2}{\sqrt{S-b_1}}+\cdots+\frac{b_n}{\sqrt{S-b_{n-1}}}\leqslant\frac{5}{4}\sqrt{S}.$$

Như vậy, khẳng định của bài toán cũng đúng trong trường hợp $n+1$ biến số. Theo nguyên lý quy nạp, ta có khẳng định đúng với mọi số nguyên $n\geqslant 3$. □

Bài toán 7. *Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh rằng với mọi $k>0$, ta có*

$$a^kb+b^kc+c^ka\leqslant\max\left\{3,\,\frac{3^{k+1}k^k}{(k+1)^{k+1}}\right\}.$$

Lời giải. Để giải bài toán này, ta sẽ xét ba trường hợp như sau.

Trường hợp 1: $\mathbf{0<k\leqslant 1}$. Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli kết hợp với kết quả cơ bản

$$ab+bc+ca\leqslant\frac{(a+b+c)^2}{3},$$

ta được

$$\begin{aligned}
a^kb+b^kc+c^ka&=b\big[1+(a-1)\big]^k+c\big[1+(b-1)\big]^k+a\big[1+(c-1)\big]^k\\
&\leqslant b\big[1+k(a-1)\big]+c\big[1+k(b-1)\big]+a\big[1+k(c-1)\big]\\
&=k(ab+bc+ca)+3-3k\leqslant k\cdot\frac{(a+b+c)^2}{3}+3-3k=3.
\end{aligned}$$

Trường hợp 2: $\boldsymbol{1 < k < 2}$. Trong trường hợp này, bằng cách sử dụng kết quả đơn giản (bạn đọc có thể tự chứng minh): *Nếu* $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0$ *và* $m > 1$, *thì*

$$x^m y + y^m z + z^m x \geqslant xy^m + yz^m + zx^m, \tag{$*$}$$

dễ dàng nhận thấy rằng ta chỉ cần xét bài toán trong trường hợp $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$ là đủ.

Bây giờ đặt $K = \max\left\{3,\ \dfrac{3^{k+1}k^k}{(k+1)^{k+1}}\right\}$, $a = c + s$ và $b = c + t$ $(s \geqslant t \geqslant 0)$, bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$g(c) = K\left(c + \frac{s+t}{3}\right)^{k+1} - (c+s)^k(c+t) - (c+t)^k c - c^k(c+s) \geqslant 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} g'(c) &= K(k+1)\left(c + \frac{s+t}{3}\right)^k - k\big[(c+s)^{k-1}(c+t) + (c+t)^{k-1}c \\ &\qquad + c^{k-1}(c+s)\big] - \big[(c+s)^k + (c+t)^k + c^k\big] \\ &\geqslant 3(k+1)\left(c + \frac{s+t}{3}\right)^k - k\big[(c+s)^{k-1}(c+t) + (c+t)^{k-1}c \\ &\qquad + c^{k-1}(c+s)\big] - \big[(c+s)^k + (c+t)^k + c^k\big] \\ &= 3(k+1)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^k - k(a^{k-1}b + b^{k-1}c + c^{k-1}a) - (a^k + b^k + c^k). \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh $g'(c) \geqslant 0$ bằng cách chứng minh

$$3(k+1)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^k \geqslant k(a^{k-1}b + b^{k-1}c + c^{k-1}a) + (a^k + b^k + c^k).$$

Sử dụng $(*)$ một lần nữa với $x = a^{k-1}$, $y = b^{k-1}$, $z = c^{k-1}$ và $m = \dfrac{1}{k-1} > 1$, ta được

$$\begin{aligned} &(a^{k-1})^{\frac{1}{k-1}} b^{k-1} + (b^{k-1})^{\frac{1}{k-1}} c^{k-1} + (c^{k-1})^{\frac{1}{k-1}} (a^{k-1}) \geqslant \\ &\qquad \geqslant a^{k-1}(b^{k-1})^{\frac{1}{k-1}} + b^{k-1}(c^{k-1})^{\frac{1}{k-1}} + c^{k-1}(a^{k-1})^{\frac{1}{k-1}}, \end{aligned}$$

hay

$$a^{k-1}b + b^{k-1}c + c^{k-1}a \leqslant ab^{k-1} + bc^{k-1} + ca^{k-1}.$$

Như vậy, bất đẳng thức $g'(c) \geqslant 0$ sẽ được chứng minh nếu ta có

$$6(k+1)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^k \geqslant 2(a^k + b^k + c^k) + k\sum a^{k-1}(b+c).$$

Do tính thuần nhất nên ta có thể giả sử $a + b + c = 3$ (chú ý rằng khi $a = b = c = 0$ thì bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng). Bất đẳng thức trên trở thành

$$6(k+1) \geqslant 2(a^k + b^k + c^k) + k\sum a^{k-1}(3-a),$$

hay

$$(2-k)(a^k+b^k+c^k)+k(a^{k-1}+b^{k-1}+c^{k-1}) \leqslant 6(k+1).$$

Ta viết được bất đẳng thức này dưới dạng $h(a)+h(b)+h(c) \leqslant 0$, trong đó

$$h(a) = (2-k)a^k + 3ka^{k-1} - k(2k-1)(a-1) - 2(k+1).$$

Lần lượt tính đạo hàm cấp một và cấp hai của $h(a)$, ta được

$$h'(a) = k(2-k)a^{k-1} + 3k(k-1)a^{k-2} - k(2k-1),$$

và

$$\begin{aligned} h''(a) &= k(2-k)(k-1)a^{k-2} + 3k(k-1)(k-2)a^{k-3} \\ &= k(k-1)(2-k)a^{k-3}(a-3). \end{aligned}$$

Do $1<k<2$ và $0 \leqslant a \leqslant 3$ nên $h''(a) \leqslant 0$. Điều này chứng tỏ $h'(a)$ là hàm nghịch biến trên $[0,\,3]$. Do $h'(1)=0$ nên ta có $h'(a)>0$ với $a \in [0,\,1)$ và $h'(a)<0$ với $a \in (1,\,3]$. Từ đây suy ra $h(a)$ tăng thực sự trên $[0,\,1]$ và giảm thực sự trên $[1,\,3]$. Qua những lập luận này, ta dễ dàng nhận thấy $h(a)$ đạt cực đại tại $a=1$, tức ta có $h(a) \leqslant h(1) = 0$ với mọi $a \in [0,\,3]$.

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $h(b) \leqslant 0$ và $h(c) \leqslant 0$, do đó $h(a)+h(b)+h(c) \leqslant 0$. Vậy ta đã chứng minh được $g'(c) \geqslant 0$. Từ đó suy ra $g(c)$ là hàm tăng với mọi $c \geqslant 0$, và ta có

$$\begin{aligned} g(c) \geqslant g(0) &= K\left(\frac{s+t}{3}\right)^{k+1} - s^k t = K\left(\frac{s+t}{3}\right)^{k+1} - k^k \cdot \left(\frac{s}{k}\right)^k \cdot t \\ &\geqslant K\left(\frac{s+t}{3}\right)^{k+1} - k^k\left(\frac{k\cdot\frac{s}{k}+t}{k+1}\right)^{k+1} \\ &= \frac{1}{3^{k+1}}\left[K - \frac{3^{k+1}k^k}{(k+1)^{k+1}}\right](s+t)^{k+1} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Trường hợp 3: $\boldsymbol{k \geqslant 2}$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a = \max\{a,\,b,\,c\}$. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta được

$$\begin{aligned} b(a+c)^k = a^k b\left(1+\frac{c}{a}\right)^k &\geqslant a^k b\left(1+\frac{kc}{a}\right) \\ &\geqslant a^k b\left(1+\frac{2c}{a}\right) = a^k b + a^{k-1}bc + a^{k-2}abc \\ &\geqslant a^k b + b^{k-1}bc + c^{k-2}ac^2 = a^k b + b^k c + c^k a. \end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM, ta lại có

$$\begin{aligned} b(a+c)^k = k^k \cdot \left(\frac{a+c}{k}\right)^k \cdot b &\leqslant k^k\left(\frac{k\cdot\frac{a+c}{k}+b}{k+1}\right)^{k+1} \\ &= \frac{3^{k+1}k^k}{(k+1)^{k+1}} \leqslant \max\left\{3,\ \frac{3^{k+1}k^k}{(k+1)^{k+1}}\right\}. \end{aligned}$$

Kết hợp hai bất đẳng thức này lại với nhau, ta dễ dàng suy ra

$$a^k b + b^k c + c^k a \leqslant b(a+c)^k \leqslant \max\left\{3,\ \frac{3^{k+1}k^k}{(k+1)^{k+1}}\right\}.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Qua các bài toán trên, có thể thấy được dồn biến toàn miền là một công cụ rất hiệu quả để xử lý các bất đẳng thức nhiều biến. Để kết lại bài viết này, chúng tôi xin nêu thêm các bài toán khác cũng có thể giải được bằng phương pháp này. Bạn đọc hãy cùng thử sức nhé!

Bài toán 8. *Tìm hằng số k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức*

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \leqslant k\sqrt{a+b+c}$$

đúng với mọi số thực không âm a, b, c thỏa mãn $(a+2b)(b+2c)(c+2a) > 0$.

Bài toán 9. *Cho số nguyên $n \geqslant 3$ và các số thực không âm $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Chứng minh rằng*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geqslant \min\left\{\frac{n}{2},\ 3\right\} \sum_{i=1}^{n} x_i(x_{i+1} + x_{i+2}).$$

Bài toán 10. *Cho các số thực không âm a, b, c, d thỏa mãn $a+b+c+d = 4$. Chứng minh rằng với mọi số thực dương k, ta luôn có bất đẳng thức*

$$(abc)^k + (bcd)^k + (cda)^k + (dab)^k \leqslant \max\left\{4,\ \left(\frac{4}{3}\right)^{3k}\right\}.$$

Bài toán 11 (USAMO, 2000). *Cho số nguyên dương n và các số thực không âm a_1, b_1, a_2, b_2, $\ldots$, a_n, b_n. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min\{a_i a_j,\ b_i b_j\} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min\{a_i b_j,\ a_j b_i\}.$$

Epsilon
Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

MỞ RỘNG CÂU BẤT ĐẲNG THỨC TRONG IMO - 2020

Ngô Văn Thái
Thái Bình

GIỚI THIỆU

Nhiều năm trở lại đây dạng toán bất đẳng thức đại số không có mặt trong đề thi Olympic Toán học Quốc Tế (IMO). Kỳ thi IMO - 2020 đánh dấu sự trở lại của dạng toán này với cấu trúc lạ đẹp không quen thuộc, làm cho nhiều sỹ tử ngỡ ngàng lúng túng. Dạng toán chứng minh bất đẳng thức những năm trước đây là sở trường của đội tuyển Việt Nam, nó góp phần giúp cho thí sinh của chúng ta đạt thành tích cao qua các năm dự thi. Câu chứng minh bất đẳng thức thi IMO - 2020 theo tôi không phải là câu khó nhất trong số 6 câu của đề thi, nhưng đội tuyển của chúng ta chỉ có 3 em trên sáu em làm được trọn vẹn. Sau khi kết thúc kỳ thi IMO - 2020 tôi lướt trên mạng đọc thấy có một số thầy giáo đưa ra khá nhiều cách giải cho câu bất đẳng thức. Phải thừa nhận các cách giải đó rất tự nhiên, tường minh, ngắn gọn chứng tỏ những người giải rất giỏi về toán bất đẳng thức. Trong số những cách giải câu bất đẳng thức thi IMO - 2020 đã đăng, tôi thích nhất cách giải của thầy giáo Võ Quốc Bá Cẩn giáo viên trường THCS Archimedes Academy Hà Nội. Mấy ngày sau tôi cũng nhận được một mở rộng rất đẹp cho câu bất đẳng thức thi IMO - 2020 cùng với cách giải bằng phương pháp quy nạp Toán học khá hay của bạn Lê Khánh Sỹ ở tỉnh Long An (xin phép không trình bày cách giải đó trong bài viết này). Từ cách giải độc đáo của thầy giáo Võ Quốc Bá Cẩn và mở rộng đẹp của bạn Lê Khánh Sỹ cho câu bất đẳng thức thi IMO - 2020 đã gợi mở để tôi hoàn thành bài viết này. Sau đây là lời giải câu bất đẳng thức thi IMO - 2020 cùng với một số mở rộng đưa ra để bạn đọc tham khảo.

Bài toán 1 (IMO 2020). *Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ và $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng*

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1. \tag{1}$$

Lời giải. (Võ Quốc Bá Cẩn) Sử dụng bất đẳng thức AM-GM suy rộng ta được

$$a^a b^b c^c d^d \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Từ đây, có thể thấy rằng phép chứng minh sẽ được hoàn tất nếu ta chứng minh được

$$(a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < 1.$$

Xét các trường hợp sau

- Nếu $a < \frac{1}{2}$, khi đó ta có

$$VT_{(1)} \leqslant (a+3b+3c+3d)(a^2+ab+ac+ad) = (3-2a)a = 1+(1-a)(2a-1) < 1.$$

- Nếu $a \geqslant \frac{1}{2}$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} VT_{(1)} \leqslant (a+3b+3c+3d)\left[a^2+(b+c+d)^2\right] &= (3-2a)\left[a^2+(1-a)^2\right] \\ &= 1-2(2a-1)(1-a)^2 < 1. \end{aligned}$$

Tóm lại trong mọi trường hợp bất đẳng thức bài ra đều đúng. □

1. Một số mở rộng

Cho n số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ có tổng bằng 1.

Mở rộng 1. *Với $n \geqslant 3$, giả sử $a_1 = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Chứng minh rằng*

$$\left[a_1 + 3\left(a_2 + a_3 + \cdots + a_n\right)\right] a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n} < 1. \tag{2}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM suy rộng ta được

$$a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n} \leqslant a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} VT_{(2)} &\leqslant \left[a_1 + 3\left(a_2 + \cdots + a_n\right)\right]\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) \\ &= \left(3 - 2a_1\right)\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Nếu $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$, thì

$$VT_{(3)} = \left[\frac{1}{n} + 3\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{3n-2}{n^2} < 1\,, \ \forall n \geqslant 3.$$

Nếu n số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ không bằng nhau tất cả và dùng giả thiết đã cho sẽ được

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) < \left(a_1^2 + a_1 a_2 + \cdots + a_1 a_n\right) = a_1$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 < a_1^2 + \left(a_2 + \cdots + a_n\right)^2 = a_1^2 + \left(1 - a_1\right)^2.$$

Do đó

$$VP_{(3)} < \left(3 - 2a_1\right)a_1 = 1 + \left(1 - a_1\right)\left(2a_1 - 1\right) < 1, \quad \frac{1}{n} < a_1 < \frac{1}{2}$$

$$VP_{(3)} < \left(3 - 2a_1\right)\left[a_1^2 + \left(1 - a_1\right)^2\right] = 1 - 2\left(2a_1 - 1\right)\left(1 - a_1\right)^2 \leqslant 1, \quad \frac{1}{2} \leqslant a_1 < 1.$$

Tóm lại $VP_{(3)} < 1$ khi $a_1 \in \left[\frac{1}{n}; 1\right)$. Vậy

$$VT_{(2)} \leqslant VP_{(3)} < 1.$$

Chứng minh hoàn tất. □

Mở rộng 2. *Với $n \geqslant 3$, giả sử $a_1 = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Chứng minh rằng với $k \geqslant 3$, ta có*

$$[a_1 + k(a_2 + a_3 + \cdots + a_n)]\, a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n} < \frac{k}{3}. \tag{4}$$

Lời giải. Khi $k = 3$ chính là bất đẳng thức (2).

Xét $k > 3$, khi đó

$$VT_{(4)} = [a_1 + 3(a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (k-3)(a_2 + a_3 + \cdots + a_n)]\, a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n}$$

$$= [a_1 + 3(a_2 + a_3 + \cdots + a_n)]\, a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n} + (k-3)(a_2 + a_3 + \cdots + a_n)\, a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n}.$$

Theo (2), ta được

$$VT_{(4)} < 1 + (k-3)(a_2 + a_3 + \cdots + a_n)\, a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n}.$$

Đến đây bài toán sẽ được chứng minh nếu chứng minh được

$$(a_2 + a_3 + \cdots + a_n)\, a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n} < \frac{1}{3}. \tag{5}$$

Nếu $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$, thì

$$VT_{(5)} = \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} < \frac{1}{3}, \quad \forall n \geqslant 3.$$

Nếu n số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ không bằng nhau tất cả, sử dụng giả thiết đã cho sẽ được

$$a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n} < a_1^{a_1} a_1^{a_2} \cdots a_1^{a_n} = a_1^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = a_1.$$

Suy ra $VT_{(5)} < (1 - a_1)\, a_1$. Nhưng

$$(1 - a_1)\, a_1 - \frac{1}{3} = -\left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{12} < 0.$$

Do đó $VT_{(5)} < \frac{1}{3}$. Vậy

$$VT_{(4)} < 1 + \frac{k-3}{3} = \frac{k}{3}.$$

Bài toán được chứng minh. □

Lời giải. Lời giải bài toán trong trường hợp $k \geqslant 4$ không cần dựa vào (2) bất đẳng thức AM-GM suy rộng.

Từ giả thiết đã cho:

Nếu $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$ thì

$$VT_{(4)} = \left[\frac{1}{n} + k\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{kn - (k-1)}{n^2} = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n^2} < \frac{k}{3}, \quad \forall n \geqslant 3,\ k \geqslant 4.$$

Nếu n số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ không bằng nhau tất cả sẽ được

$$a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n} < a_1^{a_1} a_1^{a_2} \cdots a_1^{a_n} = a_1^{a_1+a_2+\cdots+a_n} = a_1.$$

Suy ra $VT_{(4)} < [k - (k-1)\, a_1]\, a_1$. Đến đây bài toán sẽ được chứng minh nếu chứng minh được

$$[k - (k-1)\, a_1]\, a_1 \leqslant \frac{k}{3}, \quad \frac{1}{n} < a_1 < 1, \quad k \geqslant 4.$$

Thật vậy

$$[k - (k-1)\, a_1]\, a_1 \leqslant \frac{k}{3} \Leftrightarrow 3\,(k-1)\, a_1^2 - 3ka_1 + k \geqslant 0.$$

Xét tam thức bậc hai

$$f\,(a_1) = 3\,(k-1)\, a_1^2 - 3ka_1 + k.$$

Có

$$\Delta = 9k^2 - 12k\,(k-1) = 3k\,(4-k) \leqslant 0, \quad \forall k \geqslant 4.$$

Mà hệ số của a_1^2 là $3\,(k-1) > 0$. Do đó

$$f\,(a_1) = 3\,(k-1)\, a_1^2 - 3ka_1 + k \geqslant 0,$$

với $\frac{1}{n} < a_1 < 1,\ k \geqslant 4$. □

Mở rộng 3. *Với $n \geqslant 4$, giả sử $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$. Chứng minh rằng*

$$(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n)\, a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n} < \frac{n+2}{6} \tag{6}$$

Lời giải. Khi $n = 4$ ta được bất đẳng thức (1).

Xét $n > 4$ và từ giả thiết ta có

$$(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + n\, a_n) \leqslant \left[a_1 + \frac{n+2}{2}\,(a_2 + \cdots + a_n)\right].$$

Do đó

$$VT_{(6)} \leqslant \left[a_1 + \frac{n+2}{2}\,(a_2 + \cdots + a_n)\right] a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n}.$$

Sử dụng (4), ta được

$$\left[a_1 + \frac{n+2}{2}\,(a_2 + \cdots + a_n)\right] a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n} < \frac{n+2}{6}.$$

Vậy

$$(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n)\, a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n} < \frac{n+2}{6}.$$

Chứng minh hoàn tất. □

Trước khi kết thúc bài viết tác giả xin đề nghị đọc giả tham gia giải các bài toán mở rộng sau

Mở rộng 4. *Với* $n \geqslant 3$, *giả sử* $a_1 = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. *Gọi* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *là một hoán vị tùy ý của* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. *Chứng minh rằng*

$$[a_1 + k(a_2 + a_3 + \cdots + a_n)]\, a_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_n^{x_n} < \frac{k}{3}, \quad k \geqslant 3.$$

Mở rộng 5. *Với* $n \geqslant 4$, *giả sử* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$. *Gọi* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *là một hoán vị tùy ý của* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. *Chứng minh rằng*

$$[a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n]\, a_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_n^{x_n} < \frac{n+2}{6}.$$

Cho n số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $(n \in \mathbb{N})$ thỏa mãn $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} = 1$, $\alpha > 0$.

Mở rộng 6. *Với* $n \geqslant 3$, *giả sử* $a_1 = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. *Chứng minh rằng*

$$[a_1 + k(a_2 + a_3 + \cdots + a_n)]\left(a_1^{\alpha+1} + a_2^{\alpha+1} + \cdots + a_n^{\alpha+1}\right) < \frac{k}{3}, \quad k \geqslant 3.$$

Mở rộng 7. *Với* $n \geqslant 4$, *giả sử* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$. *Chứng minh rằng*

$$[a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n]\, a_1^{a_1^{\alpha}} a_2^{a_2^{\alpha}} \cdots a_n^{a_n^{\alpha}} < \frac{n+2}{6}.$$

Tài liệu tham khảo

[1] Trần Nam Dũng, 2017, *Phương pháp giải toán qua các bài toán Olympic*, Nhà xuất bản Thế giới.

[2] Ngô Văn Thái, 2020, *Một số bất đẳng thức trong các kỳ thi Olympic Toán học Quốc Tế*, Tạp chí EsilonViệt Nam.

[3] Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ Việt Nam.

[4] Tạp chí Pi Việt Nam.

[5] Tạp chí Epsilon Việt Nam.

[6] Các tài liệu tổng hợp từ mạng Internet.

MỘT SỐ ỨNG DỤNG NÂNG CAO CỦA PHƯƠNG TÍCH

Trần Quang Hùng, Trương Tuấn Nghĩa, Đặng Minh Ngọc
Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Ngày 13 tháng 8 năm 2021

TÓM TẮT

Bài viết này xây dựng một số ứng dụng nâng cao về phương tích, trục đẳng phương dưới dạng một số bổ đề, nhằm mục đích "định dạng" một hệ đường tròn đồng trục. Một số ứng dụng của các bổ đề này cũng được đưa ra dưới dạng một số bài thi Olympic toán, đặc biệt là bài thi P3 IMO 2021.

1. Mở đầu

Một trong những bài toán quan trọng liên quan đến phương tích và trục đẳng phương là tìm họ các đường tròn có chung trục đẳng phương (họ các đường tròn đồng trục). Vậy xuất phát từ khái niệm hệ đường tròn đồng trục, chúng tôi sẽ đưa ra một số định lý để "định dạng" một hệ đường tròn đồng trục. Một số định lý có ứng dụng vào giải các bài toán Olympic. Phần lý thuyết này được tác giả Trần Quang Hùng đã sử dụng trong [1, 2], xin được trích dẫn lại trong bài viết này.

Định nghĩa 1. Họ các đường tròn có chung một trục đẳng phương gọi là một chùm đường tròn. Khi đó

1) Nếu các đường tròn trong chùm có hai điểm chung, ta gọi đó là chùm đường tròn Eliptic.
2) Nếu các đường tròn trong chùm có một điểm chung (đều tiếp xúc nhau), ta gọi đó là chùm đường tròn Parabolic.
3) Nếu các đường tròn trong chùm không có điểm chung, ta gọi đó là chùm đường tròn Hyperbolic.

Định nghĩa 2. Cho trước hai đường tròn không đồng tâm (Γ_1) và (Γ_2). Khi đó nếu có một đường tròn (α) nào đó mà có chung trục đẳng phương với (Γ_1) và (Γ_2) ta nói (α) nằm trong chùm đường tròn sinh bởi (Γ_1) và (Γ_2). Họ tất cả các đường tròn (α) cũng được gọi là họ các đường tròn đồng trục sinh bởi (Γ_1) và (Γ_2).

Định nghĩa 3. Cho trước một họ đường tròn đồng trục (Γ_i). Luôn tồn tại hai điểm sao cho chúng là ảnh nghịch đảo của nhau qua (Γ_i) với mọi i. Khi đó hai điểm này gọi là hai điểm giới hạn của hệ đường tròn đồng trục (Γ_i).

Định lý 1. Cho trước hai đường tròn không đồng tâm (Γ_1) và (Γ_2). Khi đó tồn tại hai điểm X_1 và X_2 sao cho X_1 và X_2 là ảnh nghịch đảo qua cả (Γ_1) và (Γ_2). Khi đó X_1 và X_2 cũng là điểm giới hạn của họ đường tròn đồng trục sinh bởi (Γ_1) và (Γ_2).

Chú ý. Trục đẳng phương của Γ_1 và Γ_2 cũng có thể coi là một đường tròn suy biến của chùm sinh bởi (Γ_1) và (Γ_2). Mặt khác hai điểm giới hạn cũng có thể coi là hai đường tròn bán kính 0 của chùm. Từ khái niệm chùm đường tròn, ta đi đến định lý cơ bản sau (định lý này do tác giả bài viết phát triển từ các tài liệu tham khảo [7, 8, 9])

Định lý 2 (Định lý phân loại đường tròn thuộc chùm)**.** Cho hai đường tròn không đồng tâm Γ_1 và Γ_2 cùng với hai số thực α_1 và α_2 không đồng thời bằng không. Khi đó quỹ tích các điểm P thỏa mãn

$$\alpha_1 \cdot \mathcal{P}_{P/\Gamma_1} + \alpha_2 \cdot \mathcal{P}_{P/\Gamma_2} = 0$$

là một đường tròn nằm trong chùm đường tròn sinh bởi (Γ_1) và (Γ_2).

Định lý này có thể triển khai được ra nhiều hệ quả có tính ứng dụng cao trong giải bài tập như sau

Hệ quả 1. Cho hai đường tròn không đồng tâm Γ_1 và Γ_2 cùng với $k \neq 1$ là một hằng số cho trước. Khi đó quỹ tích các điểm P thỏa mãn

$$\frac{\mathcal{P}_{P/\Gamma_1}}{\mathcal{P}_{P/\Gamma_2}} = k$$

là một đường tròn Γ nằm trong chùm đường tròn sinh bởi (Γ_1) và (Γ_2), tâm của Γ chia đoạn thẳng nối tâm của (Γ_1) và (Γ_2) theo tỷ số k.

Chú ý. Khi $k = 1$ thì đường tròn quỹ tích suy biến thành trục đẳng phương của Γ_1 và Γ_2 cũng có thể coi là một đường tròn suy biến của chùm sinh bởi Γ_1 và Γ_2.

Hệ quả 2. Cho hai đường tròn Γ_1 và Γ_2 cắt nhau tại A và B. Nếu các điểm C, D thỏa mãn

$$\frac{\mathcal{P}_{C/\Gamma_1}}{\mathcal{P}_{C/\Gamma_2}} = \frac{\mathcal{P}_{D/\Gamma_1}}{\mathcal{P}_{D/\Gamma_2}}$$

thì bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

Hệ quả 3. Cho hai đường tròn Γ_1 và Γ_2 có một điểm chung là A. Nếu các điểm C, D thỏa mãn

$$\frac{\mathcal{P}_{C/\Gamma_1}}{\mathcal{P}_{C/\Gamma_2}} = \frac{\mathcal{P}_{D/\Gamma_1}}{\mathcal{P}_{D/\Gamma_2}}$$

thì đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD đồng trục với Γ_1 và Γ_2.

Hệ quả 4. Cho hai đường tròn Γ_1 và Γ_2 tiếp xúc nhau tại P. Nếu các điểm Q, R thỏa mãn

$$\frac{\mathcal{P}_{P/\Gamma_1}}{\mathcal{P}_{P/\Gamma_2}} = \frac{\mathcal{P}_{Q/\Gamma_1}}{\mathcal{P}_{Q/\Gamma_2}}$$

thì đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR cũng tiếp xúc với Γ_1 và Γ_2 tại P.

Hệ quả 5. Cho hai đường tròn Γ_1 và Γ_2 không đồng tâm. Nếu có các điểm A, B, C thỏa mãn

$$\frac{\mathcal{P}_{A/\Gamma_1}}{\mathcal{P}_{A/\Gamma_2}} = \frac{\mathcal{P}_{B/\Gamma_1}}{\mathcal{P}_{B/\Gamma_2}} = \frac{\mathcal{P}_{C/\Gamma_1}}{\mathcal{P}_{C/\Gamma_2}}$$

thì đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đồng trục với Γ_1 và Γ_2.

Định lý 3. Các định lý và hệ quả trên cũng áp dụng được trên các đường tròn với bán kính bằng 0, hay là các đường tròn điểm.

Hai định lý sau là hai định lý quan trọng để nhận biết một hệ đồng trục gắn với tứ giác nội tiếp, các chứng minh chúng được rút ra từ các hệ quả trên.

Định lý 4 (Poncelet)**.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn ω. Một đường thẳng d cắt các đường thẳng AB, BC, CD, DA, AC, và BD theo thứ tự tại M, N, P, Q, R, và S. Giả sử có các đường tròn ω_1 tiếp xúc AB, CD tại M, P; đường tròn ω_2 tiếp xúc BC, AD tại N, Q; và đường tròn ω_3 tiếp xúc AC, BD tại R, S. Chứng minh rằng bốn đường tròn ω_1, ω_2, ω_3, và ω lập thành một hệ đồng trục.

Với ý tưởng thay tiếp tuyến bởi cát tuyến, tác giả Trần Quang Hùng đã mở rộng định lý trên như sau

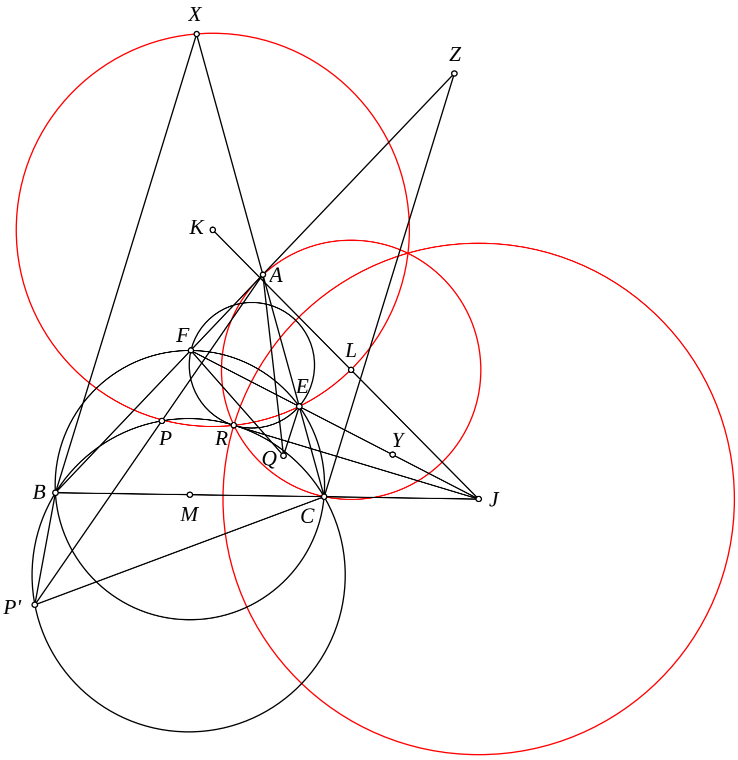
Định lý 5 (Trần Quang Hùng, mở rộng định lý Poncelet)**.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn ω. Một đường thẳng d_1 cắt các đường thẳng AB, BC, CD, DA, AC, và BD theo thứ tự tại M_1, N_1, P_1, Q_1, R_1, và S_1. Một đường thẳng d_2 cắt các đường thẳng AB, BC, CD, DA, AC, và BD theo thứ tự tại M_2, N_2, P_2, Q_2, R_2, và S_2. Giả sử có các đường tròn ω_1 đi qua M_1, M_2, P_1, P_2; ω_2 đi qua N_1, N_2, Q_1, Q_2; và ω_3 đi qua R_1, R_2, S_1, S_2. Chứng minh rằng bốn đường tròn ω_1, ω_2, ω_3, và ω lập thành một hệ đồng trục.

2. Một số ví dụ

Bốn bài toán sau được tác giả Trương Tuấn Nghĩa giới thiệu, trong đó lời giải bài toán P3 của IMO 2021 (tổng quát) là lời giải được chính tác giả Trương Tuấn Nghĩa tìm ra trong phòng thi.

Bài toán 1 (Mở rộng IMO 2021 P3)**.** Cho tam giác ABC có $AC < AB$. Hai điểm P, Q nằm trong tam giác sao cho $\angle PAB = \angle QAC$. Lấy E, F lần lượt trên cạnh CA, AB sao cho $\angle AQE = \angle PCB$ và $\angle AQF = \angle PBC$. Lấy R nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC sao cho (PBC) tiếp xúc với (REF). X thuộc AC thỏa mãn $XB = XC$. Gọi K, L lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác REX, RAC. Chứng minh rằng KL, EF, BC đồng quy.

Lời giải. Gọi P' là giao điểm thứ hai của AP với (BPC) và J là giao điểm của EF và BC. Vì $\angle AP'B = \angle BCP = \angle AQE$ và $\angle P'AB = \angle QAE$ nên $\triangle AP'B \sim \triangle AQE$. Tương tự, $\triangle AP'C \sim \triangle AQF$.



Hình 1.

Do đó,

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AP'}{AQ} = \frac{AC}{AF}$$

tức là $BCEF$ nội tiếp. Rõ ràng J là tâm đẳng phương của (RBC), (REF) và $(BCEF)$ nên JR là trục đẳng phương của (RBC), (REF). Do đó, JR tiếp xúc 2 đường tròn này. Bây giờ ta chỉ ra

$$\frac{\mathcal{P}_{E/(RAC)}}{\mathcal{P}_{E/(J,JR)}} = \frac{\mathcal{P}_{X/(RAC)}}{\mathcal{P}_{X/(J,JR)}}$$

Gọi Y là giao điểm thứ hai của EF với (AFC), ta có

$$\frac{\mathcal{P}_{E/(RAC)}}{\mathcal{P}_{E/(J,JR)}} = \frac{\overline{EA} \cdot \overline{EC}}{EJ^2 - RJ^2} = \frac{\overline{EF} \cdot \overline{EY}}{EJ^2 - \overline{JE} \cdot \overline{JF}} = \frac{\overline{EF} \cdot \overline{EY}}{\overline{EF} \cdot \overline{EJ}} = \frac{\overline{EY}}{\overline{EJ}}$$

Gọi M là trung điểm BC, ta có

$$\frac{\mathcal{P}_{X/(RAC)}}{\mathcal{P}_{X/(J,JR)}} = \frac{\overline{XA} \cdot \overline{XC}}{XJ^2 - RJ^2} = \frac{\overline{XA} \cdot \overline{XC}}{XJ^2 - \overline{JB} \cdot \overline{JC}} = \frac{\overline{XA} \cdot \overline{XC}}{XJ^2 - JM^2 + MC^2} = \frac{\overline{XA} \cdot \overline{XC}}{XC^2} = \frac{\overline{XA}}{\overline{XC}}$$

Lấy Z trên AB sao cho $CZ \parallel BX$. Dễ thấy $\triangle ABC^{\cup Z} \sim \triangle YEC^{\cup J}$. Do đó

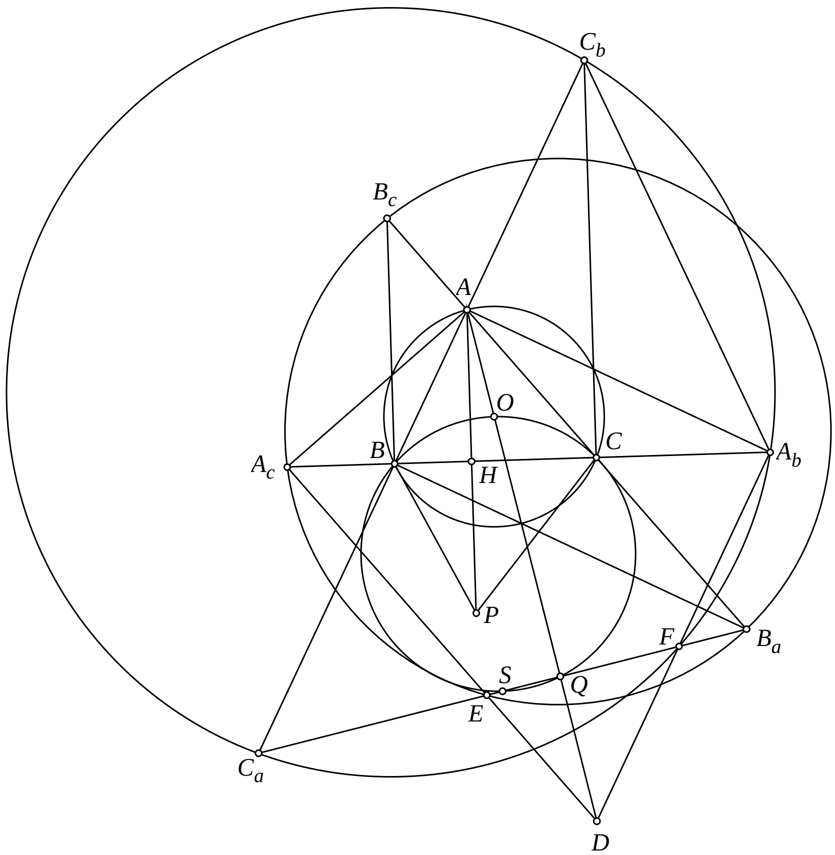
$$\frac{\overline{XA}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{EY}}{\overline{EJ}}.$$

Tóm lại, ta có

$$\frac{\mathcal{P}_{E/(RAC)}}{\mathcal{P}_{E/(J,JR)}} = \frac{\mathcal{P}_{X/(RAC)}}{\mathcal{P}_{X/(J,JR)}}.$$

Vậy (J, JR), (K), (L) đồng trục nên $K,\ L,\ J$ thẳng hàng. □

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp (O). Trên BC lấy A_b, A_c sao cho $\angle BAA_b = \angle CAA_c = 90°$. Tương tự xác định các điểm B_a, B_c, C_a, C_b. Gọi P là đối xứng của A qua BC và Q là điểm liên hợp đẳng giác của P trong tam giác ABC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ, $C_aC_bA_b$ và $B_aB_cA_c$ đồng trục.



Hình 2.

Lời giải. Đầu tiên ta chỉ ra tồn tại đường tròn qua A, Q và đồng trục với $(C_aC_bA_b), (B_aB_cA_c)$.

Gọi S là trung điểm của C_aB_a. Vì $\angle B_aBC_a = \angle C_aCB_a = 90°$ nên tứ giác BCB_aC_a nội tiếp (S). Do đó ta có $\angle SBC_a = \angle SC_aB = \angle ACB$ hay SB là tiếp tuyến của (O). Tương tự thì SC cũng là tiếp tuyến của (O). Mặt khác, vì P, Q liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC nên ta có biến đổi góc

$$\begin{aligned}\angle BQC &= 180° - \angle BCQ - \angle CBQ = 180° - (180° - \angle ABP) - (180° - \angle ACP) \\ &= \angle ABP + \angle ACP - 180° = 360° - 2\angle BAC - 180° = 180° - \angle BOC\end{aligned}$$

tức là Q nằm trên (BOC), đường kính OS do $\angle OSB = \angle OSC = 90°$. Hơn nữa vì $AP \perp BC$ nên AQ đi qua O, tức là SQ vuông góc với AO tại Q, kết hợp với B_aC_a đối song với BC trong

$\angle BAC$, ta được S, Q, B_a, C_a thẳng hàng. Gọi B_aC_a cắt lại $(B_aB_cA_c), (C_aC_bA_b)$ lần lượt tại E và F và gọi D là giao điểm của A_bF và A_cE. Theo cách chứng minh tương tự, ta cũng có A_bC_b và AC đối song trong $\angle ABC$ nên $\angle AC_aB_a = \angle ACB = \angle A_bC_bC_a = \angle DFE$ nên $DF \parallel AB$ hay $\angle AA_bD = 90^\circ$. Tương tự thì $DE \parallel AC$ và $\angle AA_cD = 90^\circ$. Do đó, AD là đường kính của (AA_bA_c), kết hợp với (AA_bA_c) tiếp xúc (ABC), ta được A, Q, D thẳng hàng dẫn tới

$$\triangle ABC^{\cup H} \sim \triangle AB_aC_a^{\cup Q} \sim \triangle DEF^{\cup Q}$$

trong đó H là hình chiếu của A trên BC, từ đó ta có tính toán

$$\frac{\mathcal{P}_{Q/(C_aC_bA_b)}}{\mathcal{P}_{Q/(B_aB_cA_c)}} = \frac{\overline{QC_a} \cdot \overline{QF}}{\overline{QB_a} \cdot \overline{QE}} = \frac{\overline{HC}^2}{\overline{HB}^2} = \frac{HC^2}{HB^2}.$$

Mặt khác,

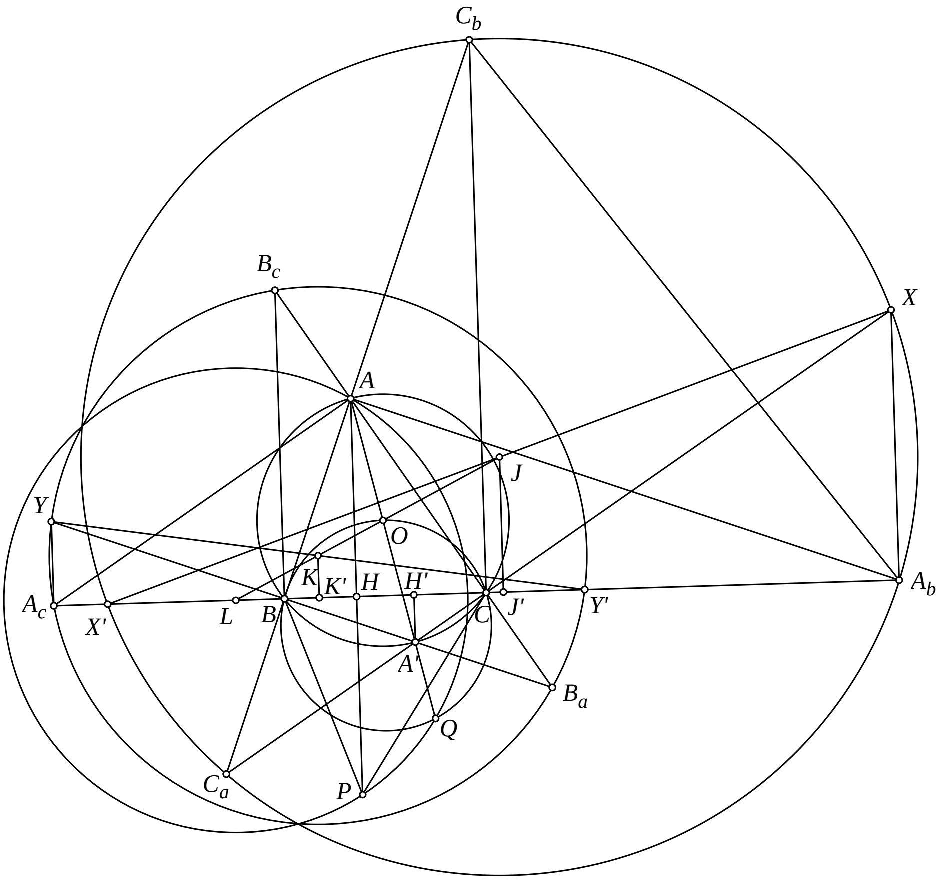
$$\frac{\mathcal{P}_{A/(C_aC_bA_b)}}{\mathcal{P}_{A/(B_aB_cA_c)}} = \frac{\overline{AC_a} \cdot \overline{AC_b}}{\overline{AB_a} \cdot \overline{AB_c}} = \frac{AC}{AB_c} \cdot \frac{AC_b}{AB} = \frac{d_{(A/CC_b)}}{d_{(A/BB_c)}} \cdot \frac{d_{(A/CC_b)}}{d_{(A/BB_c)}} = \frac{HC^2}{HB^2}.$$

Vậy

$$\frac{\mathcal{P}_{Q/(C_aC_bA_b)}}{\mathcal{P}_{Q/(B_aB_cA_c)}} = \frac{\mathcal{P}_{A/(C_aC_bA_b)}}{\mathcal{P}_{A/(B_aB_cA_c)}}$$

nên tồn tại đường tròn tâm (L') qua A, Q và đồng trục với $(C_aC_bA_b), (B_aB_cA_c)$. Do đó với J, K lần lượt là tâm $(C_aC_bA_b)$ và $(B_aB_cA_c)$ thì

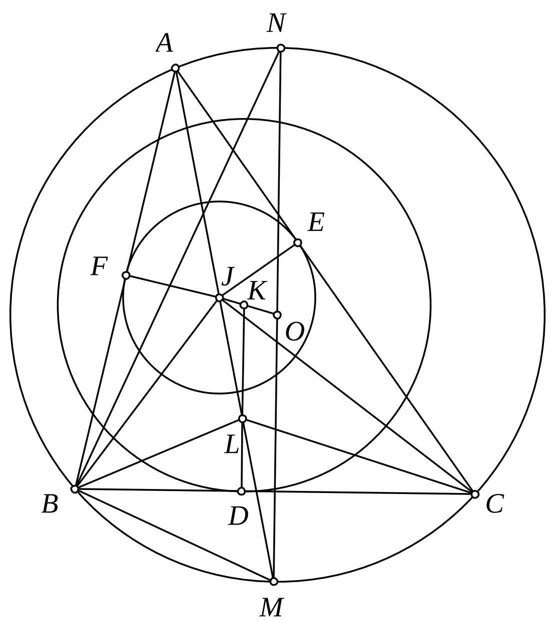
$$\frac{\overline{L'J}}{\overline{L'K}} = \frac{\mathcal{P}_{Q/(C_aC_bA_b)}}{\mathcal{P}_{Q/(B_aB_cA_c)}} = \frac{HC^2}{HB^2}.$$



Hình 3.

Bây giờ, gọi L là giao điểm của JK và BC, ta chứng minh
$$\frac{\overline{LK}}{\overline{LJ}} = \frac{HC^2}{HB^2}.$$
Gọi X là giao điểm thứ hai của CC_a với (J) thì
$$\angle XA_bC = \angle XA_bC_b + \angle C_bA_bC = \angle CC_aA + \angle CAB = 90^\circ$$
nên $XA_b \perp BC$. Do đó với X' là giao điểm thứ hai của A_bA_c với (J) và J' là trung điểm A_bX' thì $\overline{J'J} = \frac{\overline{A_bX}}{2}$. Tương tự với Y, Y' là giao điểm thứ hai của (K) với BB_a và A_bA_c, K' là trung điểm A_cY' thì $\overline{K'K} = \frac{\overline{A_cY}}{2}$. Gọi A' là giao điểm của BY và CX, H' là hình chiếu của A' trên BC. Khi đó dễ thấy AA' là đường kính của (O) nên H và H' đối xứng nhau qua trung điểm của BC. Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, $\overline{HB} \cdot \overline{HA_b} = -HA^2 = \overline{HC} \cdot \overline{HA_c}$ dẫn tới $\frac{\overline{HA_c}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{HA_b}}{\overline{HC}}$ hay $\frac{\overline{BA_c}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{CA_b}}{\overline{HC}}$ nên theo định lý Thales, ta có
$$\begin{aligned}\frac{\overline{A_cY}}{\overline{A_bX}} &= \frac{\overline{A_cY}}{\overline{H'A'}} \cdot \frac{\overline{H'A'}}{\overline{A_bX}} = \frac{\overline{BA_c}}{\overline{BH'}} \cdot \frac{\overline{CH'}}{\overline{CA_b}} \\ &= \frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} \cdot \frac{\overline{BA_c}}{\overline{CA_b}} = \frac{HB^2}{HC^2}.\end{aligned}$$
Tóm lại,
$$\frac{\overline{LK}}{\overline{LJ}} = \frac{\overline{K'K}}{\overline{J'J}} = \frac{\overline{A_cY}}{\overline{A_bX}} = \frac{HB^2}{HC^2}$$
nên L trùng L', tức là đường tròn (L, LA) đi qua P, Q. Vậy $(APQ), (C_aC_bA_b), (B_aB_cA_c)$ đồng trục. □

Bài toán 3. Cho đường tròn (O) và đường tròn (J) nằm trong đường tròn (O) ((J không trùng với O). Điểm A chuyển động trên (O), lấy $B,\ C$ thuộc (O) sao cho $AB,\ AC$ tiếp xúc với (J). Chứng minh rằng BC luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi A thay đổi.



Hình 4.

Lời giải. Gọi L là điểm liên hợp đẳng giác của J trong tam giác ABC, lấy K thuộc OJ sao cho KL vuông góc BC tại D. (J) tiếp xúc với $CA,\ AB$ tại $E,\ F$.

Ta chứng minh (K, KD) đồng trục với $(O),\ (J)$ và tỉ số $\frac{\overline{OJ}}{\overline{OK}}$ không đổi. Thật vậy, vì $J,\ L$ là hai điểm đẳng giác trong tam giác ABC nên $\angle JBF = \angle LBD,\ \angle JCE = \angle LCD$ dẫn tới $\triangle BLD \sim \triangle BJF,\ \triangle CEJ \sim \triangle CDL$. Do đó

$$\frac{\mathcal{P}_{B/(K)}}{\mathcal{P}_{B/(J)}} = \frac{BD^2}{BF^2} = \frac{LD^2}{JE^2} = \frac{LD^2}{JF^2} = \frac{CD^2}{CE^2} = \frac{\mathcal{P}_{C/(K)}}{\mathcal{P}_{C/(J)}}.$$

Do đó, (K, KD) đồng trục với $(O),\ (J)$ nên

$$\frac{\overline{OK}}{\overline{OJ}} = \frac{\mathcal{P}_{B/(K)}}{\mathcal{P}_{B/(J)}} = \frac{BD^2}{BF^2} = \frac{LB^2}{JB^2}.$$

Gọi M là giao điểm còn lại của AJ với (O). Ta có

$$\angle LBM = \angle LBD + \angle DBM = \angle JBA + \angle JAB = \angle BJM,$$

tức là $\triangle MBL \sim \triangle MJB$. Mặt khác, với N là trung điểm cung BC chứa A của (O) thì $\triangle MBN \sim \triangle JFA$. Do đó

$$\frac{LB}{JB} = \frac{MB}{MJ} = \frac{JA \cdot MB}{JA \cdot JM} = \frac{JA \cdot MB}{-\mathcal{P}_{J/(O)}} = \frac{MN \cdot JF}{-\mathcal{P}_{J/(O)}}$$

là hằng số nên $\frac{\overline{OK}}{\overline{OJ}}$ không đổi, tức là K cố định hay (K, KD) là đường tròn cố định nên BC tiếp xúc với một đường tròn cố định khi A thay đổi. □

Bài toán 4. Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp (O), điểm P nằm trong tam giác thỏa mãn $AP \perp BC$. BP, CP lần lượt cắt CA, AB tại E, F. Tiếp tuyến qua A của (O) cắt BC tại L. Chứng minh rằng $(ABE), (ACF)$ và tròn đường kính AL đồng trục.

Lời giải. Gọi X, Y là hình chiếu của L trên CA, AB. Ta sẽ chỉ ra

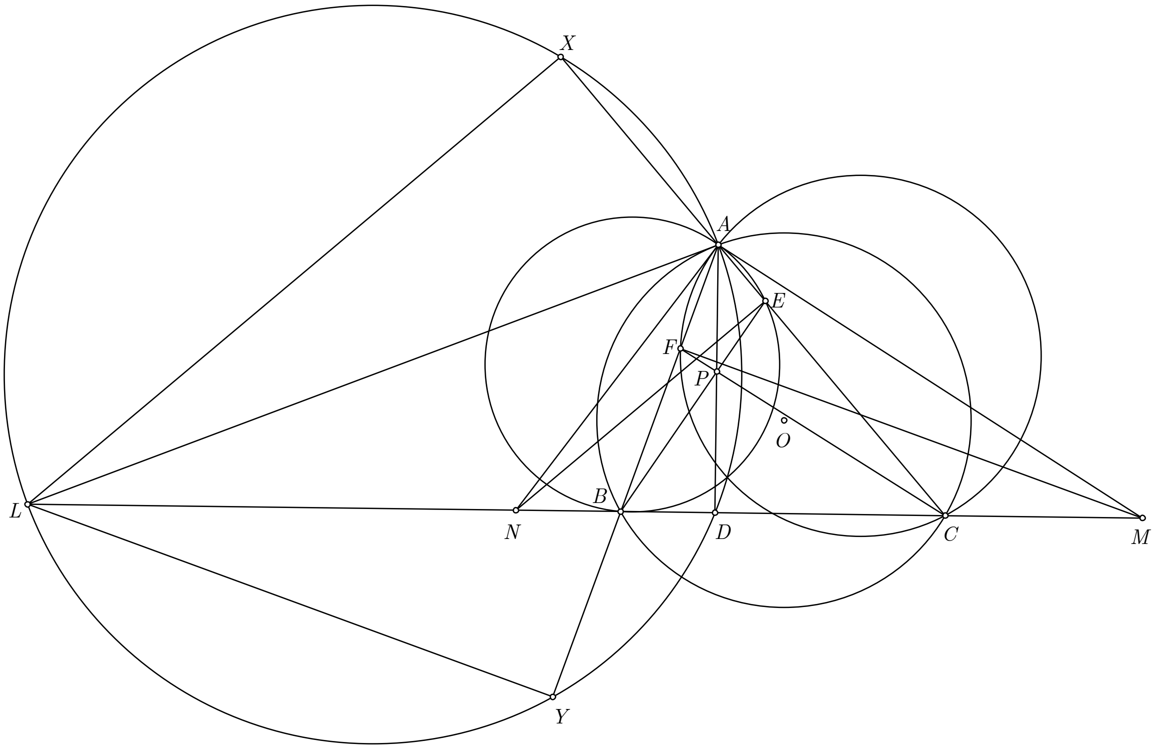
$$\frac{\mathcal{P}_{X/(AEB)}}{\mathcal{P}_{X/(AFC)}} = \frac{\mathcal{P}_{Y/(AEB)}}{\mathcal{P}_{Y/(AFC)}}.$$

Điều này tương đương

$$\frac{\overline{XA} \cdot \overline{XE}}{\overline{XA} \cdot \overline{XC}} = \frac{\overline{YA} \cdot \overline{YB}}{\overline{YA} \cdot \overline{YF}} \Leftrightarrow \frac{\overline{XE}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{YB}}{\overline{YF}}.$$

Trên BC lấy các điểm $N,\ M$ thỏa mãn $EN \perp AC$ và $FM \perp AB$. Theo định lý Thales, ta có

$$\frac{\overline{XE}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{LN}}{\overline{LC}},\ \frac{\overline{LB}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{YB}}{\overline{YF}}.$$



Hình 5.

Do đó, ta quy bài toán về chứng minh $\overline{LN} \cdot \overline{LM} = \overline{LC} \cdot \overline{LB}$. Gọi D là hình chiếu của A trên BC, khi đó DA là phân giác của $\angle EDF$ nên $\angle ANE = \angle ADE = \angle ADF = \angle AMF$ dẫn tới

$$\angle NAE = 90^\circ - \angle ANE = 90^\circ - \angle AMF = \angle MAF$$

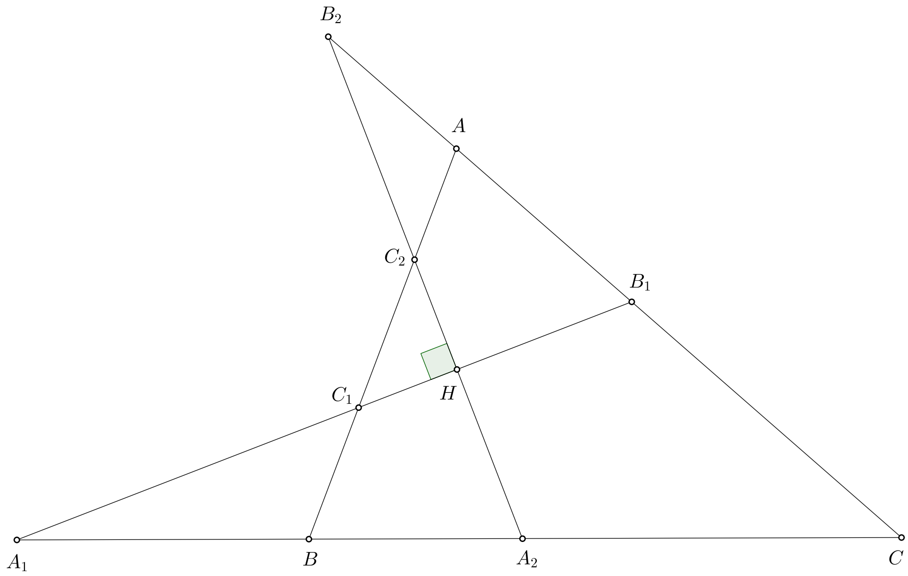
nên AM, AN đẳng giác trong $\angle BAC$, tức là (ABC) tiếp xúc (AMN). Do đó,

$$\overline{LB} \cdot \overline{LC} = LA^2 = \overline{LM} \cdot \overline{LN}$$

nên $(ABE), (ACF)$ và (AXY) đồng trục. □

Một số bài toán sau được tác giả Đặng Minh Ngọc giới thiệu

Bài toán 5 (*Định lý Droz Fanzy*)**.** Cho tam giác ABC có trực tâm H. Hai đường thẳng d_1 và d_2 đi qua và vuông góc với nhau tại H. d_1 cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. d_2 cắt $BC,\ AC,\ AB$ tại $A_2,\ B_2,\ C_2$. Chứng minh rằng trung điểm của A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 thẳng hàng.



Hình 6.

Lời giải. Ta sẽ chỉ ra các đường tròn đường kính $A_1A_2,\ B_1B_2,\ C_1C_2$ đồng trục, điều này tương đương với

$$\frac{\mathcal{P}_{A_1/(B_1B_2)}}{\mathcal{P}_{A_2/(B_1B_2)}} = \frac{\mathcal{P}_{A_1/(C_1C_2)}}{\mathcal{P}_{A_2/(C_1C_2)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{A_1H}\cdot\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2H}\cdot\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{A_1H}\cdot\overline{A_1C_1}}{\overline{A_2H}\cdot\overline{A_2C_2}} \Leftrightarrow \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_2C_2}}$$

Theo định lý Menelaus trong tam giác AB_1C_1 có $A_1,\ B,\ C$ thẳng hàng ta có

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1C_1}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC_1}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{CA}}.$$

Theo định lý Menelaus trong tam giác AB_2C_2 có $A_2,\ B,\ C$ thẳng hàng ta có

$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_2C_2}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC_2}}\cdot\frac{\overline{CB_2}}{\overline{CA}}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{\overline{CB_1}}{\overline{CB_2}} = \frac{\overline{BC_1}}{\overline{BC_2}}$$

Mặt khác, vì $HC\perp AB,\ HB_1\perp HC_2$ nên $\angle HC_2C_1 = \angle CHB_1$, tương tự $\angle CHB_2 = HC_1B$ nên ta có

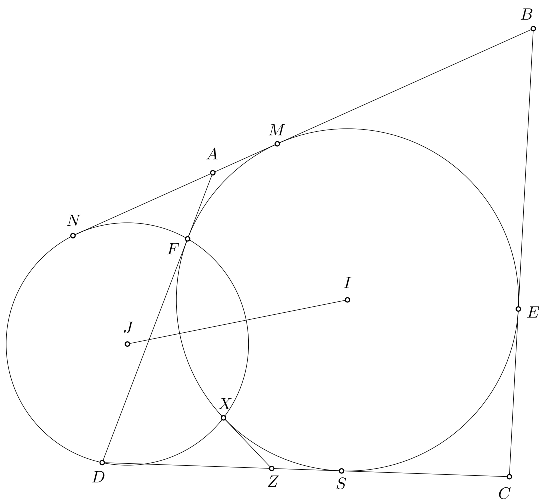
$$\frac{CB_1}{CB_2} = \frac{S_{HCB_1}}{S_{HCB_2}} = \frac{HB_1\cdot\sin CHB_1}{HB_2\cdot\sin CHB_2} = \frac{HB_1\cdot\sin HC_2C_1}{HB_2\cdot\sin HC_1C_2} = \frac{HB_1\cdot HC_1}{HB_2\cdot HC_2}$$

Tương tự:

$$\frac{BC_1}{BC_2} = \frac{HB_1\cdot HC_1}{HB_2\cdot HC_2}$$

Vậy các đường tròn đường kính $A_1A_2,\ B_1B_2,\ C_1C_2$ đồng trục do chúng cùng đi qua H. Do đó trung điểm của A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 thẳng hàng. $\square$

Bài toán 6 (Iran second round mathematical Olympiad P3 2021 [4])**.** Đường tròn $\odot(\omega)$ nội tiếp tứ giác $ABCD$ và tiếp xúc đoạn $BC,\ AD$ tại $E,\ F$. DE cắt lại $\odot(\omega)$ tại X. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác DFX tiếp xúc với $AB,\ CD$, chứng minh rằng tứ giác $AFXC$ nội tiếp.



Hình 7.

Lời giải. Gọi I là tâm đường tròn $\odot(\omega)$. $\odot(\omega)$ tiếp xúc $CD,\ AB$ tại $S,\ M$ và đường tròn (J) ngoại tiếp tam giác DFX tiếp xúc với AB tại N.

Ta chứng minh $\frac{\mathcal{P}_{A/\odot(\omega)}}{\mathcal{P}_{A/(J)}} = \frac{\mathcal{P}_{C/\odot(\omega)}}{\mathcal{P}_{C/(J)}}$, khi đó $A,\ F,\ X,\ C$ cùng nằm trên đường tròn đồng trục với (J) và $\odot(\omega)$. Thật vậy, tiếp tuyến tại X của $\odot(\omega)$ cắt CD tại Z. Vì $NM,\ DS$ là tiếp tuyến chung ngoài của $\odot(\omega)$ và (J) nên $MN,\ DS$ đối xứng nhau qua IJ. Lại vì $F,\ X$ đối xứng nhau qua IJ nên $A,\ Z$ đối xứng nhau qua IJ, ta được IJ là trung trực của $DN,\ AZ,\ MS$, dẫn tới $\frac{AM}{AN} = \frac{ZS}{ZD}$.

Tiếp theo ta chứng minh $(DS, ZC) = -1$. Vì CE, CS là tiếp tuyến của $\odot(\omega)$ nên XC là đường đối trung tam giác XES, mà XZ là tiếp tuyến của (XEF) nên $X(ES, ZC) = -1$. Do đó

$$(DS, ZC) = X(DS, ZC) = X(ES, EZ) = -1$$

Tóm lại,

$$\frac{AM}{AN} = \frac{ZS}{ZD} = \frac{CS}{CD}$$

nên

$$\frac{\mathcal{P}_{A/\odot(\omega)}}{\mathcal{P}_{A/(J)}} = \frac{AM^2}{AN^2} = \frac{CS^2}{CD^2} = \frac{\mathcal{P}_{C/\odot(\omega)}}{\mathcal{P}_{C/(J)}}$$

hay tứ giác $AFXC$ nội tiếp. □

Bài toán 7 (ARMO 2013 Grade 11 Day 2 P4,[5])**.** Cho tam giác ABC không cân nội tiếp (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Các tiếp tuyến chung của (I) và đường tròn (M) ngoại tiếp tam giác BIC cắt nhau tại S. Gọi $U,\ V$ là các giao điểm của (I) và (M). Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác SUV tiếp xúc (O).

Lời giải. Gọi P là giao điểm còn lại của (AI) và (O), và đặt $R,\ r$ lần lượt là bán kính của (O) và (I). Đầu tiên, ta chứng minh: $P,\ S,\ U,\ V$ đồng viên. Điều này tương đương với

$$\frac{\mathcal{P}_{P/(I)}}{\mathcal{P}_{P/(BIC)}} = \frac{\mathcal{P}_{S/(I)}}{\mathcal{P}_{S/(BIC)}} \Leftrightarrow \frac{PI^2 - r^2}{PM^2 - R_{BIC}^2} = \frac{r^2}{R_{BIC}^2} \Leftrightarrow \frac{PI}{PM} = \frac{r}{MI}(*)$$

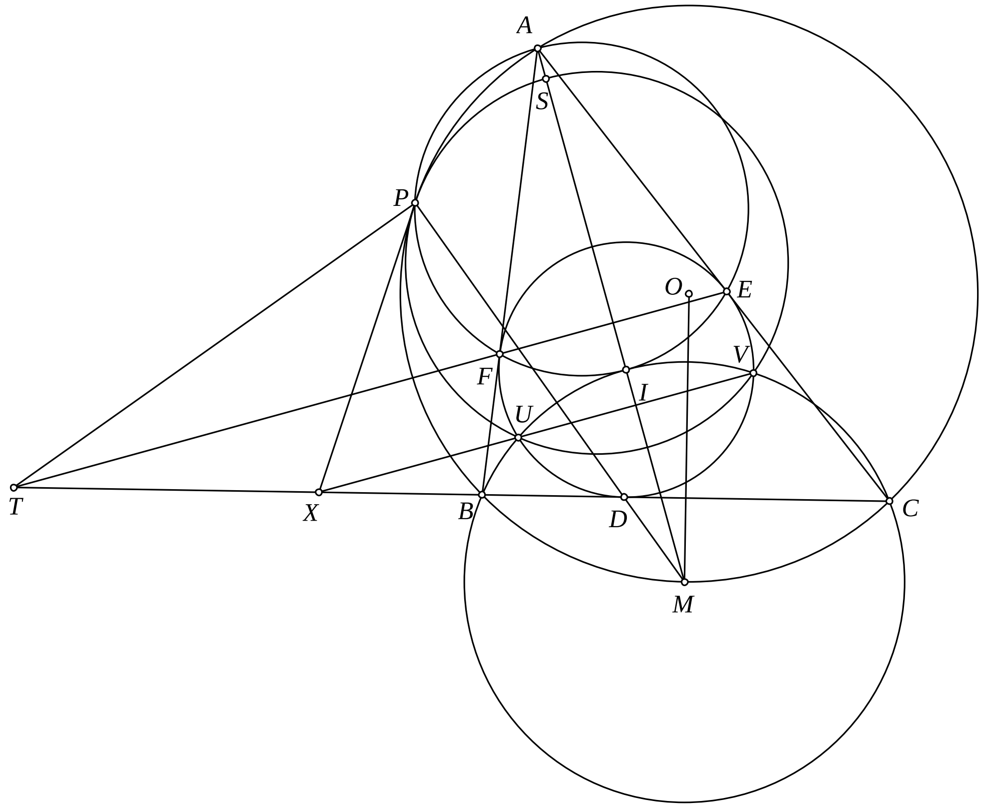
Dễ thấy M nằm trên (O) nên ta có

$$\frac{PI}{PM} = \frac{AI \cdot \sin PAI}{2R \cdot \sin PAM} = \frac{AI}{2 \cdot R}.$$

Theo hệ thức Euler thì $R^2 - OI^2 = 2R \cdot r$ nên $AI \cdot MI = 2R \cdot r$, do đó

$$\frac{PI}{PM} = \frac{AI}{2 \cdot R} = \frac{r}{MI}$$

nên $(*)$ là đúng.



Hình 8.

Gọi $D,\ E,\ F$ là tiếp điểm của (I) với $BC,\ CA,\ AB$. UV cắt BC tại X và EF cắt BC tại T. Khi đó,

$$\overline{XB} \cdot \overline{XC} = \overline{XU} \cdot \overline{XV} = XD^2$$

kết hợp với $(TD, BC) = -1$ ta được X là trung điểm của TD. Mặt khác theo phép vị tự quay thì $\triangle PFB \sim \triangle PEC$ nên

$$\frac{PB}{PC} = \frac{BF}{CE} = \frac{BD}{CD} = \frac{TB}{TC}$$

dẫn tới PD, PT là phân giác trong và ngoài của $\angle TPD$. Do đó (PDT) là đường tròn P-Apollonius của tam giác PBC, đồng thời X là trung điểm DT nên $XP = XD = XM$ và XP tiếp xúc với (O). Thế thì

$$\overline{XU} \cdot \overline{XV} = XD^2 = XP^2$$

tức là (PUV) tiếp xúc với XP. Vậy (SUV) tiếp xúc với (O) tại P. □

Bài toán sau được tác giả Trần Quang Hùng đưa ra với lời giải được hoàn thành dưới sự cộng tác của tác giả Ngô Quang Dương; xem [2].

Bài toán 8. Cho hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và $A'_1A'_2\ldots A'_n$ cùng nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Chứng minh rằng các đường thẳng $A_iA'_i$ cùng tiếp xúc với một đường tròn (J) và (J) đồng trục với (O), (I).

Lời giải. Ở tình huống đặc biệt $A_i \equiv A'_i$, n đường thẳng ngoại tiếp (O). Ta xét các tình huống còn lại.

Bổ đề 1 (định lý Newton về tứ giác ngoại tiếp)**.** Cho 4 đường thẳng a, b, c, d tiếp xúc với đường tròn (O) lần lượt tại A, B, C, D. Khi đó:
$\overline{AC, BD, (a\cap b)(c\cap d)), (a\cap d)(b\cap c)}$ đồng quy.

Bổ đề 2. Cho hai đường tròn $(O), (I)$ phân biệt và thuộc một chùm hyperbolic. P là một điểm bất kỳ, khi đó tồn tại duy nhất một đường tròn (có thể suy biến thành điểm hoặc trục đẳng phương) thuộc chùm trên và đi qua P.

Gọi tiếp điểm của (I) với A_iA_{i+1} là T_i, với $A'_iA'_{i+1}$ là T'_i.

Áp dụng định lý Newton cho 4 đường thẳng $A_{i-1}A_i$, A_iA_{i+1}, $A'_{i-1}A'_i$, $A'_iA'_{i+1}$, ta được $T_{i-1}T'_{i-1}$, $T_iT'_i$, $A_iA'_i$ đồng quy. Gọi điểm đồng quy là C_i.

Như vậy, $T_iT'_i$ đi qua C_i và C_{i+1}.

Áp dụng định lý Poncelet cho 4 điểm $A_i, A_{i+1}, A'_i, A'_{i+1}$:

$T_iT'_i$ cắt $A_iA'_i, A_{i+1}A'_{i+1}$ tại C_i, C_{i+1} theo nhận xét trên, dẫn đến đường tròn (ω_i) tiếp xúc với $A_iA'_i$ tại C_i, tiếp xúc với $A_{i+1}A'_{i+1}$ tại C_{i+1} thuộc chùm của (O) và (I).

Mà (ω_i) và (ω_{i+1}) cùng đi qua C_{i+1} nên theo bổ đề 2, chúng phải trùng nhau.

Như vậy n đường tròn $(\omega_1), (\omega_2), \ldots (\omega_n)$ trùng nhau. Do đó tồn tại một đường tròn (J) tiếp xúc với $A_iA'_i$. Mà (ω_i) thuộc chùm của $(O), (I)$ nên (J) cũng vậy.

Chứng minh hoàn tất. □

Kết thúc bài viết, tác giả Trần Quang Hùng giới thiệu một bài toán hệ đồng trục mà tác giả tìm ra có liên quan tới một kết quả hệ đồng trục khác rất thú vị của tác giả Ngô Quang Dương, xin trích dẫn lại bài toán của Ngô Quang Dương

Bài toán 9 (Ngô Quang Dương, 2015 [6])**.** Trong một tam giác, đường tròn 9 điểm, đường tròn pedal và đường tròn Cevian của điểm Fermat đồng trục.

Bài toán 10 (Trần Quang Hùng, 2021)**.** Trong một tam giác bất kỳ thì

i) đường tròn pedal của điểm Napoleon cùng với đường tròn pedal và đường tròn Cevian của điểm Fermat đồng trục.

ii) đường tròn pedal và đường tròn ceva của điểm Napoleon cùng với đường tròn pedal và đường tròn Cevian của điểm Fermat đồng quy.

Chú ý. Ta hiểu các điểm Napoleon và điểm Fermat theo nghĩa thông thường (tức là các điểm thứ nhất). Nếu dựng ra ngoài tam giác ABC ba tam giác đều BCD, CAE, ABF với tâm lần lượt là X, Y, Z thì AD, BE, CF đồng quy tại điểm Fermat (thứ nhất) của tam giác ABC; AX, BY, CZ đồng quy tại điểm Napoleon (thứ nhất) của tam giác ABC. Bài toán tương tự cũng sẽ đúng cho các điểm Fermat và điểm Napoleon thứ hai.

3. Kết luận

Nội dung chính của lý thuyết phần này được tác giả thứ nhất trích dẫn trong [1, 2], đây cũng là phần lý thuyết mà tác giả đã xây dựng từ hơn 10 năm trước đây khi mới tham gia vào công tác bồi dưỡng học sinh giỏi toán. Mặc dù một số nội dung của lý thuyết này (một số hệ quả) đã có một số tài liệu không chính thức trên mạng khai thác, nhưng nội dung quan trọng nhất trong phần lý thuyết của bài viết này chính là **Định lý 2**, đây là một định lý hoàn toàn mới và chưa xuất hiện trong bất kỳ tài liệu nào khác, chúng tôi có một chứng minh rất thú vị cho định lý này, xin hẹn bạn đọc ở một số bài viết khác. Mặt khác các ví dụ trong bài viết này đều là các ví dụ mới, đặc biệt sự ứng dụng lý thuyết vào giải bài IMO 2021 P3 là một ứng dụng rất đặc sắc.

Tài liệu

[1] Trần Quang Hùng, Bài giảng trường Đông VTCC, Hải Phòng, 2020.

[2] Lê Anh Vinh (chủ biên), Định hướng bồi dưỡng học sinh năng khiếu toán hình học (tập 2), Chương 11 tr 245–262, NXBĐHQG Hà Nội, năm 2021.

[3] Đề thi IMO 2021, https://www.imo-official.org/problems.aspx.

[4] Iran second round mathematical Olympiad P3 2021, https://artofproblemsolving.com/community/c6h2561880p21955260.

[5] ARMO 2013 Grade 11 Day 2 P4 https://artofproblemsolving.com/community/c6h535325p3070851.

[6] Ngô Quang Dương (nickname A-B-C), https://artofproblemsolving.com/community/q2h1137526p5321004.

[7] Weisstein, Eric W., Coaxal Circles, *MathWorld–A Wolfram Web Resource*, https://mathworld.wolfram.com/CoaxalCircles.html.

[8] Weisstein, Eric W., Limiting Point, *MathWorld–A Wolfram Web Resource*, https://mathworld.wolfram.com/LimitingPoint.html.

[9] Casey, J., Coaxal Circles, *A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid, Containing an Easy Introduction to Modern Geometry with Numerous Examples*, 5th ed., rev. enl. Dublin: Hodges, Figgis, & Co., pp. 113-126, 1888.

Câu Chuyện Về Bài Toán Đẳng Chu Trong Hình Học Phẳng

Trịnh Đào Chiến

Giới thiệu

"*Đẳng*" là bằng nhau, là không thay đổi. "*Chu*" là vòng khắp, là vòng quanh, là một vòng xung quanh. Bài toán Đẳng chu là một trong các bài toán cơ bản của phép tính biến phân, có nội dung như sau: "*Trong tất cả các đường cong có độ dài đã cho, tìm đường làm cho một đại lượng nào đó, là phiếm hàm của các đường, lấy giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất*". Trong Hình học phẳng, bài toán Đẳng chu được phát biểu như sau: "*Trong tất cả các hình phẳng có chu vi bằng nhau, tìm hình có diện tích lớn nhất*". Bài viết này đề cập đến bài toán trên cùng với quá trình tìm kiếm lời giải cho nó.

Bài toán Đẳng chu (trong Hình học phẳng) là một trong những bài toán nổi tiếng, được biết đến từ Thế kỷ IV trước Công nguyên. Trong suốt hơn 2000 năm tồn tại, nó đã thu hút sự quan tâm của nhiều người, nhiều nhà khoa học.

Bài toán bắt đầu từ một truyền thuyết: Dido là công chúa xứ Tyre (ngày nay là Liban), một vương quốc rộng lớn ở Địa Trung Hải. Vua Pygmalion xứ Tyre là anh trai của Dido, nhưng đã giết chồng của Dido để chiếm tài sản. Dido cùng với một đoàn người chạy tị nạn khỏi xứ Tyre, đến vùng Carthage và lập nên một thành phố mới ở đó.

Khi đến tị nạn ở Carthage, Dido xin vua xứ đó một mảnh đất nhỏ để ở tạm. Nhà vua đồng ý cho Dido một mảnh đất có thể khoanh vùng lại được bằng một tấm da trâu do nhà vua ban tặng. Dido cùng với những người thân của mình trong đoàn tị nạn cắt tấm da trâu ấy ra thành một dải dây da trâu rất dài. Sau khi đã có dải dây da trâu, bài toán đặt ra cho Dido là:

Với một dải dây đã có, làm sao khoanh được một vùng đất to nhất ở cạnh biển?

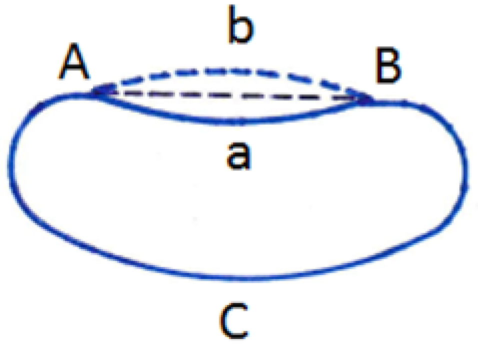
Nếu ta giả sử bờ biển là một đường thẳng và ta có một cái gương lớn đặt ở bờ biển, khi đó mảnh đất của ta được nhân đôi (cộng với phần đối xứng của nó ở trong gương) và nó được bao quanh bởi hai lần sợi dây da trâu ấy.

Điều này dẫn đến Bài toán Đẳng chu trong Hình học phẳng như đã nêu trên và công việc còn lại của bài viết này là "*thuật*" lại lịch sử tìm kiếm lời giải của nó.

Trước hết là một kết quả quan trọng sau đây, giúp ta "*đỡ tốn công*" đi tìm lời giải trong "*thế giới*" hình phẳng kia.

Bổ đề 1. *Trong tất cả các hình có cùng chu vi, hình có diện tích lớn nhất phải là hình lồi.*

Chứng minh. Ta cần chứng minh rằng, mọi dây cung của hình đó phải hoàn toàn nằm bên trong hình. Giả sử ta có hình $AaBC$ với dây cung ngoài là AB (xem hình 1).



Hình 1:

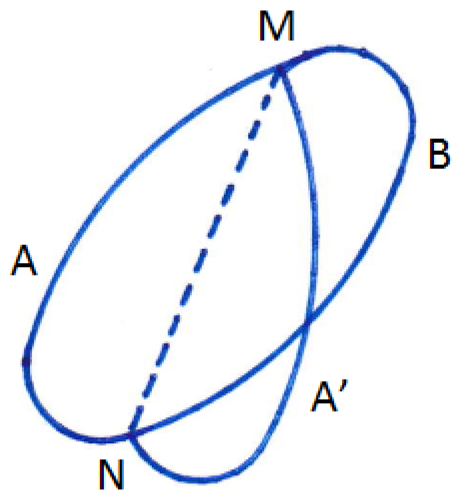
Ta hãy thay cung a bằng cung lẻ, đối xứng với nó. Do phép thay thế như vậy, chu vi của hình ABC sẽ không đổi, còn diện tích của hình rõ ràng được tăng lên. Điều này có nghĩa là hình $AaBC$ không thể là hình có diện tích lớn nhất.

Vậy hình có diện tích lớn nhất phải là một hình lồi.

Tiếp theo, ta có thể xác định thêm một tính chất khác nữa của hình này. Đó là, mọi dây cung chia chu vi của một hình lồi làm hai phần bằng nhau thì cũng chia diện tích của hình lồi này làm hai phần bằng nhau.

Giả sử hình $AMBN$ là hình phải tìm và giả sử dây cung MN chia dây cung của hình thành hai phần bằng nhau (xem hình 2).

Ta sẽ chứng minh rằng diện tích AMN bằng diện tích MBN. Thật vậy, nếu một trong hai phần này có diện tích lớn hơn phần kia, chẳng hạn diện tích hình AMN lớn hơn diện tích hình MBN, thì sau khi lật hình AMN qua dây MN ta sẽ nhận được hình $AMA'N$ có diện tích lớn hơn hình $AMBN$ ban đầu (vẫn với chu vi không đổi).



Hình 2:

Điều đó có nghĩa là hình $AMBN$, trong đó dây cung chia cắt chu vi làm hai phần bằng nhau nhưng lại chia diện tích làm hai phần không bằng nhau, không thể là hình phải tìm (nghĩa là không thể có diện tích lớn nhất với điều kiện chu vi không đổi cho trước). □

Bây giờ, ta giải các bài toán sau:

Bài toán 1. *Trong số những tam giác có hai cạnh cho trước, tìm tam giác có diện tích lớn nhất.*

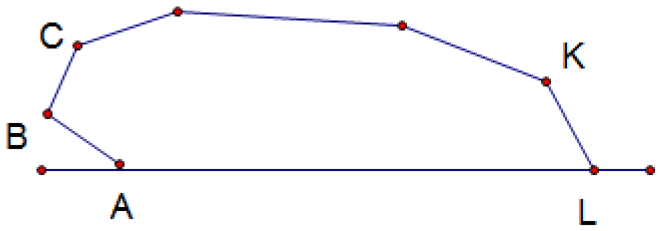
Lời giải. Ta có công thức tính diện tích tam giác theo hai cạnh a, b và góc C xen giữa chúng là $S = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin C$. Rõ ràng, với hai cạnh cho trước, biểu thức này sẽ đạt giá trị lớn nhất khi $\sin C$ đạt giá trị lớn nhất, tức $\sin C = 1$ hay C là góc vuông. □

Vậy, ta có kết quả sau:

Bổ đề 2. *Trong số những tam giác có hai cạnh cho trước, tam giác có diện tích lớn nhất là tam giác mà hai cạnh này tạo thành một góc vuông.*

Bài toán 2. *Cho biết chiều dài tất cả các cạnh liên tiếp của của một đa giác, trừ một cạnh. Tìm cực đại của diện tích đa giác đó.*

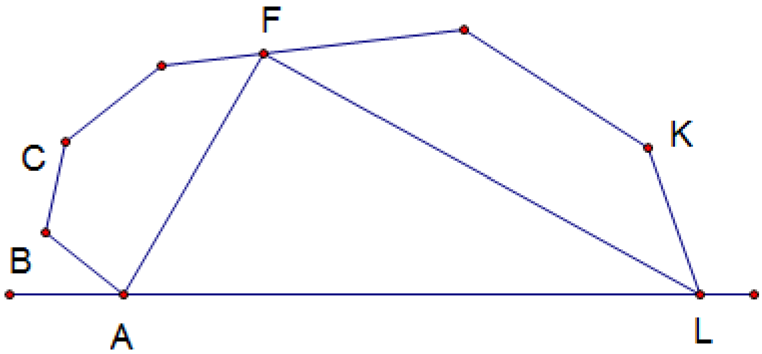
Lời giải. Xét đa giác $ABC...KL$ với độ dài các cạnh AB, BC, ..., KL cho trước, còn chiều dài cạnh LA chưa cho trước và các góc ở các đỉnh B, C, ..., F, K biến đổi (xem hình 3).



Hình 3:

Với các giả thiết này, ta phải làm cho diện tích $ABC, ..., KLA$ cực đại.

Giả sử bài toán được giả quyết, khi đó diện tích $ABC, ..., KLA$ đạt cực đại. Ta đã có được các giá trị cần tìm của tất cả các góc, trừ một góc. Trên hình 4, ta coi góc tại F biến đổi, còn các góc khác tại các đỉnh $B, C, ..., K$ cố định. Ta nối A và L với F. Các độ dài AF và LF không đổi.



Hình 4:

Toàn bộ đa giác $ABC...F...KLA$ bây giờ được chia ra làm ba phần, trong đó có hai phần cố định là các đa giác $ABC...FA$, $LK...FL$ và chỉ có phần thứ ba là có thể thay đổi. Tam giác AFL có hai cạnh FA, FL đã cho và góc tại F biến đổi. Theo kết quả của Bài toán 1, diện tích tam giác này và, cùng với nó, diện tích của toàn bộ đa giác $ABC...F...KLA$ đạt cực đại khi góc AFL là góc vuông. □

Tất nhiên, lập luận này có thể áp dụng cho các góc tại các đỉnh khác của đa giác, như $B, C, ..., K$. Như thế, ta thấy rằng: Diện tích đa giác $ABC...KLA$ không thể cực đại nếu cạnh AL (chưa cho ban đầu) không được nhìn dưới một góc vuông, tại mỗi đỉnh $B, C, ..., F, K, ...$ không nằm trên cạnh đó.

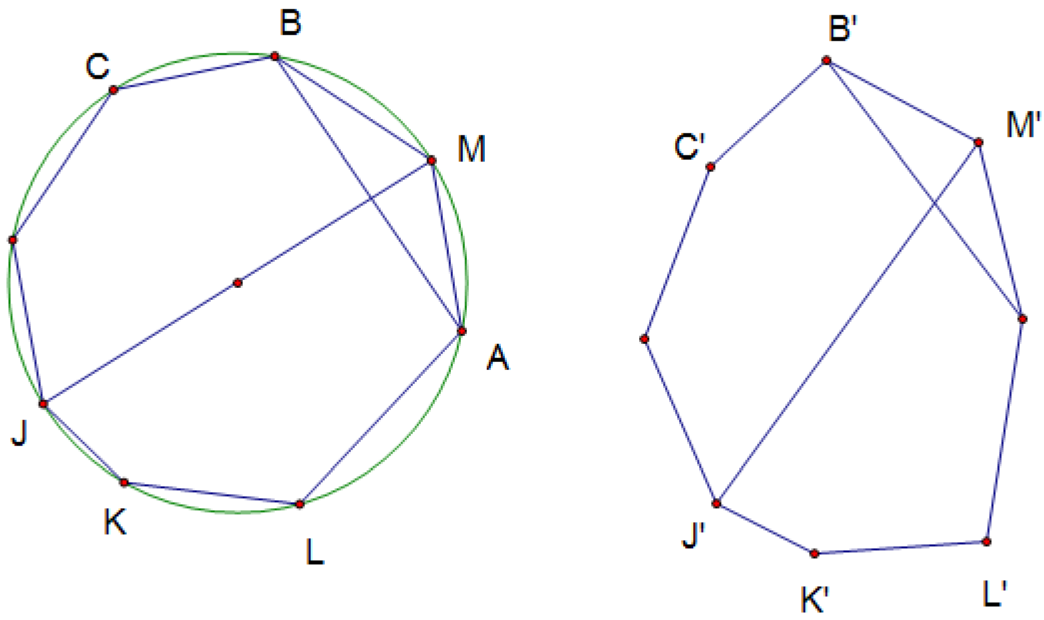
Nếu diện tích cực đại của đa giác $ABC...KLA$ tồn tại, thì nó phải đạt được trong tình huống vừa mô tả. Việc chứng minh sự tồn tại diện tích cực đại của đa giác này vượt ra ngoài giới hạn của chương trình phổ thông, khi ta phải nhờ đến sự "hỗ trợ" của Định lí Weierstrass về "sự tồn tại của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một hàm liên tục xác định trên một compact" của Toán học cao cấp.

Vậy, ta có kết quả sau:

Bổ đề 3. *Cho biết chiều dài tất cả các cạnh liên tiếp của của một đa giác, trừ một cạnh. Diện tích của đa giác đã cho đạt cực đại khi và chỉ khi đa giác đó nội tiếp nửa hình tròn có đường kính là cạnh chưa cho ban đầu.*

Bài toán 3. *Hãy so sánh diện tích một đa giác nội tiếp trong một hình tròn với diện tích của mọi đa giác khác có cùng các cạnh như vậy (nghĩa là, các cạnh dài bằng nhau và sắp xếp theo cùng thứ tự như nhau).*

Lời giải. Ta hãy so sánh hai đa giác $ABC...KL$ và $A'B'C'...K'L'$ (xem hình 5) có các cạnh tương ứng bằng nhau $AB = A'B', BC = B'C', ..., KL = K'L', LA = L'A'$ nhưng một số góc lại khác nhau. Ngoài ra, đa giác $ABC...KL$ nội tiếp đường tròn, còn đa giác $A'B'C'...K'L'$ thì không.



Hình 5:

Ta nối đỉnh J của đa giác $ABC...KL$ với tâm đường tròn ngoại tiếp và kẻ đường kính JM.

- Nếu M trùng với đỉnh của đa giác $ABC...KL$ thì, theo kết quả của Bài toán 2, ta có điều phải chứng minh.

- Nếu M không trùng với đỉnh của đa giác $ABC...KL$ thì M nằm trên đường tròn, ở giữa hai đỉnh kề nhau của đa giác nội tiếp, chẳng hạn như A và B. Ta kẻ MA, MB và xét tam giác AMB và dựng tam giác $A'M'B'$ trên đáy $A'B'$ bằng tam giác AMB.

Cuối cùng, ta kẻ $J'M'$. Đường thẳng JM chia đa giác $AMBC...KL$ ra hai phần (xem hình 5) và đường thẳng $J'M'$ cũng chia đa giác tương ứng như vậy. Ta áp dụng kết quả của Bổ đề 2 cho cả hai phần này. Khi đó, diện tích đa giác $MBC...J$ (nội tiếp trong nửa hình tròn) không nhỏ hơn diện tích của đa giác $M'B'C'...J'$. Thật vậy, tất cả các cạnh tương ứng, trừ MJ và $M'J'$, đều bằng nhau và chỉ riêng cạnh MJ, là đường kính của nửa hình tròn, là có thể khác với $M'J'$.

Tương tự, ta có diện tích đa giác $MALK...J$ không nhỏ hơn diện tích $M'A'L'K'...J'$. Suy ra, diện tích đa giác $AMBC...KL$ lớn hơn diện tích đa giác $A'M'B'C'...K'L'$. Nhưng vì diện tích tam giác AMB lớn hơn diện tích tam giác $A'M'B'$, nên ta có diện tích đa giác $ABC...KL$ lớn hơn diện tích đa giác $A'B'C'...K'L'$. Bài toán đã được giải quyết. □

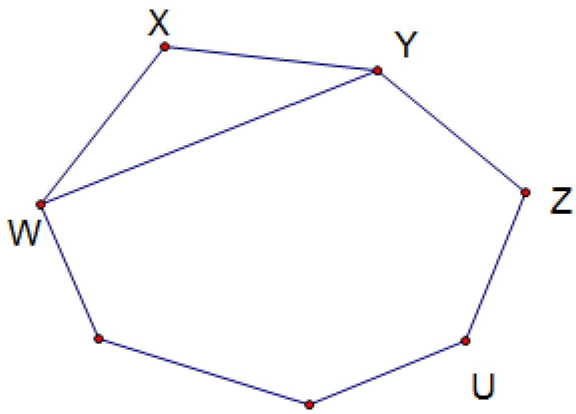
Vậy, ta có kết quả sau

Bổ đề 4. *Diện tích một đa giác nội tiếp trong một hình tròn lớn hơn diện tích của mọi đa giác khác có cùng các cạnh như vậy (nghĩa là, các cạnh dài bằng nhau và sắp xếp theo cùng thứ tự như nhau).*

Bài toán 4. *Trong các đa giác có số cạnh cho trước và chu vi cho trước, hãy tìm đa giác có diện tích lớn nhất.*

Lời giải. Trước hết, bởi Định lí 1, nếu có một đa giác như thế thì nó phải nội tiếp hình tròn.

Bây giờ, giả sử bài toán đã được giải quyết và ta đã biết các vị trí đúng của các đỉnh, trừ một điểm mà ta gọi là X, còn $n-1$ đỉnh khác, ta gọi là $U, ..., W, Y$ và Z đã được cố định (hình 6).



Hình 6:

Toàn bộ đa giác $U...WXYZ$ gồm hai phần: đa giác $U...WYZ$ với $n-1$ đỉnh đã cố định, không phụ thuộc vào X, và tam giác WXY phụ thuộc vào X. Đối với tam giác WXY, ta biết cạnh đáy WY và tổng hai cạnh kia là $WX + XY$. Thật vậy, $n-2$ cạnh còn lại của đa giác mà được giả thiết là đã biết, và trên thực tế ta đã biết tổng của tất cả n cạnh. Diện tích tam giác WXY phải là lớn nhất. Tuy nhiên, diện tích tam giác WXY, với cạnh đáy và chu vi đã biết, đạt cực đại khi tam giác là cân. Khi đó $WX = XY$, hai cạnh kề của đa giác phải tìm là bằng nhau. Do đó, theo tính chất đối xứng của các điều kiện và lược đồ biến đổi từng phần, hai cạnh kề bất kỳ là bằng nhau. Suy ra rằng, đa giác cần tìm phải có các cạnh bằng nhau.

Đa giác cần tìm nội tiếp hình tròn, đồng thời lại có các cạnh bằng nhau, nên là đa giác đều. □

Vậy, ta có kết quả sau:

Bổ đề 5. *Trong các đa giác có số cạnh cho trước và chu vi cho trước, đa giác đều có diện tích lớn nhất.*

Bài toán 5. *Cho hai đa giác đều, một đa giác có n cạnh, còn đa giác kia có $n+1$ cạnh, có cùng chu vi. Đa giác nào có diện tích lớn hơn?*

Lời giải. Theo Bổ đề 5, ta thấy rằng, đa giác đều có $n+1$ cạnh có diện tích lớn hơn diện tích của đa giác không đều có $n+1$ cạnh khi chúng có cùng chu vi. Nhưng đa giác đều với n cạnh, mỗi cạnh bằng a chẳng hạn, có thể xem như một đa giác không đều có $n+1$ cạnh, trong đó $n-1$ cạnh có độ dài là a, còn hai cạnh còn lại có chiều dài là $\frac{a}{2}$ và một góc bằng 180^0. □

Vậy, ta có kết quả sau:

Bổ đề 6. *Một đa giác đều với $n+1$ cạnh có diện tích lớn hơn diện tích đa giác đều có n cạnh, khi chúng có cùng chu vi.*

Bài toán 6. *Một hình tròn và một đa giác đều có cùng chu vi. Hình nào có diện tích lớn hơn?*

Lời giải. Ta xét các đa giác đều có n cạnh. Ta lần lượt cho $n = 3, 4, \ldots$. Áp dụng kết quả của Bổ đề 6, ta thấy rằng:

- Khi chuyển từ tam giác đều sang hình vuông có cùng chu vi, ta thấy diện tích tăng lên;

- Khi chuyển từ hình vuông sang hình ngũ giác đều có cùng chu vi, ta thấy diện tích cũng tăng lên;

Tiếp tục như vậy, khi chuyển từ một đa giác đều sang một đa giác đều tiếp theo (từ n - giác đều sang $n+1$ - giác đều) ta thấy rằng diện tích đa giác cứ mỗi bước lại được tăng lên, khi chu vi của chúng không đổi.

Cuối cùng, đến giới hạn, ta có được hình tròn. Chu vi của hình tròn cũng vẫn như thế, nhưng diện tích của nó hiển nhiên là vượt diện tích mọi đa giác đều, mà giới hạn của một dãy vô hạn các đa giác đều này chính là hình tròn đó. □

Vậy, ta có kết quả sau:

Bổ đề 7. *Diện tích hình tròn lớn hơn diện tích mọi đa giác đều có cùng chu vi.*

Bài toán 7. *Một hình tròn và một đa giác tùy ý có cùng chu vi, hình nào có diện tích lớn hơn?*

Lời giải. Áp dụng kết quả của Bổ đề 5 và Bổ đề 7, ta dễ dàng suy ra, đó là hình tròn. □

Vậy, ta có kết quả sau:

Bổ đề 8. *Một hình tròn và một đa giác tùy ý có cùng chu vi, hình tròn có diện tích lớn hơn.*

Bài toán 8. *Một hình tròn và một hình bất kỳ có cùng chu vi, hình nào có diện tích lớn hơn?*

Lời giải. Áp dụng kết quả của Bổ đề 8, ta dễ dàng suy ra, đó là hình tròn, vì mọi hình đều là giới hạn của các đa giác. □

Vậy, ta có kết quả sau:

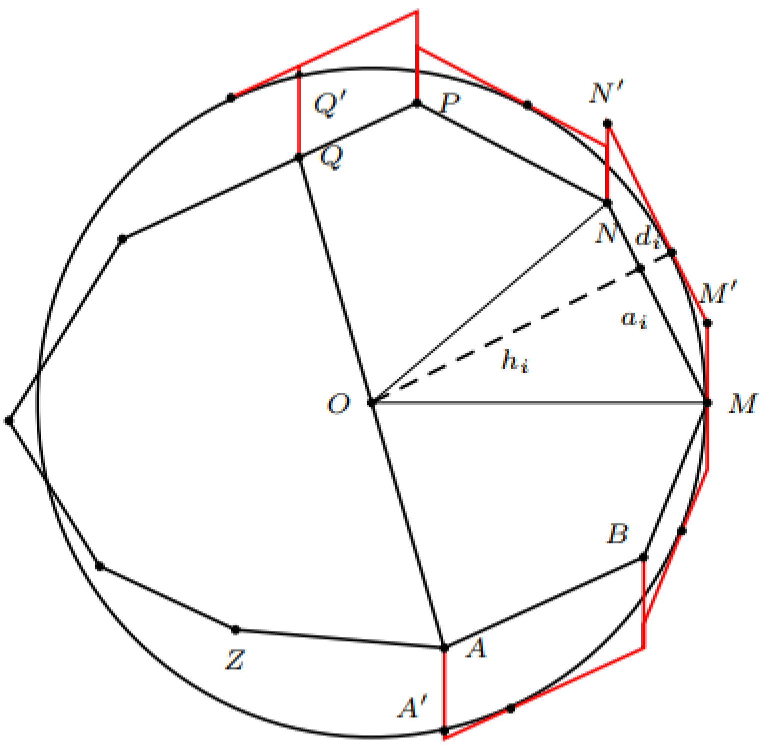
Định lý 1 (Định lí đẳng chu). *Trong tất cả các hình phẳng có chu vi bằng nhau thì hình tròn có diện tích lớn nhất.*

Như trên ta đã biết, Định lí đẳng chu đã được chứng minh sau một quá trình suy luận khá dài và phức tạp. Tuy nhiên, định lí này cũng có thể được chứng minh từ bổ đề sau đây (bổ đề này có nhiều cách chứng minh, trong đó cách chứng minh sau đây rất độc đáo vì chỉ dùng những kiến thức hết sức sơ cấp!)

Bổ đề 9. *Với mọi đa giác có chu vi L và diện tích A, ta có bất đẳng thức sau*

$$L^2 \geqslant 4\pi A.$$

Lời giải. Ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức đối với đa giác lồi là đủ. Giả sử $ABM...Z$ là một đa giác lồi (xem hình 7).



Hình 7:

Từ đỉnh A của đa giác, ta kẻ đường thẳng AQ chia đa giác này thành hai đa giác sao cho

i) $AB + BM + ... + PQ = \dfrac{L}{2}$, và

ii) Diện tích S_1 của đa giác $ABM...PQA$ thỏa mãn $S_1 \geqslant \dfrac{A}{2}$.

Gọi O là trung điểm của AQ và M là đỉnh cách xa O nhất của đa giác $ABM...PQA$. Đặt $OM = R$. Dựng đường tròn (O, R). Từ A và Q kẻ các đường thẳng vuông góc với OM, cắt đường tròn lần lượt tại A' và Q'.

Do tính chất của phép đối xứng, phần của hình tròn $AA'MQ'QA$ có diện tích F bằng một nửa của diện tích hình tròn, tức là $F = \frac{1}{2}\pi R^2$.

Bắt đầu từ cạnh AB, dựng ra phía ngoài đa giác ABM...PQ một hình bình hành sao cho cạnh đối của cạnh AB tiếp xúc với đường tròn, còn cặp cạnh đối còn lại vuông góc với đường thẳng OM, tức là cùng phương với các đường thẳng AA' và QQ'. Tiếp theo, từ cạnh BM, tiếp tục dựng các hình bình hành như thế, cho đến hình bình hành cuối cùng có một cạnh là PQ.

Đặt $AB = a_1, BM = A_2, ..., MN = a_i$. Nếu h_i là đường cao của tam giác OMN và d_i là chiều cao của hình bình hành $MM'N'N$, thì $h_i + d_i = R$.

Gọi S_1 là tổng diện tích của các tam giác $OAB, ..., OMN, ..., OPQ$, tức là

$$S_1 = \frac{1}{2}\sum_i a_i h_i.$$

Gọi S_2 là tổng diện tích của các hình bình hành, ta có

$$S_2 = \sum_i a_i d_i = \sum_i a_i (R - h_i) = R.\frac{L}{2} - 2S_1.$$

Vì $S_1 + S_2 \geqslant F$, nên ta có

$$R.\frac{L}{2} - S_1 \geqslant F = \frac{1}{2}\pi R^2.$$

Do đó

$$\pi R^2 - LR + 2S_1 \leqslant 0$$

hay

$$\frac{L^2}{4\pi} - 2S_1 \geqslant \pi\left(R - \frac{L}{2\pi}\right)^2 \geqslant 0.$$

Điều này suy ra rằng

$$L^2 \geqslant 4\pi.2S_1 \geqslant 4\pi A.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Áp dụng Bổ đề 9, ta có thể chứng minh Định lí đẳng chu, cách 2, như sau:

Từ bất đẳng thức $L^2 \geqslant 4\pi S$ trong Định lí 9 , ta suy ra

$$S \leqslant \frac{L^2}{4\pi} = \pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \pi r^2,$$

trong đó r là bán kính của một đường tròn có chu vi bằng chu vi L của đa giác.

Vì mỗi đường cong khép kín đều là giới hạn của các đa giác, khi số cạnh của đa giác dần ra vô cùng, nên bất đẳng thức

$$S \leqslant \pi r^2$$

được suy rộng thành nội dung của Định lí đẳng chu. Ta có được cách chứng minh thứ hai của Định lí đẳng chu.

Sau đây là cách chứng minh cổ điển của Định lí đẳng chu, với phương pháp thuần túy Giải tích, và do đó đây là cách chứng minh khá chặt chẽ khi không sử dụng những hình vẽ cụ thể và những suy luận "cảm tính" mỗi khi một đa giác nào đó được chuyển qua giới hạn để trở thành một đường cong.

Trước hết, trong [2], các kết quả cổ điển và quan trọng sau đây đã được chứng minh:

Bổ đề 10 (Bất đẳng thức Wirtinger, dạng liên tục). *Nếu $x(t)$ là một hàm thực liên tục tuyệt đối trên đoạn $[0, 2\pi]$ và thỏa mãn*

$$x(0) = x(2\pi), \quad \int_0^{2\pi} x(t)\, dt = 0,$$

thì

$$\int_0^{2\pi} \left(x'(t)\right)^2 dt \geqslant \int_0^{2\pi} x^2(t)\, dt.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tồn tại các hằng số thực A và B sao cho

$$x(t) = A \cdot \cos t + B \cdot \sin t, \ t \in [0, 2\pi].$$

Bổ đề 11 (Bất đẳng thức Wirtinger, dạng rời rạc). *Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} = x_1$ là các số thực thỏa mãn*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 0.$$

Thế thì, ta có

$$\sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k)^2 \geqslant 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} . \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tồn tại các hằng số thực A và B sao cho

$$x_k = A \cos\left(\frac{2\pi}{n}(k-1)\right) + B \sin\left(\frac{2\pi}{n}(k-1)\right), \ k = 1, 2, ..., n.$$

Áp dụng các bổ đề trên, ta có thể chứng minh Định lí 1 với phương pháp hoàn toàn Giải tích như đã nêu trên.

Thật vậy, nếu C là một đường cong trơn đóng cho trước theo tham số, thì độ dài cung L của nó có thể được biểu thị bằng công thức

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Khi đó, diện tích hình A tạo bởi đường cong C được tính bởi công thức tích phân đường loại hai

$$A = \int_C y dx = \int_a^b y \,\frac{dx}{dt}\, dt,$$

với việc chọn hướng của đường cong C là hướng dương.

Bây giờ, ta nên chọn một tham số s phù hợp để loại bỏ căn bậc hai trong tích phân biểu diễn độ dài cung L. Thuận tiện nhất là chọn $t = \frac{2\pi}{L}.s$ hay $s = \frac{L}{2\pi}.t$. Thế thì

$$\int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 dt = \frac{L^2}{2\pi}$$

và

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi A &= 2\pi \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2y.\frac{dx}{dt}\right) dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{dx}{dt} + y\right)^2 dt + 2\pi \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - y^2\right) dt. \end{aligned}$$

Ngoài ra, bởi Bổ đề 10, ta có

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 dt \geqslant \int_0^{2\pi} y^2\, dt.$$

Do đó

$$2\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{dx}{dt} + y\right)^2 dt + 2\pi \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - y^2\right) dt \geqslant 0.$$

Vậy $L^2 \geqslant 4\pi A$.

Suy rộng kết quả vừa đạt được, ta thu được chứng minh bằng phương pháp Giải tích (cách thứ ba) của Định lí đẳng chu.

Ở Định lí 1, ta đã diễn đạt Định lí đẳng chu theo nghĩa xét các hình phẳng có cùng chu vi. Đó là nội dung "cổ truyền" của cách diễn đạt thứ nhất. Tuy nhiên, theo nghĩa rộng hơn, Định lí đẳng chu còn có cách diễn đạt thứ hai như sau

Định lý 2 (Định lí đẳng chu thứ hai). *Trong tất cả các hình phẳng có diện tích bằng nhau thì hình tròn có chu vi nhỏ nhất.*

Rõ ràng, hai cách diễn đạt của hai định lí là khác nhau và khác nhau không chỉ về lời văn. Ta có thể gọi hai cách diễn đạt này là hai cách diễn đạt liên hợp. Ta sẽ chứng minh rằng hai điều khẳng định liên hợp này tương đương với nhau, bằng cách chứng minh rằng chúng cùng tương đương với một cách diễn đạt thứ ba, được hình thành từ suy luận dưới đây:

Giả sử A là diện tích, còn L là chu vi của hình đã cho. Ta giả thiết rằng hình đã cho và hình tròn bán kính r là đẳng chu, nghĩa là cùng bằng $L = 2\pi r$. Khi đó, dạng thứ nhất của Định lí đẳng chu khẳng định rằng $A \leqslant \pi r^2$. Ta thay r bằng biểu thức của nó theo L, nghĩa là $r = \dfrac{L}{2\pi}$. Khi đó, bất đẳng thức trên tương đương với bất đẳng thức $\dfrac{4\pi A}{L^2} \leqslant 1$.

Ta gọi bất đẳng thức này là Bất đẳng thức đẳng chu, còn thương ở vế trái là *thương đẳng chu*. Thương này chỉ phụ thuộc vào hình chứ không phụ thuộc vào kích thước của hình. Thật vậy, nếu ta tăng các kích thước bậc nhất của hình theo tỉ số $1 : 2$ chẳng hạn mà không thay đổi hình dạng của hình, thì chu vi sẽ bằng $2L$, còn diện tích là $4A$, nhưng thương $\dfrac{A}{L^2}$ không thay đổi và điều đó vẫn đúng với $\dfrac{4\pi A}{L^2}$, dù có tăng theo một tỉ số nào cũng vậy. Lưu ý rằng, thương đẳng chu sẽ bằng 1 đối với trường hợp hình tròn.

Với khái niệm thương đẳng chu vừa được hình thành, theo nghĩa rộng hơn, Định lí đẳng chu còn có cách diễn đạt thứ ba như sau

Định lý 3 (Định lí đẳng chu thứ ba). *Trong tất cả các hình phẳng thì hình tròn có thương đẳng chu lớn nhất.*

Như vậy, xuất phát từ các hình có chu vi bằng nhau, ta đã đi đến dạng thứ ba của Định lí đẳng chu. Bây giờ, ta sẽ bắt đầu từ khẳng định của Định lí 3 và chuyển sang các hình có diện tích bằng nhau.

Ta giả thiết rằng, hình có diện tích A và chu vi L có cùng diện tích với hình tròn bán kính r, nghĩa là $A = \pi r^2$. Thay A bằng biểu thức này, ta dễ dàng, ta dễ dàng biến đổi bất đẳng thức đẳng chu thành $L \geqslant 2\pi r$. Điều đó có nghĩa là chu vi của hình này lớn hơn chu vi của hình tròn có cùng diện tích. Ta đã đi tới dạng liên hợp thứ hai của Định lí đẳng chu thứ hai.

Tương tự, ta có thể nêu lập luận trên đây theo hướng ngược lại và từ Định lí 2 có thể suy ra Định lí 1, bằng cách áp dụng Định lí 3. Và như thế, ta có thể thấy được rằng cả ba dạng phát biểu của Định lí đẳng chu là tương đương.

Tài liệu tham khảo

[1] Nikolaos Dergiades, *An Elementary Proof of the Isoperimetric Inequality*, Forum Geometricorum, Volume 2 (2002) 129 – 130.

https://forumgeom.fau.edu/FG2002volume2/FG200215index.html

[2] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólia *Inequalities*, Cambridge at The University Press 1934, p. 185.

[3] Robert Osserman, *The isopermetric inequality*, Bulletin of The American Mathematical Society, Volume 84, Number 6, November 1978.

https://www.ams.org/journals/bull/1978-84-06/

[4] G. Pólia, *Toán học và những suy luận có lý. Quyển* 1, *tập* 2, Nhà xuất bản Giáo dục, 1977.

BÀI TOÁN HAY LỜI GIẢI ĐẸP

Ban Biên Tập

GIỚI THIỆU

Chuyên mục này được lấy cảm hứng từ bài viết của thầy Nguyễn Duy Liên ở số báo trước về bài toán số 6 trong kỳ thi IMO 2001 với 5 cách giải khác nhau. Mục này sẽ để dành viết về những bài toán hay, lời giải đẹp và những câu chuyện thú vị xung quan những bài toán và lời giải đó.

Tên của chuyên mục được mượn từ tên của một nhóm những người yêu toán trên Facebook do anh Nguyễn Văn Lợi sáng lập "*Bài toán hay - Lời giải đẹp - Đam mê toán học*". Chuyên mục ghi nhận các đề cử của bạn đọc và sẽ chọn đăng mỗi kỳ 1, 2 bài toán.

Số này chúng ta sẽ cùng với hai tác giả Trần Nam Dũng và Võ Quốc Bá Cẩn trao đổi về một bài toán của Vasile Cirtoaje đăng trên tạp chí Gezeta Matematika từ những năm 80 của thế kỷ trước cùng với 7 lời giải khác nhau của nó.

Trong Short list của IMO 1995 có bài toán sau do Titu Andreescu đề nghị

Bài toán 1. *Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm tất cả các số thực dương x, y, z thỏa mãn đồng thời điều kiện*

$$x + y + z = a + b + c, \quad 4xyz = a^2x + b^2y + c^2z + abc.$$

Thực ra, tác giả gốc của bài toán này là Vasile Cirtoaje, một chuyên gia về bất đẳng thức, đã đăng trong Gazeta Matematica vào những năm 1980 dưới phát biểu sau.

Bài toán 2. *Cho a, b, c, x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z = a+b+c$. Chứng minh rằng*

$$a^2x + b^2y + c^2z + abc \geqslant 4xyz.$$

Trong bài viết "*Giải tích và các bài toán cực trị*", tôi đã phát biểu lại bài toán này dưới dạng bài toán cực trị như sau.

Bài toán 3. *Cho a, b, c là các số thực dương. Các số thực dương x, y, z thay đổi nhưng luôn thỏa mãn điều kiện $x + y + z = a + b + c$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = 4xyz - (a^2x + b^2y + c^2z).$$

Ba bài toán này có mối liên quan trực tiếp với nhau và biết lời giải của bài toán này gần như hiển nhiên sẽ giải được bài toán kia.

Chúng ta sẽ khởi đầu từ lời giải của bài toán 1.

Lời giải 1. Chia hai vế của phương trình thứ hai cho $xyz > 0$, ta được

$$4 = \frac{a^2}{yz} + \frac{b^2}{zx} + \frac{c^2}{xy} + \frac{abc}{xyz}.$$

Đặt $X = \frac{a}{\sqrt{yz}}$, $Y = \frac{b}{\sqrt{zx}}$, $Z = \frac{c}{\sqrt{xy}}$ thì đẳng thức này trở thành

$$4 = X^2 + Y^2 + Z^2 + XYZ. \tag{1}$$

Dễ thấy X, Y, Z dương. Do đó $X^2 < 4$, suy ra $X < 2$, tương tự $Y < 2$. Nếu coi (1) như phương trình bậc hai theo Z thì (ta loại nghiệm còn lại vì nghiệm đó âm)

$$Z = \frac{-XY + \sqrt{X^2Y^2 + 16 - 4X^2 - 4Y^2}}{2}.$$

Nhận thấy biểu thức dưới căn có thể viết lại thành $(4 - X^2)(4 - Y^2)$. Biểu thức này gợi ý đến phép đặt $X = 2\sin u$, $Y = 2\sin v$ với u, v là các góc nhọn (điều này hợp lệ do $0 < X, Y < 2$). Lúc đó thì

$$Z = \frac{-4\sin u \sin v + 4\cos u \cos v}{2} = 2(\cos u \cos v - \sin u \sin v).$$

Như vậy

$$a = \sqrt{yz}\sin u, b = \sqrt{zx}\sin v, c = \sqrt{xy}(\cos u \cos v - \sin u \sin v).$$

Từ nãy giờ ta chưa dùng đến phương trình thứ nhất. Bây giờ thay các biểu thức trên vào phương trình thứ nhất ta được

$$x + y + z = \sqrt{yz}\sin u + \sqrt{zx}\sin v + \sqrt{xy}(\cos u \cos v - \sin u \sin v) \tag{2}$$

Bây giờ viết

$$x = (\sqrt{x}\sin u)^2 + (\sqrt{x}\cos u)^2,\ y = (\sqrt{y}\sin v)^2 + (\sqrt{y}\cos v)^2,\ z = \left(\sqrt{z}\right)^2,$$

ta có thể viết lại (2) dưới dạng

$$\left(\sqrt{x}\cos u - \sqrt{y}\cos v\right)^2 + \left(\sqrt{x}\sin u + \sqrt{y}\sin v - \sqrt{z}\right)^2 = 0.$$

Vì bình phương của một số thực luôn không âm nên một số hạng ở vế trái phải bằng 0. Do đó

$$\sqrt{z} = \sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u = \frac{a}{2\sqrt{z}} + \frac{b}{2\sqrt{z}}.$$

Suy ra $z = \frac{a+b}{2}$. □

Nhưng bài toán là đối xứng do đó ta cũng phải có $x = \frac{b+c}{2}$, $y = \frac{c+a}{2}$. Dễ dàng kiểm tra lại các nghiệm này thỏa mãn hệ phương trình.

Lời giải này được chúng tôi tham khảo từ website của John Scholes (www.kalva.demon.uk) và cũng có lẽ là lời giải chính thức của BGK trong Shortlist.

Lời giải này là anh em sinh đôi của lời giải sau đây cho bài toán 2, được cung cấp bởi Võ Quốc Bá Cẩn.

Lời giải 2. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 1. *Nếu $a^2x + b^2y + c^2z + abc = 4xyz$ thì $x + y + z \geqslant a + b + c$.*

Chia hai vế cho $4xyz$ thì được

$$\left(\frac{a}{2\sqrt{yz}}\right)^2 + \left(\frac{b}{2\sqrt{zx}}\right)^2 + \left(\frac{c}{2\sqrt{xy}}\right)^2 + 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{yz}} \cdot \frac{b}{\sqrt{zx}} \cdot \frac{c}{\sqrt{xy}} = 1.$$

Do tất cả các số hạng đều dương nên các số hạng ở vế trái thuộc $(0, 1)$. Chọn các góc nhọn A, B sao cho $\frac{a}{2\sqrt{yz}} = \cos A$, $\frac{b}{2\sqrt{zx}} = \cos B$ và đặt $Z = \frac{c}{2\sqrt{xy}}$, thì

$$Z^2 + 2\cos A \cdot \cos B \cdot Z + \cos^2 A + \cos^2 B - 1 = 0.$$

Giải phương trình này theo Z, ta tìm được

$$Z = \sin A \sin B - \cos A \cos B = \cos(180^0 - A - B).$$

Vậy

$$\frac{a}{2\sqrt{yz}} = \cos A, \quad \frac{b}{2\sqrt{zx}} = \cos B, \quad \frac{c}{2\sqrt{xy}} = \cos C,$$

với A, B, C là các góc nhọn có tổng bằng $180°$.

Bất đẳng thức cần chứng minh bây giờ tương đương với

$$x + y + z \geqslant 2\sqrt{yz}\cos A + 2\sqrt{zx}\cos B + 2\sqrt{xy}\cos C.$$

với x, y, z là các số thực dương và A, B, C là các góc của một tam giác nhọn.

Đặt $x = a_1^2$, $y = b_1^2$, $z = c_1^2$ thì điều cần chứng minh trở thành

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \geqslant 2b_1c_1\cos A + 2c_1a_1\cos B + 2a_1b_1\cos C.$$

Hay viết dưới dạng bất đẳng thức tam thức bậc hai theo a_1

$$a_1^2 - 2(c_1\cos B + b_1\cos C)a_1 + b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1\cos A \geqslant 0.$$

Tam thức bậc hai ở vế trái có định thức Δ'

$$\begin{aligned}\Delta' &= (c_1\cos B + b_1\cos C)^2 - (b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1\cos A)\\ &= -c_1^2\sin^2 B - b_1^2\sin^2 C + 2b_1c_1\sin B\sin C\\ &= -(c_1\sin B - b_1\sin C)^2 \leqslant 0\end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $c_1\sin B = b_1\sin C$ và $a_1 = c_1\cos B + b_1\cos C$. Lúc này

$$a_1 = c_1 \cdot \frac{b}{2c_1a_1} + b_1 \cdot \frac{c}{2a_1b_1} = \frac{b+c}{2a_1}.$$

Suy ra $x = a_1^2 = \frac{b+c}{2}$. Tương tự $y = \frac{c+a}{2}$, $z = \frac{a+b}{2}$.

Quay trở lại bài toán, giả sử ngược lại rằng $a^2x + b^2y + c^2z + abc < 4xyz$. Bằng cách tăng c lên thành c', ta sẽ đạt được tình huống $a^2x + b^2y + c'^2z + abc' = 4xyz$. Áp dụng bổ đề ta có

$$x + y + z \geqslant a + b + c' > a + b + c.$$

Mâu thuẫn. □

Phép thế lượng giác như trong các lời giải trên rất lợi hại và nó có thể áp dụng trong tất cả các bài toán có xuất hiện điều kiện $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chẳng hạn như trong các bài toán sau:

Bài toán 4 (USAMO 2000). *Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng*

$$0 \leqslant ab+bc+ca-abc \leqslant 2.$$

Bài toán 5. *Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng $a+b+c \leqslant 3$.*

Bài toán đại số, dĩ nhiên là sẽ có cách giải thuần túy đại số. Các bài toán 1, 2, 3, 4, 5 sẽ có những lời giải đại số rất tự nhiên mà chúng ta sẽ tiếp tục trao đổi sau đây. Chúng ta sẽ tập trung vào lời giải bài toán 2, còn các bài 4, 5 dành làm bài tập cho bạn nào muốn thử sức.

Lời giải sau đây là của Võ Quốc Bá Cẩn trong cuốn sách viết chung với ông Vasile Cirtoaje. Trong lời giải này, Cẩn đã dùng bất đẳng thức Cauchy Schwarz để dồn biến.

Lời giải 3. Vì $(y+z-a)+(z+x-b)+(x+y-c)=x+y+z>0$ nên trong các số $y+z-a$, $z+x-b$, $x+y-c$ có ít nhất một số dương. Không mất tính tổng quát giả sử $y+z-a>0$. Mặt khác, nếu $a^2 \geqslant 4xy$ thì bất đẳng thức cần chứng minh là hiển nhiên nên ta giả sử $a^2<4xy$. Ta biến đổi bất đẳng thức đã cho về dạng

$$2a^2x+2b^2y+2c^2z+a[(b+c)^2-b^2-c^2] \geqslant 8xyz,$$

hay

$$2a^2x+b^2(2y-a)+c^2(2z-a)+a(b+c)^2 \geqslant 8xyz.$$

Chú ý rằng với các số thực p, q, u, v với $p+q>0$, ta có

$$pu^2+qv^2-\frac{pq(u+v)^2}{p+q}=\frac{(pu-qv)^2}{p+q} \geqslant 0.$$

Nên ta có bất đẳng thức

$$pu^2+qv^2 \geqslant \frac{pq(u+v)^2}{p+q}.$$

Do đó, do $2y-a+2z-a=2(y+z-a)>0$, nên

$$b^2(2y-a)+c^2(2z-a) \geqslant \frac{(2y-a)(2z-a)(b+c)^2}{2(y+z-a)}.$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$2a^2x+\frac{(2y-a)(2z-a)(b+c)^2}{2(y+z-a)}+a(b+c)^2 \geqslant 8xyz.$$

Điều này tương đương với

$$(b+c)^2\left[\frac{(2y-a)(2z-a)}{2(y+z-a)}+a\right] \geqslant 2x(4yz-a^2),$$

hay
$$\frac{(b+c)^2(4xy-a^2)}{2(y+z-a)} \geqslant 2x(4xy-a^2).$$
Do $4xy-a^2>0$ nên ta có thể rút gọn thành
$$\frac{(b+c)^2}{2(y+z-a)} \geqslant 2a,$$
hay
$$(b+c)^2 \geqslant 4x(y+z-a).$$
Bất đẳng thức cuối cùng này đúng vì theo bất đẳng thức AM-GM
$$(b+c)^2=(a+b+c-a)^2=(x+y+z-a)^2 \geqslant 4x(y+z-a).$$
Chứng minh hoàn tất. □

Trong đáp án gốc của Vasile Cirtoaje còn đưa ra 3 cách giải khác nữa, nhưng những cách giải này dường đều thiếu tự nhiên.

Lời giải 4. Đặt $p=x-\frac{b+c}{2}$, $q=y-\frac{c+a}{2}$, $r=z-\frac{a+b}{2}$ thì $p+q+r=0$. Trong các số p, q, r chắc chắn phải có hai số cùng dấu. Chẳng hạn đó là p, q.

Ta có
$$x=p+\frac{b+c}{2}, \quad y=q+\frac{c+a}{2}, \quad z=r+\frac{a+b}{2}=-p-q+\frac{a+b}{2}.$$
Thay vào bất đẳng thức ta được
$$\begin{aligned}
&a^2x+b^2y+c^2z+abc-4xyz \\
&=a^2\left(p+\frac{b+c}{2}\right)+b^2\left(q+\frac{c+a}{2}\right)+c^2\left(-p-q+\frac{a+b}{2}\right)+abc \\
&\quad -4\left(p+\frac{b+c}{2}\right)\left(q+\frac{c+a}{2}\right)\left(-p-q+\frac{a+b}{2}\right) \\
&=4pq(p+q)+2p^2(c+a)+2q^2(b+c)+4pqc \\
&=4p^2\left(q+\frac{c+a}{2}\right)+4q^2\left(p+\frac{b+c}{2}\right)+4pqc \\
&=4(p^2b+q^2a+pqc) \geqslant 0.
\end{aligned}$$
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $p=q=0$, tức là khi $x=\frac{b+c}{2}$, $y=\frac{c+a}{2}$, $z=\frac{a+b}{2}$. □

Lời giải 5. Nếu $a^2 \geqslant 4yz$ thì bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng.

Nếu $a^2<4yz$, đặt $u=x+y+z=a+b+c$. Thay $c=u-a-b$ và $x=u-y-z$ bất đẳng thức trở thành
$$a^2(u-y-z)+b^2y+(u-a-b)^2z+ab(u-a-b)-4(u-y-z)yz \geqslant 0,$$

hay

$$zu^2 + \left[a^2 - 2(a+b)z + ab - 4yz\right]u + (a+b)^2 z - a^2(y+z) + b^2 y - ab(a+b) + 4yz(y+z) \geqslant 0.$$

Xem vế trái như tam thức bậc hai theo u, thì tam thức này có

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(a^2 - 2(a+b)z + ab - 4yz\right)^2 - 4z\left[(a+b)^2 z - a^2(y+z) + b^2 y - ab(a+b) + 4yz(y+z)\right]\\ &= (a+b-2z)^2\left(a^2 - 4yz\right) \leqslant 0.\end{aligned}$$

Chứng minh hoàn tất. □

Lời giải 6. Bất đẳng thức đã cho là hệ quả hiển nhiên của hằng đẳng thức sau

$$\begin{aligned}&2(bcu + cav + abw)\left(a^2x + b^2y + c^2z + abc - 4xyz\right)\\ &\quad = au(v-w)^2 + bv(w-u)^2 + cw(u-v)^2 + 2uvw(x+y+z-a-b-c)\end{aligned}$$

trong đó $u = 2ax + bc$, $v = 2by + ac$ và $w = 2cz + ab$. □

Nói thêm về ba lời giải này. Lời giải 4, như đã nói ở trên là dựa vào điểm rơi $x = \frac{b+c}{2}$, $y = \frac{c+a}{2}$, $z = \frac{a+b}{2}$ rồi "*dựng*" lại lời giải. Lời giải 5 có vẻ là tự nhiên nhất nhưng thực ra liên quan đến các tính toán rất cồng kềnh. Tính và rút gọn được cái Δ đó quả là kỳ công và không phải ai cũng dũng cảm làm, nhất là trong điều kiện phòng thi không có sự trợ giúp của máy tính (ở đây muốn nói đến các phần mềm tính symbolic như Maple, Mathematica chứ không phải là Casio). Riêng cách giải cuối là quá ảo, chỉ phù hợp để giải trí cho vui chứ làm sao có thể tìm ra được hằng đẳng thức kiểu như vậy?

Cuối cùng, chúng ta thảo luận một chút về bài toán 3. Đương nhiên là tất cả các cách giải của bài toán 2 đều có thể áp dụng để giải bài toán 3. Nhưng ta muốn tìm một cách giải độc lập khi chưa biết giá trị lớn nhất là abc, cũng chưa biết "*điểm rơi*" là $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$, $\frac{a+b}{2}$. Ta sẽ sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange để tìm cực trị của hàm nhiều biến có điều kiện.

Lời giải 7. Xét hàm Langrange

$$L(x,y,z,\lambda) = 4xyz - (a^2x + b^2y + c^2z) + \lambda(a+b+c-x-y-z).$$

Hệ phương trình tìm điểm dừng có dạng

$$\begin{cases}\dfrac{dL}{dx} = 0\\[2mm] \dfrac{dL}{dy} = 0\\[2mm] \dfrac{dL}{dz} = 0\\[2mm] \dfrac{dL}{d\lambda} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4yz - a^2 - \lambda = 0\\ 4zx - b^2 - \lambda = 0\\ 4xy - c^2 - \lambda = 0\\ x + y + z - a - b - c = 0\end{cases}$$

Từ ba phương trình đầu ta tìm được

$$2(xy + yz + zx) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 3\lambda}{2},$$

và

$$x^2 = \frac{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}{4(a^2+\lambda)}, \quad y^2 = \frac{(c^2+\lambda)(a^2+\lambda)}{4(b^2+\lambda)}, \quad z^2 = \frac{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}{4(c^2+\lambda)}.$$

Viết phương trình cuối dưới dạng $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = (a+b+c)^2$ rồi thay các giá trị của x^2, y^2, z^2 và $2(xy + yz + zx)$ tính được qua a, b, c và λ tính được trước đó vào, ta thu được phương trình

$$\frac{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}{4(a^2+\lambda)} + \frac{(c^2+\lambda)(a^2+\lambda)}{4(b^2+\lambda)} + \frac{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}{4(c^2+\lambda)} + \frac{a^2+b^2+c^2+3\lambda}{2} = (a+b+c)^2.$$

Giải phương trình này theo λ, ta tìm được $\lambda = ab + bc + ca$. Từ đây tìm được

$$x^2 = \frac{(b^2+ab+bc+ca)(c^2+ab+bc+ca)}{4(a^2+ab+bc+ca)} = \frac{(b+a)(b+c)(c+a)(c+b)}{4(a+b)(a+c)} = \frac{(b+c)^2}{4}$$

Hay $x = \frac{b+c}{2}$, tương tự $y = \frac{c+a}{2}$, $z = \frac{a+b}{2}$. Từ đó tìm được giá trị nhỏ nhất bằng

$$4\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right) - a^2\left(\frac{b+c}{2}\right) - b^2\left(\frac{c+a}{2}\right) - c^2\left(\frac{a+b}{2}\right) = abc$$

Lời giải hoàn tất. □

Cách giải cuối cũng khá cồng kềnh và không hề đơn giản (giải cái phương trình tìm lamda là cả một vấn đề). Hơn nữa, nó thực sự chưa hoàn chỉnh vì chưa nêu ra các lập luận chứng tỏ giá trị tại điểm dừng là giá trị nhỏ nhất (chúng ta bỏ qua sự chặt chẽ này để tránh sa đà vào lý thuyết). Tuy nhiên, nó giới thiệu cho chúng ta một cách tiếp cận tổng quát để giải lớp bài toán cực trị hàm nhiều biến có điều kiện. Nó cũng cho ta thấy, tại sao giải phương trình và hệ phương trình đại số lại là một trong các bài toán cơ bản của đại số.

Như vậy là ta đã cùng đi qua 7 cách giải cho một bài toán. Mỗi cách giải đều chứa đựng những ý tưởng, phương pháp tiếp cận hữu ích giúp chúng ta giải quyết các bài toán khác.

Câu chuyện về một bài toán hay với những lời giải đẹp xin được tạm dừng tại đây.