Epsilon

Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

No 14

VÀ CÁC CHUYÊN MỤC KHÁC

MỘT SỐ BÀI TOÁN TRÊN TÂM ĐƯỜNG TRÒN EULER
Trần Quang Hùng

TOÁN HỌC VÀ ẢO THUẬT
Nguyễn Hùng Sơn

NHỮNG CƠ HỘI MỞ RA SAU NGÀY HỘI TOÁN HỌC MỞ
Phạm Hy Hưng

Epsilon
Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

NO 14

Dec 2018

LỜI NGỎ

Bạn có tin vào chuyện cổ tích?

Cách đây 4 năm, chúng tôi, cùng với những độc giả đầu tiên đã bắt đầu câu chuyện cổ tích của mình bằng việc cho ra đời số đầu tiên tạp chí Epsilon, một tạp chí với mục tiêu vô tư, phát hành online miễn phí, và phục vụ những người yêu thích toán học. Một tạp chí được xây dựng bởi cộng đồng và cho cộng đồng. Câu chuyện cổ tích thử nghiệm ấy đã được lan truyền đi, được đông đảo bạn đọc đón nhận, chia sẻ, và cùng chung sức xây dựng. Câu chuyện của chúng tôi cũng đã có một kết thúc rất đẹp: chúng tôi dừng lại ở con số 13, khi Epsilon đang ở độ chín. Chúng tôi đã dừng lại trong tự hào, để từ đó mở đường cho một người anh em khác, tạp chí Pi.

Chúng tôi dừng lại, nhưng một phần nào đó trong mỗi cá nhân chúng tôi vẫn luyến tiếc về những ngày tháng đầy thơ mộng của Epsilon. Rồi thời gian dần trôi, Pi ngày càng vững mạnh, giờ đây đã là một tờ báo quen thuộc với những người yêu toán. Dẫu vậy, trong lòng các bạn yêu toán vẫn nhớ về Epsilon và họ luôn hỏi chúng tôi liệu Epsilon có ngày trở lại?

Vào một ngày đẹp trời mùa hè 2018, được thôi thúc bởi những giấc mơ đẹp, tổng biên tập Trần Nam Dũng quyết định để người em Epsilon tái xuất, cùng đồng hành với anh Pi của mình. Vậy là tất cả chúng tôi tái hợp.

Ban biên tập Epsilon những ngày đầu tiên phần lớn vốn là những cậu trai trẻ, độc thân và có rất nhiều thời gian, giờ đây đều đã có gia đình riêng, đã biết thế nào là những vất vả mưu sinh của cuộc sống. Nhuệ khí của tuổi trẻ đang bắt đầu chuyển mình thành kinh nghiệm của những người đàn ông từng trải. Mặc dù vậy, khi nghe lời hiệu triệu của tổng biên tập, tất cả chúng tôi đều không chút đắn đo, cùng trở lại. Chúng tôi lại cố gắng liên lạc với từng đồng nghiệp để có được những bài viết tốt nhất, lại làm việc thâu đêm để có được những bản biên tập đúng hạn và đúng chất lượng. Tất cả có được bởi chúng tôi tin vào nhau, và tin vào những điều kỳ diệu của những câu chuyện cổ tích.

Epsilon trở lại và vẫn giữ vững triết lý của mình: phục vụ cho cộng đồng yêu thích toán, trong đó đặc biệt đề cao tính "khả đọc" của từng bài viết. Epsilon sẽ luôn luôn miễn phí, luôn luôn phát hành online và tương lai chúng tôi sẽ từ từ chuyển hoàn toàn sang 100% online: hiện nay chúng tôi vẫn xuất bản theo kiểu tập tin định dạng pdf, trong tương lai chúng tôi sẽ sử dụng sang những định dạng khác, giúp cho tính khả đọc không chỉ đúng với nội dung mà còn với hình thức trình bày. Epsilon sẽ cố gắng mở rộng hơn đối tượng tác giả, sẽ sử dụng hệ thống bình duyệt bởi những người có chuyên môn. Chúng tôi sẽ tập trung cao hơn về chất lượng, do vậy, chúng tôi sẽ chỉ duy trì xuất bản 2 số mỗi năm, vào ngày 13 tháng 6 và 13 tháng 12.

Epsilon 14 vẫn giữ bản sắc của mình các với chuyên mục quen thuộc như bài toán hay - lời giải đẹp, điểm sách, toán học giải trí, lời giải và bình luận các cuộc thi, ... và tất nhiên, không thể thiếu những câu chuyện toán học đẹp như cổ tích.

Và bây giờ, mời các bạn cùng đọc Epsilon 14.

MỤC LỤC

SỐ VÀ LỊCH SỬ PHÁT TRIỂN LOÀI NGƯỜI

Nguyễn Lê Anh

Tôi thường bắt đầu bài giảng đầu tiên cho sinh viên năm thứ nhất bằng việc thông báo tên của tôi và một số quy định. Những quy định đầu tiên là sinh viên không cần phải xin phép để được vào ra khỏi lớp. Và điều này thì có hàm ý các sinh viên không nên chỉ vì phải đến đúng giờ mà phân tâm khi đi đường và vô tình để bị xảy ra tai nạn giao thông. Tôi còn nói nhiều điều nữa, rồi tôi hỏi

- Có đúng là các em đã thi vào trường đại học một cách trung thực không ?

Gần như ngay lập tức các em đều khẳng định

- Thưa thầy, đúng ạ.

Tôi cũng nhận ra vẻ kiêu hãnh tự hào trên khuôn mặt của các bạn trẻ mới bước những bước đầu tiên vào giảng đường Đại học. Tôi im lặng và nói.

- Các em có cho phép tôi được kiểm tra không ?

- Vâng.

- Có ai trong số các em cho tôi biết -3 là gì không ?

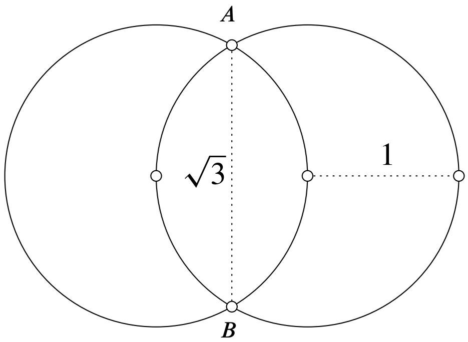
Thế rồi cả lớp ồn ào, rồi chìm vào sự tĩnh lặng. Tôi gọi một vài sinh viên để họ đứng lên trả lời. Các vị đang dõi theo đọc bài viết này chắc cũng đang tự tìm lấy câu trả lời. Thôi thì đủ các kiểu trả lời. Tôi chờ cho tới khi sinh viên tự nhận thấy là tất cả các câu trả lời của các bạn ấy đều không đúng và tự hiểu ra là không có câu trả lời, rồi tôi nói:

- Nếu chắc chắn các em đã thi vào đại học một cách trung thực thì hoặc là bộ Giáo Dục đã không trung thực khi đứng ra làm người cầm cân nảy mực - họ đã không có đủ kiến thức để làm việc ấy - hoặc là trường đại học mà các em đang học không trung thực khi tổ chức thi. Chúng ta sẽ cùng với các em làm cho rõ hơn chuyện này.

Thế rồi tôi bắt đầu giảng bài. Tôi nói rằng các con vật không phải là không biết đến các con số, có điều chúng gắn liền con số với sự vật. Khi đưa cho một đứa trẻ nhỏ 5 cái kẹo thì chúng sẽ hình dung ra 5 cái trước mắt chúng. Khi ăn cái kẹo nào là cái kẹo ấy sẽ biến mất đi khỏi sự tưởng tượng. Vậy để kiểm tra một đứa trẻ có khả năng toán học không thì chỉ cần đưa cho nó kẹo, bảo nó cho vào túi, rồi bảo nó ăn, rồi bảo nó cho bạn nó. Rồi bất ngờ hỏi số lượng kẹo còn lại trong túi khi số lượng ấy chỉ vài ba cái. Nó sẽ trả lời đúng cho dù đó là phép toán với các số khá lớn. Những con số như vậy được gọi là số tự nhiên. Nó được dùng để thông báo số lượng các vật thể là kết quả của quá trình đếm. Quá trình đếm bắt đầu là 1, rồi đến 2,... không thể có số đếm mà không có gì. Phải mãi tới 20 nghìn năm trước CN, do nhu cầu mà, xuất hiện số 0. Số 0 là số không có gì, tức không phải là số. Đó là sản phẩm nhân tạo phi tự nhiên đầu tiên được loài người tạo ra. Sự xuất hiện số 0 đồng nhất với thời điểm xuất hiện văn hóa.

Trong việc sử dụng số đếm thì "1 *con bò là hợp lý, nhưng* $1/2$ *con bò là vô nghĩa*". Việc sử dụng các con số như $1/2$ cốc nước, $2/3$ đoạn đường ... được hiểu là khái niệm số đã thay đổi. Các con số đã bị bỏ đi đặc tính "*nguyên khi đếm*" và chuyển sang loại con số thông báo lượng. Người ta hình dung các con số như tỷ lệ độ dài của các đoạn thẳng với đoạn được coi là 1 - đoạn đơn vị. Để thông báo một con số nào đó người ta thông báo ra phép dựng hình để tạo ra nó. Và thế là hình học Ơ-cơ-lit ra đời. Theo Ơ-cơ-lit thì số được đồng nhất với đoạn thẳng có thể dựng ra được và chỉ những đoạn thẳng nào dựng ra được mới được coi là con số. Như vậy đường chéo của hình vuông có cạnh bằng 1 là số $\sqrt{2}$ (căn bậc hai của 2).

Nếu giải thích $\sqrt{3}$ là số mà bình phương lên thì bằng 3 là vô nghĩa, bởi có biết nó là số đâu mà bình phương lên !! Câu giải thích "*số* $\sqrt{3}$ *được là đoạn thẳng sinh ra từ hai điểm cắt nhau của hai vòng tròn bán kính bằng nhau, vòng tròn này đi qua tâm của vòng vòng kia*" thì đúng.



Và tất nhiên từ định lý Pitago chúng ta có thể chứng minh được bình phương của nó chính là bằng 3.

Câu hỏi "*Có thể dựng ra được đoạn thẳng có độ dài bằng với* π *là diện tích của hình tròn bán kính đơn vị hay không?*" là một bài toán rất khó và phải mãi tới thế kỷ 19 mới có câu trả lời. Câu trả lời là "*Không thể dựng ra được đoạn thẳng có độ dài bằng với diện tích hình tròn bán kính đơn vị*". Điều này đồng nghĩa với việc số π diện tích hình tròn bán kính đơn vị không phải là một con số theo quan niệm của Ơ-cơ-lít.

Bằng phép dựng hình chúng ta có thể chia đoạn thẳng đơn vị ra làm 10 phần. Phần thứ nhất được gọi là 0, phần tiếp theo được gọi là 1,.. cứ như thế cho tới 9. Mỗi phần lại có thể chia ra 10 phần và cách gọi tên của đoạn nhỏ là tên của nó kèm theo tên của đoạn mà nó nằm bên trong. Đó là cách gọi theo hệ thập phân mà ngày nay mà chúng ta vẫn dùng để gọi tên các con số. Nếu chúng ta không chia ra làm 10 phần mà chỉ chia thành 2 phần thì chúng ta có cách gọi nhị phân của các con số.

Như thế số thập phân $0.99999\ldots$ tuần hoàn mãi mãi số 9, là ký hiệu đoạn cuối cùng của quá trình chia 10 phần mãi mãi. Nếu coi quá trình trên là việc ăn 1 cái bánh, cứ mỗi lần ăn hết $9/10$ chỉ còn lại $1/10$, rồi lại ăn hết $9/10$ phần còn lại ấy... thì hầu như ai cũng cho rằng "*sẽ chẳng bao giờ ăn hết được cái bánh*" - vì "*Lúc nào cũng còn !*". Tuy nhiên nếu coi đấy là một đoạn đường đi từ A đến B, và khi đã đi đến được B rồi thì tất nhiên phải có lúc đi qua vị trí là điểm 9/10 đoạn đường, rồi tiếp theo là đi qua vị trí là điểm 9/10 đoạn còn lại,... cứ như thế. Sự tự mâu thuẫn này không phải là lý do chúng ta không thể đi hết đoạn đường từ A đến B, mà là do chúng ta "*ép buộc, lý giải quá trình đi này bằng một thứ ngôn ngữ phi thực tế - ngôn ngữ toán học*". Điều này cũng sẽ xảy ra khi chúng ta nghiên cứu về thế giới. Chúng ta sẽ làm quen với khái niệm một vật vừa là hạt lại vừa là sóng... và còn nhiều điều nghe như phi lý nữa.

Những người cho rằng quá trình đi từ A tới B sẽ đi đến được B thì sẽ công nhận dãy 0.9; 0.99; 0.999; ... có giới hạn và bằng 1; họ là môn đệ của lý thuyết toán học có giới hạn. Dãy "*có giới hạn*" kiểu như dãy 0.9; 0.99; 0.999; ... như ở trên, hoặc là dãy sinh ra khi Iasin đuổi con Rùa. Iasin là người vô địch về chạy ở thế vận hội cổ đại. Tài năng chạy của ông ta bị mang ra ví với tài năng chạy của một con Rùa. Khi Iasin đuổi tới chỗ con Rùa hiện tại thì con Rùa đã lại đi được một tí, cứ như thế Iasin lại phải đuổi tới chỗ con Rùa đang ở, rồi cứ như thế mà tạo ra dãy vô hạn có tính chất "*có giới hạn*". Vậy những người theo trường phái Acsimet thì cho rằng Iasin sẽ đuổi được kịp con Rùa, và những người phản bác Acsimet thì không.

Nói về Acsimet thường mọi người hay nhớ về câu chuyện ông ta cở truồng chạy ra phố reo Ơrêca khi tìm được phương pháp đo thể tích của chiếc ngai vàng mà không phải nấu chảy nó ra. Mọi người ít biết về việc Acsimet là người đầu tiên đưa ra quan niệm về cách đo diện tích của hình tròn bán kính đơn vị. Ông ta dựng ra các hình đa giác đều nội và ngoại tiếp hình tròn, và nhờ việc có thể tính được diện tích của các đa giác nội ngoại tiếp mà Acsimet có được dãy các số để đánh giá cận trên và cận dưới cho diện tích hình tròn đơn vị. Trên thực tế Acsimet đã sử dụng phép dựng hình để dựng ra được hai đoạn thẳng $3\frac{10}{71}$ và $3\frac{10}{70}$, và chứng minh được $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$. Ông ấy đã làm việc này từ hơn 2250 năm về trước, khi ấy chưa có cách ghi bằng các con số $0, 1, 2, 3, \ldots$ Các con số $3\frac{10}{71}$ hay $3\frac{10}{70}$ chỉ là thứ mà ngày nay chúng ta diễn đạt lại cách dựng hình của Acsimet. Nếu cứ làm tiếp như Acsimet chúng ta sẽ nhận được dãy số đánh giá cận trên và cận dưới diện tích hình tròn bán kính đơn vị. Biên độ chính xác của đánh giá càng sau càng tốt hơn, tiến dần tới 0. Và, như chúng ta vẫn hiểu dãy các cận trên và cận dưới này là "*tiến tới π*", và rằng cận trên và cận dưới thì không bao giờ bằng nhau. Vậy là Acsimet đã coi như "*tồn tại*" thêm một thứ số chỉ có thể dựng ra được dãy cận trên và cận dưới, càng sau càng chính xác hơn, mà có thể không dựng ra được đúng đoạn thẳng nào có độ dài là nó theo kiểu Ơ-cơ-lit. Nhờ vào Acsimet mà chúng ta có thêm các con số, chúng ta gọi chúng chúng là số thực. Chúng được sinh ra nhờ quá trình dựng hình theo Ơ-cơ-lít và lấy giới hạn theo kiểu Acsimet. Nhờ có công cụ giới hạn với số thực của Ascimet mà chúng ta định nghĩa ra tích phân đạo hàm,..thế rồi tìm ra các phương trình vật lý, ra Bigbang,... ra điện ra nền văn minh của chúng ta ngày nay.

Lại nói về quá trình Iasin đuổi Rùa, hay là đi từ điểm A tới điểm B. Những ai cho rằng Iasin sẽ đuổi được Rùa là họ theo Acsimet tạo ra trường phái toán học liên tục với công cụ giới hạn. Họ tạo ra vật lý học, rồi điện... Vậy còn những ai không công nhận quá trình đi được từ A tới B, tức về mặt logich Iasin không có cách nào đuổi được con Rùa, họ là môn đệ của trường phái toán học có cấu trúc - đó là tự động hóa, đó là công nghệ thông tin, mạng máy tính, trí tuệ nhân tạo, ... tức là ít nhất cũng bao gồm toàn bộ cái thế giới ảo ngày nay.

Một khi nào các bạn về vùng ven biển, các bạn có thể thấy người dân khâu lưới đánh bắt cá. Người ta cần phải chuẩn bị công cụ cho những chuyến đánh bắt. Lịch sử các con số, tức lịch sử của toán học, đó là lịch sử hoàn thiện tấm lưới đó. Chúng ta quăng lưới để đánh bắt các con "*cá*" - là các quy luật, từ cái biển là thế giới tự nhiên bao la. Đó là việc phát hiện ra các hạt như hạt ánh sáng photon, hạt điện tử, các loại phản vật chất,... và các hạt như hạt Quack còn nhỏ hơn cả hạt nhân nguyên tử đến nhiều tỷ lần ...

Ơ-cơ-lit đưa ra cách để khai sinh ra các con số, Acsimet đã thêm vào đó các số thực. Số âm ra đời để làm cho phương trình $a + x = b$ luôn có nghiệm. Người ta sử dụng -3 để chỉ nghiệm của phương trình $5 + x = 2$. Và điều quan trong là nằm ở chỗ : các nhà toán học đã chứng minh được "*Khi thêm số âm vào hệ thống các con số thì chúng ta không tạo ra bất kể một mâu thuẫn nào như khi không có chúng*". Vậy sử dụng số âm hay không sử dụng số âm là quyền của mỗi người. Sử dụng số âm sẽ làm cho quá trình tính toán trở nên đơn giản hơn. Điều này cũng tương tự như việc sử dụng thế giới Âm để giáo dục văn hóa làm người một cách đơn giản hơn.

Người Việt quan niệm cõi Âm có tác động quyết định lên cái duyên khiến một sự việc xảy ra. Tín ngưỡng của chúng ta còn cho rằng cõi Âm là sự tiếp tục của sự sống, và mỗi con người vẫn phải chịu trách nhiệm về hành vi khi còn đang sống trên cõi Dương Thế. Tôi cũng luôn thấy mình vẫn là mình vẫn được chở che khi nghĩ đến cõi Âm nơi mà Ba và Mẹ tôi đã đến cùng với ông bà tổ tiên. Nếu sự chấp nhận cõi Âm không bị lợi dụng và không gây ra sự tự mâu thuẫn của các quyết định của "*Dương Thế*", thì sự chấp nhận cõi Âm là thuộc phạm trù văn hóa. Nó làm cho cuộc sống có thêm những điều không thể lý giải logich được, làm cho cuộc sống của chúng ta là của những con người.

Một số bạn thường vấn vương câu hỏi "*Vì sao trừ của trừ lại bằng cộng - tức là* $-(-3)$ *lại bằng* 3 *?*" Câu trả lời nằm ở chỗ các bạn ấy đã cố tình hình dung "*trừ*" như là nợ, và để rồi nợ của nợ là thứ cực kỳ khó hiểu. Có ai mang tấm lưới đánh bắt cá ra kho mà ăn bao giờ ! Số -3 chỉ là công cụ để thực hiện phép toán, nó không có trong tự nhiên, nó là cái lưới do chúng ta tạo ra, nó không phải là cá. Vậy chúng ta không nên cố gắng hình dung ra -3 phải là gì. Điều mà chúng ta có thể làm là vá lưới, tức mong muốn cái công cụ số của chúng ta phải có được những tính chất sau.

1 - Có 2 phép toán $+$ và $*$ (cộng và nhân), và mọi hai số đều có thể cộng với nhau cũng như nhân với nhau để cho kết quả là số.

2 - Thứ nhất nó có số 1 (tức là cái đoạn thẳng đơn vị thừa hưởng từ thời cố nội 7 nghìn đời ông Ơ cơ lít).

3 - Tiếp theo là số 0 (là mốc đẻ ra nền văn hóa và văn minh mà chúng ta đang tự hãnh diện khi đứng trước con chó).

Tiếp theo là các tính chất của phép cộng như

4 - phép giao hoán $a + b = b + a$.

5 - phép kết hợp $(a + b) + c = a + (b + c)$.

6 - phép cộng với 0 thì $a + 0 = a$.

7 - mọi số a đều có số, được ký hiệu là $-a$, để cho $a + (-a) = 0$.

Bây giờ là đến lúc chúng ta trả lời câu hỏi về $-(-3)$ thì bằng 3.

Theo tiên đề 7 thì $-(-3)$ là một số mà $(-3) + (-(-3)) = 0$.

Thế rồi lại theo tiên đề 7 chúng ta có $3 + (-3) = 0$.

Tổng $3 + (-3) + (-(-3))$ có 2 cách tính.

Cách thứ nhất $[3 + (-3)] + (-(-3)) = 0 + (-(-3)) = -(-3)$.

Cách thứ hai $3 + [(-3) + (-(-3))] = 3 + 0 = 3$.

Do tiên đề 5 về kết hợp và tiên đề 4 về giao hóan, tiên đề 6 về cộng với 0 chúng ta khẳng định $-(-3) = 3$.

Như vậy không phải "*nợ của nợ là được*". Đặc tính $-(-3) = 3$ là hệ lụy của việc chúng ta muốn có số âm để tiện trong tính toán mà lại muốn nó có đủ các tính chất thông thường của phép toán.

Đối với phép nhân chúng ta mong muốn nó có được các tính chất sau

8 - phép giao hoán $a * b = b * a$.

9 - phép kết hợp $(a * b) * c = a * (b * c)$.

10 - quy tắc hỗn hợp $(a + b) * c = a * c + b * c$.

11 - phép nhân với 1 thì $a * 1 = a$.

12 - mọi số $a \neq 0$ thì có một số, ký hiệu là $1/a$, mà $a * 1/a = 1$.

Bây giờ là lúc chúng ta trả lời câu hỏi "*vì sao bình phương của một số âm lại là một số dương ? Ví dụ* $(-3) * (-3) = 9$".

Theo định nghĩa -3 là $3 + (-3) = 0$. Do đó

$$3 * 3 + 3 * (-3) = 3 * (3 + (-3)) = 3 * 0 = 0,$$

hay $9 + 3 * (-3) = 0$. Mà theo tiên đề 8 thì $(-3) * 3 = 3 * (-3)$, nên $9 + (-3) * 3 = 0$.

Mặt khác, ta cũng có

$$(-3) * 3 + (-3) * (-3) = (-3) * [3 + (-3)] = (-3) * 0 = 0.$$

Như vậy, $(-3) * 3 + (-3) * (-3) = 0$ và $(-3) * 3 + 9 = 0$, suy ra $(-3) * (-3) = 9$.

Như vậy "*Bình phương của một số âm là một số dương*" không phải do Trời sinh ra nó như thế. Số âm không có, chúng ta chấp nhận cho số âm vào trong hàng ngũ các con số thì nó có những tính chất như vậy. Nó là hệ lụy của việc chúng ta muốn nó tuân thủ các tính chất của phép toán. Vậy không phải thực tế mà chính là phép toán là thứ đẻ ra các con số và cho chúng tính chất!

Số âm ra đời là để cho phương trình $a + x = b$ luôn có nghiệm. Số hữu tỷ ra đời là để cho phương trình $a * x = b$ $(a \neq 0)$ luôn có nghiệm. Và số thực là đời là để cho mọi dãy hội tụ thì "*tiến đến giới hạn*" và cái giới hạn ấy là số.

Tuy nhiên để cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm chúng ta phải cho thêm vào hàng ngũ các con số một loại số nữa. Chúng được gọi là số phức. Số phức được ký hiệu là $a + ib$ và chúng có thể thực hiện các phép toán cộng và nhân như sau :

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d), \quad (a+ib)*(c+id) = (a*c-b*d)-i(a*d+b*c).$$

Với định nghĩa như vậy thì số phức có đủ các tính chất từ 1 tới 12 như nêu trên. Và với việc sử dụng chúng thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có hai nghiệm là

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Người ta đã chứng minh được việc thêm các số phức vào chỉ có tiện hơn cho tính toán mà không làm nảy sinh ra mâu thuẫn gì như trước khi thêm chúng vào. Vậy là chúng ta có thể sử dụng hay không sử dụng số phức. Việc sử dụng số phức sẽ làm cho việc nghiên cứu dễ dàng hơn, bởi vì đối với số phức các hàm số mũ và hàm lượng giác có cùng bản chất $\cos x + i \cdot \sin x = e^{ix}$, các hàm logarithm và các hàm lượng giác ngược cũng biểu diễn đơn giản qua nhau.

Cũng như việc biểu diễn số thực trên đường thẳng, việc sử dụng số phức ít nhất có lợi là chúng ta có thể coi mỗi điểm của mặt phẳng như là biểu diễn của một số phức. Ở đó phép nhân với số phức $\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha = e^{i\alpha}$ chính là phép quay mặt phẳng đi một góc là α. Như vậy số phức xuất hiện trong vật lý ở những chỗ nào có dao động, bởi các hàm lượng giác là các hàm số theo góc, và quay đi một góc thì sẽ đơn giản là nhân với một số số nếu sử dụng số phức. Cơ học lượng tử khẳng định chuyển động của một hạt rất nhỏ sẽ có tính chất sóng. Dao động này không phải là dao động của không gian, mà tại mỗi điểm của không gian 3 chiều của chúng ta, khi hạt chuyển động đến sẽ có thêm những chiều nữa nơi chúng sẽ dao động. Vậy là tại mỗi điểm trong không gian, hàm biểu diễn trạng thái của hạt sẽ là hàm số phức theo thời gian.

Theo dõi lịch sử phát triển của con số chúng ta thấy các con số có xuất phát điểm là từ các nhu cầu thực tế nhưng về sau nó xuất hiện là do sự hoàn mỹ của công cụ toán học. Thật đáng tiếc mọi đa thức đều có nghiệm trên trường số phức. Như vậy việc sử dụng các phép toán cộng và nhân để mở rộng trường số với đủ 12 tính chất như trên đã không còn có thể. Muốn có thêm các số nữa chúng ta phải giảm thiểu các tính chất mà chúng phải thỏa mãn.

Mọi học sinh đều còn nhớ hằng đẳng thức $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Hẳn không ít bạn nhỏ đã thử sức và không thể khai triển được hệ thức $a^2 + b^2$. Vào năm 1878, Clifford đưa ra ý niệm về việc khai triển $a^2 + b^2$ thành một bình phương, kiểu như hằng đẳng thức đáng nhớ. Ông ấy muốn có khai triển $a^2 + b^2 = (\alpha \cdot a + \beta \cdot b)^2$ với mọi a và b. Điều này chỉ xảy ra nếu trong khai triển

$$(\alpha \cdot a + \beta \cdot b)^2 = (\alpha \cdot a + \beta \cdot b)(\alpha \cdot a + \beta \cdot b) = \alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + (\alpha\beta + \beta\alpha)ab,$$

thì $\alpha^2 = 1$, $\beta^2 = 1$ và $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$. Lẽ dĩ nhiên các α, β không thể là số được, bởi không thể có số mà $\alpha\beta = -\beta\alpha$. Không phải là số thì cũng chả sao, chúng ta sẽ mở rộng chúng để sử dụng với một điều phải được chứng minh là "*các ông bạn mới này không gây ra sự phiền toái nào như trước khi chúng ta công nhận chúng!*". Chúng ta gọi chúng là các Clifford. Dirack đã hình dung phương trình vi phân đạo hàm riêng bậc hai

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0,$$

ở dạng bình phương phương trình bậc nhất

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \left(\alpha \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \beta \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \gamma \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \xi \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2.$$

Tức là tìm ra các "*số*" $\alpha, \beta, \gamma, \xi$ về thực chất là các ma trận 4 chiều, thỏa mãn
$$A^2 - B^2 - C^2 - D^2 = (\alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C + \xi \cdot D)^2.$$
Khi ấy phương trình có dạng
$$\alpha \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \beta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \gamma \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \xi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$
Do các số Clifford có thể được hình dung như các ma trận. Với cách hình dung như thế chúng ta mở rộng khái niệm số ra ma trận. Các ma trận được coi là các con số. Chúng ta có thể cộng và nhân ma trận. Chúng ta có thể có được các đa thức với các hệ số là các ma trận, hơn thế nữa chúng ta có thể định nghĩa được hàm số với biến số mà các ma trận. Và do $\alpha, \beta, \gamma, \xi$ là các ma trận nên các chiều thêm vào (phần ảo) được Dirack gọi là phản vật chất. Như thế phản vật chất được sinh ra trong quá trình hình dung số dưới dạng các Clifford.

Vậy là chúng ta đã có được công cụ số, Chúng ta ký hiệu số thực là $\mathbb{R}$ và số phức là $\mathbb{C}$. Bỏ đi điều kiện giao hoán của phép nhân thì chúng ta có thể mở rộng trường số để nó có thêm các số nữa và đó là quanternion. Số quanternion có dạng $a + ib + jc + kd$ trong đó $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $k = i \cdot j$ và $i \cdot j = -j \cdot i, i \cdot k = -k \cdot i, j \cdot k = -k \cdot j$. Trong trường số này chỉ trừ tính chất giao hoán của phép nhân còn 11 tính chất tích còn lại được thỏa mãn. Như thế tích của các số vẫn có tính kết hợp và mọi số khác 0 thì đều có ngược.

Cũng giống như số phức với mặt phẳng, mỗi phép quay trong không gian 3 chiều tương ứng với một số quanternion. Như thế để biểu diễn các trạng thái vật lý mà mỗi điểm liên quan tới sự chuyển đổi của 3 đại lương vật lý thì hàm trạng thái tại một điểm trong không gian sẽ là hàm quanternion theo thời gian.

Số là toàn bộ tài sản mà con người có được để nhận biết thế giới. Từ các đường thẳng số chúng ta dựng ra các không gian nhiều chiều hơn, mỗi điểm là bộ các con số được gọi là tọa độ. Những không gian này là trong sự tưởng tượng của chúng ta, không có trong tự nhiên. Nó là công cụ để chúng ta nhận thức. Chúng ta luôn có mong muốn nhận biết tự nhiên. Chúng ta nhìn lên bầu trời và tự hỏi "*vạn vật từ đâu mà ra, nó sẽ đi đến đâu?*" Ngày nay chúng ta quen với việc tìm đường đi bằng bản đồ trên điện thoại. Chiếc màn hình điện thoại thì không phải là thế gới thực, nó chỉ tương ứng thế giới thực vào với nhận thức. Vậy, chúng ta cũng sẽ hình dung chuyển động một vật trên bầu trời hay trong hạt nhân nguyên tử như một điểm, và bằng một cách nào đó, nó tương ứng "*qua lại*" với các tọa độ trên màn hình điện thoại 3 chiều của chúng ta, tức vào không gian nhận thức được tạo ra từ các trục số. Tạm thời chưa nói tới việc làm thế nào để có được tương ứng "*qua lại*" chúng ta bắt đầu bằng câu hỏi cái điểm trên sẽ chuyển động như thế nào trên mô phỏng của chiếc điện thoại 3 chiều, tức trong hệ tọa độ mà chúng ta hình dung ?

Do tốc độ viết ra chậm hơn tốc đô tư duy nên hành văn hơi bị lủng củng. Điều này sẽ được chỉnh sửa dần dần.

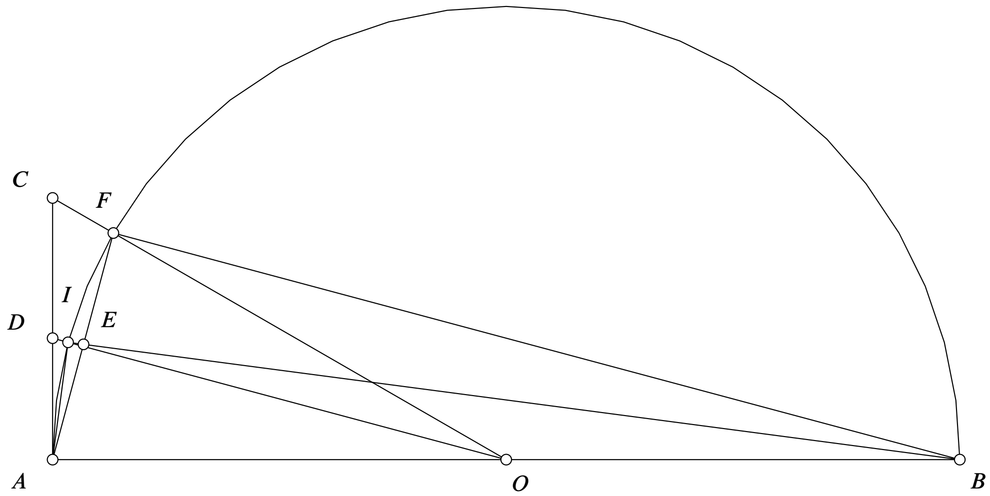
Dành cho các bạn muốn đọc thêm

Để hiểu được suy nghĩ của Archimedes (287-212) chúng ta sử dụng b_n và a_n để ký hiệu diện tích của hình đa giác đều $3 \cdot 2^n$ đỉnh nội tiếp và ngoại tiếp hình tròn đơn vị. Đối với π – diện tích của hình tròn bán kính đơn vị thì $b_n \leqslant \pi \leqslant a_n$. Rõ ràng là $b_n < b_{n+1} < \pi < a_{n+1} < a_n$.

Sau đây chúng ta trình bày một phần tính toán của Archimedes (287-212). Các con số mà chúng ta nhìn thấy trong các tính toán dưới đây đã có hơn 2250 năm tuổi. Ký hiệu số thì khác nhiều bởi vì khi ấy người ta chưa biết sử dụng ký hiệu số theo hệ thập phân như của chúng ta ngày nay.

Archimedes cho rằng diện tích hình tròn thì nhỏ hơn diện tích đa giác ngoại tiếp và chu vi vòng tròn thì lớn hơn chu vi của đa giác nội tiếp. Archimedes đã tính ra được các yếu tố cần thiết phục vụ cho việc tính chu vi và diện tích của các đa giác đều nội và ngoại tiếp hình tròn dựa vào định-lý Pitago và định-lý "đường phân giác trong thì chia cạnh đối thành hai phần tỷ lệ với độ dài của hai cạnh bên".

Trong tính toán của mình Archimedes đã sử dụng số $\sqrt{3}$ nhưng lại không nói tới nó một cách trực tiếp mà dựa vào ước lượng $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$.



Trong tam giác vuông $\triangle AOC$ có $\angle AOC = 30°$, vậy $\frac{AO}{AC} = \sqrt{3} > \frac{265}{153}$.

Phân giác OD chia cạnh AC theo tỷ lệ $\frac{AD}{DC} = \frac{AO}{CO}$, suy ra $AD = \frac{AO}{\frac{CO}{AC} + \frac{AO}{AC}} < \frac{AO}{2 + \frac{265}{153}} = \frac{153}{571} AO$.

Diện-tích hình tròn πAO^2 thì nhỏ hơn diện-tích đa giác ngoại-tiếp $12 \cdot AD \cdot AO$, vì vậy cho nên $\pi < \frac{153 * 12}{571}$.

Hai tam giác $\triangle AIE$ và $\triangle BFE$ đồng dạng vì chúng có các góc tương ứng bằng nhau, như vậy $\frac{AI}{BF} = \frac{AE}{BE}$, mà $\frac{BF}{AF} = \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ nên $\frac{AI}{AB} > \frac{780}{3013\frac{3}{4}}$.

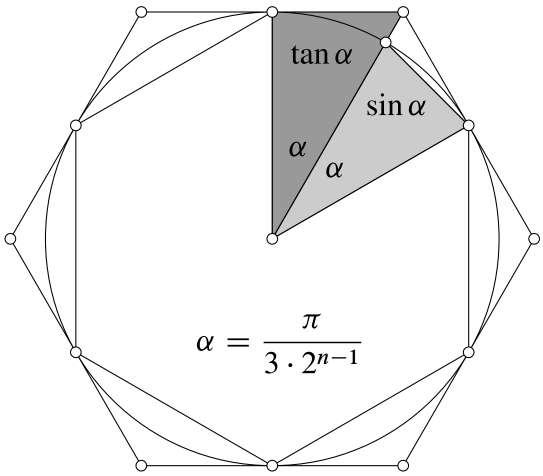
Chu vi vòng tròn $\pi \cdot AB$ thì lớn hơn chu vi đa giác nội tiếp $12 \cdot AI$, vậy $\pi > \frac{780 * 12}{3013\frac{3}{4}}$.

Quá trình tính toán tiếp theo cũng tương tự như vậy nhưng dựa trên việc liên tiếp chia đôi góc $\angle AOD$. Sau 3 lần chia thì Archimedes đã có được các đa giác đều $12, 24, 48, 96$ đỉnh với các ước lượng sau.

$$\frac{780*12}{3013\frac{3}{4}} < \frac{240*24}{1838\frac{9}{11}} < \frac{66*48}{1009\frac{1}{6}} < \frac{66*96}{2017\frac{1}{4}} < \pi < \frac{153*96}{4673\frac{1}{2}} < \frac{153*48}{2334\frac{1}{4}} < \frac{153*24}{1162\frac{1}{8}} < \frac{153*12}{571}.$$

Do $3\dfrac{10}{71} < \dfrac{66*96}{2017\frac{1}{4}} < \dfrac{153*96}{4673\frac{1}{2}} < 3\dfrac{1}{7}$ nên $3\dfrac{10}{71} < \pi < 3\dfrac{1}{7}$.

Sử dụng hàm số lượng giác chúng ta có thể "diễn đạt" lại thuật toán trên như sau.



Thay $x = \dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$ vào hằng đẳng thức

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\tan x} + \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{\tan \frac{x}{2}} \\ \tan\dfrac{x}{2}\cdot \sin x = 2\cdot \sin^2\dfrac{x}{2} \end{cases}$$

ta được

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}\cdot \tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}} + \dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}\cdot \sin\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}} = \dfrac{2}{3\cdot 2^{n}\cdot \tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{n}}} \\ 3\cdot 2^n\cdot \tan\dfrac{\pi}{3\cdot 2^n}\cdot 3\cdot 2^{n-1}\cdot \sin\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}} = \left(3\cdot 2^n\cdot \sin^2\dfrac{x}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Thay $a_n = 3\cdot 2^{n-1}\cdot \tan\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$, $\quad b_n = 3\cdot 2^{n-1}\cdot \sin\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$ vào công thức trên, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{2}{a_{n+1}} \\ a_{n+1}\cdot b_n = b_{n+1}^2 \end{cases}$$

dùng để tính giá trị $a_n,\ b_n$ với $a_1 = 3\sqrt{3},\ b_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Theo dõi các tính toán trên, chúng ta nhận thấy là Archimedes đã ước lượng cận trên của số π nhờ diện-tích, trong khi ước lượng cận dưới của π dựa vào chu vi. Hóa ra là, sử dụng cùng một đa giác đều nội tiếp, việc tính toán để ước lượng cận dưới của π thông qua chu-vi sẽ cho kết quả chính xác hơn là thông qua diện tích ! Chi tiết này cho chúng ta hiểu thêm về Archimedes, nhất là vào thời mà việc cộng-trừ-nhân-chia hai số với nhau là việc làm mất nhiều thời gian và rất vất vả.

Việc chứng minh π không phải là số hữu tỷ là do J.H. Lambert tìm ra vào năm 1768, tức là khoảng 2000 năm sau khi Archimedes "*tìm được giá trị của số π*". Chứng minh sau đây là của Ivan Niven[1].

Ivan Niven sử dụng phép phản chứng. Giả sử $\pi = \frac{a}{b}$, với a và b là các số nguyên dương. Khi đó, ta đặt

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}(-b)^k \frac{x^{n+k}}{k!(n-k)!}.$$

Khi $0 \leqslant x \leqslant \pi$ thì $f(x) < \dfrac{\pi^n a^n}{n!}$ nên $0 < \displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x dx < \dfrac{2\pi^n a^n}{n!}$.

Do $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2\pi^n a^n}{n!} = 0$ nên $0 < \displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x dx < 1$ với n đủ lớn. $(*)$

Mặt khác đạo hàm nhiều lần đa thức $f(x)$, ta thấy

∘ Khi $0 \leqslant j \leqslant n$ thì $f^{(j)}(0) = 0$.

∘ Khi $n \leqslant j = n + k \leqslant 2n$ thì $f^{(n+k)}(0) = \dfrac{(n+k)!}{n!(n-k)!} a^{n-k}(-b)^k$ là các số nguyên.

Ta tính tích phân $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x dx$ nhờ công thức tích phân từng phần và kết hợp với nhận xét đạo hàm nhiều hơn $2n$ lần đa thức $f(x)$ có bậc $2n$ thì nó sẽ bằng 0.

$$\int_0^\pi f(x)\sin x dx = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j f^{(2j)}(x)\cos x\Big|_0^\pi = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+1}\left[f^{(2j)}(\pi) + f^{(2j)}(0)\right].$$

Do $f(\pi - x) = f(x)$ nên $f^{(2j)}(\pi) = f^{(2j)}(0)$.

Như vậy $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x dx = 2\sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+1} f^{(2j)}(0)$ là số nguyên với mọi n. $(**)$

Khẳng định $(*)$ và $(**)$ mâu thuẫn với nhau, vậy π không thể là một số hữu tỷ.

[1]Bull.Amer.Math.Soc. 53(1947), 509.

ĐỊNH LÝ KHÔNG ĐIỂM TỔ HỢP - COMBINATORIAL NULLSTENLLENSATZ

Vaselin Dimitrov
(Trần Nam Dũng dịch và giới thiệu)

GIỚI THIỆU

Từ người dịch bản tiếng Nga. Thường thì hiếm khi một kết quả mới và quan trọng của toán học lại có thể trình bày trên ngôn ngữ mà một học sinh (cho dù là học sinh chuyên) có thể hiểu được. Phương pháp Combinatorial Nullstenllensatz, được tìm ra 10 năm trước (bài viết này được đăng năm 2005 – người dịch bản tiếng Việt) bởi nhà toán học người Do Thái Noga Alon [Nora Alon, Combinatorial Nullstellensatz, Combinatorics, Probability and Computing, 8 (1-2), 7-29.], là một ngoại lệ may mắn. Chúng tôi đăng bài viết của học sinh người Bulgaria Vaselin Dimitrov về các ứng dụng của kỹ thuật đơn giản nhưng rất mạnh này vào các bài toán tổ hợp và lý thuyết số.

Ta đưa vào một số ký hiệu cần thiết. Số phần tử của tập hợp S được ký hiệu là $|S|$. Ta ký hiệu $\mathbb{Z}_n$ là nhóm các lớp thặng dư theo mô-đun n theo phép cộng; Ký hiệu F_p là trường các lớp thặng dư theo mô-đun nguyên tố p(các lớp thặng dư này thực sự tạo thành một trường, chúng có thể cộng, nhân và chia). Nếu F là một trường thì $F[x_1, x_2, ..., x_n]$ ký hiệu tập hợp các đa thức biến $x_1, x_2, ..., x_n$ trên trường F. Trong một số trường hợp, ta sẽ thực hiệu việc tính toán trong cấu trúc tương ứng (nhóm, trường, vành đa thức) mà không cần phải nói rõ cho từng trường hợp. Ví dụ hệ số nhị thức C_n^k vốn là số nguyên dương sẽ được ta xét như phần tử của trường F mà đa thức của chúng ta lấy hệ số. Ví dụ trong F_3 ta có $(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = 1 + x^3$ bởi vì $3 = 0$.

Fedor Petrov

Dẫn nhập

Mục tiêu của bài báo này là qua ví dụ các bài toán olympiad giới thiệu với bạn đọc kỹ thuật đại số Combinatorial Nullstenllensatz, được đề xuất bởi Noga Alon trong bài viết [1].

Ta đều biết trên một trường bất kỳ đa thức một biến bậc d có không quá d nghiệm. Sự kiện này được sử dụng rộng rãi trong các bài toán olympiad, và các nguyên lý nội suy dựa trên sự kiện này. Combinatorial Nullstenllensatz mở rộng sự kiện này lên đa thức nhiều biến. Nói một cách nôm na thì bản chất của định lý như sau: nếu một đa thức của n biến số bằng 0 trên một hình hộp chữ nhật n chiều đặc biệt nào đó thì đa thức này đồng nhất 0. Từ đây mới xuất phát tên gọi Nullstenllensatz, được dịch là *định lý không điểm*. Một kết quả đơn giản lại là một công cụ mạnh trong nhiều bài toán tổ hợp.

Định lý 1 (Combinatorial Nullstenllensatz)**.** *Giả sử F - trường và $f \in F[x_1, x_2, ..., x_n]$ - là đa thức không đồng nhất 0 có tổng bậc $\sum_{i=1}^{n} m_i$, trong đó hệ số của $x_1^{m_1}...x_n^{m_n}$ khác 0. Khi đó với mọi các tập hợp $S_1, S_2, ..., S_n \subseteq F$ với $|S_i| > m_i, 1 \le i \le n$, tồn tại $c_i \in S_i$ sao cho $f(c_1, ..., c_n) \neq 0$.*

Để chứng minh định lý này ta cần đến hai bổ đề

Bổ đề 1. *Giả sử rằng f, như một đa thức theo biến x_i, có bậc $t_i, 1 \le i \le n$, và giả sử rằng $S_i \subseteq F, |S_i| > t_i$. Khi đó nếu $f(x_1, ..., x_n)$ với mọi bộ $(x_1, ..., x_n) \in (S_1 \times S_2 \times ... \times S_n)$, thì $f \equiv 0$.*

Chứng minh. Dễ dàng chứng minh quy nạp theo n. □

Bổ đề 2. *Giả sử $g_i = \prod_{s \in S_i}(x_i - s), 1 \le i \le n$ là đa thức theo biến x_i. Nếu đa thức f bằng 0 tại mọi điểm mà tọa độ là nghiệm của các đa thức $g_1, ..., g_n$ (tức là $f(c_1, ..., c_n) = 0$ với $c_i \in S_i$), thì tồn tại các đa thức $h_1, ..., h_n \in F[x_1, ..., x_n]$ sao cho*

$$f = \sum_{1 \le i \le n} h_i g_i$$

trong đó $\deg h_i \le \deg f - \deg g_i$ với mọi i.

Chứng minh. Theo điều kiện của bổ đề

$$f(x_1, ..., x_n) = 0 \text{ với mọi } (x_1, ..., x_n) \in (S_1 \times S_2 \times ... \times S_n).$$

Đặt $t_i = |S_i| - 1$. Với mọi i ta khai triển đa thức $g_i(x_i)$ theo bậc của x_i:

$$g_i(x_i) = \prod_{s \in S_i}(x_i - s) = x_i^{t_i+1} - \sum_{1 \le j \le t_i} g_{ij} x^j.$$

Khi đó với $x_i \in S_i$

$$x_i^{t_i+1} = \sum_{1 \le j \le t_i} g_{ij} x^j. \tag{1}$$

Gọi $\overline{f}$ là đa thức thu được từ f bằng cách sau: ta viết f như tổng của các đơn thức và lần lượt thay các $x_i^{m_i}$, trong đó $m_i > t_i$, bằng các tổ hợp tuyến tính của các bậc nhỏ hơn của x_i, sử dụng hệ thức (1).
Với mọi $i \in \{1, 2, .., n\}$ đa thức thu được có bậc theo biến x_i không vượt quá t_i. Chú ý là đa thức $\overline{f}$ thu được từ f bằng cách trừ đi các đa thức có dạng $g_i h_i$, trong đó $\deg h_i \le \deg f - \deg g_i$. Và hơn nữa thì $\overline{f}(x_1, .., x_n) = f(x_1, ..., x_n)$ với mọi $(x_1, ..., x_n) \in (S_1 \times S_2 \times ... \times S_n)$. Như vậy $\overline{f}(x_1, ..., x_n) = 0$ với mọi $(x_1, ..., x_n) \in (S_1 \times S_2 \times ... \times S_n)$. Theo bổ đề 1, $\overline{f} \equiv 0$. Suy ra $f = \sum_{i=1}^{n} h_i g_i$, là điều phải chứng minh.

Chứng minh định lý 1. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $|S_i| = t_i + 1$ với mọi i. Giả sử rằng kết luận của định lý không đúng. Khi đó đa thức f bằng 0 tại mọi điểm mà tọa độ là nghiệm của các đa thức $g_1, ..., g_n$. Theo bổ đề 2 tồn tại các đa thức $h_1, ..., h_n$ sao cho

$$f = \sum_{1\le i\le n} h_i g_i.$$

Theo điều kiện định lý, hệ số của $\prod_{i=1}^{n} x_i^{t_i}$ khác 0. Nhưng $\deg h_i \le \deg f - \deg g_i$ theo bổ đề 2 nên bậc của đa thức $h_i g_i = h_i \prod_{s\in S_i}(x_i - s)$ không vượt quá $\deg f$, trong đó tất cả các đa thức bậc $\deg f$, có trong $h_i g_i$, đều chia hết cho $x_i^{t_i+1}$. Như vậy, hệ số của $\prod_{i=1}^{n} x_i^{t_i}$ trong mỗi số hạng $h_i g_i$, và có nghĩa là trong cả tổng $f = \sum_{1\le i\le n} h_i g_i$ bằng 0. Mâu thuẫn. □

Các bài toán

Bài toán 1 (Định lý Cauchy – Davenport). *Với các tập hợp A, B trong một trường số nào đó ta định nghĩa $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$. Khi đó với mọi số nguyên tố p và với mọi tập hợp $A, B \subseteq \mathbb{Z}_p$ ta có*

$$|A + B| \ge \min\{p, |A| + |B| - 1\}. \tag{2}$$

Lời giải. Nếu như $|A + B| > p$ thì khẳng định của bài toán là hiển nhiên: trong trường hợp này $A + B = \mathbb{Z}_p$. Giả sử $|A| + |B| \le p$ và giả sử ngược lại rằng $|A + B| \le |A| + |B| - 2$. Khi đó trong $\mathbb{Z}_p$ tồn tại tập hợp C chứa $A + B$ có $|C| = |A| + |B| - 2$ phần tử.

Xét đa thức

$$f(x, y) = \prod_{c\in C}(x + y - c).$$

trong $F_p[x, y]$. Bậc của nó bằng $|A|+|B|-2$, và hệ số của $x^{|A|-1}y^{|B|-1}$ bằng $C_{|A|+|B|-2}^{|A|-1} \mod p$. Biểu thức này không bằng 0, bởi vì $|A| + |B| \le p$. Theo định lý không điểm tổ hợp, tồn tại $a \in A$ và $b \in B$ sao cho $f(a, b) \neq 0$. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của f. Vậy điều giả sử là sai, nghĩa là $|A + B| \ge |A| + |B| - 1$. □

Định lý Cauchy-Davenport có nhiều ứng dụng. Và ứng dụng nổi tiếng nhất là kết quả kinh điển sau:

Bài toán 2 (Định lý Erods-Ginzburg-Ziv). *Cho số nguyên dương n. Khi đó từ $2n - 1$ số luôn chọn được n số có tổng chia hết cho n.*

Lời giải. Bằng quy nạp ta có thể đưa bài toán về trường hợp $n = p$ là số nguyên tố (Nếu $n = ab$ và khẳng định đã được chứng minh với a và b thì từ $2n - 1$ số, ta có thể lần lượt lấy được $2b - 1$ bộ a số (các bộ không giao nhau) sao cho tổng các số của mỗi tổng chia hết cho a. Chia các tổng này cho a rồi áp dụng cho các thương thu được khẳng định đối với b.)

Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số nguyên đã cho. Không mất tính tổng quát có thể giả sử $0 \le a_1 \le ... \le a_{2p-1} \le p - 1$. Ta xét hai trường hợp.

1. $a_{i+p-1} = a_i$ với i nào đó thuộc $\{1, ..., p-1\}$. Khi đó khẳng định là hiển nhiên vì ta có thể chọn các số $a_i = a_{i+1} = ... = a_{i+p-1}$.

2. $a_{i+p-1} > a_i$ với mọi $i \in \{1, ..., p-1\}$. Trong trường hợp này ta xét các tập hợp

$$A_i = \{a_i, a_{i+p-1}\}, 1 \leq i \leq n.$$

Lần lượt áp dụng bài toán 1, ta có

$$|A_1 + A_2 + ... + A_{p-1}| \geq p,$$

tức là $A_1 + A_2 + ... + A_{p-1} = \mathbb{Z}_p$. Nói riêng $-a_{2p-1} \in A_1 + A_2 + ... + A_{p-1}$. Như vậy tồn tại các số $c_i \in \{a_i, a_{i+p-1}\}$, sao cho $c_1 + ... + c_{p-1} + a_{2p-1} = 0$ (trong $\mathbb{Z}_p$). □

Lưu ý rằng định lý Erdos-Ginzburg-Ziv có thể được chứng minh một cách độc lập mà không cần dùng đến định lý không điểm tổ hợp. Chúng tôi dành việc tìm một chứng minh như vậy cho bạn đọc như một bài tập.

Bài toán 3. *Cho $d, n \in \mathbb{N}$ và p là số nguyên tố. Khi đó tồn tại các số $x_1, ..., x_d \in \mathbb{Z}$, sao cho*

$$x_1^d + x_2^d + ... + x_d^d \equiv n (\mod p).$$

Lời giải. Ta có thể giả sử rằng $d < p$, bởi vì nếu $d \geq p$ thì theo định lý nhỏ Fermat, $x^d \equiv x^{d+1-p} (\mod p)$. Giả sử $d = ad_1$, trong đó $d|p-1, (a, p-1) = 1$. Khi đó

$$x^d = (x^a)^{d_1}.$$

Nhưng ánh xạ $x \mapsto x^a$ là một song ánh từ F_p vào chính nó (thật vậy, tìm được các số nguyên dương k, l sao cho $ak = (p-1)l + 1$, do đó nếu như chẳng hạn $x_1^a = x_2^a \neq 0$ thì $x_1 = x_1^{ak} = x_2^{ak} = x_2$).
Vì vậy chỉ cần chứng minh khẳng định cho trường hợp $d|p-1$; giả sử $p-1 = kd, k \in \mathbb{N}$. Xét đa thức

$$f(x_1, ..., x_d) = \prod_{j \in \mathbb{Z}_p \setminus \{n\}} (x_1^d + ... + x_d^d - j).$$

Bậc của f bằng $(p-1)d$, và hệ số của $x_1^{p-1} ... x_d^{p-1}$ bằng $(kd)!/(k!)^d \neq 0$ bởi vì $kd = p-1 < p$. Theo định lý không điểm tổ hợp, đa thức f không đồng nhất bằng 0. Vì vậy có thể chọn được các giá trị $x_1, ..., x_d$, sao cho $x_1^d + ... + x_d^d \neq j$ với mọi $j \in \mathbb{Z}_p \setminus \{n\}$. Nhưng khi đó $x_1^d + ... + x_d^d = n$, chính là điều phải chứng minh. □

Kết quả tiếp theo đây là một mở rộng của định lý Chevalley-Warning. Như chúng ta sẽ thấy ở trong các bài toán 5-6, hệ quả đơn giản này của định lý không điểm tổ hợp sẽ là một công cụ rất mạnh.

Định lý 2. *Cho p là số nguyên tố và $f_1, , ..., f_k \in F_p[x_1, ..., x_n]$ là các đa thức n biến trên F_p sao cho $f_i(0, ..., 0) = 0$ với $0 \leq i \leq k$. Giả sử $S_1, ..., S_n \subseteq F_p$ là các tập con của F_p, sao cho $0 \in S_j$ với mọi j và*

$$\sum_{1 \leq j \leq n} (|S_j| - 1) > (p-1)(\deg f_1 + ... + \deg f_k). \quad (3)$$

Khi đó hệ

$$f_i(x_1, ..., x_n) = 0, 1 \le i \le k, \tag{4}$$

Có nghiệm $(x_1, ..., x_n) \in S_1 \times ... \times S_n$*, khác* $(0, ..., 0)$.

Chứng minh. Xét đa thức

$$F(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{k}(1 - f_i^{p-1}(x_1, ..., x_n)) - \delta \prod_{j=1}^{n} \prod_{s \in S_j \setminus \{0\}} (x_j - s),$$

trong đó

$$\delta = (-1)^{|S_1|+...+|S_n|-n} \prod_{j=1}^{n} \prod_{s \in S_j \setminus \{0\}} s^{-1} \neq 0$$

được chọn sao cho $F(0, ..., 0) = 0$ (ở đây với mỗi $s \in F_p \setminus \{0\}$ ta ký hiệu s^{-1} là nghịch đảo của s trong F_p, tức là phần tử s' duy nhất trong F_p sao cho $ss' = 1$).
Theo (3), F là đa thức bậc $\sum_{1 \le j \le n}(|S_j| - 1)$, trong đó hệ số của $x_1^{|S_1|-1} x_2^{|S_2|-1} ... x_n^{|S_n|-1}$ bằng $-\delta \neq 0$. Từ định lý không điểm tổ hợp suy ra tồn tại $(c_1, ..., c_n) \in S_1 \times ... \times S_n$, sao cho $F(c_1, ..., c_n) \neq 0$. Vì $F(0, ..., 0) = 0$ nên không phải tất cả các c_i đều bằng 0. Nhưng khi đó

$$\prod_{j=1}^{n} \prod_{s \in S_j \setminus \{0\}} (c_j - s) = 0,$$

Từ đó

$$f_i^{p-1}(x_1, ..., x_n) \neq 1 \text{ với } 1 \le i \le k.$$

Nhưng theo định lý nhỏ Fermat $a^{p-1} = 1$ trong trường F_p nếu $a \neq 0$.
Suy ra $f_i(c_1, ..., c_n) = 0$ với $1 \le i \le k$. Tức là hệ (4) có nghiệm khác 0 là $(c_1, ..., c_n) \in S_1 \times ... \times S_n$. Định lý được chứng minh. □

Khi $S_1 = ... = S_n = F_p$ ta được định lý Chevalley-Warning. Và sau đây là hai hệ quả trực tiếp nữa.

Bài toán 4 (Troi-Zannier, 1997). *Cho $k \in \mathbb{N}$ và p là số nguyên tố. Giả sử rằng $S_1, ..., S_n \subseteq \{0, 1, ..., p - 1\}$ là các tập hợp có chứa 0 và sao cho $\sum_{1 \le j \le n}(|S_j| - 1) \ge 1 + k(p - 1)$. Giả sử $a_{ji}, 1 \le j \le k, 1 \le i \le n$ là các số nguyên bất kỳ. Khi đó tồn tại các phần tử $x_i \in S_i n$, $1 \le i \le n$, không phải tất cả đều bằng 0, sao cho*

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n \equiv (\mod p)$$

với mọi $j \in \{1, ..., k\}$.

Lời giải. Đây là hệ quả của định lý 2 với $f_j(x_1, ..., x_n) = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n$. □

Với $S_1 = ... = S_n = \{0, 1\}$ ta thu được kết quả kinh điển của Olson, đã từng được sử dụng trong các chủ đề olympic toán (ví dụ trong IMO Shortlist năm 2003, định lý Olson được đề cập như một bài toán số học).

Hệ quả (Olson, 1969). *Cho $k, n \in \mathbb{N}$ và p là số nguyên tố, hơn nữa $n \geq 1 + k(p-1)$. Giả sử a_{ji} là các số nguyên bất kỳ, $1 \leq j \leq k$, $1 \leq j \leq n$. Khi đó tồn tại tập con khác rỗng các chỉ số $I \subset \{1, ..., n\}$, sao cho*

$$\sum_{i \in I} a_{ji} \equiv 0(\mod p)$$

với mọi $j = 1, 2, ..., k$.

Bài toán 5 (Alon). *Cho p là số nguyên tố và G là đồ thị vô hướng, trong đó bậc trung bình của các đỉnh (tức là trung bình cộng của bậc các đỉnh) không nhỏ hơn $2p-2$ và bậc cao nhất của một đỉnh không lớn hơn $2p-1$. Khi đó G có chứa đồ thị con p-đều (tức là có thể bỏ đi một số cạnh và một số đỉnh của đồ thị để bậc của mỗi đỉnh còn lại bằng p).*

Lời giải. Gọi V và E là tập các đỉnh và các cạnh của G tương ứng. Với mỗi đỉnh v và cạnh e ta đặt

$$a_{v,e} = \begin{cases} 1, \text{ nếu } v \in e \\ 0, \text{ nếu } v \notin e. \end{cases}$$

Mỗi một cạnh e ta cho tương ứng với biết $x_e \in F_p$. Với mỗi đỉnh $v \in V$ ta xét đa thức tuyến tính

$$f_v = \sum_{e \in E} a_{v,e} x_e.$$

Giả thiết bậc trung bình các đỉnh của G không nhỏ hơn $2p-2$ tương đương với bất đẳng thức $|E| > (p-1)|V|$, do đó số các biến số x_e (bằng $|E|$) thỏa mãn đánh giá

$$|E| > (p-1)|V| = (p-1)\times[\text{số các đa thức tuyến tính } f_v].$$

Từ đó ta có thể áp dụng định lý 2 cho $n = |E|$ và $S_1 = \ldots = S_n = \{0, 1\}$. Thu được điều sau đây: mỗi biến số x_e có thể cho tương ứng 0 hoặc 1 sao cho không phải tất cả các phần tử đều bằng 0 và với mỗi một đỉnh, số số 1, được cho tương ứng với cách cạnh có đầu mút là đỉnh đó, là bội của k. Vì mỗi bậc không vượt quá $2p-1$, các cạnh được cho tương ứng với 1 sẽ tạo thành đồ thị con có bậc các đỉnh đều bằng p. □

Chúng ta sẽ kết thúc câu chuyện bằng một ứng dụng tuyệt vời sau: một chứng minh ngắn và sơ cấp cho giả thuyết Erdos-Heilbronn, vốn là vấn đề mở suốt 30 năm. Năm 1994, đã tìm được một chứng minh rất phức tạp và sau hai năm là chứng minh được trình bày dưới đây. Xin chú ý với độc giả về sự giống nhau của giả thuyết này với định lý Cauchy-Davenport.

Bài toán 6 (giả thuyết Erdos-Heilbronn). *Cho p là số nguyên tố. Với $A, B \subseteq \mathbb{Z}_p$, ta định nghĩa $A \odot B$ là tập hợp tất cả các số dư khi chia cho p của các tổng dạng $a + b$ với $a \in A, b \in B$ và $ba \neq$. Chứng minh rằng*

$$|A \odot B| \geq \min\{p, 2|A| - 3\}.$$

Lời giải. Giả sử $|A| = k$ và $m = 2k\breve{}4$. Ta chọn phần tử a bất kỳ thuộc A và đặt $B = A \setminus \{a\}$. Dễ dàng kiểm tra được rằng $A \odot A = A \odot A$ và $m = |A| + |B| - 3$. Ta cần chứng minh rằng $|A \odot B| \geq \min\{p, m + 1\}$.
Trường hợp 1. $m + 1 \geq p$ (tức là $k \geq (p + 3)/2$). Ta chứng minh trong trường hợp này $A \odot A = \mathbb{Z}_p$. Xét một phần tử m bất kỳ thuộc $\mathbb{Z}_p$. Chia các phần tử của $\mathbb{Z}_p$ ra thành các cặp có tổng trong $\mathbb{Z}_p$ bằng m. Ta thu được $(p-1)/2$ cặp, và trong đó có một phần tử sẽ đi cặp với chính nó. Theo nguyên lý Dirichlet tập hợp A chứa hai phần tử của cùng một cặp, từ đó $m \in A \odot A$, là điều phải chứng minh.
Trường hợp 2. $m + 1 < p$. Ta chứng minh rằng trong trường hợp này $|A \odot A| \geq m + 1$. Giả sử ngược lại. Khi đó tồn tại tập con C của $\mathbb{Z}_p$ sao cho $|C| = m$ và $A \odot B \subseteq C$.
Xét đa thức

$$f(x, y) = (x - y) \prod_{c \in C} (x + y - c)$$

trên $F_p[x, y]$. Đa thức này có bậc $m + 1 = (k - 1) + (k - 2)$, trong đó bậc của $x^{k-1}y^{k-2}$ bằng $C_{2k-4}^{k-2} C_{2k-4}^{k-1} \neq 0$ trong $\mathbb{Z}_p$ (hãy chứng minh điều này!), bởi vì $2k - 4 = m < p$. Vì $|A| = k > k - 1$ và $|B| = k - 1 > k - 2$ nên áp dụng định lý không điểm tổ hợp, tồn tại $x \in A, y \in B$ sao cho $f(x, y) \neq 0$. Mâu thuẫn vì theo định nghĩa của f, $f(a, b) = 0$ với mọi $a \in A, b \in B$. $\square$

Kết luận

Sự phong phú và phức tạp của các ví dụ đã trình bày nói trên nói lên tính hiệu quả của phương pháp Combinatorial Nullstenllensatz, đã được thừa nhận là mang tính cách mạng trong lý thuyết số cộng tính. Phép chứng minh đẹp đẽ "như sách giáo khoa" của một kết quả nổi tiếng, như bài toán 6, đã minh chứng cho sự kiện là cách tiếp cận đa thức là một cách tiếp cận tự nhiên trong các bài toán dạng như vậy. Để so sánh, chứng minh ban đầu của Da Silva và Hamidon năm 1994 dài hơn một cách đáng kể và sử dụng các kết quả của đại số tuyến tính và lý thuyết biểu diễn các nhóm đối xứng.

Bài tập

Bài toán 7. *Cho p là số nguyên tố và G là đồ thị trong đó có không ít hơn $2p - 1$ đỉnh. Chứng minh rằng tồn tại một tập con U khác rỗng các đỉnh của G, sao cho số các cạnh của G, có ít nhất một đầu mút thuộc U, chia hết cho p.*

Bài toán 8 (Alon). *Cho $H_1, \ldots, H_m$ là họ các siêu mặt phẳng trong $\mathbb{R}^n$, phủ kín tất cả các đỉnh của hình lập phương đơn vị $\{0, 1\}^n$ ngoại trừ 1 điểm. Chứng minh rằng $m \geq n$. (Siêu mặt phẳng trong $\mathbb{R}^n$ là tập hợp các điểm $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, thỏa mãn phương trình dạng $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$.)*

Bài toán 9 (Giả thuyết Sneville, được chứng minh bởi Alon). *Cho $p \geq 3$ là số nguyên tố và giả sử $A = \{a_1, ..., a_k\} \subseteq \mathbb{Z}_p$ và $B = \{b_1, ..., b_k\} \subseteq \mathbb{Z}_p$ là các tập con k phần tử của tập hợp các số dư khi chia cho p (các phần tử trong mỗi tập hợp A và B phân biệt). Chứng minh rằng tồn tại* *hoán vị* $(s_1, \ldots, s_k)$ *của tập hợp* $(1, \ldots, k)$ *sao cho các phần tử* $a_i + b_{s_i} \in \mathbb{Z}_p, 1 \leq i \leq k$*, đôi một khác nhau.*

TOÁN HỌC VÀ ẢO THUẬT

Nguyễn Hùng Sơn

GIỚI THIỆU

Hãy tưởng tượng chúng ta đang có mặt tại buổi biểu diễn của một nhà ảo thuật gia nổi tiếng. Ông rút trong túi ra một bộ bài gồm 32 quân và mời 5 người bất kỳ lên tham gia buổi biểu diễn và ngồi ở 5 cái ghế đã được chuẩn bị sẵn. Trước tiên ông mời 1 khán giả lên tráo bài (bốc một phần trên của bộ bài và cho xuống dưới bộ bài). Sau đó ông chia cho 5 người chơi 5 quân bài liên tiếp và đề nghị họ phải nhìn kỹ quân bài của mình nhưng giấu kín không cho ai biết. Nhà ảo thuật nói với 5 người chơi:

- Đề nghị các bạn chỉ dùng thần giao cách cảm để gửi cho tôi thông tin về con bài của các bạn.

Một lúc sau nhà ảo thuật lại nói:

- Ở đây có quá nhiều người nên tôi không thể phân biệt được các thông tin mà các bạn gửi cho tôi. Bây giờ tôi đề nghị những bạn đang cầm các quân bài màu đỏ hãy đứng lên và thử truyền tin cho tôi một lần nữa.

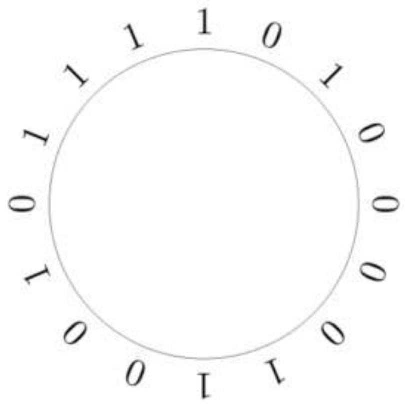
Lúc này có 2 người ngồi đầu dãy đứng lên và chỉ sau vài giây nhà ảo thuật gia đã đọc các lá bài của 2 người đó là ♡8 và ♢A. Ông còn đọc được chính xác các lá bài (màu đen) của 3 người đang ngồi.

Trò ảo thuật này hoàn toàn không cần đánh dấu bài, không cần cài người quen vào các người chơi hoặc các khả năng phi thường nào hết. Chúng ta hãy tìm hiểu lý thuyết toán học ẩn đằng sau trò ảo thuật này.

1. Dãy số De Bruijn

Một số bạn có thể đã đoán ra rằng chìa khóa là các quân bài được sắp xếp theo thứ tự đặc biệt. Tuy nhiên, điều này không giải thích làm thế nào các nhà ảo thuật có thể đọc tên chính xác năm quân bài trên cơ sở thông tin về màu sắc của chúng. Để giải quyết điều đó, chúng ta phải tìm hiểu một khái niệm "huyền bí", được gọi là các *dãy số De Bruijn*.

Trước hết chúng ta hãy nhắc lại một số định nghĩa cơ bản sau đây. Dãy số nhị phân (dãy nhị phân) là các dãy chỉ chứa 2 ký tự duy nhất là 0 và 1. Mỗi phần tử của dãy nhị phân ta sẽ gọi là bít. Một dãy số gồm n bít liên tiếp của một dãy $A = (a_n)$ cho trước sẽ được gọi là *dãy con có độ dài* n của dãy A. Dãy số hữu hạn $A = (a_1, ..., a_k)$ được gọi là *dãy vòng* nếu các bít của nó được đặt lên một đường tròn như hình sau đây



Hình 1: Dãy vòng $A = (1010000110010111)$

Định nghĩa 1 (dãy số De Bruijn bậc n) *Dãy số nhị phân $B(n)$ được gọi là dãy số De Bruijn bậc n nếu mọi dãy nhị phân độ dài n đều xuất hiện đúng một lần trong dãy vòng $B(n)$ (ở dạng một dãy con có độ dài n).*

Ví dụ $B(2) = (0011)$ vì mọi dãy nhị phân có độ dài 2 đều xuất hiện trong dãy vòng $B(2)$. Ta cũng dễ dàng kiểm tra rằng $B(3) = 01000111$. Chúng ta dễ dàng nhận ra rằng dãy số De Bruijn bậc n chứa đúng 2^n số hạng.

Bạn đọc có thể tham khảo thêm các thông tin về dãy Bruijn cũng như thuật toán xây dựng dãy $B(n)$ với mọi giá trị của n tại trang web [1]

2. Cơ sở toán học

Các nhà ảo thuật thực sự không bao tiết lộ bí quyết của họ. May mắn thay cho bạn đọc, tôi không phải là một nhà ảo thuật mà là một nhà toán học, vì vậy nhiệm vụ của tôi là phải tiết lộ bí mật cho bạn. Trong trò ảo thuật này, chúng ta sẽ sử dụng dãy số Bruijn $B(5)$. Dãy số đó như sau:

$$B(5) = 00001001011001111100011011101010.$$

Có một cách đơn giản để tạo ra dãy này như sau: chúng ta bắt đầu với 5 bít 00001 và bít tiếp theo được tính bằng cách cộng bít thứ nhất và bít thứ ba (modulo 2): $0 + 0$, ta được 0. Chúng ta thêm kết quả vào cuối dãy, và nhận được 000010. Sau đó chúng ta di chuyển sang phải, nghĩa là chúng ta quên bít ở đầu và lặp lại bước này (tức là ta xét dãy con gồm 5 bít cuối cùng 00010). Tương tự như trước, chúng ta cộng bít thứ nhất và bít thứ ba (modulo 2): $(0 + 0) \mod 2 = 0$, sau đó thêm bít này vào cuối dãy. Sau bước này, dãy số có dạng 0000100. Chúng ta chuyển sang bên phải một lần nữa (tức là chúng ta bỏ qua hai bít đầu tiên), vì vậy chúng ta xét dãy 5 bít cuối 00100. Lần này, tính tổng modulo 2 của bít đầu tiên và thứ ba chúng ta nhận được 1. Sau khi thêm bít này vào cuối dãy ta được 00001001. Tiến hành theo cách này, chúng ta sẽ có được chuỗi nhị phân De Bruijn bậc 5 như đã viết ở trên. Chính xác hơn, dãy $B(5) = a_1a_2 \ldots a_{32}$ thỏa mãn tính chất truy hồi như sau:

$$a_1a_2a_3a_4a_5 = 00001$$
$$a_k = a_{k-5} + a_{k-3} \mod 2 \text{ với } k = 6, ..., 32$$

$ab =$

♠	♣	♢	♡
00	01	10	11

$cde =$

A	2	3	4	5	6	7	8
001	010	011	100	101	110	111	000

Hình 2: Cách mã hóa chuỗi nhị phân gồm 5 bít $abcde$ bằng các lá bài.

Để sử dụng dãy $B(5)$ cho trò ảo thuật, mỗi quân bài trong bộ bài 32 quân sẽ được mã hóa bằng một dãy nhị phân $abcde$ có chiều dài bằng 5 theo nguyên tắc: dùng 2 bít đầu tiên (ab) để mã hoá bốn chất ♡, ♢, ♣, ♠ (cơ, rô, nhép, bích) và dùng 3 bít tiếp theo (cde) để mã hóa giá trị của quân bài : át (một), 2, 3,4,5,6,7,8 như trong Hình 2. Bạn đọc có thể nhận thấy rằng (cde) chính là 3 chữ số cuối của các số từ 1 đến 8 khi chúng được viết ở dạng nhị phân.

Ta cũng biết rằng nếu ký hiệu $B(5) = a_1a_2 \dots a_{32}$ thì các dãy con dạng $a_ka_{k+1}a_{k+2}a_{k+3}a_{k+4}$ của $B(5)$ (với $k = 1, 2, ..32$, và $a_{33} = a_1, a_{34} = a_2...$) tạo thành tập hợp tất cả 32 dãy nhị phân có chiều dài bằng 5. Chúng ta để ý rằng nếu tương ứng với bít a_k tại vị trí thứ k của dãy $B(5)$ ta đặt quân bài có mã số là $a_ka_{k+1}a_{k+2}a_{k+3}a_{k+4}$ thì ta sẽ được một cách sắp xếp các quân bài như ở Hình 3.

Cách sắp xếp bài như thế này thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện:

1. Các quân bài màu đỏ luôn ở vị trí tương ứng với bít có giá trị bằng 1, các quân đen ở các bít có giá trị bằng 0.
2. chỉ cần biết 5 bít là chúng ta biết chính xác vị trí của chúng ở trong dãy de Bruijn.

0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1100...
♠A	♠2	♠4	♣A	♢2	♠5	♣3	♢6	♣4	♡A	♢3	♠7	♣7	♡7	♡6	♡4	
1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0000...
♡8	♢A	♠3	♠6	♣5	♡3	♢7	♣6	♡5	♡2	♢5	♣2	♢4	♣8	♢8	♠8	

Hình 3: Cách biểu diễn dãy $B(5)$ bằng 32 quân bài

3. Vén màn bí mật

Đến đây thì có lẽ bạn đọc đã biết toàn bộ nền tảng của điều kỳ diệu là gì. Chúng ta hãy phân tích lại một lần nữa trò ảo thuật được giới thệu ở đầu bài báo: có 5 người chơi, hai người đầu tiên có quân bài màu đỏ, ba người còn lại có quân bài màu đen. Chúng ta sẽ ghi lại màu đỏ là 1, màu đen là 0, và vì vậy, chúng ta nhận được dãy nhị phân 11000. Dãy này chính là mã số nhị phân của quân bài trong tay người đầu tiên: 11 có nghĩa là đó là con cơ, còn 3 bít 000 ở cuối có nghĩa là số 8. Quân bài trong tay người đâu tiên chính là ♡8.

Để tìm ra con bài trong tay người thứ hai là gì, chúng ta cộng các bít đầu tiên và thứ ba theo modulo 2 (1 + 0 = 1), và ghi vào cuối dãy. Dãy số gồm 5 bít cuối cùng của chúng ta hiện nay là 10001. Mã 10 là rô, trong khi 001 có nghĩa là A. Vì vậy, người chơi ở vị trí thứ hai đang giữ trong tay con ♢A.

Tiếp tục cách này, chúng ta sẽ thấy rằng ba con bài của 3 người tiếp theo sẽ lần lượt là: ♠3, ♠6, ♣5.

Bạn hãy thử tập làm và biểu diễn trò ảo thuật này cho bạn bè và người thân của mình!

4. Các ứng dụng khác

Ảo thuật không phải là lĩnh vực duy nhất trong các ứng dụng của dãy số de Bruijn. Một số tính chất quan trọng của các dãy số de Bruijn như: "không có dãy con nào xuất hiện nhiều lần", khiến cho chúng trở nên cực kỳ hữu ích trong việc phát triển mã hóa. Lưu ý rằng mọi dãy con có độ dài k đều tương ứng với một ký tự khác nhau của thông điệp được mã hóa! Đây chính là cơ hội để những người làm bảo mật có thể sử dụng trong việc mã hóa văn bản.

Ma trận de Bruijn là một cách cách mở rộng của dãy de Bruijn cho bảng hai chiều và đã được sử dụng rộng rãi trong ngành Computer Vision (thị giác máy tính). Hãy tưởng tượng một robot công nghiệp di chuyển trên hành lang theo các hướng khác nhau. Tuy nhiên, chúng ta muốn robot có thể xác định chính xác vị trí của nó. Một nhà toán học nhận thấy rằng có thể coi mặt phẳng dưới robot như là ma trận de Bruijn. Nhờ tính chất: mỗi ma trận con chỉ xuất hiện duy nhất một lần, robot có thể xác định chính xác vị trí của nó. Cũng dựa trên nguyên tắc này, công ty Anoto đã thiết kế và đưa ra thị trường một cây bút kỹ thuật số. Để có thể sử dụng nó, bạn cần một tờ giấy đặc biệt được in với các chấm sao cho chúng tạo thành ma trận de Bruijn. Máy ảnh được đặt ở đầu cây bút sẽ đọc cửa sổ của ma trận xung quanh đầu bút và trên cơ sở này nó có thể xác định vị trí của nó trên một trang giấy.

Chính vì các ứng dụng thực tế kể trên và do tính chất độc đáo của chúng, các bài toán liên quan đến dãy và ma trận de Bruin cũng là chủ đề của nhiều nghiên cứu lý thuyết.

Tài liệu

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/De_Bruijn_sequence

Nicolaas Govert de Bruijn

Ông Nicolaas Govert (Dick) de Bruijn (sinh ngày 9 tháng 7 năm 1918 mất ngày 17 tháng 2 năm 2012) là một nhà toán học người Hà Lan, được biết đến bởi nhiều đóng góp trong các lĩnh vực giải tích, lý thuyết số, tổ hợp và logic.

Ông sinh ra ở The Hague, nhận bằng thạc sĩ toán học tại Đại học Leiden vào năm 1941. Ông bảo vệ tiến sĩ năm 1943 ở Vrije Universiteit Amsterdam (Đại học tổng hợp tự do Amsterdam) với luận án nhan đề "Over modulaire vormen van meer veranderlijken" (tiếng Hà Lan, tạm dịch: Về các dạng modular nhiều biến).

De Bruijn bắt đầu sự nghiệp nghiên cứu giảng dạy của mình tại Đại học Amsterdam, nơi ông là giáo sư toán học từ năm 1952 đến năm 1960. Năm 1960 ông chuyển đến trường Đại học Kỹ thuật Eindhoven và làm giáo sư toán học ở đó cho đến lúc nghỉ hưu vào năm 1984.

Vào năm 1957 ông được bầu làm thành viên của Viện hàn lâm Khoa học và Nghệ thuật Hoàng gia Hà Lan. Ông được phong danh hiệu "Hiệp sĩ Sư tử" của Hà Lan.

THẾ NÀO LÀ TƯ DUY LOGIC - HÀNH TRÌNH ĐI TÌM MÁY BAY MẤT TÍCH MIG-21U

Ban Biên tập Tạp chí Epsilon

GIỚI THIỆU

Ngày 14 tháng 3 năm 2018, đài truyền hình Việt Nam (VTV) phát sóng một phóng sự về cuộc hành trình tìm kiếm máy bay MiG-21U thuộc trung đoàn Không quân 921 mất tích từ tháng 4 năm 1971. Đến đầu tháng 10 năm 2018, nhiều vật dụng cá nhân thuộc về liệt sĩ phi công Công Phương Thảo và huấn luyện viên, đại úy không quân Liên Xô Poyarkov Yuri Nikolaevich đã được tìm thấy và xác nhận bởi các cơ quan có thẩm quyền. Một kỳ tích đã được tạo nên nhờ vào một chuỗi những suy luận và dự đoán logic, vào kinh nghiệm, trình độ và tấm lòng của những con người nhân hậu kết hợp với sự giúp đỡ từ cộng đồng và Internet. Một câu chuyện cổ tích có thật, và có hậu. Chi tiết của cuộc tìm kiếm này bạn đọc quan tâm có thể đọc và xem lại ở VTV cũng như các báo trong thời gian đó.

Trong Epsilon số 14 này, Ban Biên tập Epsilon muốn đem lại với bạn đọc một góc nhìn khác, những thông tin khác từ câu chuyện kỳ diệu này: Epsilon muốn kể lại chuỗi những suy luận logic của quá trình làm việc trung thực và suy diễn rất hệ thống để giải quyết được một vấn đề "không thể tin nổi". Cá nhân chúng tôi vẫn luôn tin rằng, học toán là học cách suy luận, học văn là học làm người. Vì thế chúng tôi hi vọng câu chuyện này sẽ góp thêm một phần vào chủ đề chung "Học toán để làm gì"của tạp chí số này.

Để viết bài này, chúng tôi vinh dự được sự đồng ý của thầy Nguyễn Lê Anh, một nhà toán học, một cựu giảng viên, và là người thúc đẩy cho vụ tìm kiếm này như ông vẫn luôn khiêm tốn nói về vai trò của mình như vậy. Chúng tôi đăng bài này dựa theo nguyên bản bài viết của ông trên Facebook: "Thế nào là tư duy Logich"đăng ngày 5 tháng 3 năm 2018. Chúng tôi có kết hợp thêm một số thông tin tìm được qua báo chí, qua cuộc gọi điện ngắn gọn nhưng rất chân tình với ông để bổ sung và giải thích vào những chỗ vốn khó có thể diễn giải đầy đủ chỉ với một bài ngắn trên Facebook.

Xin được mở đầu cho câu chuyện bằng chính lời viết của ông:

"Khi còn nhỏ tôi có được đọc về một nhà chiêm tinh tướng số nổi tiếng về dự báo các sự kiện. Ông ta bị hỏi dự đoán chính xác ngày chết của mình, để rồi đến ngày ấy ông ta đành phải "tự tử"để lưu danh tài năng. Điều này thì chẳng hay ho gì, và vì thế tôi không thấy vui mừng về việc tìm thấy chiếc MiG-21U mất tích, bởi không có sự việc này thì vui hơn. Cái vui nhất là sự trung thực của quá trình tư duy và làm việc. Chỉ những ai muốn biết và muốn có được phép lạ biến "từ không thành có"ấy thì nên đọc tiếp."

Những suy luận ban đầu

Ngày 25 tháng 9 năm 2017, trên Facebook (FB) của một người lấy tên là Nam Nguyen có một bài viết như sau:

KHÔNG AI BỊ QUÊN LÃNG, KHÔNG GÌ ĐƯỢC LÃNG QUÊN

Cô gái Nga Anna Poyarkova - cháu gái của một sỹ quan Xô viết đã mất tích tại Việt Nam năm 1971 đang nỗ lực tìm dấu vết người ông của mình. Câu chuyện như sau:

Poyarkov Yuri Nikolaevich là đại úy không quân của Liên Xô sinh năm 1933, đảng viên từ 1961, trung đoàn phó không quân của đơn vị với mã số в\ч06858 làm nhiệm vụ ở Việt Nam với vai trò phi công huấn luyện. 30/04/1971 trong một chuyến bay tập máy bay của ông đã bị rơi vào rừng rậm. Cả máy bay, cả thi thể người phi công đều không được tìm thấy, và từ đó đại úy Poyarkov được coi là mất tích.

Tình hình còn phức tạp hơn bởi sự hiện diện của những chuyên gia Liên Xô thời bấy giờ không được loan báo nhiều, ngay cả trong Bộ Quốc phòng CCCP, kể cả nhiều năm sau. Và thế là gia đình nay chỉ còn có được những kỷ vật sau:

- những tấm ảnh của ông Yuri Poyarkov

- bằng khen, huân huy chương của Thủ tướng, Bộ Quốc phòng nước Việt Nam Dân Chủ Cộng Hòa. Riêng huân chương "Đoàn Kết" được thứ trưởng Bộ QP ký tặng 3 tháng sau khi ông hy sinh.

- thẻ chấm công của đại úy Poyarkov có ghi rằng ông giữ chức vụ "phi công huấn luyện để đào tạo phi công cho không quân Việt Nam bay ban ngày và bay đêm trong các điều kiện khí tượng đơn giản và phức tạp" – và "hy sinh trong khi làm nhiệm vụ bởi một tai nạn bay"

Xin ghi nhớ là ở thẻ này ghi rõ "hy sinh" chứ không phải "mất tích". Thế nhưng thi hài ông không thấy được đưa về nước, còn thân nhân thì được báo tin rằng "mất tích"!

Vậy điều gì đã xảy ra với đại úy Poyarkov vậy? Gia đình có mấy câu hỏi:

Ông mất tích trong hoàn cảnh nào? Đó là buổi bay tập hay trận không chiến?

Đoàn bay của ông đóng ở đâu?

Máy bay của ông rơi ở khu vực nào?

Tại sao không thể tìm ra chiếc máy bay rơi, và thi thể của phi công?

Đại úy được chôn cất cẩn thận ở Việt Nam hay bây giờ xác ông và chiếc máy bay vẫn còn trong rừng sâu? Con cháu ông vẫn còn một hy vọng, dù là rất mong manh, rằng một điều kỳ diệu nào đó đã xảy ra, và ngày nay ông Poyarkov với tuổi 84 vẫn còn sống đâu đó trong một làng bản ở Việt Nam. Hoặc không thì họ cũng muốn biết – và hoàn toàn có quyền được biết – cha ông của họ đã ngã xuống như thế nào, không lẽ đã 46 năm trôi qua mà tại đây vẫn chưa tìm ra chiếc máy bay? Ông Poyarkov đã chiến đấu cho tất cả chúng ta, vậy nên có lẽ Việt Nam nợ gia đình ông một câu trả lời thỏa đáng. Bởi không ai phải bị quên lãng và không có điều gì có thể lãng quên...

Bên dưới bài viết là các hình ảnh còn lưu giữ của gia đình Pyyarkov và hai ghi chú của *Nam Nguyen*, ghi chú thứ nhất là lời kêu gọi bạn bè và cộng đồng trên FB và *"Ghi chú 2: trên trang* *của Sergey đã xác định được, có lẽ ông Poyarkov cùng bay huấn luyện và hy sinh cùng với phi công Công Phương Thảo tại vùng trời Tam Đảo... Vẫn cần thêm thông tin!"*

Nói theo ngôn ngữ của khoa học, thì "bài toán"có thể tóm tắt như sau: thông tin đầu vào: máy bay bay tập của phi công Công Phương Thảo và thầy dạy Poyarkov bị mất tích vào ngày 30/4/1971 ở vùng Tam Đảo, thông tin cần tìm: máy bay rơi ở khu vực nào, liệu họ có còn sống, nếu không, thi thể ở đâu ...

Ngay khi đọc được bài trên, ông Nguyễn Lê Anh viết:

"Tôi cảm thấy rất nhục khi một chiếc máy bay mất tích không tìm thấy ở một nơi cách trung tâm Hà Nội không quá 70km. Những suy nghĩ ấy kích hoạt quá trình tư duy của tôi.

Tôi đã viết mấy còm như sau:

1. Cần phải tra vào hồ sơ liệt sĩ "Cống Phương Thảo"[1] *để tìm thân nhân. Chắc sẽ có thông tin tốt.*

2. Cần phải hỏi thân nhân để tìm ra nơi có mộ của "Cống Phương Thảo". Nếu có mộ thật tức là người nhà biết được bối cảnh hy sinh.

3. Trong vùng núi Tam Đảo người dân có nói về sự kiện máy bay Mỹ rơi vào khu vực núi. Người Mỹ đã tới kiểm tra và đã xác minh đúng. Không thấy người dân nói về MiG bị rơi vào núi trong dãy Tam Đảo.

4. Vào thời điểm ấy ở vùng núi Tam Đảo chỉ có người dân tộc sinh sống. Nên hỏi thì may ra mới có thông tin.

5. Cách duy nhất là nhờ chính quyền xã toàn miền núi phía Bắc hỏi người già về khả năng máy bay rơi. Đi tìm trực tiếp không dễ vì mưa gió đã làm mất hết dấu vết.

Đấy là khởi đầu của quá trình suy diễn dựa trên tư duy logich khi biết thông tin "ông Poyarkov cùng bay huấn luyện và hy sinh cùng với phi công Công Phương Thảo."Lẽ dĩ nhiên không thể có thành công dễ như vậy. Chắc chắn không thể có thông tin gì về mộ của anh Công Phương Thảo, nhưng không thể bỏ qua mà không kiểm tra. Tôi đã tìm cách hỏi thông tin về gia đình Công Phương Thảo cũng như hỏi người dân khu vực Tam Đảo về tung tích các máy bay bị rơi."

Trao đổi thêm với Epsilon, ông cho biết nhiều người thắc mắc vì sao không tra cứu lịch trình bay, sao không kiểm tra lại hệ thống định vị hay giáo trình tập huấn bay để có thêm thông tin. Đơn giản vì hoàn toàn không có ai lưu giữ lại các thông tin đó. Chúng tôi tạm nhắc lại bối cảnh tai nạn xảy ra vào tháng 4 năm 1971, và đó là những thời điểm khốc liệt của chiến tranh (tháng 2/1971 với chiến trường đường 9 Nam Lào, tháng 8 với trận lụt lịch sử ở sông Hồng, tháng 12 khi miền Bắc liên tục bị đánh bom ...), gần như mọi thông tin và hoạt động đều rất hạn chế. Tính theo sức người, sức của và kể cả tiềm lực đều khó có thể tiến hành dễ dàng vào thời điểm đó. Mặc dù khó khăn như vậy, có ít nhất 2 cuộc tìm kiếm đã được thực hiện ngay sau tai nạn, nhưng bất thành. Chúng tôi cũng muốn nói thêm rằng với sức lan toả của Internet, thông tin đến rất nhanh từ mọi người, nhưng với một sự kiện đã xảy ra gần một nửa thế kỷ, độ tin cậy của các

[1] Ở thời điểm này, họ của phi công vẫn bị ghi là Cống, cho đến khi có một người khác ghi chú là: "Ở Phú Thượng chỉ nghe có dòng họ Công, không có họ Cống đâu."thì về sau mới xác định được họ là Công. Tất cả các chú thích trong bài đều của Epsilon.

tin từ FB cũng là một vấn đề không đơn giản để quyết định đâu là thông tin đúng, và đúng đến ... bao nhiêu. Một bài toán quá khó để giải!

Ông Nguyễn Lê Anh viết tiếp: *"Để ước lượng được vị trí của chiếc MIG21 xấu số, tôi đi xác định các nguồn có thể thu lượm thông tin. Tôi đi đến kết luận nguồn có thể cung cấp các câu trả lời tốt là: về hiện trường chỉ có thể đến từ người dân tộc, và về thân nhân anh Công Phương Thảo chỉ có thể hỏi qua các phi công cùng đơn vị.*

Tôi quen Trung tướng Phạm Tuân, cựu Phó Tư lệnh Chính trị Quân chủng Không quân, anh hùng phi công vũ trụ. Ngày 26 tháng 9 năm 2017 tôi liên hệ với anh Phạm Tuân. Tôi tập trung vào xác minh những vấn đề khó mà có thể quên sau nhiều năm.

- Có hay không sự kiện chiếc MIG 21 rơi như vậy. - Những ai có thể cung cấp thông tin tin cậy về vụ việc (anh Phạm Tuân, anh Quang, anh Khánh Duy đại tá phi công cùng trung đoàn 921 với anh Công Phương Thảo.)

- Điều kiện thời tiết bay hôm ấy thế nào? ("thời tiết đơn giản- tức độ nhìn xa trên 10km, trời trong không mây, không mưa, không gió mạnh)

- Quỹ đạo bay và thời gian bay của chiếc MIG 21 ngày 30-4-1971 thế nào?

Tôi hỏi độc lập các anh Phạm Tuân, anh Quang, anh Nguyễn Khánh Duy để so sánh kiểm chứng và đưa ra kết luận."

Trong mỗi cuộc phỏng vấn ông luôn ghi âm lại và sau khi được sự đồng ý của các cá nhân được phỏng vấn, các cuộc phỏng vấn này cũng đã được đăng lên trên FB của ông. Ông cũng có trò chuyện thêm với Epsilon vì sao mình lại quyết tâm như vậy. Ông kể trung tướng Phạm Tuân có nói với ông: *"Chú mày làm gì mà hỏi những cái chi tiết ấy làm gì?" "Không tìm được! Tao đã bảo rồi, chả nhẽ toàn quân không đi tìm lại để cho một người đi tìm. Sao mà tìm được!"* Và ông trả lời: *"Thế hệ các anh lớn rồi, không còn đi nổi. Còn thế hệ bọn nhỏ, sẽ không ai quan tâm nữa. Nếu không phải tụi em làm thì ai sẽ làm đây!"*

Ông viết tiếp:

Sau khi làm việc nhiều lần với các anh phi công: anh Phạm Tuân, anh Quang, anh Nguyễn Khánh Duy (phi công cùng đơn vị bay với anh Công Phương Thảo) và anh Công Văn Mão (người thờ cúng anh Công Phương Thảo), tôi tạm đưa ra nhận định sau.

Các thông tin tin cậy (từ ghi âm cuộc nói chuyện):

1. Anh Phạm Tuân khẳng định lượng xăng của máy bay chỉ đủ bay trong 30 phút, sự cố xảy ra vào khoảng từ 10 giờ tới 12 giờ sáng ngày 30/4/1971. Thời tiết tốt.

2. Anh Nguyễn Khánh Duy (phi công cùng đơn vị bay với anh Công Phương Thảo) khẳng định "Công Phương Thảo xin phép bay về".

3. Máy bay thực hiện bài bay độ cao trung bình (từ 2000m tới 6000m) cất cánh theo hướng Đông Nam bay tới khu vực Đại Từ, như trong hình vẽ. Khi bay về phải tới được điểm phía nam Phúc Yên nơi có đài chỉ huy, cách sân bay chừng 10km rồi hạ dần độ cao xuống đường băng.

4. Tất cả các anh Phạm Tuân và Nguyễn Khánh Duy đều khẳng định bộ tư lệnh Không Quân và chính quyền các cấp đã tổ chức tìm kiếm ngay nhưng không thấy.

5. Mặc dù các anh Phạm Tuân và anh Khánh Duy không khẳng định nhưng nhiều lần nói tới khả năng chiếc MIG 21 rơi ở phía Tam Đảo Bắc.

Như vậy sau các cuộc phỏng vấn, thông tin đầu vào đã có nhiều hơn, nhưng vẫn còn rất mơ hồ. Chúng tôi tạm tóm tắt lại qua hình 1.

Hình 1: Bản đồ tóm tắt thông tin có được sau các cuộc phỏng vấn với các phi công: máy bay xuất phát từ sân bay Đa Phúc (nay là sân bay Nội Bài) ở điểm số 1, máy bay sẽ bay đến vùng Đại Từ (vùng màu đỏ số 2), ở độ cao trung bình từ 2000m tới 6000m. Máy bay sau đó bay thẳng về đài chỉ huy ở Nam Phúc Yên (điểm số 3) và sau đó hạ dần độ cao xuống đường băng Nội Bài (điểm số 1). Tai nạn xảy ra trong đoạn từ 2 đến 3, vào khoảng 10 tới 12 giờ sáng ngày 30/4/1971.

Ông suy luận tiếp:

Tổng hợp các thông tin tin cậy kết hợp với tọa độ và thời gian:

1. Tất cả các phi công đều khẳng định sự cố xảy ra vào khoảng từ 10 giờ tới 12 giờ sáng ngày 30/4/1971. Ngày hôm ấy trời quang mây tầm nhìn xa "ban ngày khí tượng đơn giản". Ngay sau khi xảy ra sự cố, quân binh chủng và chính quyền các cấp đã tổ chức tìm kiếm nhưng không thấy. Cho tới tận ngày 29/9/2017 vẫn chưa tìm thấy máy bay cũng như xác phi công.

2. Tất cả các phi công đều khẳng định sự cố xảy ra trong quá trình phi công Công Phương Thảo bay, nhắc lại cùng với thày là Yuri Poyarkov. Yuri Poyarkov là một phi công rất giỏi. Máy bay cất cánh từ sân bay Đa Phúc, nay gọi là sân bay Nội Bài, ở tọa độ (21.219086, 105.800507). Sau khi bay tập sẽ quay về hạ cánh cũng xuống sân bay này. Đường băng theo hướng Tây Bắc - Đông Nam. Máy bay cất cánh theo hướng Đông Nam, và hạ cánh từ hướng Tây Bắc.

3. Sự cố xảy ra do mất tín hiệu liên lạc, máy bay không về được căn cứ. Thời gian cất cánh là khoảng 10 giờ sáng. Anh Phạm Tuân khẳng định "lượng xăng của máy bay chỉ đủ bay trong 30 phút". Với lượng xăng như vậy máy bay chỉ có thể rơi trong phạm vi lãnh thổ Việt Nam.

4. Thời gian bay tới không vực tập bay là 5 phút. Thời gian bay tập dự định là 10 phút. Anh Nguyễn Khánh Duy (phi công cùng đơn vị bay với anh Công Phương Thảo) khẳng định "Công Phương Thảo xin phép bay về". Như vậy sự cố xảy ra sau khi bài bay tập đã hoàn thành và sự cố xảy ra với máy bay không thể bị coi là vì "trục trặc kỹ thuật". Sự cố xảy ra rất nhanh và đột ngột đến mức cả 2 phi công không kịp báo về sở chỉ huy bay. Như vậy sự cố xảy ra có lẽ là do yếu tố chủ quan của phi công khi hạ độ cao và có thể rơi vào vùng không khí nhiễu loạn (dòng đối lưu không khí) rồi đâm vào lưng chừng núi. Khoảng từ 10 giờ tới 12 giờ, ở nơi này mây thường xuyên bốc lên cao và bao phủ đỉnh núi.

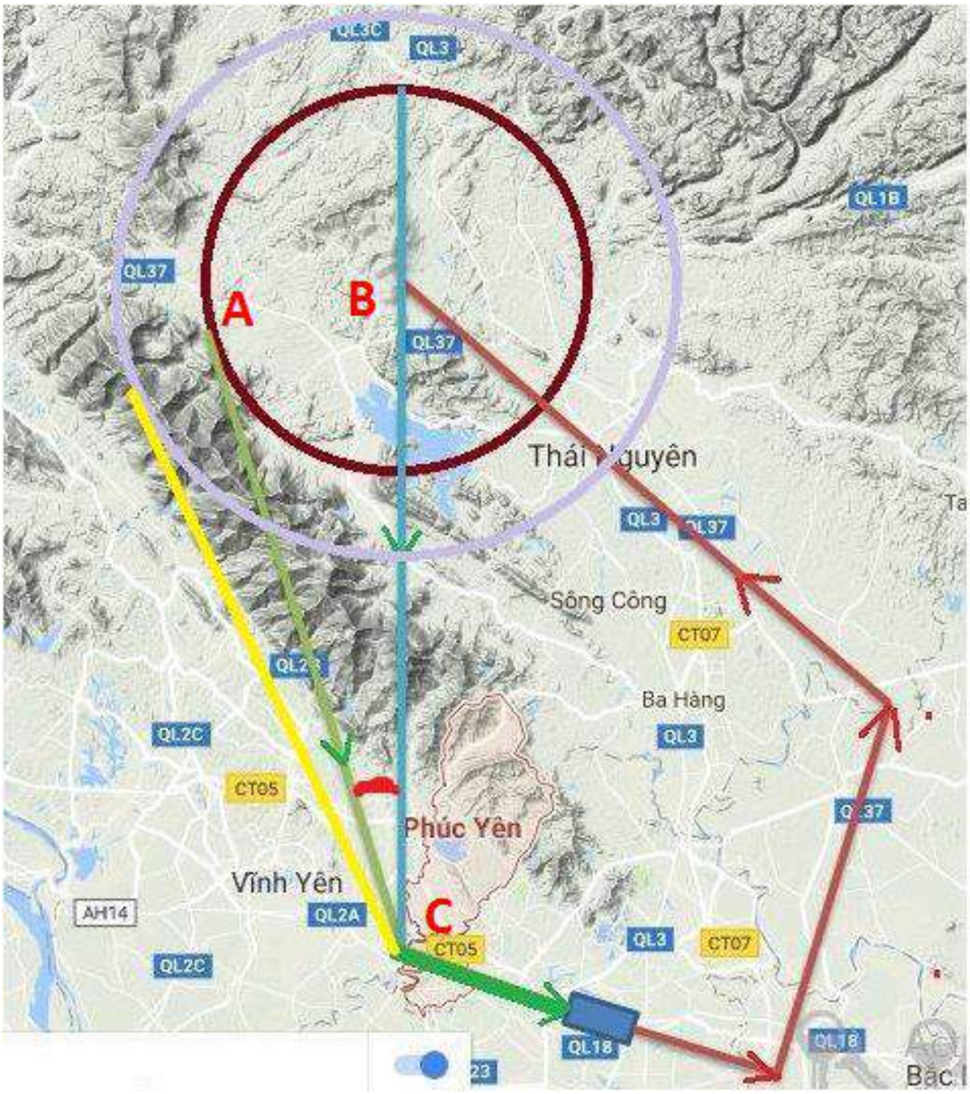
5. Anh Nguyễn Khánh Duy khẳng định quỹ đạo bay về sân bay là bay theo đường thẳng từ không vực tới điểm có tọa độ (21.259882, 105.688555) (cách sân bay 10km) ở phía Nam Phúc Yên để bắt đầu hạ cánh xuống sân bay (21.219086, 105.800507). Đường bay về hướng thẳng vào dãy núi Tam Đảo. Tùy theo thời điểm bắt đầu quay về mà ước tính vị trí xảy ra sự cố. Thời tiết quang, tầm nhìn xa và khả năng nghe tốt, loại trừ các hướng bay mà người dân có thể phát hiện ra sự cố.

6. Động cơ của chiếc MIG 2. Khối lượng 1 tấn, dài hơn 4.5 mét, đường kính hơn 1.5m.

Thông tin tiếng Nga: На МиГ-21С устанавливался один турбореактивный двигатель Р-11-Ф2С-300 (Сухая масса: 1040 кг; Максимальный диаметр: 0,825 м; Длина: 4,61 м)

Từ tổng kết về thông tin này, ông tính toán và đưa ra kết quả suy diễn như sau (tóm tắt trong hình 2).

Vòng tròn tâm B (21.698588, 105.659969) bán kính từ 10km đến 15km là không vực bay tập (chi tiết tỷ lệ có thể tìm thấy trên bản đồ Google). Thời gian bay từ sân bay tới không vực là 5 phút. Thời gian bay tập trong không vực là 10 phút. Độ cao bay từ 2000m tới 3000m cách mặt đất. Kết thúc bài bay tập anh Công Phương Thảo thông báo và xin phép quay về. Như vậy sự cố xảy ra trên đường máy bay bay về và máy bay ở trong tình trạng kỹ thuật tốt. Từ đây suy ra sự cố xảy ra là do chủ quan khi hạ độ cao và máy bay đâm vào núi ở độ cao từ 700m trở lên.



Hình 2: Các khả năng có thể xảy ra dựa trên thông tin sau phỏng vấn, tính toán và suy diễn logic. Nguồn: NLA.

Dựa vào hướng của sân bay chúng ta thấy kịch bản hạ cánh như sau. Để hạ cánh được máy bay phải bay đến điểm C (21.259882, 105.688555) ở độ cao 600m thấp dần trong khoảng 10km để tới đường băng (đường màu xanh). Như vậy máy bay phải hạ độ cao từ khoảng 2000m đến 3000m xuống độ cao 600m trong quãng đường 30km (từ không vực bay tập tới điểm 10km cách sân bay hạ cánh).

Nếu bán kính vòng bay là 15km thì điểm máy bay sẽ bắt đầu quay về sân bay là từ điểm có tọa độ (21.704967, 105.474574) với độ cao khoảng 2000m tới 3000m. Địa hình đồi núi dọc quỹ đạo bay về thấp hơn 400m, và sau đó máy bay bay dọc theo lưu vực "Sông Phó Đáy"[2]. Như vậy khó có thể xảy ra sự cố với máy bay, và nếu như sự cố có xảy ra thì người dân sẽ nhìn thấy. Vậy bán kính vòng bay là 10km. Điểm bắt đầu hạ độ cao từ 3000m đến 4000m (so với mặt nước biển) để bay về có thể là điểm có tọa độ (21.736703, 105.553796). Từ nhận định này chúng ta có thể tìm thấy góc phương vị bay về (góc mầu đỏ) là góc ACB, tạo bởi 2 tia AC và BC .

[2]Đường màu vàng.

Khả năng 1: Đường bay về AC. MIG 21 bay về qua đỉnh 3 của dãy Tam Đảo (nơi có độ cao 1400m ở tọa độ (21.493228, 105.634756)[3]. Trong 10km đầu tiên độ cao phải hạ được từ 1500m đến 2000m xuống còn 1500m. Như vậy khả năng đâm vào đỉnh 3 của dãy Tam Đảo Nam ở độ cao từ 1300 trở lên trong bán kính 10km, ở tọa độ (21.493228, 105.634756) từ phía Tây- Bắc.

Khả năng 2: Đường bay về BC. MIG 21 bay về qua hướng hồ Đại Lải (nơi có đỉnh núi cao 1250m ở tọa độ (21.442866, 105.687328). Sau 20km bay phải hạ được 2000m độ cao xuống còn 1000m để bay tiếp 10km nữa phải hạ được 700m độ cao xuống còn 600m tại điểm (21.259882, 105.688555). Trên quỹ đạo bay có đỉnh núi cao 1250m. Vậy nếu đâm vào núi thì khả năng sẽ đâm ở độ cao khoảng 700m trở lên, trong bán kính 5km quanh tọa độ (21.442866, 105.687328), từ hướng Bắc - Tây Bắc.

Như vậy trong cả 2 phương án, khả năng cao là máy bay đều xảy ra tai nạn ở vùng Nam Tam Đảo, nếu theo phương án về AC thì tai nạn sẽ xảy ra ở mặt phía Tây Bắc của đỉnh Tam Đảo 3, còn nếu theo phương án về BC thì tai nạn sẽ xảy ra ở phía Bắc - Tây Bắc so với đỉnh 1250m ở toạ độ (21.442866, 105.687328). Hai khả năng này được tóm tắt ở hình 3. Với kết quả suy luận này, không gian tìm kiếm đã được thu hẹp đáng kể so với khả năng "vô vọng"như ban đầu.

Hình 3: Hai khả năng có thể khi máy bay bay về.

Ngày 29 tháng 9 năm 2017, trong cuối một bài viết về vật lý, ông (Nguyễn Lê Anh) ghi một dòng ngắn: *"Phải đi vụ Poliarkov"*, và như vậy cuộc hành trình tìm kiếm chính thức bắt đầu.

[3]Ở phía Nam của Tam Đảo có 3 đỉnh núi cao: đỉnh 1 là đỉnh Phù Nghĩa (1250m), đỉnh 2 là đỉnh Thiên Thị (1591m) và đỉnh 3 là đỉnh Thạch Bàn (1420m). Đỉnh đang nói đến trong suy luận là đỉnh Thạch Bàn.

Lên đường

Mặc dù phạm vi tìm kiếm đã được thu hẹp, nhưng vẫn còn rất rộng, và dẫu sao đó vẫn chỉ đang ở dạng các khả năng có thể xảy ra nhờ vào quá trình suy luận logic. Cần phải có những khảo sát chi tiết hơn cũng như nhiều thông tin hơn, tốt nhất là từ chính những người dân địa phương.

Để có được thông tin, ông Nguyễn Lê Anh tiến hành thăm dò trực tiếp bằng cách cứ cuối tuần thì ông đi vào rừng thuộc dãy Tam Đảo Nam để leo núi, vốn cũng là một hoạt động quen thuộc của ông trong nhiều năm. Ông làm quen với những người dân tộc đi lấy nấm trong rừng và nhờ họ hỏi mọi người già thông tin về các máy bay rơi trong khu vực. Đôi khi đó chỉ là những câu hỏi bâng quơ, đôi khi thông tin được đổi lại từ việc hỗ trợ họ một ít chi phí cho việc hái nấm. Việc xác định được thông tin thoạt nghe có vẻ đơn giản nhưng trong thực tế không phải như vậy. Có những người dù thật lòng chia sẻ nhưng với tuổi tác và một sự kiện đã xảy ra hơn bốn thập kỷ thì độ chính xác của thông tin không còn cao nữa, cũng có những người sẵn sàng đưa ra những thông tin với độ tin cậy gần như không có, vốn chỉ để đổi lấy một chút tài lộc. Chúng tôi cũng nhắc lại là sự kiện xảy ra vào thời điểm chiến tranh khốc liệt, có rất nhiều máy bay bị bắn rơi hoặc bị tai nạn chứ không chỉ có duy nhất chiếc máy bay cần tìm. Nói thêm một chút về thông tin của chiếc MiG-21, theo Wikipedia, tên đầy đủ của nó là Mikoyan-Gurevich MiG-21 (tiếng Nga: Микоян и Гуревич МиГ-21) (tên ký hiệu của NATO: Fishbed) là một máy bay tiêm kích phản lực, được thiết kế bởi phòng thiết kế Mikoyan, Liên bang Xô viết. Ở Nga Mikoyan-Gurevich MiG-21 được gọi là Cây đàn Balalaika của bầu trời, vì nó có hình dáng cánh tam giác giống cây đàn dân tộc Nga, với quân đội Việt Nam, MiG-21 được gọi là thanh gương máu, huyền thoại của bầu trời. MiG-21 có nhiều phiên bản khác nhau, đa số là để chiến đấu, chỉ có một chỗ ngồi dành cho phi công, nhưng chiếc đang được tìm kiếm là MiG-21U, phiên bản huấn luyện có 2 chỗ ngồi với vị trí phía sau dành cho huấn luyện viên. Đây là một chi tiết quan trọng giúp cho việc xác định sau này.

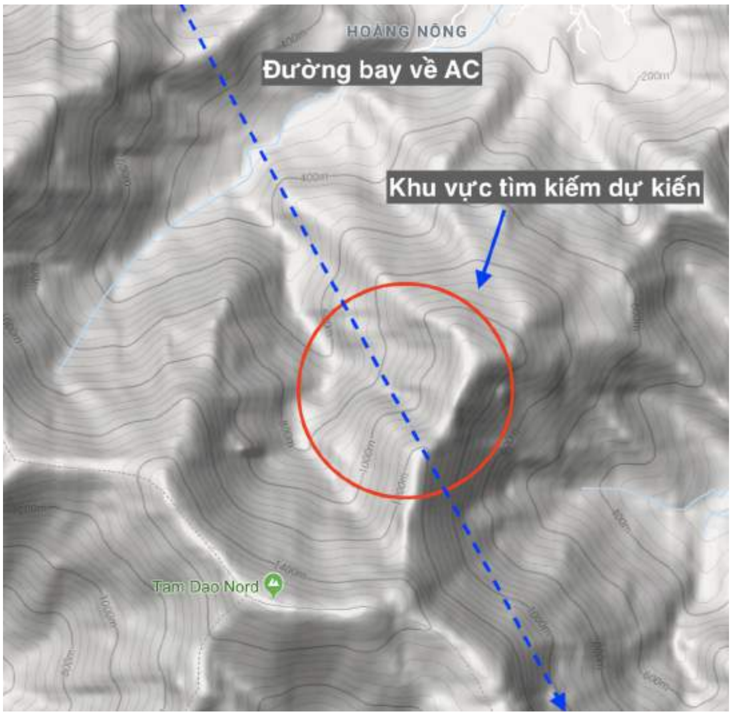
Sau một thời gian khảo sát, từ nói chuyện trực tiếp đến phỏng vấn qua điện thoại, Nguyễn Lê Anh hiểu rằng chiếc MiG-21U không bị rơi trong khu vực Tam Đảo Nam, hay nói cách khác, cả 2 khả năng từ suy luận ban đầu đều có dấu hiệu phải bị loại trừ. Vậy phải tìm ở đâu?

Ông viết:

"Việc dự đoán nó [máy bay MiG21-U] *đâm phải phía bắc đỉnh Tam Đảo 3 trong dãy Tam Đảo Nam là dựa trên giả định chiếc MiG-21U giảm độ cao từ từ. Tôi tin chắc chắn chiếc MiG-21U sẽ bay theo đường thẳng AC, vậy nếu loại bỏ khả năng chiếc MiG-21U đâm vào khu vực phía Bắc của đỉnh Tam Đảo 3, thì MiG-21U phải có khả năng giảm độ cao đột ngột. Tôi lại tìm cách hỏi anh Khánh Duy và được anh cho biết MiG-21U có khả năng bổ nhào và giảm tốc bằng cánh. Vậy là rõ chiếc MiG-21U đã đột ngột giảm độ cao ở điểm A (trên hình 2) ngay sau khi xin phép bay trở về và đã va vào gờ núi Tam Đảo Bắc, suy đoán cách đỉnh Tam Đảo 3 khoảng 13km theo đường chim bay. Chúng tôi có một nhóm leo núi thể thao, chuyên leo vào cuối tuần ở các đỉnh núi Tam Đảo 1, 2, và 3; và cũng đã bàn về việc sẽ tổ chức đi tìm. Tuy nhiên công việc hàng ngày đã choán hết cả tâm trí."*

Ông viết tiếp:

Câu chuyện được bắt đầu lại từ ngày 18/2/2018 khi có một bạn trẻ năm nay 30 tuổi tên là Đặng Tuấn. Đặng Tuấn có kể lại là mấy ngày Tết về quê nghe mọi người nói về chiếc máy bay rơi từ



Hình 4: Suy đoán: *"Ngay sau khi xin phép bay trở về và đã va vào gờ núi Tam Đảo Bắc, suy đoán cách đỉnh Tam Đảo 3 khoảng 13km theo đường chim bay."*

năm 1971. Đặng Tuấn đã truy tìm thông tin trên mạng Internet và thấy được bài viết của tôi cùng các tính toán gần giống với vị trí chiếc máy bay rơi mà bạn ấy biết từ khi còn nhỏ. Bạn ấy đã chủ động liên hệ với tôi.

Đặng Tuấn cho biết:

"Bác của cháu kể lại rằng năm 1971 có thấy một chiếc trực thăng của quân đội Việt Nam hạ cánh ở chân núi nói là tìm máy bay rơi nhưng không ai biết thông tin gì. Sau đó một thời gian thì mọi người kể lại rằng những người thợ săn họ tìm được một chiếc máy bay rơi và cháy ở trên núi. Những người đầu tiên biết về chiếc máy bay đó thì cũng nhặt được nhôm vụn đem bán, nhưng họ đã già và mất lâu rồi. Những người thợ săn trẻ sau này có người đã quay lại vị trí đó nhưng cũng chỉ thấy một cục sắt lớn nghi là động cơ và có kích thước bằng tủ lạnh."

"Vì cháu cũng đi làm lâu rồi nên ngày tết cũng không dám hỏi thêm thông tin, nên cháu dùng Google và thấy được thông tin của bác, cháu hy vọng rằng thư mà cháu biết có thể giúp được gì đó ạ!"

Ông nhận được thông tin này lúc đang ở Sài Gòn ăn tết, ngay lập tức ông mua vé đi Hà Nội và 8 giờ sáng ngày 19 tháng 2 năm 2018 ông cùng Đặng Tuấn đi về Yên Mỹ.

Ông tiếp:

Đặng Tuấn báo với mẹ làm cơm cho 3 người đi cùng ăn, và chúng tôi đi thẳng tới nhà chú của Đặng Tuấn là anh Hiệu. Anh Hiệu năm nay 49 tuổi. Anh Hiệu cho biết đúng là anh đã lăn cái lốp máy bay từ trên đỉnh núi cao xuống vực. Tuy nhiên việc này đã xảy ra từ hơn 20 năm về trước và anh đã không còn nhớ vị trí mà anh đã lăn chiếc lốp xuống.

Như vậy là thông tin về việc có chiếc máy bay bị rơi trên định núi đã được một người xác nhận. Tôi không có thói quen đưa ra khẳng định khi không đủ chứng cứ khách quan. Thông báo của Hiệu là một thành tố rất có trọng lượng tuy nhiên nó đã có từ hơn 20 năm. Nó cần được kiểm chứng trực tiếp bằng cách tìm lại chiếc lốp ấy. Tôi cũng được nghe bà của Đặng Tuấn nói về người đầu tiên phát hiện ra chiếc máy bay đã lấy nhôm về bán và nhà ông ấy giầu lên đột ngột. Tôi chưa xác minh được chính xác thời điểm người dân ấy phát hiện ra chiếc máy bay, nhưng qua hỏi sơ bộ thời điểm chiếc máy bay được phát hiện ra ít nhất cũng trên 40 năm. Về sau người ta đã nung chảy tại chỗ chiếc máy bay để mang về bán. Vị trí nung chảy chiếc máy bay được gọi là Bãi Nhôm. Hiệu cho biết anh cũng không còn nhớ vị trí của Bãi Nhôm ấy. Về chiếc động cơ thì Hiệu chỉ nghe nói mà chưa bao giờ nhìn thấy. Ngoài ra Hiệu nói có tin đã có người đưa máy khò lên để cắt nhỏ chiếc động cơ mang đi bán.

Như vậy các thông tin đưa tôi đến suy nghĩ, trường hợp xấu nhất, là sẽ không còn có khả năng tìm thấy dấu vết của chiếc máy bay. Cùng lắm chỉ có thể tìm thấy chiếc lốp bị lăn xuống vực. Tôi đề nghị Hiệu tổ chức một nhóm thám hiểm.

Trao đổi thêm với Epsilon, ông cho biết ông đã phải suy nghĩ rất nhiều, và rất nhanh trong trường hợp này. Làm sao có thể biết liệu những "người bạn mới"này có đưa ra thông tin chính xác hay không? Có chắc là họ còn nhớ đúng? Giả sử nếu như họ nhớ đúng thì chắc gì máy bay nói đến đã là chiếc MiG-21U cần tìm? Tuy nhiên vì vị trí được mô tả trùng khớp với kết quả suy luận của ông, nên nó là một động lực thôi thúc ông, vì ông tin vào sức mạnh của suy luận logic. Hơn nữa, cần phải đi nhanh vì nếu chậm trễ có thể do nôn nóng những người khác sẽ làm cho cuộc tìm kiếm vốn đã khó sẽ trở nên khó khăn hơn. Do vậy, ông quyết định đi tìm ngay vào cuối tuần đó, vào hai ngày 24/2 và 25/2 (thứ Bảy và chủ nhật). Chúng tôi tiếp tục đăng lại trọn vẹn lời kêu gọi của ông cho nhóm tình nguyện tìm kiếm của ông, đăng ngày 22/2/2018 để tôn vinh tầm quan trọng của tư duy logic và cách làm việc khoa học:

Đội tìm kiếm lưu ý:

Việc tìm kiếm có thể sẽ gặp khó khăn do trời mưa và sẽ rất nhiều vắt rừng, ngoài ra dấu vết chiếc MiG-21U cũng không còn nhiều. Trời tuy có mưa nhưng là mưa phùn nên không ngại, để lâu hơn nữa sẽ có mưa rào là rất khổ. Ngại nhất là rét. Về ban đêm trên đỉnh núi trời có thể rét có thể xuống tới 2 độ C. Chúng ta sẽ quyết đi tìm vào ngày 24/2/2018, tìm trong ít nhất 2 ngày thứ 7 và Chủ Nhật. Dù thế nào cũng đi, không tìm thấy quyết không về. Vì quá trình tìm kiếm khó khăn nên đội đi tìm sẽ chỉ gồm những người thực sự chịu đựng được gian khổ, không nên đi vì háo hức. Có lẽ chỉ nên lính đi tìm lính thì hơn. Vậy cần danh sách người đi. Chúng ta nên đi cùng nhau trên 1 chiếc ô tô đến nơi thì leo. Những ai cùng đi thì inbox cho tôi để chúng ta lấy điện thoại của nhau.

A - Nhiệm vụ: Nếu toàn bộ số kim loại của máy bay đã bị lấy đi mất chúng ta chỉ còn hy vọng vào 2 chiếc lốp máy bay đã vì nghịch mà cho lăn xuống vực. Lốp trước đường kính khoảng 0.5m, lốp sau đương kính khoảng 1m. Phía bên trong của chiếc lốp sẽ có chữ in nơi sản xuất ra chúng. Từ đây chúng ta sẽ đưa ra được quyết định có phải đó là chiếc MiG-21U hay không. Như vậy chúng ta phải tìm bằng được 2 chiếc lốp ấy. Dự tính hai chiếc lốp ấy đã bị lăn xuống vực sâu dốc đá thẳng đứng. Rất có thể phải dùng dây để leo xuống. Theo ý tôi chúng ta không nên mạo hiểm mà nên thuê thợ săn bản xứ đi tìm cùng.

Chúng ta cần một đội hậu cần mang đồ lên cho chúng ta ăn ở tại chỗ. Chúng ta cần 1 lều ngủ cho 4 người, lương thực thực phẩm và nước uống. Những thứ này sẽ thuê người địa phương *mang lên.*

B - Kỹ thuật leo núi: Vào mùa này trong rừng có rất nhiều vắt. Lên trên cao do đang mùa lạnh vắt sẽ ít hơn. Trời cũng đã ấm lên các loại rắn bò ra kiếm ăn. Khi leo núi cần phải để ý quan sát.

+ Mỗi người tự in ra bản đồ (lấy trên Google). Tôi sẽ chỉ rõ cho các bạn vị trí bắt đầu leo cũng như điểm phải leo đến. Khi di chuyển trong rừng các bạn phải hình dung ngay ra vị trí của các bạn trên bản đồ. Ngay cả khi không có sóng điện thoại thì tín hiệu vệ tinh vẫn có, chính vì vậy các bạn cần nhanh chóng cập nhật bản đồ vào điện thoại để biết được mình đang ở đâu.

+ Trường hợp bị lạc các bạn phải nhanh chóng leo lên vị trí cao nhất trong khu vực, nơi ấy sẽ có sóng điện thoại để gọi. Các bạn phải rất bình tĩnh đợi, vì sóng có thể lúc có lúc không. Trong mọi trường hợp phải cố di chuyển về vị trí lúc xuất phát.

+ Không nên mạo hiểm đi một mình. Vách đá có thể rất trơn và có thể tuột xuống vực ngay dưới chân mình mà không hay.

C - Về trang bị:

- Cả đoàn: 1 lều ngủ và tấm trải cách nhiệt cho 4 người. Lương thực thực phẩm và nước uống.

- Cá nhân:

Mỗi người tự lo cho mình, bao gồm 1 balo, tất cả mọi thứ trong balo đều được gói trong túi nilon đề phòng mưa ướt sẽ gầm vào đồ dùng khiến chúng trở nên rất nặng. Đồ dùng cá nhân phải có:

+ Về đồ dùng gồm: đèn pin + võng + 1 tấm vải mưa 1.5mx2m (mua ở Hà Trung) + túi ngủ cá nhân + găng tay, giầy leo núi (cỡ to hơn 1 số so với giày thường đi) và tất + quần áo mặc để leo (2 bộ) và quần áo ấm đề phòng ngủ lại trong rừng. Mỗi người mang theo 1 đôi giầy dự phòng để phòng khi giày hỏng (giày thể thao nhẹ) và khoảng 40m dây dù nhẹ mà bền.

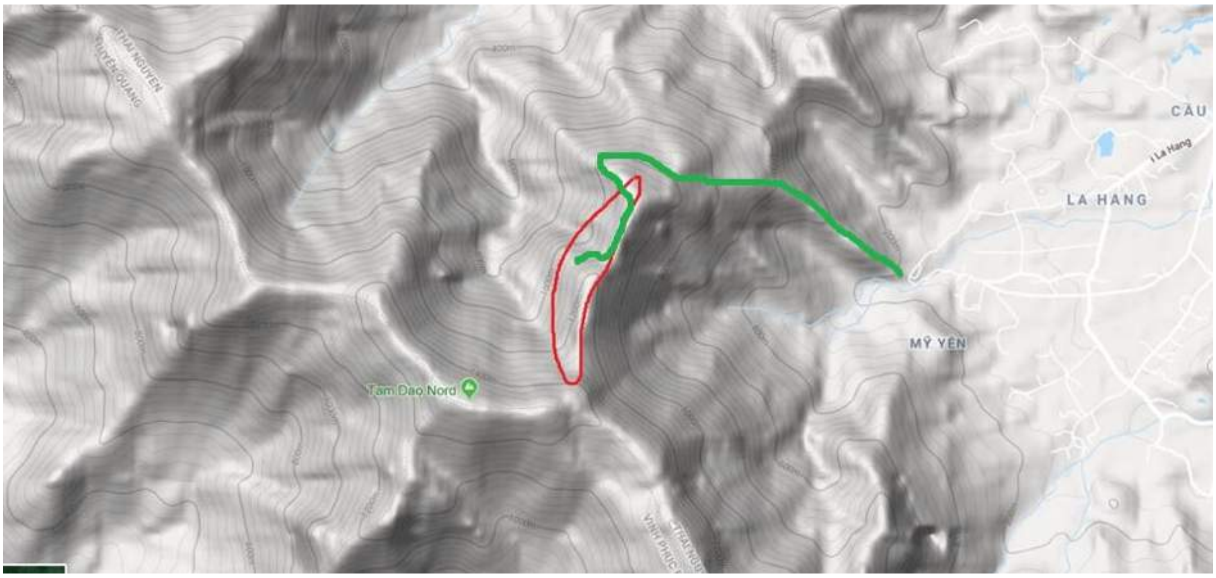
+ Về đồ ăn thì phải mang theo nước uống 3 lit + đồ ăn nhẹ đủ sống được 2 ngày + cồn khô và bật lửa để phòng tối phải ngủ lại thì đốt đống lửa + điện thoại & sạc dự phòng.

Đường màu xanh là đường dự kiến sẽ leo để lên đỉnh. Vùng màu đỏ dự kiến là vùng máy bay rơi. Chắc chắn có máy bay rơi nhưng không rõ là máy bay gì.

Khuya ngày 23 rạng sáng ngày 24 tháng 2 năm 2018, khoảng nửa ngày trước khi lên đường ông viết tiếp cho đoàn:

Hầu hết tất cả các núi kể cả Everest chiều cao từ chân núi lên tới đỉnh cũng chỉ vào khoảng 1500m. Như vậy vị trí mà chúng ta cần phải tới được trong ngày hôm nay là rất cao. Thông thường chúng ta phải đi 12km để lên được cao 1000m, như vậy tổng đường đi bộ để lên độ cao 1500m là khoảng 18km. Thời gian đi khoảng 5 giờ. Chúng ta đi theo con đường tắt, nhiều chỗ dốc thẳng đứng, vì thế chúng ta cần ít nhất 4 tiếng đê lên tới nơi. Theo kinh nghiệm thì nhanh nhất cũng khoảng 2 giờ chiều thì đoàn chúng ta mới tới được độ cao 1500m.

Đến nơi chúng ta phải theo người dân bản địa đi tìm và xác định tọa độ bãi nhôm, nơi đã nấu chảy chiếc máy bay. Và tìm kiếm một vài mảnh vụn. Việc tiếp theo là xác định xem có phải nơi



Hình 5: Suy đoán: *"Đường màu xanh là đường dự kiến sẽ leo để lên đỉnh. Vùng màu đỏ dự kiến là vùng máy bay rơi."* Nguồn: NLA.

đấy đã từng có một chiếc máy bay thì chúng ta phải mang máy dò kim koại và tổ chức đoàn tìm kiếm có kinh nghiệm hơn.

Nếu mọi việc tốt đẹp thì chúng ta sẽ xuống núi vào lúc 5 giờ chiều và vào khoảng 10 giờ đêm sẽ xuống tới chân núi.

Lưu ý.

1- Đặt chế độ cho điện thoại ghi nhớ đường đi.

2- Đường đi thường là men theo vực

Có một chi tiết nhỏ cũng cần phải nói thêm về độ tin cậy của thông tin nhận được. Bằng suy luận, ông có nghĩ tới "thuyết âm mưu", nhưng vì mọi thông tin đều rất trùng khớp với tính toán ban đầu, nên ông vẫn quyết đi tìm và tạm gạt bỏ suy nghĩ này. Cụ thể vào trước ngày đi, ông viết:

Như vậy chúng ta không có cơ hội tìm thấy chiếc máy bay vì nó đã bị biến thành sắt vụn. Nếu chúng ta tìm thấy chiếc lốp và nếu chúng ta đọc được chữ trên chiếc lốp ấy thì có thể xác định được nó có phải là MiG-21U hay không.

Chỉ có điều nếu như toàn bộ sự việc diễn ra đúng như lời kể thì chiếc máy bay đã không bị cháy nổ. Bởi nếu cháy nổ thì chả dễ gì có thể gom được mảnh để nấu. Nếu cháy nổ thì chiếc lốp sẽ bị cháy không còn để có mà lăn xuống vực. Vậy từ đây theo thuyết âm mưu có thể có nhiều điều để suy diễn.

Ngày tìm kiếm thứ nhất

Hà Nội, 5 giờ sáng ngày 24 tháng 2 năm 2018, những con người dũng cảm lên đường.

Toàn bộ thành viên tham gia gồm có 8 người: 4 người địa phương và 4 người tình nguyện viên, trong đó có Nguyễn Lê Anh, cũng là người lớn tuổi nhất. Ngoài 8 người họ ra, còn có các hỗ trợ khác ở bên dưới mặt đất và đông đảo mọi người hỗ trợ tinh thần qua Internet.

Nguyễn Lê Anh viết lại về ngày đầu tiên này như sau:

Nhóm dẫn đường gồm 4 người Hiệu, Trung, Nam, và Phú. Không một ai trong số họ còn nhớ vị trí Bãi Nhôm và có lẽ họ chưa từng đến đấy. Trong số 4 người thì duy nhất có Phú cho biết anh đã từng sờ tay vào chiếc động cơ máy bay và Hiệu thì nói là đã từng lăn một chiếc lốp từ trên cao xuống vực.

Nhóm tình nguyện viên gồm 4 người, trong đó có tôi. Trừ tôi ra các thành viên đều còn trẻ và rất hưng phấn. Khi nhìn thấy các thành viên không mang theo nước uống tôi biết họ không thể theo được. Vì thế tôi đã không kiểm tra tư trang của các thành viên trước khi lên đường. Họ chưa đủ kinh nghiệm cho một cuộc đi như vậy.

Khoảng 10 giờ sáng ngày 24/2/2018 chúng tôi bắt đầu leo núi. Theo quy định tôi chỉ bật điện thoại vào các phút chẵn 30. Hai thành viên sớm bỏ cuộc sau khi leo lên một cái đồi không cao lắm. Tôi đưa cho Hiệu 1 chai nước to và phân công Hiệu đi cuối. Tôi và 3 người địa phương còn lại đến được vị trí cắm trại vào lúc 14:00 chiều, đúng như dự kiến. Nhờ có nước uống, thành viên thứ 3 cũng tới được, vị ấy tới vào lúc 19:00 tối, nhưng anh đề nghị quay lui vào sáng hôm sau.

Sáng hôm sau tôi cử Hiệu đưa anh ấy quay trở về và dặn là phải trở lại tìm tiếp[4]*. Ngày 24/2/2018 diễn ra như vậy. Pin điện thoại và sạc chỉ được dự tính cho 2 ngày thám hiểm cũng đã không còn nhiều.*

Và như vậy, sau khi ngày đầu tiên kết thúc, cả đoàn chỉ còn lại mỗi "người thúc đẩy"Nguyễn Lê Anh, một nhà toán học đã trên 60 tuổi, và 4 người dân địa phương.

[4]Trên trang `longnguyen48.blogspot.com` có nói về ngày đầu tiên và một phần của ngày thứ hai này với góc nhìn từ các thành viên tình nguyện còn lại như sau:

Chẳng hiểu mọi lần leo núi (là nghề) của GS Lê Anh như thế nào nhưng lần này đi, mưa xuân rả rích nặng hạt, trời mù... Nói chung, thời tiết khá phức tạp cho cả việc leo núi lẫn bay huấn luyện khi xưa. Thậm chí tiến sĩ Doãn Hà Thắng còn không thể cho cái Drone (là một thiết bị giống flycam) hoạt động được vì cây cối quá rậm rạp. Ngay ngày đầu tiên, bác sĩ Phúc đã phải bỏ cuộc vì ong rừng đốt đến mức tê dại hai chân, khiến chân không có cảm giác để đứng thăng bằng và chuyên gia an ninh mạng Ngô Việt Khôi thì vì sức khỏe của dân phượt, không thể đua được với chuyên gia leo núi cũng bỏ cuộc. Như vậy là hai nhân tố trẻ của đoàn đã phải bỏ cuộc tìm kiếm ngay từ ngày đầu tiên. Đây cũng là nguyên nhân mà GS Lê Anh cảm thấy sợ hãi sau này (sẽ kể ở đoạn sau).

Cuộc tìm kiếm kéo dài đến tối mịt, chúng tôi ở nhà hồi hộp chờ đợi kết quả. Nhưng cái chính là lo cho tính mạng của các thành viên đoàn. Cho tới lúc này chỉ còn anh và Ts Doãn Hà Thắng là người tìm kiếm cùng ba người bản xứ vốn là người Kinh, cách đây hai mươi năm đã từng trèo lên khu vực này tìm kiếm xác máy bay để... lấy nhôm bán sắt vụn.

Sang ngày thứ hai, tiến sĩ Doãn Hà Thắng cũng phải bỏ cuộc vì tim đập nhanh quá, nghẹt thở, có lúc bị ngất vì những cú trèo đá núi cheo leo. Đến lúc này chỉ còn GS Lê Anh và "đồng đội tìm sắt vụn". Các tính toán bằng xác xuất toán học của Lê Anh cho đến giờ này vẫn khá chính xác hướng tìm kiếm. Viện trưởng Mai Hương liên tục động viên bằng cách phi xe đến tận chân núi gần nhất có thể để... hóng tin.

Ngày tìm kiếm thứ hai

Nguyễn Lê Anh viết tiếp:

Vị trí cắm trại phải là một nơi có nước. Nó nằm cách nơi chúng tôi dự định tìm khoảng 1 giờ đi bộ. Thời tiết lạnh và mưa phùn cũng như ngày hôm trước. Đường rất trơn. Như đã nói ngoại trừ anh Phú, còn hai anh Nam và Trung chỉ nghe đồn thổi về vụ máy bay rơi mà chưa hề nhìn thấy chiếc động cơ cũng như Bãi Nhôm. Do trời mù mà phải tới 10 giờ sáng ngày 25/2 mới bắt đầu đi tìm chiếc động cơ. Tôi không can dự vào quyết định mà để họ tự đi tìm theo ý của mình, với hy vọng sớm tìm thấy nó.

[Nếu căn cứ theo lời kể của họ thì] *nhiều bộ phận của chiếc động cơ đã bị tháo vì thế kích thước mỗi chiều của nó chỉ khoảng nửa mét. Dự tính phạm vi tìm kiếm diễn ra trong phạm vi khoảng* $1km^2$*. Tôi không thật sự tin là họ sẽ tìm được một vật như vậy, một khi không biết chắc chắn vị trí từ trước. Đến 14:00 thì cả ba anh về trại. Sau khi nghe thông báo đã tìm nát hết các vị trí có thể tôi trầm ngâm suy nghĩ. Từ 10:00 đến 14:00 là 4 tiếng. Đi lại nhanh hết 1 tiếng vậy chỉ có 3 tiếng đi tìm. Đi trong rừng rậm, vừa đi vừa phạt cây để lấy lối đi, tốc độ chỉ khoảng 2km/giờ. Ba người đi được cùng lắm 18km. Nếu tầm mắt bao quát nhìn sáng 2 bên được 10m thì phải đi 50km mới quét hết diện tích* $1km^2$*...*

Như vậy có nghĩa là họ chưa tìm được một phần ba khu vực cần tìm kiếm, làm sao có thể kết luận là "tìm nát hết"các vị trí. Quay lại giả thuyết về "thuyết âm mưu", liệu chăng có khả năng toàn bộ thông tin về Bãi Nhôm lẫn chi tiết lăn lốt bánh xe xuống vực là không chính xác. Liệu rằng các sự kiện đó có thật sự xảy ra. Nếu giả như tất cả đều không xảy ra ...

Ông kể lại nổi lo lắng của mình vào buổi chiều của ngày thứ hai:

Chiều muộn tôi nhận được tin nhắn của Nam [Nam Nguyen, người kêu gọi đầu tiên trên FB vào ngày 25/9/2017] *thông báo quay về vì tất cả những người địa phương đang đi tìm với tôi đều không biết tí gì, và vị trí chiếc máy bay rơi ở chỗ khác. Tôi giữ im lặng đề phòng. Các bạn người địa phương tranh luận với nhau rất nhiều và gọi điện thoại để hỏi. Họ bảo tôi là chúng ta không thể tìm được gì vì đã có người mang máy dò kim loại lên để dò hết các mảnh vỡ. Thậm chí tên người khò và tên người bán cái động cơ cũng được nói ra và họ tìm cách gọi điện hỏi.*

Chúng tôi ăn tối. Tôi hôm ấy tôi không ngủ và cố hình dung ra vị trí chiếc máy bay. Tôi cho rằng chiếc máy bay nếu chỉ bay cao hơn một vài chục mét là nó đã thoát, và vì vậy vị trí va chạm của chiếc máy bay phải ở ngần ngay trên gờ của núi. Tôi đánh dấu trên bản đồ vị trí của cái gờ nhô lên.

Và ông tiếp tục cố gắng thêm một ngày nữa, tiếp tục tìm kiếm vào ngày Thứ Hai, 26/2/2018.

Ngày tìm kiếm thứ ba

Nguyễn Lê Anh kể tiếp:

Sáng thứ 2 trời vẫn mưa và rét. Hiệu gọi điện thoại với giọng ngập ngừng. Tôi hiểu nguyên nhân của sự thay đổi ấy. Hiệu cho biết tối hôm trước Nam, Thắng và Hiệu đã đến nhà một số người dân tộc và nhận được những thông tin nào đó. Cái này Nam đã nhắn tin cho tôi. Tôi làm như không biết gì và nói Hiệu phải lên để gặp gỡ chúng tôi vì tinh thần đồng đội. Trên thực tế tôi cũng đã hơi lo, và muốn phải có Hiệu.

Tôi cần phải đưa ra quyết định trong bối cảnh không biết ai nói đúng, ai đáng tin và thông tin nào đáng tin cậy. Tôi nói với mọi người rằng thép của chiếc động cơ rất dày không thể bị khò mang đi và chúng ta nên tìm ngược theo các con suối cạn ngược lên đỉnh. Vào khoảng 9:00 chúng tôi nhổ trại vừa đi tìm vừa về. Khoảng 10:00 chúng tôi đến chỗ tìm. Ngay lúc ấy chúng tôi gặp 3 cậu thanh niên dân tộc. Ngoảnh trước ngoảnh sau họ đã rút và uống hết chai nước của tôi. Chỗ này không có một con suối nào có nước. Không có nước uống là sẽ chết khát. Tôi bắt đầu thấy sợ vì có thể đấy là một lời cảnh cáo. Tôi có cảm giác hình như mọi thứ đều chống lại việc tôi tiếp tục đi tìm. Tuy nhiên tôi hiểu là việc phải giữ vẻ bề ngoài bình tĩnh không thay đổi là quan trọng.

Quá trình tìm kiếm rất chậm. Sau khoảng 30 phút tôi hiểu là không thể tìm được cái động cơ ấy giữa rừng rậm. Tôi nói mọi người chúng ta lên đỉnh cao nhất và tìm cách xác định vị trí để đi tìm xuống. Trên thực tế tôi chỉ muốn xác định được vị trí nơi chiếc máy bay đã lao vào núi.

Khoảng 13:00 giờ chúng tôi trèo đến đỉnh. Trên đó rất lạnh, chúng tôi đốt lửa chờ Hiệu. Vào khoảng 14:00 chúng tôi quyết định đi tìm tiếp. Lần này tôi đi trước và cố tìm thấy cái gờ mà tôi đã thấy trên bản đồ Google. Tôi leo lên một đỉnh núi và tôi biết khi đi xuống là sẽ đến cái gờ tôi muốn. Khoảng 14:30 chúng tôi đến chỗ ấy. Mọi người cũng đồng ý là tìm xuống từ chỗ ấy. Chúng tôi chia ra thành các nhóm đi tìm xuống. Tôi đi cùng với Phú. Phú có dao phạt cây để đi, tôi khảo sát một chỗ đỡ dốc mà tôi cho là nơi máy bay đâm vào. Không tìm thấy gì, tôi thất vọng đi vào phía khe suối cạn toàn đá tảng lổn nhổn. Lòng suối rất khó đi, tôi bị ngã mấy lần. Và tôi bắt đầu thấy sợ, bởi chỉ cần bị ngã thụt chân vào khe đá gãy chân thì sẽ không thể ra khỏi rừng được.

Tôi bắt đầu suy nghĩ. Nếu cứ thế này xuống được tới con đường bên dưới mất 2 giờ. Sau đó phải mất 3 giờ mới ra được khỏi rừng. Như vậy là mất 5 giờ. Lúc ấy đã là khoảng 3 giờ chiều, vậy chúng tôi chỉ có thể ra khỏi rừng lúc 8 giờ đêm. Đi trong rừng trời tối rất nhanh và khi trời tối thì đi rất chậm. Nếu vậy thì sẽ phải 10 giờ đêm chưa ra được khỏi rừng. Hiểu ra sự nguy hiểm, tôi nói với Phú chúng ta thất bại rồi, phát lệnh "Lui Quân".

Tôi lệnh cho Phú vẫn phải phát cây, vẫn đi tìm cái động cơ, nhưng tìm ở con đường ít dốc nhất, dễ đi nhất để xuống. Xét thâm tâm là do tôi sợ, tôi cần phải xuống thật nhanh và ra khỏi rừng trước khi trời tối. Phú đi trước phát đường vào chỗ ít dốc nhất có thể, tôi đi ngay sau. Và thật kỳ diệu, chỉ phát đường được khoảng 5m thì chúng tôi nhìn thấy mảnh máy bay.

Kỳ tích đã thật sự xảy ra!

Hình 6: Vào lúc 14:50 ngày 26 tháng 2 năm 2018, đoàn tìm kiếm đã tìm thấy mảnh máy bay ở vị trí (21°34’46.9"N 105°33’04.9"E) cách xa không quá 100m so với vị trí được tính toán dựa vào suy luận logic. Nguồn: NLA.

Hình 7: Chiều ngày 25/2/2018, một ngày trước khi tìm ra mảnh máy bay, ông Nguyễn Lê Anh viết: *"Mặc dù chưa tìm được dấu vết chiếc MiG-21U, nhưng tất cả đều tin đây chính là nơi chiếc máy bay "hạ cánh". Nó tiếp đất an toàn ở độ cao khoảng 1400m. Theo phong tục Việt Nam chúng tôi thắp nén hương kính viếng linh hồn các anh."* Nguồn: NLA.

Ông kết thúc ký sự của mình như sau:

Xét về bản chất sau 47 năm mưa dầm mảnh máy bay ấy sẽ chỉ có thể đọng lại nơi mà ít dốc nhất có thể.

Chúng tôi ở trong rừng 3 ngày 2 đêm. Không kể thời gian đi đường, tổng thời gian tìm là khoảng 3 giờ và 30 phút. Rất ít người biết được cái tư duy cuối cùng đưa lại thành công bắt nguồn không phải từ tư duy logich mà từ nỗi sợ hãi của tôi.

Chúng tôi nhanh chóng ra về 5 giờ chiều đã ra khỏi rừng. Sau một kết cục thật có hậu cho một chuyến đi vất vả, anh em chúng tôi, Nam, Trung, Hiệu và Phú thấy tin yêu nhau hơn. Nam Nguyen lên đón tôi và gửi chút quà nhỏ biếu các bạn cùng đi tìm.

Kết thúc hành trình

Sau khi tìm được mảnh vỡ máy bay bị nghi là của máy bay MiG-21U mất tích, đoàn tìm kiếm buộc phải quay về và không thể tìm tiếp vì lý do họ đã kiệt sức, cũng như không đủ nước, lương thực và cả pin cho các thiết bị. Họ sau đó đã bàn giao mảnh máy bay cho các đơn vị có thẩm quyền. Với mảnh máy bay này, hàng loạt câu hỏi cần được giải đáp: liệu nó có phải đúng là mảnh của máy bay cần tìm hay không? Máy bay bị tai nạn như thế nào? Nếu đúng, liệu có thể tìm thấy thi hài của những người đã mất hay không? Trong lúc đi tìm thông tin, có người kể rằng "thày Poyarkov cõng anh Thảo mặt đầy máu đi trong rừng và có ai đó đã bắn chết họ", liệu đây có phải là sự thật?

Như đã giới thiệu với bạn đọc, MiG-21U là máy bay duy nhất trong dòng MiG-21 có 2 chỗ ngồi, và may mắn là mảnh vỡ được tìm thấy là mẫu ở giữa 2 vị trí đó. Với một chuỗi logic và so sánh, đối chiếu với hình ảnh và thông tin, chuyên gia Nhật Đình, một người bạn của ông Nguyễn Lê Anh đã chứng minh được đó chắc chắn phải là mảnh vỡ của MiG-21U. Về sau các cơ quan có thẩm quyền cũng đã xác nhận tính chính xác, kỳ tích được xác nhận!

Về các câu hỏi còn lại, ông Nguyễn Lê Anh viết lại việc này vào ngày 23/3/2018 như sau:

Ngày 28/2/2018, chúng tôi đã bàn giao mảnh ID cùng tọa độ nơi tìm ra nó và ảnh chụp vị trí mảnh ghép cho Quân chủng Không Quân. Lẽ dĩ nhiên vị trí rơi của chiếc MiG-21U nằm không xa vị trí mảnh máy bay tìm được và nhiều người dân biết rất rõ vị trí ấy.

Tuy vậy vẫn cần phải xác minh thực hư về câu chuyện lan đồn "thày Poyarkov cõng anh Thảo mặt đầy máu đi trong rừng và có ai đó đã bắn chết họ."Lời nguyền độc địa này cần phải được giải thoát để trả lại sự vô can cho linh hồn những người thợ săn đã khuất.

Tôi đã leo lên núi lần thứ hai. Lần này là nhằm mục đích xác định "liệu phi công có khả năng còn sống hay không?"

Thông tin chính xác: - Tọa độ (21°34'50.1"N 105°33'12.0"E) nơi tìm được dù (có lẽ là dù máy bay) cùng rất nhiều mảnh nhỏ và vết đâm sâu vào sườn núi nghi là do máy bay đâm vào.

- Tọa độ (21°34'46.9"N 105°33'04.9"E) nơi tìm được mảnh ID MiG-21U

Suy diễn: Mảnh ID MiG-21U nằm ngay dưới vị trí máy bay rơi, cao độ chênh 140m, ở khoảng cách xa 183m. Trong bán kính 200m phía trên mảnh ID MiG-21U không còn có một vị trí nào có thể nghi là nơi bị một máy bay đâm vào. Như vậy chúng ta có thể khẳng định được vị trí chiếc MiG-21U của anh Thảo và Poyarkov đâm vào sường núi là tọa độ nói trên.

Rất nhiều người dân khẳng định tìm được một chiếc vỏ màu vàng không ruột của chiếc đồng hồ Poljot tại nơi nghi là máy bay đâm vào sường núi. Nếu chắc chắn đó là chiếc đồng hồ đeo tay của Đại úy phi công Poyarkov thì cả hai phi công đã hy sinh nơi máy bay đâm vào núi.

Nhật Đình đã xác minh mảnh vỡ ID MiG-21U là ở phía sườn trái cabin của MiG-21U. Dựa vào tọa độ mảnh vỡ ID MiG-21U tìm được, và tọa độ nơi có hố vết đâm vào núi, chúng ta tính ra được mảnh vỡ đã văng ra sớm hơn 70m so với vị trí của hố. Như vậy chiếc máy bay đã cà lườn phải vào vách núi một khoảng 50m trước khi nó húc và khoét ra một hố mỗi chiều 2m. Mảnh ID MiG-21U bị văng ra ngay khi máy bay cà lườn phải vào núi. Mảnh ID không bị biến dạng theo chiều dọc, nó bị văng ra theo phương vuông góc. Vận tốc mảnh ID MiG-21U bắn ra khỏi máy bay là khoảng 100km/giờ. Tính toán này phù hợp với vết sạt dài khoảng 30m để lại hiện trường.

Những giây cuối cùng. Ngay sau khi xin phép bay về, chiếc MIG đã bổ nhào từ 4000m xuống 2000m để bay về Nam Phúc Yên. Lúc này vận tốc chiếc MIG lên đến trên 1200km/giờ. Chiếc MIG chắc đã kịp dùng bụng cản gió để triệt tiêu động năng. Vận tốc của nó giảm xuống còn khoảng 600km/giờ. Cuối tháng tư, mùa hè nóng. Từ 10 giờ trở đi mặt trời lên cao làm cho dòng khí đối lưu mạnh. Nơi sát đỉnh núi không khí bốc lên rất mạnh, nơi thung lũng thì dòng khí đi xuống. Thung lũng Hoàng Nông có đường kính 4km, và như vậy 12 giây cuối chiếc MIG21U mới phát hiện ra nó đã bị hạ thấp độ cao quá mức. Chiếc MiG-21U đã ngoặt gấp sang trái 90 độ với hy vọng vượt qua gờ núi Hoàng Nông - Yên Mỹ, phía thấp hơn. Nó có thể đã thoát nạn nếu bay cao hơn được 10m (bay theo đúng giáo trình không thể phạm sai lầm nhiều). Khi phi công rời khỏi máy bay, chiếc máy bay sẽ bay thẳng theo quán tính. Như vậy trong thời gian bay vòng phi công vẫn ở trong máy bay. Độ dài đoạn bay thẳng cuối cùng không quá 0.5km. Nếu bay với tốc độ 600km/giờ thì mất khoảng 3 giây. Như vậy giây thứ 3 các phi công vẫn còn trong máy bay. Thời gian để phóng ghế ra khỏi máy bay không ít hơn 3 giây. Do đó cho dù các phi công có khởi động ghế phóng hay không, họ cũng đã lao vào sườn núi và chết ngay tại vị trí máy bay rơi.

Những suy diễn nói trên phù hợp với sự thật là người dân cho biết vào thời điểm ấy máy bay trực thăng bay quần đảo nhiều ngày trong phạm vi núi Tam Đảo Bắc. Đó chính là máy bay trực thăng của Quân chủng Không Quân đi tìm chiếc MiG-21U. Nếu phi công còn sống họ đã phát tín hiệu cho trực thăng.

Như vậy câu chuyện lan đồn về hình ảnh người thày Poyarkov cõng anh Thảo đi trong rừng chỉ như một minh chứng cho tình cảm và sự giúp đỡ của Liên Xô với Việt Nam. Hình ảnh rất đẹp nhưng chỉ là sự tưởng tượng. Các phi công đã chết ngay khi máy bay sạt vào núi. Và đây cũng là khẳng định giải thoát lời nguyền độc địa rằng có ai đó đã bắn họ.

Xin được mặc niệm và tỏ lòng biết ơn các anh hùng liệt sĩ đã hy sinh vì tổ quốc Việt Nam.

Đến cuối tháng 9, đầu tháng 10 năm 2018 như chúng tôi có nói ở đầu bài viết, các cuộc khai quật đã được tiến hành, và dù, vật dụng ... của những người đã khuất đã được tìm thấy. Một câu chuyện cổ tích đã có kết thúc có hậu sau đúng một năm tìm kiếm, tính từ ngày bài đăng trên FB Nam Nguyen.

Lời kết

Vào một ngày đẹp trời mùa hè 2018, tổng biên tập Trần Nam Dũng có ý muốn "hồi sinh"Epsilon sau khi số cuối cùng (số 13) ra mắt bạn đọc hơn 1 năm về trước. Chúng tôi vẫn luôn tự hào về Epsilon và luôn hài lòng với quyết định để Epsilon dừng lại khi đang được ủng hộ rất nhiệt thành từ cộng đồng (để nhường chỗ cho tạp chí Pi). Tôi luôn suy nghĩ nếu để Epsilon quay trở lại, thì tôi phải làm một cái gì đó mới hơn, và hay hơn. Tôi tự hỏi đâu là thế mạnh lớn nhất của Epsilon và tạm trả lời đó chính là sự tự do. Epsilon không gò bó về nội dung, miễn nó có liên quan đến toán, cũng không áp đặt về hình thức. Epsilon không phân biệt đó là bài viết từ học sinh, hay từ giáo sư, tiến sĩ danh giá như Ngô Bảo Châu, tất cả đều bình đẳng với nhau. Vậy thì tại sao không có một số bài viết với một hình thức mới, không phải chỉ là đề bài và lời giải?

BM2E là một phong trào khác, cũng được khởi xướng bởi cùng một người, Trần Nam Dũng. BM2E có mục tiêu chính là đem toán học tới mọi người và chủ đề gần đây nhất của BM2E là "học toán để làm gì". Khi đọc tiêu đề đó, tôi nói với ông: "Em không thấy có ai làm tốt hơn được huyền thoại NLA. Nếu thầy mời được, sẽ là vinh dự và là đột phá lớn cho BM2E", và ông đã làm được!

Khi ý tưởng bên trên đã thông, mọi thứ còn lại nó đến một cách hết sức tự nhiên. Vốn kiến thức có được từ những bài viết trên FB của Nguyễn Lê Anh, có lẽ chúng tôi có dùng thêm 10 năm nữa với Epsilon mới có thể đăng hết! Nhưng tôi không muốn chọn ngay những bài viết quá thuần toán học của ông, tôi muốn chọn một vấn đề "đời"hơn, và hấp dẫn hơn. Hành trình tìm ra chiếc MiG-21U có lẽ rất nhiều người biết vì truyền thông đã làm tốt điều này, nhưng làm thế nào họ tìm ra nó, chuỗi suy luận và tính toán đó, nếu không ai ghi lại cho hậu thế một cách rõ ràng và chi tiết, thì thật đáng tiếc. Và nếu chưa ai làm, thì chúng tôi sẽ làm.

Tuy chúng tôi đứng tên cho bài viết này, nhưng phải khẳng định toàn bộ bài viết gần như đều là trích dẫn từ chính lời viết của tiến sĩ Nguyễn Lê Anh. Chúng tôi không phải và không đủ khả năng làm tác giả của bài viết này, chúng tôi chỉ làm công việc thuật lại câu chuyện cổ tích có thật này mà thôi.

GIỚI THIỆU BÀI TOÁN TỐI ƯU HAI LỚP (BI-LEVEL OPTIMISATION PROBLEM)

Võ Nhật Vinh
(Đại học Caen Normandie, Caen, Pháp)

GIỚI THIỆU

Tại giải Penalty Challenge 2019, một nhóm các cầu thủ sẽ thách thức một nhóm các thủ môn đang thi đấu tại V-League 2019 với màn "đấu súng" từ chấm 11m: duy nhất một cú đá với một thủ môn và một cầu thủ mà mỗi nhóm tự chọn. Mỗi thủ môn tại thời điểm hiện tại có một phong độ (xác suất chặn được bóng) khác nhau. Ứng với mỗi cầu thủ, mỗi thủ môn có một xác suất chặn được cú đá 11m của cầu thủ đó. Câu hỏi được đặt ra là: thủ môn nào sẽ được chọn, để xác suất chắc chắn chặn được bóng là cao nhất.

1. Giới thiệu chung

Trong câu chuyện vừa kể phía trên, với mỗi thủ môn, xác suất chắc chắn chặn được bóng ứng với xác suất chặn được bóng thấp nhất khi đối đầu với các cầu thủ. Sư so sánh giữa các xác suất thấp nhất này cho phép chọn lựa thủ môn phù hợp tiêu chí: là người có xác suất thấp nhất cao nhất. Nói cách khác, đây là bài toán "lớn nhất - nhỏ nhất" (Max-Min) bao gồm hai bài toán tối ưu, trong đó lời giải của một bài toán này (xác suất thấp nhất) được dùng như ràng buộc phục vụ cho bài toán còn lại (xác suất thấp nhất cao nhất). Đây là một ví dụ đơn giản của bài toán tối ưu hai lớp (bi-level optimisation problem).

Bài toán tối ưu hai lớp khởi nguồn từ trò chơi Stackelberg [1, 2] nhằm nghiên cứu sự phụ thuộc của các quyết định trong nền kinh tế thị trường [3]. Trong các nghiên cứu đó, quá trình lên kế hoạch kinh tế liên quan đến sự tương tác giữa các tác nhân ở hai cấp độ riêng biệt: vài cá nhân (được gọi chung là *lãnh đạo* - leader) ra chỉ thị cho những tác nhân còn lại (gọi là *người đi theo* - followers) [4]. Các bài toán này bắt đầu được nghiên cứu trong loạt bài của hai tác giả Bracken và McGill [5, 6, 7], nhưng thuật ngữ *"hai lớp"* (bi-level) bắt đầu xuất hiện trong một báo cáo của Candler và Norton [8]. Trong thực tế, bài toán này xuất hiện rộng rãi trong nhiều vấn đề thuộc các lĩnh vực đa ngành. Phần 3 sẽ giới thiệu thêm về bài toán này trong các lĩnh vực thực tế.

Bài toán tối ưu hai lớp xem xét hai biến quyết định x và y cho hai mục tiêu tối ưu phụ thuộc nhau, trong đó $x(y)$ là lời giải tối ưu cho bài toán thứ hai ứng với mỗi y cho trước. Chương trình hai lớp là một bài toán tối ưu mà trong đó, một phần của các ràng buộc được định nghĩa bởi một bài toán tối ưu thứ hai. Theo [3], bài toán tối ưu thứ hai có thể được định nghĩa bởi (1):

$$\min_x\{f(x,y) : g(x,y) \leq 0\} \tag{1}$$

Bài toán này được gọi là *bài toán theo* (follower's problem) hay *bài toán dưới* (lower problem). Gọi $\Phi(y)$ là tập nghiệm của bài toán (1) và $x(y)$ là một phần tử nào đó của tập $\Phi(y)$. Nhiệm vụ của bài toán (2), *bài toán dẫn* (leader's problem) hay *bài toán trên* (upper problem) là xác định lời giải tốt nhất y^* và $x(y^*)$ thỏa mãn ràng buộc $G(x(y),y) \leq 0$ và đem đến giá trị tốt nhất cho $F(x(y),y)$:

$$\min_y\{F(x(y),y) : G(x(y),y) \leq 0, x(y) \in \Phi(y)\} \tag{2}$$

Bài toán tối ưu hai lớp có thể được giải bởi nhiều phương pháp khác nhau bằng cách biến đổi nó thành bài toán tối ưu thông thường (một lớp) ([3], trang 3). Nếu bài toán dưới cho lời giải duy nhất, bài toán hai lớp là ổn định (stable). Tuy nhiên, khi bài toán hai lớp được biến đổi thành bài toán một lớp, nó vẫn có thể được giải trong trường hợp nghiệm của bài toán dưới không là duy nhất.

Trở lại bài toán ở giải Penalty Challenge 2019, biến x và biến y lần lượt biểu diễn cho cầu thủ và thủ môn. Gọi $P(x,y)$ là xác suất chặn được bóng của thủ môn y khi người sút bóng là cầu thủ x. Gọi $Q(y)$ là phong độ hiện tại của thủ môn y.

Bài toán dưới (lower problem) (1) được viết lại như sau:

$$\begin{aligned}
\min_x\{f(x,y) &: g(x,y) \leq 0\} \\
f(x,y) &= P(x,y) && (3)\\
g(x,y) &= 0 && (4)
\end{aligned}$$

Bài toán trên (upper problem) (2) được viết lại như sau:

$$\begin{aligned}
\min_y\{F(x(y),y) &: G(x(y),y) \leq 0,\ x(y) \in \Phi(y)\} \\
F(x(y),y) &= -P(x(y),y) \times Q(y) && (5)\\
G(x(y),y) &= 0 && (6)
\end{aligned}$$

2. Kỹ thuật giải

Bài toán tối ưu hai lớp, trong trường hợp đơn giản nhất, bao gồm hai bài toán tuyến tính cũng là một bài toán với độ khó $NP - Hard$ [9]. Vì vậy, có thể nói rằng bài toán tối ưu hai lớp là một bài toán khó và để giải được nó, chúng ta cần thuật toán có độ phức tạp thuộc lớp NP. Trong bài viết của mình [4], các tác giả đề cập đến khá nhiều kỹ thuật giải cho bài toán tối ưu hai lớp. Tuy nhiên, trong phạm vi bài viết với mục đích chính là giới thiệu bài toán này, kỹ thuật biến đổi bài toán tối ưu hai lớp sang bài toán tối ưu thông thường (một lớp) dựa vào điều kiện Karush-Kuhn-Tucker (KKT) sẽ được trình bày. Ngoài ra, một công cụ giải bài toán tối ưu hai lớp trong Matlab [10] cũng được giới thiệu.

2.1. Kỹ thuật sử dụng điều kiện KKT

Điều kiện KKT [11, 12] (KKT conditions) được dùng để biến đổi bài toán theo thành một điều kiện ràng buộc trong bài toán dẫn, qua đó biến bài toán tối ưu hai lớp thành bài toán tối ưu một lớp.

Bài toán tối ưu hai lớp được viết lại thành:

$$\min_{x,y} F(x,y) \tag{7}$$

Thỏa mãn hệ điều kiện:

$$\begin{aligned} G(x,y) &\leq 0 && (8)\\ g(x,y) &\leq 0 && (9)\\ \lambda &\leq 0 && (10)\\ \lambda^T \times g(x,y) &= 0 && (11)\\ \partial\mathcal{L}(x,y,\lambda) &= 0 && (12) \end{aligned}$$

Trong đó $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda^T \times g(x,y)$. Nếu $\mathcal{L}(x,y,\lambda)$ là một hàm lồi (convex) thì $\partial\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda)$. Trong trường hợp tổng quát, điều kiện KKT là điều kiện đủ nên bảo đảm lời giải là nghiệm của bài toán (nếu có, nhưng không đảm bảo được tính đầy đủ của tập nghiệm).

Ngoài ra, khi bài toán theo không có nghiệm duy nhất, bài toán tối ưu hai lớp trở nên phức tạp hơn với trường hợp lạc quan (optimistic position) và trường hợp bi quan (pessimistic position) cũng như tính toàn cục hay cục bộ của lời giải tối ưu.

2.2. Công cụ YALMIP

Bộ công cụ (toolbox) YALMIP dành cho Matlab [13, 14] đóng vai trò của một giao diện phổ quát (generic interface) nhằm giúp người dùng giải quyết các bài toán tối ưu khác nhau, trong đó có bài toán tối ưu hai lớp một cách dễ dàng hơn. YALMIP cho phép người dùng chỉ đích danh công cụ giải (solver) kèm theo các tùy chọn. Nói cách khác, YALMIP đơn giản hóa việc thực thi (implementation) giải các bài toán tối ưu với *optimize* kèm theo sự chỉ định công cụ giải như *linprog* hay *quadprog*. Các bài toán tối ưu hai lớp đơn giản có thể được giải trực tiếp bằng cách sử dụng *solvebilevel* của YALMIP.

3. Một số áp dụng

Như đề cập ở phía trên, bài toán tối ưu hai lớp xuất hiện rộng rãi trong thực tế ở nhiều lĩnh vực đa ngành. Phần dưới đây giới thiệu hai bài toán thực tế mà bài toán tối ưu hai lớp đã được sử dụng để mô hình hóa chúng.

3.1. Bài toán thu phí cầu đường

Ở nhiều quốc gia, các tuyến giao thông huyết mạch được xây dựng theo hai nhánh song song: nhánh miễn phí và nhánh có thu phí (chất lượng tốt hơn, tốc độ cho phép cao hơn). Người điều khiển phương tiện giao thông có thể chủ động chọn nhánh đường tùy theo nhu cầu của mình. Ở góc độ đơn vị quản lý cầu đường, họ muốn thu thật nhiều tiền. Số tiền họ thu được phụ thuộc vào giá tiền đưa ra và số lượng xe chấp nhận trả số tiền ấy. Ngược lại, ở góc độ người điều khiển xe, mỗi người sẽ cân nhắc lựa chọn đường đi với việc chấp nhận trả mức phí đó hay không: nhanh hơn thuận tiện hơn thế nào, yêu cầu thời gian chuyến đi ra sao, nhu cầu đi nhanh hay chậm của những người ngồi trên xe ...

Ứng với mỗi mức phí được ấn định, bài toán theo liên quan đến chi phí tối thiểu cho mỗi xe, tức là chi phí tốn kém khi sử dụng tuyến đường có thu phí (bao gồm phí cầu đường) hoặc chi phí sử dụng tuyến đường miễn phí. Nghiệm của bài toán theo là câu trả lời cho số lượng xe sử dụng tuyến đường có thu phí ứng với mức phí đã ấn định. Bài toán dẫn sẽ quyết định mức phí được ấn định để tích của mức phí và số lượng xe trả phí là lớn nhất.

3.2. Bài toán giá trong lưới điện thông minh

Khác với lưới điện truyền thống, người sử dụng điện trong lưới điện thông minh (Smart-Grids) có khả năng tùy chỉnh mức sử dụng điện của mình cũng như dễ dàng thay đổi nhà cung cấp.

Trong một dự án liên quan đến việc sử dụng bình ắc-quy trong lưới điện thông minh tại Đại học Kỹ thuật Vienna (TU Wien - Áo), mô hình đơn vị kinh doanh điện (trung gian giữa nhà cung cấp điện và người tiêu dùng) được áp dụng với vai trò thúc đẩy đảm bảo sản lượng tiêu thụ điện theo cam kết. Trong dự án này, chính sách giá linh hoạt theo giờ được ấn định bởi các đơn vị kinh doanh đã được nghiên cứu nhằm định hướng hành vi sử dụng điện của khách hàng. Tương tự bài toán thu phí cầu đường, sự ảnh hưởng qua lại của chính sách giá và hành vi của khách hàng đã được nghiên cứu trong bài toán tối ưu hai lớp [15].

Ở góc độ chi tiết hơn, việc sử dụng năng lượng tái tạo đòi hỏi sự tuân thủ chặt chẽ về công suất tiêu thụ điện (tải) nhằm tránh sự quá tải. Trong khi đó, các hộ gia đình ở Đức đã sử dụng đến 79 TWh điện để đun nước nóng vào năm 2015 [16], bao gồm xấp xỉ 12 TWh cho máy nước nóng gia đình [17]. Mức tiêu thụ điện này chiếm 9.3% lượng điện tiêu thụ của các hộ gia đình và 2.0% tộng lượng tiêu thụ điện của toàn nước Đức. Các con số này cho thấy bài toán sử dụng điện hiệu quả cho máy nước nóng gia đình rất quan trọng. Trường Đại học Kỹ thuật Hamburg (TUHH - Đức) đã thực hiện một nghiên cứu về bài toán này với việc áp dụng bài toán tối ưu hai lớp. Ứng với mỗi mức giá điện cho trước, các hộ gia đình sẽ có chính sách sử dụng máy nước nóng gia đình sao cho hóa đơn điện phải trả là thấp nhất (bài toán theo). Chính sách sử dụng máy nước nóng gia đình của các hộ dân ứng với mỗi mức giá điện sẽ cho ra đường tiêu thụ điện tương ứng - thứ mà người ta mong muốn nó giống với đường tiêu thụ điện định mức (căn cứ vào công suất điện được cung cấp vào các thời điểm). Vì vậy, trong bài toán dẫn, người ta mong muốn tìm ra mức giá điện sao cho sự khác biệt giữa đường tiêu thụ điện (ứng với mức giá) và đường tiêu thụ điện định mức là nhỏ nhất [18].

4. Kết luận

Bài toán tối ưu hai lớp (bi-level optimisation problem) là một bài toán tối ưu trong đó có sự phụ thuộc kiểu dẫn-theo của hai biến quyết định. Bài toán này là một loại bài toán khó yêu cầu thuật toán với độ phức tạp thuộc lớp NP để giải. Cách thường sử dụng để giải bài toán này là cố gắng biến đổi bài toán gốc thành bài toán tối ưu thông thường một lớp. Có nhiều kỹ thuật để giải nhưng trong bài viết này, kỹ thuật sử dụng điều kiện Karush-Kuhn-Tucker (KKT) đã được giới thiệu. Ngoài ra, công cụ YALMIP trên môi trường Matlab cũng được giới thiệu để giải các bài toán tối ưu, trong đó có bài toán tối ưu hai lớp.

Bài toán tối ưu hai lớp xuất hiện rộng rãi trong thực tế, đặc biệt trong các lĩnh vực liên ngành. Trong bài viết này, các vị dụ liên quan tới bóng đá hay tính phí cầu đường cũng như điều chỉnh giá trong lưới điện thông minh (Smart-Grids) đã được giới thiệu và mô hình hóa bằng cách sử dụng bài toán tối ưu hai lớp. Bài toán này vẫn đang thu hút được nhiều nhà nghiên cứu nhằm sử dụng chúng để mô hình hóa các bài toán thực tế, cũng như nhằm tìm cách để giải chúng một cách hiệu quả hơn.

Tài liệu

[1] H. Von Stackelberg, *The Theory of the Market Economy*. London: Oxford University Press, 1952.

[2] H. Von Stackelberg, *Market Structure and Equilibrium*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011.

[3] S. Dempe, *Nonconvex Optimization and Its Applications - Foundations of Bilevel Programming*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2002.

[4] B. Colson, P. Marcotte, and G. Savard, "An overview of bilevel optimization," *Annals of Operations Research*, vol. 153, no. 1, pp. 235–256, 2007.

[5] J. Bracken and J. T. McGill, "Mathematical Programs with Optimization Problems in the Constraints," *Operations Research*, vol. 21, pp. 37–44, feb 1973.

[6] J. Bracken and J. T. McGill, "Defense Applications of Mathematical Programs with Optimization Problems in the Constraints," *Operations Research*, vol. 22, pp. 1086–1096, oct 1974.

[7] J. Bracken and J. T. McGill, "Production and marketing decisions with multiple objectives in a competitive environment," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 24, pp. 449–458, mar 1978.

[8] W. Candler and R. Norton, "Multilevel programming," tech. rep., World Bank Development Research Center, Washington D.C, 1977.

[9] R. G. Jeroslow, "The polynomial hierarchy and a simple model for competitive analysis," *Mathematical Programming*, vol. 32, pp. 146–164, jun 1985.

[10] MathWorks, "Matlab," 2016.

[11] W. Karush, *Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints*. Msc thesis, University of Chicago, 1939.

[12] H. W. Kuhn and A. W. Tucker, “Nonlinear programming,” in *Proceedings of 2nd Berkeley Symposium*, (Berkeley, CA), pp. 481–492, University of California Press, 1951.

[13] J. Löfberg, “YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB,” in *Proceedings of the CACSD Conference*, (Taipei, Taiwan), 2004.

[14] J. Löfberg, “YALMIP,” 2017.

[15] R. M. Kovacevic, N. V. Vo, and J. Haunschmied, “Bilevel approaches for distributed DSM using internal individualized prices,” in *2017 IEEE International Conference on Smart Grid Communications (SmartGridComm)*, pp. 521–526, IEEE, oct 2017.

[16] Destatis, “Destatis—statistisches bundesamt,” 2017.

[17] G. Stryi-Hipp, “Grosol—studie zu großen solarwärmean- lagen,” tech. rep., Bundesverband-Solarwirtschaft e.V, Berlin, 2007.

[18] T. Lübkert, M. Venzke, N. V. Vo, and V. Turau, “Understanding price functions to control domestic electric water heaters for demand response,” *Computer Science - Research and Development*, vol. 33, pp. 81–92, feb 2018.

Tính Chất Phi Archimedean Của Định Giá P-Adic

Nguyễn Song Minh

Giới thiệu

Khái niệm về định giá p-adic (hay còn gọi là số mũ đúng), là một khái niệm quan trọng trong Số Học vì nó giúp chuyển hóa các vấn đề Số học sang ngôn ngữ Giải Tích để tìm cách giải quyết. Bài viết này, có nội dung chính bàn đến một tính chất căn bản của định giá p-adic, đó là tính phi Archimedean. Phần đầu bài viết, trình bày lại những khái niệm, quy tắc và tính chất căn bản. Phần còn lại, là các bài toán áp dụng.

Các quy ước và ký hiệu

Trong bài viết này, chúng ta sử dụng các ký hiệu với ý nghĩa được quy ước thống nhất như sau:

- $\gcd(a, b)$: Ước số chung lớn nhất của $a, b \in \mathbb{Z}$.
- $m \nmid a$: Số nguyên a không chia hết cho số nguyên $m \neq 0$.
- $\lfloor x \rfloor$: Số nguyên lớn nhất không vượt quá số thực x (phần nguyên của x).
- $\varphi(m)$: Phi hàm Euler.
- $v_p(x)$: Hàm định giá p-adic.
- $\mathbb{P}$: Tập hợp chứa tất cả các số nguyên tố.

1. Mở đầu

Với hai số nguyên dương a và m, theo định lý cơ bản của Số học, ta luôn có biểu diễn sau đây

$$a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(a)}, \quad m = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(m)}.$$

Ở đó, các bộ số tự nhiên $\left(v_p(a)\right)_{p \in \mathbb{P}}$ và $\left(v_p(m)\right)_{p \in \mathbb{P}}$ xác định duy nhất, theo nghĩa nếu $a = m$ thì điều kiện cần và đủ là $v_p(a) = v_p(m),\ \forall\, p \in \mathbb{P}$.

Việc kiểm tra quan hệ $m \mid a$, giờ đây quy về xem xét tính đúng sai của đánh giá

$$v_p(a) \geqslant v_p(m), \ \forall\ p \in \mathbb{P}.$$

Việc xem xét quan hệ $a \equiv b \pmod m$ với $a > b$ và $a, b \in \mathbb{N}^*$, quy về kiểm tra bất đẳng thức

$$v_p(a-b) \geqslant v_p(m), \ \forall\ p \in \mathbb{P}.$$

Như vậy, nhiều định tính cơ bản trong Số học sẽ được kiểm soát qua các đánh giá định lượng với v_p. Lý do đó, cho ta thấy là rất cần quan tâm đến định nghĩa sau.

Định nghĩa 1 (Định giá p-adic trên $\mathbb{N}^*$). *Nếu số nguyên dương m có phân tích ra thừa số nguyên tố ở dạng*

$$m = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(m)},$$

trong đó $v_p(m) \in \mathbb{N}$, thì với mỗi một số nguyên tố p cố định $v_p(m)$ được gọi là định giá p-adic của m.

Ví dụ $v_2(2016) = 5$, $v_3(2016) = 2$ và $v_7(2016) = 1$ còn

$$v_{11}(2016) = v_{17}(2016) = v_{2017}(2016) = 0.$$

Với số nguyên tố p và số nguyên dương m cho trước, nếu ta đặt

$$\prod_{q \in \mathbb{P}\setminus\{p\}} q^{v_q(m)} = m', \ v_p(m) = k,$$

thì $p \nmid m'$ và có được $m = p^k m'$.

Như vậy, về bản chất thì $k = v_p(m)$ là số lớn nhất trong các số tự nhiên t thỏa mãn $p^t \mid m$. Vì $p^t \mid 0$ với t lớn thỏa ý, nên ta mở rộng được khái niệm định giá p-adic lên $\mathbb{N}$ với quy ước

$$v_p(0) = +\infty, \ \forall\ p \in \mathbb{P}.$$

Nếu quy ước thêm rằng $v_p(a) = v_p(-a)$ với $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, ta mở rộng được khái niệm định giá p-adic trên $\mathbb{Z}$, vẫn với bản chất $v_p(m) = k$, nếu $m = p^k m'$ với $k \in \mathbb{N}$, $m' \in \mathbb{Z}$ và $p \nmid m'$.

Bây giờ, với một số hữu tỷ $r \neq 0$ bất kỳ, ta thấy luôn tồn tại duy nhất số nguyên k và $a, b \in \mathbb{Z}^*$ thỏa $p \nmid ab$ và $r = p^k \frac{a}{b}$. Nhờ vậy, ta mở rộng được khái niệm lên $\mathbb{Q}$, như sau đây.

Định nghĩa 2 (Định giá p-adic trên $\mathbb{Q}$). *Cho trước một số nguyên tố p và hữu tỷ r.*

i. Nếu $r = 0$, thì định giá $p-adic$ của r là $v_p(0) = +\infty$.

ii. Nếu $r \neq 0$ thì định giá $p-adic$ của r ký hiệu là $v_p(r)$ và ta có $v_p(r) = k$ khi và chỉ khi $r = p^k \frac{a}{b}$, trong đó, $k \in \mathbb{Z}$ và $a, b \in \mathbb{Z}^*$ với $p \nmid ab$.

Ở một góc nhìn khác, nếu số hữu tỷ r viết được dưới dạng phân số là $r = \frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}$ thì ta sẽ có được

$$v_p(r) = v_p(m) - v_p(n).$$

2. Các tính chất cơ bản

Với p là một số nguyên tố, $x,\ y$ là các số hữu tỷ bất kỳ và $a,\ b,\ m$ là các số nguyên với $m \neq 0$. Khi đó, chúng ta có các tính chất và quy tắc cơ bản như sau.

1. $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$ và $v_p\left(x^n\right) = nv_p(x)$ với $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $v_p\left(\frac{x}{y}\right) = v_p\left(x\right) - v_p\left(y\right),\ v_p(1) = 0$.
3. $v_p\left(\gcd(a,\ b)\right) = \min\left\{v_p(a),\ v_p(b)\right\}$.
4. $v_p\left(\mathrm{lcm}(a,\ b)\right) = \max\left\{v_p(a),\ v_p(b)\right\}$.
5. $x \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $v_p(x) \geqslant 0,\ \forall p \in \mathbb{P}$.
6. $a \mid b$ khi và chỉ khi $v_p(a) \leqslant v_p(b),\ \forall\ p \in \mathbb{P}$.
7. $a \equiv b \pmod{m}$ khi và chỉ khi $v_p(a-b) \geqslant v_p(m),\ \forall\ p \in \mathbb{P}$.
8. $v_p(x+y) \geqslant \min\left\{v_p(x),\ v_p(y)\right\}$ và khi $v_p(x) < v_p(y)$ thì $v_p(x+y) = v_p(x)$.

Các quy tắc và tính chất này đều chứng minh rất đơn giản, qua việc trực tiếp sử dụng định nghĩa về định giá p-adic trên $\mathbb{Q}$. Trong các tính chất đã nêu, bốn tính chất đầu tiên cho ta các quy tắc rất tiện lợi để tính toán định giá. Ba tính chất kế tiếp, thực chất là các điều kiện tương đương, chúng giúp ta chuyển hóa các định tính Số học căn bản thành định lượng theo v_p. Riêng tính chất cuối cùng, còn được gọi là tính chất phi Archimedean, nhờ tính chất này ta hình thành được chuẩn p-adic trên $\mathbb{Q}$ bởi công thức sau đây $\|x\|_p = p^{-v_p(x)}$. Khi ta có chuẩn p-adic, ta có được các không gian siêu metric với metric $d(x,\ y) = \|x-y\|_p$. Các không gian siêu metric, có một tính chất thú vị là một hình cầu mở (hoặc hình cầu đóng) vừa là một tập mở vừa là một tập đóng và hai hình cầu cứ có điểm chung thì sẽ có một hình cầu chứa hình cầu còn lại. Những tư tưởng hiện đại nhưng rất căn bản này, là nền tảng để chúng ta soi xét nhiều bài toán Olympiad.

3. Một số bài toán áp dụng

Bài toán 1. *Cho trước số nguyên tố p, và n (với $n > 1$) phân số tối giản $\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \ldots,\ \frac{a_n}{b_n}$. Biết rằng tổng n phân số đó là một số nguyên, đồng thời tồn tại số nguyên dương m và chỉ số j thỏa $p^m \mid b_j$. Chứng minh rằng, tồn tại chỉ số $k \neq j$ sao cho $p^m \mid b_k$.*

Lời giải. Đặt $\frac{a_i}{b_i} = r_i$ và giả sử không tồn tại chỉ số $k \neq j$ sao cho $p^m \mid b_k$, khi đó

$$v_p\left(r_j\right) \leqslant -m < v_p\left(r_k\right),\ \forall\, k \neq j.$$

Từ đây theo tính chất phi Archimedean, ta có

$$v_p\left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} r_i\right) = v_p\left(r_j\right) \leqslant -m < 0.$$

Vậy không thể xảy đến việc $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} r_i \in \mathbb{Z}$, trái với giả thiết ban đầu.

Bài toán 2. *Cho trước các số nguyên dương a và n lớn hơn 1, giả sử rằng với mỗi số nguyên dương m đều tồn tại một số nguyên dương r_m sao cho*

$$a \equiv r_m^n \pmod{m}.$$

Chứng minh rằng, tồn tại số nguyên dương α sao cho $a = \alpha^n$.

Lời giải. Từ giả thiết bài toán, ta thấy rằng sẽ tồn tại $r \in \mathbb{N}^*$ sao cho $a \equiv r^n \pmod{a^2}$. Như vậy với mọi số nguyên tố p, ta sẽ có

$$2v_p(a) = v_p\left(a^2\right) \leqslant v_p(a - r^n).$$

Ta xét hai trường hợp sau

1. Nếu $v_p(a) \neq v_p(r^n)$, khi đó theo tính chất phi Archimedean ta có

$$2v_p(a) \leqslant v_p(a - r^n) \leqslant \min\left\{v_p(a), v_p(r^n)\right\} \leqslant v_p(a).$$

   Điều đó dẫn đến là $v_p(a) = 0$, để có $n \mid v_p(a)$.

2. Nếu $v_p(a) = v_p(r^n)$, thế thì $v_p(a) = v_p(r^n) = nv_p(r)$, để lại có $n \mid v_p(a)$.

Tóm lại, ta luôn có $n \mid v_p(a)$ với mọi số nguyên tố p, vì thế $\alpha = \prod\limits_{p\in\mathbb{P}} p^{\frac{1}{n}v_p(a)} \in \mathbb{N}^*$ và ta có điều cần chứng minh từ đẳng thức

$$a = \left(\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\frac{1}{n}v_p(a)}\right)^n.$$

Chứng minh hoàn tất. □

Bài toán 3. *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số nguyên thỏa mãn*

$$2^n \mid P(3^n), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lời giải. Cố định mỗi số nguyên dương k, khi đó do $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ nên với $a, b \in \mathbb{Z}$ ta có

$$v_2(a - b) \leqslant v_2(P(a) - P(b)).$$

Kéo theo đánh giá sau đây với mọi số nguyên dương n

$$v_2(3^{2^n} - 1) = v_2(3^{2^n+k} - 3^k) \leqslant v_2(P(3^{2^n+k}) - P(3^k)).$$

Theo định lý Euler thì $2^n \mid \left(3^{2^n} - 1\right)$, cho nên có

$$n \leqslant v_2(3^{2^n} - 1) \leqslant v_2(P(3^{2^n+k}) - P(3^k)), \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Bây giờ nếu $P(3^k) \neq 0$, ta chọn $n > c = v_2(P(3^k))$, thế thì theo bất đẳng thức Bernoulli ta có $1 + n \leqslant 2^n$ và kết hợp giả thiết mà suy ra

$$c < 1 + n < 1 + n + k < 2^n + k \leqslant v_2(P(3^{2^n+k})).$$

Theo tính chất phi Archimedean và đánh giá (1), ta có mâu thuẫn là

$$n \leqslant v_2(P(3^{2^n+k}) - P(3^k)) = v_2(P(3^k)) = c.$$

Tổng kết các suy luận trên cho ta thấy $P\left(3^k\right) = 0$ với mọi số nguyên dương k, từ đó đa thức $P(x)$ có vô số nghiệm nên nó phải là đa thức 0. □

Bài toán 4. *Xét các số hữu tỉ dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn $x_i + \frac{1}{p_i}$ là các số nguyên dương với $p_i = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_i}$, $\forall i = \overline{1, n}$.*

i. *Chứng minh rằng $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$.*

ii. *Có bao nhiêu bộ số $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thỏa mãn đề bài.*

Lời giải. Đặt $p_1 p_2 \cdots p_n = a$, từ giả thiết ta có đánh giá sau với mọi số nguyên tố p

$$0 \leqslant v_p\left(x_i + \frac{1}{p_i}\right) = v_p\left(x_i + \frac{x_i}{a}\right) = v_p(x_i) + v_p(1 + a) - v_p(a). \tag{2}$$

Lấy tổng lại với lưu ý là $v_p(a) = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} v_p(x_i)$, ta có

$$0 \leqslant n v_p(1 + a) - (n - 1) v_p(a). \tag{3}$$

i. Nếu $v_p(a) > 0$, theo tính chất phi Archimedean ta có $v_p(1 + a) = v_p(1) = 0$. Vậy nên từ (3), có mâu thuẫn với tình huống đang xét là $0 \leqslant -(n-1) v_p(a)$.

   Còn nếu $v_p(a) < 0$, theo tính chất phi Archimedean lại có $v_p(1 + a) = v_p(a)$. Và lại từ (3), có mâu thuẫn với tình huống đang xét là

   $$0 \leqslant n v_p(1 + a) - (n - 1) v_p(a) = v_p(a).$$

   Tóm lại là luôn phải có $v_p(a) = 0$ với mọi $p \in \mathbb{P}$, kết hợp $a > 0$ ta có được $a = 1$.

ii. Từ $a = 1$, với mỗi số nguyên tố p lẻ và mọi chỉ số i theo (2) có

   $$0 \leqslant v_p(x_i), \quad 0 \leqslant 1 + v_p(x_i).$$

   Vậy, các số hữu tỷ đó có dạng $x_i = 2^{-1+k_i}$ với $k_i \in \mathbb{N}$ và từ $a = 1$ ta có ràng buộc

   $$k_1 + k_2 + \cdots + k_n = n.$$

   Mỗi bộ $(k) = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ sẽ tương ứng với một bộ số hữu tỷ dương thỏa yêu cầu, vì thế theo bài toán chia kẹo Euler ta có số bộ cần tìm là $N = \binom{2n-1}{n-1}$.

Lời giải hoàn tất. □

Bài toán 5. *Cho $a_1, a_2, \ldots$ là một dãy vô hạn các số nguyên dương. Giả sử tồn tại số nguyên dương N sao cho*

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \in \mathbb{Z}, \ \forall n \geqslant N.$$

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương M sao cho $a_{m+1} = a_m, \ \forall m \geqslant M$.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có ngay $\frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}-a_n}{a_1} \in \mathbb{Z}, \ \forall n \geqslant N$. Vì thế, với mọi số nguyên tố p và số nguyên dương $n \geqslant N$ ta có

$$v_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}\right) \geqslant 0, \ \forall n \geqslant N. \tag{4}$$

Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho $v_p(a_n) < v_p(a_{n+1})$, với $n \geqslant N$. Do $v_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) < 0$ nên từ tính chất của định giá phi Archimedean và (4) ta có

$$v_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = v_p\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}\right) < 0.$$

Từ đó có

$$0 > v_p(a_n) - v_p(a_{n+1}) = v_p(a_{n+1}-a_n) - v_p(a_1) = v_p(a_n) - v_p(a_1).$$

Tức là

$$v_p(a_n) < v_p(a_{n+1}) = v_p(a_1).$$

Nếu p là số nguyên tố thỏa mãn $v_p(a_n) > v_p(a_{n+1})$, với $n \geqslant N$. Từ (4) và tính chất phi Archimedean có

$$0 \leqslant v_p\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}\right) = v_p(a_{n+1}-a_n) - v_p(a_1) = v_p(a_{n+1}) - v_p(a_1).$$

Như vậy lại có đánh giá

$$v_p(a_1) \leqslant v_p(a_{n+1}) < v_p(a_n).$$

Tóm lại là với $n \geqslant N$ thì nếu $v_p(a_n) < v_p(a_{n+1})$ sẽ có

$$v_p(a_n) < v_p(a_{n+1}) = v_p(a_1). \tag{5}$$

Còn nếu $v_p(a_n) > v_p(a_{n+1})$ và $n \geqslant N$, thì sẽ có

$$v_p(a_1) \leqslant v_p(a_{n+1}) < v_p(a_n). \tag{6}$$

Với mỗi số nguyên tố p, ta xét hai trường hợp

1. Nếu tồn tại $k \geqslant N$ sao cho $v_p(a_k) < v_p(a_{k+1})$ thế thì theo (5) có $v_p(a_{k+1}) = v_p(a_1)$. Từ đây $v_p(a_{k+2}) = v_p(a_1)$, bởi nếu $v_p(a_{k+2}) > v_p(a_1) = v_p(a_{k+1})$ sẽ mâu thuẫn với (5) còn nếu $v_p(a_{k+2}) < v_p(a_1) = v_p(a_{k+1})$ lại mâu thuẫn với (6). Truy toán sẽ cho ta

$$v_p(a_n) = v_p(a_1), \quad \forall n \geqslant k+1.$$

2. Nếu không tồn tại $k \geqslant N$ sao cho $v_p(a_k) < v_p(a_{k+1})$ thì có nghĩa là

$$v_p(a_n) \geqslant v_p(a_{n+1}), \ \forall n \geqslant N.$$

Những suy luận trên cho thấy với số nguyên tố p bất kỳ, sẽ tồn tại N_p để có

$$v_p(a_{n+1}) \leqslant v_p(a_n), \ \forall n \geqslant N_p.$$

Nhưng do giá trị của $v_p(a_n)$ là các số tự nhiên, nên việc không xảy ra dấu bằng chỉ ở hữu hạn chỉ số. Từ đó, với mỗi số nguyên tố p, đều tồn tại M_p đủ lớn sao cho

$$v_p(a_{n+1}) = v_p(a_n), \ \forall n \geqslant M_p.$$

Cũng từ (5) và (6) ta lại thấy ngay là với mọi số nguyên tố p thì

$$v_p(a_{n+1}) \leqslant \max\left\{v_p(a_n), v_p(a_1)\right\} \leqslant \max\left\{v_p(a_N), v_p(a_1)\right\}, \ \forall n \geqslant N.$$

Từ đó thấy dãy $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ chỉ có hữu hạn ước nguyên tố. Chọn $M = \max\left\{M_p\right\}$ với p chạy khắp tập các ước nguyên tố của $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, ta có điều cần chứng minh. □

Bài toán 6. *Chứng minh rằng, tồn tại vô số các bộ ba số hữu tỷ (a, b, c) thỏa mãn*

$$a + b + c = abc = 6.$$

Lời giải. Giả sử bộ ba số hữu tỷ (a, b, c) thỏa yêu cầu, khi đó có $c \neq 0$ đặt $c = -\frac{6}{m}$ và có

$$a + b = 6 + \frac{6}{m}, \quad ab = -m \neq 0.$$

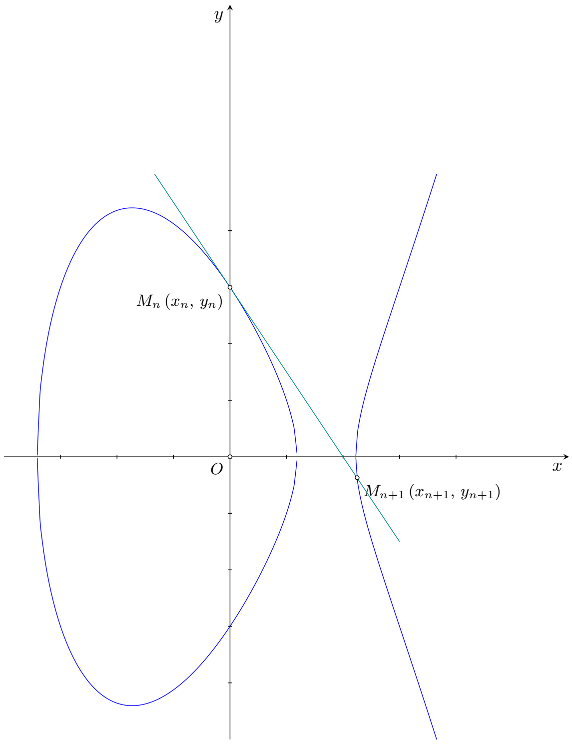
Vậy nên theo Viettè, a, b là nghiệm của đa thức $P(x) = mx^2 - (6m + 6)x - m^2$, đa thức này cần có hai nghiệm hữu tỷ cho nên phải tồn tại $r \in \mathbb{Q}$ sao cho

$$\Delta'_P = 9(m + 1)^2 + m^3 = r^2.$$

Đến đây thế $m + 3 = x$, ta quy bài toán về đi chứng minh có vô số $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ thỏa

$$x^3 - 9x + 9 = y^2.$$

Xét đường cong elliptic có phương trình $(E): \ y^2 = x^3 - 9x + 9$, ta cần chứng tỏ trên (E) có vô số điểm hữu tỷ. Trước tiên, ta thấy $M_0(0, 3)$ là một điểm như thế.



Giả sử $M_n\,(x_n,\ y_n)$ là một điểm hữu tỷ trên (E), khi đó tiếp tuyến tại M_n có phương trình là

$$(T_n):\ y = \left(\frac{3x_n^2 - 9}{2y_n}\right)(x - x_n) + y_n.$$

Hoành độ giao điểm của tiếp tuyến đó với (E) là nghiệm phương trình

$$\left[\left(\frac{3x_n^2 - 9}{2y_n}\right)(x - x_n) + y_n\right]^2 = x^3 - 9x + 9.$$

Sau biến đổi, phương trình trở thành

$$(x - x_n)^2\left[x - \left(\frac{3x_n^2 - 9}{2y_n}\right)^2 + 2x_n\right] = 0.$$

Vì thế, tiếp tuyến và đường cong sẽ còn có một điểm chung là

$$M_{n+1}\,(x_{n+1},\ y_{n+1}) = \left(\frac{\left(3x_n^2 - 9\right)^2}{4y_n^2} - 2x_n,\ \left(\frac{3x_n^2 - 9}{2y_n}\right)(x_{n+1} - x_n) + y_n\right).$$

Do $y_n^2 = x_n^3 - 9x_n + 9$, nên có $x_{n+1} = f\,(x_n)$ với

$$f\,(x) = \frac{\left(3x^2 - 9\right)^2}{4\left(x^3 - 9x + 9\right)} - 2x = \frac{x^4 + 18x^2 - 72x + 81}{4\left(x^3 - 9x + 9\right)}.$$

Ta có $x_1 = f(0) = \frac{9}{4}$, nên $v_2(x_1) = -2$. Bây giờ giả sử $x \in \mathbb{Q}$ và $v_2(x) \leqslant -2$ khi đó rõ ràng có các đánh giá sau

$$\begin{aligned}
4v_2(x) &= v_2\left(x^4\right) < 1 + 2v_2(x) = v_2\left(18x^2\right), \\
4v_2(x) &= v_2\left(x^4\right) < 3 + v_2(x) = v_2(72x), \\
4v_2(x) &= v_2\left(x^4\right) < 0 = v_2(81), \\
3v_2(x) &= v_2\left(x^3\right) < v_2(x) = v_2(9x), \\
3v_2(x) &= v_2\left(x^3\right) < 0 = v_2(9).
\end{aligned}$$

Từ đó theo tính chất phi Archimedean ta có

$$\begin{aligned}
v_2(f(x)) &= v_2\left(\frac{x^4 + 18x^2 - 72x + 81}{4\left(x^3 - 9x + 9\right)}\right) \\
&= v_2\left(x^4 + 18x^2 - 72x + 81\right) - v_2\left(x^3 - 9x + 9\right) - 2 \\
&= v_2\left(x^4\right) - v_2\left(x^3\right) - 2 \\
&= v_2(x) - 2.
\end{aligned}$$

Như vậy, với $x_1 = \frac{9}{4}$ và $x_{n+1} = f(x_n)$ với $n \in \mathbb{N}$, ta có được

$$-2 = v_2(x_1) > v_2(x_2) > \cdots > v_2(x_n) > \cdots$$

Vậy nên các điểm M_n là đôi một phân biệt, và ta có điều phải chứng minh. $\square$

4. Bài tập

Sau đây là các bài toán, để tự luyện tập thêm.

Bài tập 1. Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $\gcd(a, b, c) = 1$ và

$$a \mid bc, \; b \mid ca, \; c \mid ab.$$

Chứng minh rằng $\frac{bc}{a}$ là một số chính phương.

Bài tập 2. Cho các số nguyên dương a, b, m lớn hơn 1 và số nguyên tố p thỏa mãn

$$p^m = ab + 1.$$

Chứng minh rằng $p(a-1)(b+1)$ không là số chính phương.

Bài tập 3. Cho số nguyên dương a lớn hơn 1, tìm tất cả các số nguyên tố p và q thỏa mãn

$$pq \mid \left(a^{p-q} + 1\right).$$

Bài tập 4. Cho các số hữu tỷ a và b phân biệt, giả sử tồn tại vô số số nguyên dương n thỏa mãn

$$a^n - b^n \in \mathbb{Z}.$$

Chứng minh rằng a và b đều là các số nguyên.

Bài tập 5. Tìm các số nguyên dương a, b, c sao cho $ab - c$, $bc - a$ và $ca - b$ đều là các số nguyên dương không có ước nguyên tố lẻ.

Bài tập 6. Cho $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ là một hàm số khác hàm hằng thỏa mãn điều kiện là với các số nguyên phân biệt a và b bất kỳ thì

$$(a - b) \mid (f(a) - f(b)).$$

Chứng minh rằng tồn tại một tập vô hạn S chứa các số nguyên tố, sao cho với mỗi $p \in S$ đều tồn tại $m \in \mathbb{Z}$ sao cho $p \mid f(m)$.

Bài tập 7. Với mỗi số nguyên dương n, ký hiệu

$$f(n) = \left(\frac{2^{v_2(n)}}{n}\right)^{v_2\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Chứng minh rằng nếu m là một số nguyên dương, và a là số nguyên dương lẻ không vượt quá m bất kỳ thì

$$a \mid \prod_{1 \leqslant k \leqslant m} f(k).$$

Bài tập 8. Cho trước các số nguyên dương a, b nguyên tố cùng nhau, dãy $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ xác định bởi $x_1 = a$, $x_2 = b$ và

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2 + x_n^2}{x_{n+1} + x_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng với $x_n \notin \mathbb{Z}$, $\forall n \geqslant 3$.

Bài tập 9. Với mỗi số thực x, ta ký hiệu $\|x\|$ là khoảng cách từ x đến số nguyên gần x nhất. Chứng minh rằng với các số nguyên dương a, b luôn tồn tại số nguyên tố p và số nguyên dương k thoả mãn

$$\left\|\frac{a}{p^k}\right\| + \left\|\frac{b}{p^k}\right\| + \left\|\frac{a+b}{p^k}\right\| = 1.$$

Bài tập 10. Chứng minh rằng với n là số nguyên dương thì

$$\operatorname{lcm}\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}\right) = \frac{\operatorname{lcm}(1, 2, \ldots, n, n+1)}{n+1}.$$

Bài tập 11. Cho số nguyên dương $n \geqslant 2$, với mỗi $s \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ và $s \neq \emptyset$ ta ký hiệu $\pi(s) = \prod_{e \in s} e$. Chứng minh rằng với k là số nguyên dương nhỏ hơn n thì

$$\prod_{j=k}^{n} \operatorname{lcm}\left(1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor\right) = \gcd\left(\pi(s) : |s| = n - k\right).$$

Tài liệu

[1] www.mathscope.org

[2] www.artofproblemsolving.com

[3] www.mathoverflow.net

[4] www.math.stackexchange.com

[5] J. Dieudonne, Cơ sở giải tích hiện đại.

PHƯƠNG PHÁP THÊM BIẾN TRONG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Võ Quốc Bá Cẩn
(Archimedes Academy)

GIỚI THIỆU

Đôi khi, trong quá trình xử lý các bài toán phương trình hàm, ta có thể thêm một vài biến phụ vào để phép thế trở nên linh hoạt hơn, từ đó phát hiện được nhiều tính chất thú vị của hàm giúp ích cho việc giải toán. Bài viết này, chúng tôi xin giới thiệu cùng bạn đọc một số bài toán được xử lý bằng phương pháp này.

Bài toán 1. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\big(y+f(x)\big)=f(x)f(y)+f\big(f(x)\big)+f(y)-xy,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Lời giải. Thay y bởi $y+f(z)$ vào phương trình hàm đã cho và khai triển vế phải, ta được

$$\begin{aligned}f\big(y+f(x)+f(z)\big)&=\big[f(x)+1\big]f\big(y+f(z)\big)+f\big(f(x)\big)-x\big[y+f(z)\big]\\&=\big[f(x)+1\big]\left\{\big[f(z)+1\big]f(y)+f\big(f(z)\big)-yz\right\}+f\big(f(x)\big)-xy-xf(z)\\&=A+f(x)f\big(f(z)\big)-yzf(x)-xf(z),\end{aligned}$$

trong đó $A=\big[f(x)+1\big]\big[f(z)+1\big]f(y)+f\big(f(x)\big)+f\big(f(z)\big)-y(x+z)$. Đảo vị trí của x và z trong phương trình trên với chú ý giá trị của các biểu thức $f\big(y+f(x)+f(z)\big)$ và A vẫn không đổi, ta được

$$f(x)f\big(f(z)\big)-yzf(x)-xf(z)=f(z)\big(f(x)\big)-yxf(z)-zf(x).$$

Xem hai vế ở phương trình là hai đa thức ẩn y. Hai đa thức này có giá trị bằng nhau với mọi y nên đồng nhất với nhau, từ đó ta có

$$zf(x)=xf(z),\quad \forall x,z\in\mathbb{R}.$$

Suy ra $f(x)=kx$ (k là hằng số thực nào đó) với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tiếp theo, ta sẽ tìm giá trị của k. Thay $f(x)=kx$ trở lại phương trình hàm đã cho, ta được

$$k(y+kx)=k^2xy+k^2x+ky-xy,\quad \forall x,y\in\mathbb{R},$$

hay

$$xy(k^2-1)=0,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Do đó $k=\pm1$. Vậy có hai hàm số thỏa mãn yêu cầu là $f(x)=x$ và $f(x)=-x$. $\square$

Bài toán 2 (IMO Shortlist, 2007). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f\big(x+f(y)\big)=f(x+y)+f(y),\quad \forall x,y>0.$$

Lời giải. Thay y bởi $y+f(z)$ vào phương trình đã cho rồi khai triển hai vế, ta được

$$\begin{aligned}f\left(x+f\big(y+f(z)\big)\right)&=f\big(x+y+f(z)\big)+f\big(y+f(z)\big)\\&=f(x+y+z)+f(y+z)+2f(z).\end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned}f\left(x+f\big(y+f(z)\big)\right)&=f\big(x+f(y+z)+f(z)\big)\\&=f\big(x+z+f(y+z)\big)+f(z)\\&=f\big(x+y+2z)+f(y+z)+f(z).\end{aligned}$$

Đối chiếu hai phép khai triển trên, ta được

$$f(x+y+2z)=f(x+y+z)+f(z),\quad \forall x,y,z>0.$$

Một cách tương đương, ta có

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\quad \forall x>y>0.$$

Từ đây, với mọi $x,y>0$ và $z>x+y$, ta đều có

$$f(z+x+y)=f(z)+f(x+y),$$

và

$$f(z+x+y)=f\big((z+x)+y\big)=f(z+x)+f(y)=f(z)+f(x)+f(y).$$

Do đó

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\quad \forall x,y>0.$$

Như thế, f là hàm cộng tính từ $\mathbb{R}^+$ vào $\mathbb{R}^+$. Suy ra $f(x)=kx$ (k là hằng số dương nào đó) với mọi $x>0$. Thay trở lại phương trình đã cho, ta được

$$k\big(x+ky\big)=k(x+y)+ky,\quad \forall x,y>0,$$

hay

$$k(k-2)y=0,\quad \forall y>0.$$

Do đó $k=2$. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu là $f(x)=2x$. □

Bài toán 3 (IMO Shortlist, 2011). *Tìm tất cả các cặp hàm số $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$g\big(f(x+y)\big)=f(x)+(2x+y)g(y),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Lời giải. Đặt $f(0)=b$ và $g(0)=a$. Từ phương trình hàm đã cho, dễ thấy

$$g\big(f(x)\big)=f(x)+2ax,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

và
$$g\big(f(y)\big) = b + yg(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$
Từ đó suy ra
$$f(x) = xg(x) + b - 2ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Bây giờ, thay x bởi $x+z$ vào phương trình hàm đã cho, ta được
$$\begin{aligned} g\big(f(x+y+z)\big) &= f(x+z) + (2x+2z+y)g(y) \\ &= (x+z)g(x+z) + b - 2a(x+z) + (2x+2z+y)g(y). \end{aligned}$$
Thay y bởi $y+z$ vào phương trình hàm đã cho, ta cũng có
$$\begin{aligned} g\big(f(x+y+z)\big) &= f(x) + (2x+y+z)g(y+z) \\ &= xg(x) + b - 2ax + (2x+y+z)g(y+z). \end{aligned}$$
Đối chiếu hai kết quả trên, ta được
$$xg(x) + b - 2ax + (2x+y+z)g(y+z) = (x+z)g(x+z) + b - 2a(x+z) + (2x+2z+y)g(y).$$
Trong phương trình này, cho $x = y$ và rút gọn thành
$$xg(x+z) = (x+z)g(x) - az, \quad \forall x, z \in \mathbb{R}.$$
Trong phương trình này, thay $x = 1$ và $z = x-1$, ta được
$$g(x) = xg(1) - a(x-1) = kx + a, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
trong đó $k = g(1) - a$. Suy ra $f(x) = xg(x) + b - 2ax = kx^2 - ax + b$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay trở lại phương trình đã cho, ta được
$$k\big[k(x+y)^2 - a(x+y) + b\big] + a = kx^2 - ax + b + (2x+y)(ky+b), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
So sánh hệ số của x^2 ở hai vế, ta được $k^2 = k$. Suy ra $k = 0$ hoặc $k = 1$.

- Với $k = 0$, ta có $a = -ax + b + (2x+y)b$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. So sánh hệ số của y ở hai vế, ta được $b = 0$. Từ đó, so sánh hệ số của x ở hai vế, ta cũng có $a = 0$. Vậy trong trường hợp này, ta có $f(x) \equiv 0$ và $g(x) \equiv 0$. Thử lại thỏa mãn.
- Với $k = 1$, ta có
$$(x+y)^2 - a(x+y) + b + a = x^2 - ax + b + (2x+y)(y+b), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$
hay
$$-ay + a = 2xb + yb, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
So sánh hệ số của x ở hai vế, ta được $b = 0$. Từ đó, so sánh hệ số của y ở hai vế, ta được $a = 0$. Vậy trong trường hợp này, ta có $f(x) = x^2$ và $g(x) = x$. Thử lại thỏa mãn.

Tóm lại, có hai cặp hàm số $\big(f(x), g(x)\big)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(0, 0)$ và (x^2, x). □

Bài toán 4. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f\left(\frac{x}{x-y}\right) = f\big(xf(x)\big) - f\big(xf(y)\big), \quad \forall x > y > 0.$$

Lời giải. Nếu có $a > b > 0$ sao cho $f(a) = f(b)$ thì ta có

$$f\left(\frac{a}{a-b}\right) = f\big(af(a)\big) - f\big(af(b)\big) = 0,$$

mâu thuẫn. Do đó f đơn ánh. Từ giả thiết, ta suy ra

$$f\left(\frac{x}{x-y}\right) + f\big(xf(y)\big) = f\left(\frac{x}{x-z}\right) + f\big(xf(z)\big) = f\big(xf(x)\big)$$

với mọi $x > \max\{y, z\} > 0$. Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét $y \geqslant z > 0$. Trong phương trình trên, chọn $x = z + \frac{1}{f(y)}$ thì ta có $xf(y) = \frac{x}{x-z}$. Suy ra

$$f\left(\frac{x}{x-y}\right) = f\big(xf(z)\big).$$

Do f đơn ánh nên ta có $\frac{x}{x-y} = xf(z)$, hay $x = y + \frac{1}{f(z)}$. Từ đó suy ra

$$z + \frac{1}{f(y)} = y + \frac{1}{f(z)}, \quad \forall z \geqslant y > 0.$$

Như thế, ta có $f(x) = \frac{1}{x+c}$ (c là hằng số thực nào đó) với mọi $x > 0$. Vì $f(x) > 0$ với mọi $x > 0$ nên $c \geqslant 0$. Thay trở lại phương trình hàm ban đầu, ta được

$$\frac{x-y}{x+c(x-y)} = \frac{x+c}{x+c(x+c)} - \frac{y+c}{x+c(y+c)}, \quad \forall x > y > 0.$$

Cho $x = y + 1$, ta được

$$\frac{1}{y+1+c} = \frac{y+1+c}{y+1+c(y+1+c)} - \frac{y+c}{y+1+c(y+c)}, \quad \forall y > 0.$$

Trong phương trình trên, cho $y \to 0^+$, ta được

$$\frac{1}{1+c} = \frac{1+c}{1+c+c^2} - \frac{c}{1+c^2}.$$

Giải phương trình này, ta được $c = 0$. Từ đó suy ra $f(x) = \frac{1}{x}$ với mọi $x > 0$. Thử lại ta thấy thỏa mãn. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu là $f(x) = \frac{1}{x}$. $\square$

Bài toán 5 (IMC, 1999). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f(x+y) = f(x)f\big(yf(x)\big), \quad \forall x, y > 0.$$

Lời giải. Thay y bởi $y+z$ vào phương trình đã cho, ta được

$$f(x+y+z) = f(x)f\big((y+z)f(x)\big), \quad \forall x, y, z > 0.$$

Thay x bởi $x+z$ vào phương trình đã cho, ta được

$$f(x+y+z) = f(x+z)f\big(yf(x+z)\big), \quad \forall x, y, z > 0.$$

Từ hai kết quả trên, ta suy ra

$$f(x+z)f\big(yf(x+z)\big) = f(x)f\big((y+z)f(x)\big), \quad \forall x, y, z > 0.$$

Giả sử tồn tại $x_0, z_0 > 0$ sao cho $f(x_0+z_0) > f(x_0)$. Trong phương trình trên, ta thay $x = x_0$, $z = z_0$ và $y = \frac{z_0 f(x_0)}{f(x_0+z_0)-f(x_0)}$ thì có $yf(x_0+z_0) = (y+z_0)f(x_0)$. Suy ra $f(x_0+z_0) = f(x_0)$, mâu thuẫn. Do đó $f(x+z) \leqslant f(x)$ với mọi $x, z > 0$, tức f không tăng. Xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: *f giảm ngặt.* Thay y bởi $\frac{y}{f(x)}$ vào phương trình đã cho, ta được

  $$f\left(x+\frac{y}{f(x)}\right) = f(x)f(y), \quad \forall x, y > 0.$$

  Đảo vị trí của x và y trong phương trình trên với chú ý f giảm ngặt, ta được

  $$x+\frac{y}{f(x)} = y+\frac{x}{f(y)}, \quad \forall x, y > 0.$$

  Thay $y = 1$ vào phương trình trên, ta được $x+\frac{1}{f(x)} = 1+\frac{x}{f(1)}$, hay $f(x) = \frac{1}{kx+1}$ với mọi $x > 0$, trong đó $k = \frac{1}{f(1)} - 1$. Do f giảm ngặt từ $\mathbb{R}^+$ vào $\mathbb{R}^+$ nên dễ thấy $k > 0$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = \frac{1}{kx+1}$ thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.

- Trường hợp 2: *Tồn tại $0 < a < b$ sao cho $f(a) = f(b)$.* Lần lượt thay $x = a$ và $x = b$ vào phương trình đã cho, ta được

  $$f(y+a) = f(a)f\big(yf(a)\big) = f(b)\big(yf(b)\big) = f(y+b), \quad \forall y > 0.$$

  Từ đó suy ra $f(y) = f(y+b-a)$ với mọi $y > a$. Do f không giảm nên từ đây ta suy ra $f(x) = C$ (C là hằng số dương nào đó) với mọi $x > a$. Bây giờ, trong phương trình hàm đã cho, ta cố định x và cho $y > \max\left\{a, \frac{a}{f(x)}\right\}$ thì có

  $$C = f(x+y) = f(x)f\big(yf(x)\big) = Cf(x),$$

  suy ra $f(x) = 1$ với mọi $x > 0$. Hàm này thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.

Tóm lại, các hàm số thỏa mãn yêu cầu có dạng $f(x) = \frac{1}{kx+1}$ với $k \geqslant 0$ là hằng số nào đó. □

Bài toán 6 (Germany TST, 2007). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f\left(\frac{f(x)}{yf(x)+1}\right) = \frac{x}{xf(y)+1}, \quad \forall x, y > 0.$$

Lời giải. Từ giả thiết, dễ thấy f là một đơn ánh. Thay x bởi $\frac{f(x)}{zf(x)+1}$ vào phương trình đã cho rồi khai triển hai vế, ta được

$$f\left(\frac{\frac{x}{xf(z)+1}}{\frac{xy}{xf(z)+1}+1}\right)=\frac{\frac{f(x)}{zf(x)+1}}{\frac{f(x)f(y)}{zf(x)+1}+1},$$

hay

$$f\left(\frac{x}{xy+xf(z)+1}\right)=\frac{f(x)}{f(x)f(y)+zf(x)+1},\quad \forall x,y,z>0.$$

Thay y bởi $f(y)$ vào phương trình trên, ta được

$$f\left(\frac{x}{x[f(y)+f(z)]+1}\right)=\frac{f(x)}{f(x)\,[f(f(y))+z]+1},\quad \forall x,y,z>0. \tag{1}$$

Đảo vị trí của y và z trong phương trình trên với chú ý giá trị của biểu thức $f\left(\frac{x}{x[f(y)+f(z)]+1}\right)$ vẫn không đổi, ta được

$$f(f(y))+z=f(f(z))+y,\quad \forall y,z>0.$$

Từ đó suy ra $f(f(x))=x+c$ (c là một hằng số thực nào đó) với mọi $x>0$. Từ đó, phương trình (1) có thể được viết lại thành

$$f\left(\frac{x}{x[f(y)+f(z)]+1}\right)=\frac{f(x)}{f(x)(y+z+c)+1}=\frac{f(x)}{f(x)f(f(y+z))+1}.$$

Thay x bởi $f(x)$ và y bởi $f(y+z)$ vào phương trình đã cho, ta được

$$f\left(\frac{x+c}{(x+c)f(y+z)+1}\right)=\frac{f(x)}{f(x)f(f(y+z))+1},\quad \forall x,y,z>0.$$

Kết hợp với kết quả trên, ta được

$$f\left(\frac{x}{x[f(y)+f(z)]+1}\right)=f\left(\frac{x+c}{(x+c)f(y+z)+1}\right),\quad \forall x,y,z>0.$$

Do f đơn ánh nên ta có

$$\frac{x}{x[f(y)+f(z)]+1}=\frac{x+c}{(x+c)f(y+z)+1},\quad \forall x,y,z>0,$$

hay

$$x[(x+c)f(y+z)+1]=(x+c)\left\{x[f(y)+f(z)]+1\right\},\quad \forall x,y,z>0.$$

Xem hai vế của phương trình trên là các đa thức ẩn x. Hai đa thức này có giá trị bằng nhau với mọi $x>0$ nên đồng nhất với nhau, từ đó bằng cách so sánh hệ số của x^2 ở hai vế, ta suy ra

$$f(y+z)=f(y)+f(z),\quad \forall y,z>0.$$

Kết quả này chứng tỏ f là hàm cộng tính từ $\mathbb{R}^+$ vào $\mathbb{R}^+$. Suy ra $f(x)=kx$ (k là hằng số dương nào đó). Thay trở lại phương trình đã cho, ta được

$$\frac{k^2x}{kxy+1}=\frac{x}{kxy+1},\quad \forall x,y>0.$$

Do đó $k=1$. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu là $f(x)=x$. □

Bài toán 7. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f\big(xf(x)+f(y)\big) = y + f^2(x), \quad \forall x, y > 0.$$

Lời giải. Từ giả thiết, dễ thấy f đơn ánh. Đặt $f(1) = a$, ta có

$$f\big(f(y)+a\big) = y + a^2, \quad \forall y > 0.$$

Suy ra hàm f có thể nhận mọi giá trị trên $(a^2, +\infty)$. Thay y bởi $f^2(y)$ vào phương trình hàm đã cho, ta được

$$f\left(xf(x)+f\big(f^2(y)\big)\right) = f^2(y) + f^2(x), \quad \forall x, y > 0.$$

Đảo vị trí của x và y trong phương trình trên với chú ý f đơn ánh, ta được

$$xf(x) + f\big(f^2(y)\big) = yf(y) + f\big(f^2(x)\big), \quad \forall x, y > 0.$$

Từ đó suy ra $xf(x) = f\big(f^2(x)\big) + c$ (c là một hằng số thực nào đó) với mọi $x > 0$. Từ đây, kết hợp với (1) và giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} f\big(y + f^2(x) + a\big) &= f\left(f\big(xf(x)+f(y)\big)+a\right) \\ &= xf(x) + f(y) + a^2 \\ &= f\big(f^2(x)\big) + f(y) + a^2 + c. \end{aligned}$$

Do $f(x)$ có thể nhận mọi giá trị trên $(a^2, +\infty)$ nên ta có

$$f(x+y+a) = f(x) + f(y) + a^2 + c, \quad \forall x > a^4, y > 0.$$

Từ đây, với mọi $x, y > 0$ và với mọi $z > a^4$, ta có

$$\begin{aligned} f(z+x+y+2a) &= f\big((z+x+a)+y+a\big) \\ &= f(z+x+a) + f(y) + a^2 + c \\ &= f(z) + f(x) + f(y) + 2(a^2+c) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} f(z+x+y+2z) &= f\big(z + (x+y+a) + a\big) \\ &= f(z) + f(x+y+a) + a^2 + c. \end{aligned}$$

Kết hợp hai kết quả trên lại, ta được

$$f(x+y+a) = f(x) + f(y) + a^2 + c, \quad \forall x, y > 0.$$

Trong phương trình trên, ta lần lượt thay x, y bởi $\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}$ thì có

$$f(x+y+a) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + a^2 + c, \quad \forall x, y > 0.$$

Từ đó suy ra

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y > 0.$$

Với mọi $x, y, z > 0$, ta có

$$4f\left(\frac{x+y+z}{2}\right) = 2\left[f(z+x)+f(y)\right] = f(2z)+f(2x)+2f(y).$$

Đảo vị trí của x và y trong phương trình trên, ta được

$$f(2x)+2f(y) = f(2y)+2f(x),\ \forall x, y > 0.$$

Từ đó suy ra $f(2x) = 2f(x)+m$ (m là hằng số thực nào đó) với mọi $x > 0$. Đặt $g(x) = f(x)+m$ thì ta có $g(2x) = 2g(x)$ và

$$g(x)+g(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)+2m = 2g\left(\frac{x+y}{2}\right) = g(x+y), \quad \forall x, y > 0.$$

Từ phương trình trên, bằng quy nạp ta chứng minh được $g(nx) = ng(x)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ và với mọi $x > 0$. Do $g(nx) = f(nx)+m > m$ nên ta có

$$g(x) > \frac{m}{n}, \quad \forall x > 0, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Cho $n \to +\infty$, ta được $g(x) \geqslant 0$ với mọi $x > 0$. Từ đó, ta suy ra g là hàm cộng tính từ $\mathbb{R}^+$ vào $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Theo tính chất của hàm cộng tính, ta có $g(x) = kx$ (k là hằng số không âm nào đó) với mọi $x > 0$. Suy ra $f(x) = kx - m$ với mọi $x > 0$. Thay kết quả này trở lại phương trình đã cho, ta được

$$k(kx^2 - mx + ky - m) - m = y + (kx-m)^2, \quad \forall x, y > 0.$$

So sánh hệ số của y ở hai vế, ta được $k^2 = 1$, hay $k = 1$ (do $k \geqslant 0$). Từ đó, ta có

$$x^2 - mx - 2m = (x-m)^2, \quad \forall x > 0.$$

So sánh hệ số của x ở hai vế, ta được $m = 0$. Như vậy, ta có $f(x) = x$ với mọi $x > 0$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu là $f(x) = x$. □

Bài toán 8. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn*

$$f(a+b) = f(a)+f(b)+f(c)+f(d)$$

với mọi a, b, c, d nguyên dương sao cho $c^2+d^2 = 2ab$.

Ý tưởng chính cho lời giải bài toán trên là tìm các số nguyên dương a, b, c, d, e, g (trong đó $\{c, d\} \neq \{e, f\}$) thỏa mãn $2ab = c^2+d^2 = e^2+g^2$. Khi đó, ta sẽ có

$$f(c)+f(d) = f(e)+f(g).$$

Ngoài ra, nếu chọn c, d, e, g là các biểu thức có dạng tuyến tính bậc nhất theo n thì ta có thể hoàn tất lời giải bằng phương pháp quy nạp theo n.

Ý tưởng biểu diễn một số thành tổng hai bình phương theo hai cách khác nhau gợi ta nghĩ đến đồng nhất thức Lagrange như sau: Với mọi số nguyên m, n, p, q, ta có

$$(m^2+n^2)(p^2+q^2) = (mp+nq)^2+(mq-np)^2 = (mp-nq)^2+(mq+np)^2.$$

Chọn $m = p = 2$ và $q = 4$, ta được

$$(4n+4)^2+(2n-8)^2 = (4n-4)^2+(2n+8)^2 = 20(n^2+4).$$

Dựa trên đẳng thức này và một số tính chất riêng của hàm f, ta thu được lời giải như sau.

Lời giải. Đặt $f(1)=k$. Thay $a=b=c=d=n$ vào phương trình đã cho, ta được

$$f(2n)=4f(n),\quad \forall n\in\mathbb{Z}^+. \tag{1}$$

Thay $a=10$, $b=n^2+4$, $c=4n+4$ và $d=2n-8$ $(n>4)$, ta được

$$\begin{aligned} f(n^2+14) &= f(10)+f(n^2+4)+f(4n+4)+f(2n-8)\\ &= f(10)+f(n^2+4)+16f(n+1)+4f(n-4). \end{aligned}$$

Mặt khác, thay $a=10$, $b=n^2+4$, $d=4n-4$ và $d=2n+8$, ta cũng có

$$\begin{aligned} f(n^2+14) &= f(10)+f(n^2+4)+f(4n-4)+f(2n+8)\\ &= f(10)+f(n^2+4)+16f(n-1)+4f(n+4). \end{aligned}$$

Kết hợp hai kết quả trên, ta được

$$f(n+4)+4f(n-1)=f(n-4)+4f(n+1),\quad \forall n>4. \tag{2}$$

Bây giờ, ta sẽ tính giá trị của $f(2), f(3), f(4), \ldots, f(8)$. Từ (1), dễ thấy $f(2)=4k$, $f(4)=16k$ và $f(8)=64k$. Do $2\cdot 5\cdot 1=3^2+1^2$ nên ta có

$$4f(3)=f(6)=f(5+1)=f(5)+f(1)+f(3)+f(1)=f(5)+f(3)+2a.$$

Mặt khác, ta cũng có $2\cdot 4\cdot 1=2^2+2^2$ nên

$$f(5)=f(4+1)=f(4)+f(1)+f(2)+f(2)=25k.$$

Kết hợp với kết quả ở trên, ta được $f(3)=9k$. Suy ra $f(6)=4f(3)=36k$.

Ta cũng có $7^2+1^2=5^2+5^2=2\cdot 25\cdot 1$ nên

$$f(26)=f(25)+f(1)+f(5)+f(5)=f(25)+f(1)+f(7)+f(1),$$

suy ra $f(7)=2f(5)-f(1)=49k$. Như vậy, ta chứng minh được $f(n)=kn^2$ với $n\in\{1,2,\ldots,8\}$. Kết hợp với (2), ta dễ dàng quy nạp được $f(n)=kn^2$ với mọi n nguyên dương. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu là $f(n)=kn^2$ (k là hằng số nguyên dương nào đó). □

Bài toán 9. *Tìm tất cả các cặp hàm số $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x^3+2y)+f(x+y)=g(x+2y),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải. Từ giả thiết, ta cũng có

$$f(z^3+2t)+f(z+t)=g(z+2t),\quad \forall z,t\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Ta sẽ chứng minh rằng, với mọi $a,b\in\mathbb{R}$, hệ phương trình sau luôn có nghiệm (x,y,z,t) với $x,y,z,t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+2y=a,\\ z+2t=b,\\ x^3+2y=z+t,\\ x+y=z^3+2t. \end{cases}$$

Từ các phương trình thứ nhất và thứ hai, ta lần lượt có $x = a - 2y$ và $z = b - 2t$. Thay vào phương trình thứ ba, ta được $(a-2y)^3 + 2y = b - t$, suy ra

$$t = b - 2y - (a-2y)^3.$$

Thay $x = a - 2y$, $z = b - 2t$, $t = b - 2y - (a-2y)^3$ vào phương trình thứ tư của hệ, ta được

$$a - y = (b-2t)^3 + 2t = \left\{b - 2\left[b - 2y - (a-2y)^3\right]\right\}^3 + 2\left[b - 2y - (a-2y)^3\right].$$

Đây là phương trình bậc 9 ẩn y nên luôn có ít nhất một nghiệm thực y_0. Từ đó suy ra hệ luôn có ít nhất một nghiệm thực (x_0, y_0, z_0, t_0) với $x_0 = a - 2y_0$, $z_0 = b - 2t_0$ và $t_0 = b - 2y_0 - (a-2y_0)^3$. Khẳng định được chứng minh.

Từ khẳng định vừa chứng minh và các phương trình (1), (2), ta dễ dàng suy ra $g(a) = g(b)$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$. Do đó $g(x) \equiv C$. Thay trở lại (1), ta được

$$f(x^3 + 2y) + f(x+y) = C, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thay $y = x - x^3$ vào phương trình trên, ta được

$$f(2x - x^3) = \frac{C}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do $2x - x^3$ có thể nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}$ nên từ đây, ta có $f(x) = \frac{C}{2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy $f(x) = \frac{C}{2}$ và $g(x) = C$ thỏa mãn yêu cầu. Vậy có duy nhất một cặp hàm số f, g thỏa mãn yêu cầu là $f(x) = \frac{C}{2}$ và $g(x) = C$ (C là một hằng số thực nào đó). □

Bài toán 10. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau với mọi bộ số thực (a, b, c) :*

a) Nếu $a + b + c \geqslant 0$ thì $f(a^3) + f(b^3) + f(c^3) \geqslant 3f(abc)$.

b) Nếu $a + b + c \leqslant 0$ thì $f(a^3) + f(b^3) + f(c^3) \leqslant 3f(abc)$.

Lời giải. Để ý rằng, nếu hàm số f thỏa mãn yêu cầu thì hàm số g với $g(x) = f(x) - C$ (C là hằng số nào đó) cũng thỏa mãn yêu cầu. Do đó, không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét trường hợp $f(0) = 0$. Từ giả thiết, ta suy ra

$$f(a^3) + f(b^3) + f(c^3) = 3f(abc) \tag{1}$$

với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ mà $a + b + c = 0$. Thay $c = 0$ vào (1), ta được

$$f(-a^3) = f(b^3) = -f(a^3),$$

suy ra f là hàm lẻ. Từ đây, thay $c = -(a+b)$ vào (1), ta được

$$f\big((a+b)^3\big) = f(a^3) + f(b^3) + 3f\big(ab(a+b)\big), \quad \forall a, b > 0. \tag{2}$$

Thay b bởi $b + c$ vào phương trình trên và khai triển vế phải, ta được

$$\begin{aligned} f\big((a+b+c)^3\big) &= f(a^3) + f\big((b+c)^3\big) + 3f\big(a(b+c)(a+b+c)\big) \\ &= f(a^3) + f(b^3) + f(c^3) + 3f\big(bc(b+c)\big) + 3f\big(a(b+c)(a+b+c)\big). \end{aligned}$$

Đảo vị trí của a và c trong dãy đẳng thức trên, ta được

$$f\big(bc(b+c)\big)+f\big(a(b+c)(a+b+c)\big)=f\big(ab(a+b)\big)+f\big(c(a+b)(a+b+c)\big). \quad (3)$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng với mọi $0<x<y$, hệ phương trình sau luôn có nghiệm $(a,\, b,\, c)$ với $a,\, b,\, c>0$:

$$\begin{cases} bc(b+c)=x, \\ a(b+c)(a+b+c)=y, \\ ab(a+b)=c(a+b)(a+b+c). \end{cases} \quad (4)$$

Hệ phương trình này tương đương với

$$\begin{cases} bc(b+c)=x, \\ a(b+c)(a+b+c)=y, \\ ab=c(a+b+c). \end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai và phương trình thứ ba, ta có $a^2b(b+c)=cy$. Kết hợp với phương trình thứ nhất, ta được $a^2x=c^2y$. Suy ra $c=ka$ với $k=\sqrt{\frac{x}{y}}$. Ngoài ra, từ phương trình thứ nhất và phương trình thứ hai, ta cũng có $xa(a+b+c)=ybc$. Suy ra $k(a+b+ka)=b$, hay $b=\frac{ka(1+k)}{1-k}$. Thay $c=ka$ và $b=\frac{ka(1+k)}{1-k}$ vào phương trình thứ nhất của hệ, ta giải ra được $a=\sqrt[3]{\frac{x(k-1)^2}{2k^3(k+1)}}$. Như thế, hệ (4) luôn có nghiệm $(a,\, b,\, c)$ với $a,\, b,\, c>0$. Kết hợp kết quả này với (3) và chú ý

$$ab(a+b)+c(a+b)(a+b+c)=bc(b+c)+a(b+c)(a+b+c)=x+y,$$

ta được

$$f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad \forall x,\, y>0,\, x<y.$$

Dễ thấy $f(x)+f(x)=2f\left(\frac{x+x}{2}\right)$ nên ta có

$$f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad \forall x,\, y>0. \quad (5)$$

Từ đây, với mọi $x,\, y,\, z>0$, ta có

$$4f\left(\frac{x+y+z}{2}\right)=2\big[f(x+z)+f(y)\big]=f(2x)+f(2z)+2f(y).$$

Đảo vị trí của x và y trong đẳng thức trên, ta được $f(2x)+2f(y)=f(2y)+2f(x)$ với mọi $x,\, y>0$. Suy ra $f(2x)=2f(x)+M$ (M là hằng số thực nào đó) với mọi $x>0$. Do đó

$$f(8x)=2f(4x)+M=4f(2x)+3M=8f(x)+7M,\ \forall x>0.$$

Mặt khác, từ (2), ta cũng có $f(8x)=2f(x)+3f(2x)$. Suy ra

$$8f(x)+7M=2f(x)+3\big[2f(x)+M\big],$$

và do đó $M=0$. Như vậy, ta có $f(2x)=2f(x)$ với mọi $x>0$. Kết hợp với (5), ta được

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \quad \forall x,\, y>0.$$

Mặt khác, từ điều kiện a) của bài toán và $f(0) = 0$, ta dễ dàng suy ra $f(a) \geqslant 0$ với mọi $a \geqslant 0$. Như vậy, f là hàm cộng tính trên $\mathbb{R}^+$ và $f(x) \geqslant 0$ với mọi $x > 0$ nên ta có $f(x) = \ell x$ (ℓ là hằng số không âm nào đó) với mọi $x > 0$. Mà f lẻ nên $f(x) = \ell x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu có dạng $f(x) = \ell x + C$ (ℓ, C là các hằng số thực, $\ell \geqslant 0$). □

Bài toán 11. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\big(x + f(y)\big) = f(y^2 + 3) + 2xf(y) + f(x) - 3, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Dễ thấy $f(x) \equiv 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho nên tồn tại $y_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(y_0) \neq 0$. Thay $y = y_0$ vào phương trình đã cho, ta được

$$f\big(x + f(y_0)\big) - f(x) = 2xf(y_0) + f(y_0^2 + 3) - 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vế phải của phương trình trên là một hàm bậc nhất ẩn x nên nó có thể nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}$. Từ đó suy ra hiệu $f(u) - f(v)$ có thể nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}$.

Bây giờ, thay x bởi $x - f(y)$ vào phương trình đã cho, ta được

$$f\big(x - f(y)\big) = f(x) - f(y^2 + 3) - 2\big(x - f(y)\big)f(y) + 3, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Trong phương trình trên, ta thay x bởi $x + f(z)$ thì được

$$\begin{aligned} f\big(x + f(z) - f(y)\big) &= f\big(x + f(z)\big) - f(y^2 + 3) - 2\big[x + f(z) - f(y)\big]f(y) + 3 \\ &= f(x) + f(z^2 + 3) + 2xf(z) - f(y^2 + 3) - 2\big[x + f(z) - f(y)\big]f(y) \\ &= f(x) + 2x\big[f(z) - f(y)\big] + f(z^2 + 3) - f(y^2 + 3) + 2f(y)\big[f(y) - f(z)\big]. \end{aligned}$$

Đảo vị trí của y và z trong phương trình trên rồi cộng phương trình thu được và phương trình trên lại theo vế, ta được

$$f\big(x + f(z) - f(y)\big) + f\big(x + f(y) - f(z)\big) = 2f(x) + 2\big[f(y) - f(z)\big]^2.$$

Do hiệu $f(y) - f(z)$ có thể nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}$ nên từ đây ta có

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2y^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đặt $f(0) = a$ và $g(x) = f(x) - x^2 - a$ thì ta có $g(0) = 0$ và

$$g(x + y) + g(x - y) = 2g(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thay $x = y$ vào phương trình này, ta được $g(2x) = 2g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên ta có

$$g(x + y) + g(x - y) = g(2x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lần lượt thay x, y bởi $\frac{x+y}{2}$, $\frac{x-y}{2}$ vào phương trình trên, ta suy ra g là hàm cộng tính.

Tiếp theo, thay $x = 0$ vào phương trình đã cho, ta được

$$f\big(f(y)\big) = f(y^2 + 3) + a - 3, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Thay $f(y) = g(y) + y^2 + a$ vào và rút gọn với chú ý g cộng tính, ta được

$$g\big(g(y)\big) + g^2(y) + 2(y^2 + a)g(y) + 2(a-3)(y^2 + a + 2) + g(a) - g(3) = 0.$$

Thay $y = 0$ vào hương trình trên, ta được

$$2(a-3)(a+2) + g(a) - g(3) = 0.$$

Từ đó suy ra

$$g\big(g(y)\big) + g^2(y) + 2(y^2 + a)g(y) + 2(a-3)y^2 = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Thay y bởi ny ($n \in \mathbb{Z}$) vào phương trình trên, ta được

$$ng\big(g(y)\big) + n^2g^2(y) + 2n(n^2y^2 + a)g(y) + 2n^2(a-3)y^2 = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}.$$

Ta xem vế trái là một đa thức ẩn n. Đa thức này có giá trị bằng 0 tại vô hạn giá trị của n nên nó phải đồng nhất bằng 0. Từ đó suy ra hệ số của n^3 phải bằng 0, hay ta có $2y^2g(y) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Kết hợp với $g(0) = 0$, ta suy ra $g(y) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Từ đây với chú ý $2(a-3)(a+2) + g(a) - g(3) = 0$, ta tính được $a = 3$ hoặc $a = -2$. Suy ra $f(x) = x^2 + 3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = x^2 - 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Thử lại, ta thấy chỉ có hàm $f(x) = x^2 + 3$ thỏa mãn yêu cầu. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu là $f(x) = x^2 + 3$. □

Trên đây, chúng tôi đã giới thiệu cùng bạn đọc một số bài toán hay giải được bằng phương pháp thêm biến. Rất mong sẽ nhận được trao đổi đóng góp xây dựng từ bạn đọc gần xa. Dưới đây là một số bài tập khác cũng có thể giải bằng phương pháp này:

Bài tập 1. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) = f(x)f(y)f(xy), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 2 (IMO Shortlist, 2005). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x)f(y) = 2f\big(x + yf(x)\big), \quad \forall x, y > 0.$$

Bài tập 3. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\big(x + f(y)\big) = f(x) + f(x+y) - x, \quad \forall x, y > 0.$$

Bài tập 4. Tìm tất cả các hàm số f liên tục, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) + f(xy) = f(x) + f(y) + f(xy+1), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 5. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$f\big(f^2(m) + 2f^2(n)\big) = m^2 + 2n^2, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Bài tập 6. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 0$ và

$$f(x) + f(y) = f(x + y - xy) + f(xy), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng f là hàm cộng tính.

SÁNG TẠO - LÀM CHẶT

Ngô Văn Thái, Thái Bình

Một tính chất quan trọng của bất đẳng thức toán học mà học sinh được biết ngay từ khi còn đang học tiểu học, đó là tính chất bắc cầu: "*Nếu* $A \geqslant B$, $B \geqslant C$ *thì* $A \geqslant C$."

Tính chất này được sử dụng làm phép suy luận logic ở hầu khắp mọi bài toán chứng minh bất đẳng thức. Thế nhưng khi đứng trước một bài toán chứng minh bất đẳng thức $A \geqslant C$, không phải bài toán nào người ra đề cũng để người giải nhìn ra ngay $A \geqslant B$, $B \geqslant C$. Nếu bài toán đề ra mà người giải nhìn thấy ngay $A \geqslant B$, $B \geqslant C$ thì bài toán đó quá tầm thường. Còn với những bài toán bất đẳng thức hay và khó, người giải phải sử dụng các kiến thức cơ bản phù hợp, cách giải phải tường minh, linh hoạt ngắn gọn để được $A \geqslant B$ và $B \geqslant C$, thì người giải đã làm tốt được hai việc. Việc thứ nhất là đã hoàn thành chứng minh bài toán đề ra, việc thứ hai là đã sáng tạo ra được một bài toán bất đẳng thức chặt hơn, khó hơn (có thể hay hơn) bài toán đã cho.

Để thấy được vẻ đẹp muôn màu của sự sáng tạo bất đẳng thức toán học, tôi xin giới thiệu bài viết: "*Sáng tạo bất đẳng thức bằng cách làm chặt một số bất đẳng thức nổi tiếng*" dựa vào ý tưởng từ "*Tính chất bắc cầu của bất đẳng thức*". Nội dung bài viết gồm năm phần sau đây:

- Làm chặt bất đẳng thức AM-GM.
- Làm chặt bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.
- Làm chặt bài toán bất đẳng thức đăng trên báo Toán học và Tuổi trẻ.
- Làm chặt một bài toán bất đẳng thức thi Toán học Quốc Tế.
- Giới thiệu những bài toán mới được làm chặt từ những bài toán đã biết.

1. Làm chặt bất đẳng thức AM-GM

Bất đẳng thức AM-GM là một bất đẳng thức cơ bản kinh điển quan trọng nhất của toán học sơ cấp, vì nó đã có khá nhiều cách chứng minh được đưa ra, hàng chục mở rộng, hàng chục kết quả chặt hơn đăng trên các diễn đàn toán học. Phần này tôi xin giới thiệu một kết quả chặt hơn bất đẳng thức AM-GM khác được suy ra từ chính cách chứng minh mới bất đẳng thức AM-GM.

Bất đẳng thức AM-GM. *Với mọi số thực không âm* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ *ta có*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}. \tag{1}$$

Lời giải. Nếu $a_1a_2\cdots a_n = 0$ thì (1) đúng. Xét $a_1a_2\cdots a_n > 0$, dễ thấy với mọi $X \geqslant 0$ thì $(1-X)$, $\left[n-\left(1+X+X^2+\cdots+X^{n-1}\right)\right]$ cùng dấu. Ta có thể giả sử

$$(1-X)\left[n-\left(1+X+X^2+\cdots+X^{n-1}\right)\right] \geqslant 0,$$

hay là

$$n(1-X)-(1-X^n) \geqslant 0,$$
$$(n-1)+X^n \geqslant nX.$$

Bây giờ đặt $X = \sqrt[n]{\frac{a_n}{\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}}}$, thì

$$(n-1)+\frac{a_n}{\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}} \geqslant n\sqrt[n]{\frac{a_n}{\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}}},$$

$$(n-1)\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}+a_n \geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}, \tag{2}$$

Do đó

$$(n-2)\sqrt[n-2]{a_1a_2\cdots a_{n-2}}+a_{n-1} \geqslant (n-1)\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}},$$
$$\cdots\cdots$$
$$2\sqrt{a_1a_2}+a_3 \geqslant 3\sqrt[3]{a_1a_2a_3},$$
$$a_1+a_2 \geqslant 2\sqrt{a_1a_2}.$$

Cộng vế với vế của $n-1$ ở trên và rút gọn sẽ được

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Ta có điều phải chứng minh. □

Như vậy từ bất đẳng thức (2) chúng ta đã có thêm một cách chứng minh mới bất đẳng thức AM-GM khá gọn, ngoài ra khi sử dụng bất đẳng thức (2) lại dễ dàng rút ra được kết quả chặt hơn bất đẳng thức AM-GM sau đây.

Với các số tự nhiên $n \geqslant k \geqslant p \geqslant 2$ và n số thực không âm, khi đó

$$\begin{aligned} a_1+a_2+\cdots+a_n &\geqslant p\sqrt[p]{a_1a_2\cdots a_p}+a_{p+1}+\cdots+a_n \\ &\geqslant k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+a_{k+1}+\cdots+a_n \\ &\geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}. \end{aligned}$$

2. Làm chặt bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Trong toán học bất đẳng thức AM-GM và Cauchy-Schwarz được dùng làm định lý cơ bản của lý thuyết bất đẳng thức. Với tư cách là hai hòn đá tảng để nhiều kết luận quan trọng khác của toán học dựa vào, cặp bất đẳng thức AM-GM, Cauchy-Schwarz được sử dụng khá phổ biến ở phần lớn các bài toán chứng minh bất đẳng thức. Ngoài ra một số hệ quả của cặp bất đẳng thức này có thể vận dụng để giải hàng loạt các bài toán thú vị về cực đại và cực tiểu.

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz. *Cho các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$, $(n \geqslant 2)$ khi đó*

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2. \tag{3}$$

Lời giải. Hiện nay bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cũng có khá nhiều cách chứng khác nhau, tất cả các cách chứng minh đó đều ngắn gọn đặc sắc, xin giới thiệu một cách chứng minh trong số những cách chứng minh đã có như sau.

Nếu $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 0$ tức $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ thì (3) đúng.

Nếu $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 > 0$, xét

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2 = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 \geqslant 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó biệt thức

$$\Delta' = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \leqslant 0.$$

Cho nên

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$. [1] Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz được chứng minh. □

Từ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz suy ra hai hệ quả để sử dụng trong bài viết này:

Hệ quả 1. *Với các số thực a_i, b_i, $i = \overline{1, n}$ thì*

$$\left(a_i^2 + a_{i+1}^2\right)\left(b_i^2 + b_{i+1}^2\right) \geqslant (a_i b_i + a_{i+1} b_{i+1})^2. \tag{4}$$

Hệ quả 2. *Với hai dãy hữu hạn số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$, $(n \geqslant 2)$ khi đó*

$$\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + b_i^2}\right)^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^2. \tag{5}$$

Lời giải. Xét biểu thức

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + b_i^2}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + b_i^2} + \sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + b_i^2} - \sum_{i=1}^n a_i\right) \\ &= \left[\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{a_i^2 + b_i^2} + a_i\right)\right]\left[\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{a_i^2 + b_i^2} - a_i\right)\right].\end{aligned}$$

[1] Ở đây chúng ta quy ước nếu mẫu số nào bằng 0 thì tử số của phân số ấy cũng bằng 0.

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{a_i^2+b_i^2}+a_i\right)\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{a_i^2+b_i^2}-a_i\right)\right] \geqslant \left[\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(\sqrt{a_i^2+b_i^2}+a_i\right)\left(\sqrt{a_i^2+b_i^2}-a_i\right)}\right]^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{b_i^2}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|\right)^2 \geqslant \left(\left|\sum_{i=1}^{n}b_i\right|\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2.$$

Suy ra

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2}\right)^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$. □

Bây giờ ta sử dụng 2 hệ quả trên để làm chặt bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

Dạng 1. *Với hai dãy hữu hạn số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$, $(n \geqslant 2)$ khi đó*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_ib_{i+1}-a_{i+1}b_i|\right)^2, \tag{6}$$

ở đây quy ước $a_{n+1} = a_1, b_{n+1} = b_1$.

Lời giải. Theo (4) và với $\alpha_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,n}$, thì

$$\left(a_i^2+a_{i+1}^2\right)\left(b_i^2+b_{i+1}^2\right) \geqslant (a_ib_i+a_{i+1}b_{i+1})^2,$$

suy ra

$$\left(a_i^2+a_{i+1}^2\right)\left(b_i^2+b_{i+1}^2\right) = (a_ib_i+a_{i+1}b_{i+1})^2 + (\alpha_i)^2,$$

tương đương với

$$\alpha_i = |a_ib_{i+1}-a_{i+1}b_i|.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì

$$4\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right) = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2+a_{i+1}^2\right)\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\left(b_i^2+b_{i+1}^2\right)\right] \geqslant \left[\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(a_i^2+a_{i+1}^2\right)\left(b_i^2+b_{i+1}^2\right)}\right]^2.$$

Do đó

$$4\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right) \geqslant \left[\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(a_i^2+a_{i+1}^2\right)\left(b_i^2+b_{i+1}^2\right)}\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(a_ib_i+a_{i+1}b_{i+1})^2+(\alpha_i)^2}\right]^2.$$

Mặt khác theo (5) ta có

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(a_ib_i+a_{i+1}b_{i+1})^2+(\alpha_i)^2}\right]^2 \geqslant \left[\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i+a_{i+1}b_{i+1})\right]^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2.$$

Cho nên
$$4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geqslant \left[\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i + a_{i+1}b_{i+1})\right]^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2,$$
hay
$$4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geqslant 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}|a_ib_{i+1} - a_{i+1}b_i|\right)^2,$$
suy ra
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_ib_{i+1} - a_{i+1}b_i|\right)^2.$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$. □

Từ (6) lại có hệ quả đẹp sau

Với các số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $(n \geqslant 2)$, thì
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geqslant n^2 + \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\sqrt{\frac{a_i}{a_{i+1}}} - \sqrt{\frac{a_{i+1}}{a_i}}\right|\right)^2,$$
với quy ước $a_{n+1} = a_1$.

Dạng 2. *Với hai dãy hữu hạn số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$, $(n \geqslant 2)$ khi đó*
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geqslant \left[\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2)\right]\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2b_i^2}{a_i^2 + b_i^2}\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2.$$

Lời giải. Ta chứng minh vế trái
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geqslant \left[\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2)\right]\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2b_i^2}{a_i^2 + b_i^2}\right).$$

Bất đẳng thức này tương đương với mỗi bất đẳng thức bên dưới
$$-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2b_i^2}{a_i^2 + b_i^2}\right) \geqslant -\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2)},$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2b_i^2}{a_i^2 + b_i^2}\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2)},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2 - \frac{a_i^2 b_i^2}{a_i^2 + b_i^2}\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^4}{a_i^2 + b_i^2} \geqslant \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2},$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^4}{(a_i^2 + b_i^2)}\right]\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2)\right] \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2.$$

Hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz. Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2)\right]\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2 b_i^2}{a_i^2 + b_i^2}\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2 b_i^2}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i b_i|\right)^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2.$$

Vế phải cũng được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$. □

3. Làm chặt bài toán bất đẳng thức đăng trên báo Toán học và Tuổi trẻ.

Trong cuốn "*Tuyển tập 5 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*" có đăng bài "*Mở rộng một bất đẳng thức*" của tác giả Tạ Hồng Quảng, mở đầu bài báo tác giả có viết: Trên báo Gazeta Matematica của Romania số 9, 1989 trang 335 tác giả Gheoghe Marghescu đưa ra bất đẳng thức sau

Bài toán 1. *Cho các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$, $(n \geqslant 2)$ chứng minh rằng*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2 + b_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i + b_i}\right) \geqslant n\sqrt{n}. \tag{7}$$

Sau đó tác giả Tạ Hồng Quảng đã đưa ra một bài toán bất đẳng thức chặt hơn (7) như sau

Bài toán 2. *Cho các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ $(n \geqslant 2)$ chứng minh rằng*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2 + b_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i + b_i}\right) \geqslant \frac{n^2}{\sqrt{2}}. \tag{8}$$

Phần nội dung tiếp theo của bài báo là lời giải (8) rất hay và ngắn gọn, đồng thời từ lời giải (8), tác giả cũng đã sáng tạo ra một số bài toán bất đẳng thức mở rộng đẹp, hấp dẫn. Để tiếp nối bài viết của tác giả tôi xin đưa ra một số bài toán bất đẳng thức mới chặt hơn (8) như sau.

Bài toán 3. *Cho các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$, $(n \geqslant 2)$ chứng minh rằng*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\sqrt{a_i^2+b_i^2}}{a_i+b_i}}\right)^2 \geqslant \frac{n^2}{\sqrt{2}}. \tag{9}$$

Lời giải. Dễ thấy với $a_i, b_i > 0,\ \forall i = \overline{1,n}$ thì

$$\frac{\sqrt{a_i^2+b_i^2}}{a_i+b_i} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}},$$

suy ra

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a_i^2+b_i^2}}{a_i+b_i}} \geqslant \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Cho nên

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\sqrt{a_i^2+b_i^2}}{a_i+b_i}} \geqslant \frac{n}{\sqrt[4]{2}},$$

tương đương

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\sqrt{a_i^2+b_i^2}}{a_i+b_i}}\right)^2 \geqslant \frac{n^2}{\sqrt{2}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_i = b_i, \forall i = \overline{1,n}$. □

Quả thật theo đánh giá chủ quan của tôi (9) không phải là một bài toán hay, vì bài toán này được tạo thành thuần túy chỉ gồm phép cộng vế với vế của n bất đẳng thức đơn giản cùng chiều, sau đó đem bình phương cả hai vế của bất đẳng thức đó lại mà thôi. Thế nhưng (9) lại chặt hơn (8) và đương nhiên chặt hơn (7), bởi vì theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+b_i}\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\sqrt{a_i^2+b_i^2}}{a_i+b_i}}\right)^2 \geqslant \frac{n^2}{\sqrt{2}}.$$

Bài toán 4. *Cho các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$, $(n \geqslant 2)$. Chứng minh rằng*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+b_i}\right) \geqslant \frac{n^2}{\sqrt{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\sqrt{a_i^2+b_i^2}}{a_i+b_i} - \frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2.$$

Lời giải. Với $a_i, b_i > 0, \forall i = \overline{1,n}$ thì

$$\frac{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}{a_i + b_i} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}},$$

do đó tồn tại $\alpha_i \geqslant 0$ để

$$\frac{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}{a_i + b_i} = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^2 + (\alpha_i)^2 \tag{10}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + b_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i + b_i}\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}{a_i + b_i}}\right)^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^2 + (\alpha_i)^2}\right]^2. \tag{11}$$

Mặt khác theo (5), vế phải của (11) ta được

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^2 + (\alpha_i)^2}\right]^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_k\right)^2 = \frac{n^2}{\sqrt{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2,$$

suy ra tiếp

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^2 + (\alpha_i)^2}\right]^2 \geqslant \frac{n^2}{\sqrt{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2.$$

Từ (10) ta được

$$\alpha_i = \sqrt{\frac{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}{a_i + b_i} - \frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad \forall i = \overline{1,n},$$

vì vậy

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + b_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i + b_i}\right) \geqslant \frac{n^2}{\sqrt{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}{a_i + b_i} - \frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = b_1 = b_2 = \cdots = b_n$. Bài toán được chứng minh. □

4. Làm chặt một bài toán bất đẳng thức thi Toán học Quốc Tế

Trở lại với bài bất đẳng thức trong kỳ thi IMO 2001 tại Mỹ

Bài toán. *Cho các số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng*

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+8yz}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+8zx}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+8xy}}\geqslant 1.$$

Lời giải. Với ba số thực dương a, b, c áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được

$$\left(a^4+b^4+c^4\right)^2\geqslant\left(a^4+2b^2c^2\right)^2=a^8+4a^4b^2c^2+4b^4c^4\geqslant a^8+8a^2b^3c^3, \tag{12}$$

suy ra

$$\frac{1}{a^6+8b^3c^3}\geqslant\frac{a^2}{\left(a^4+b^4+c^4\right)^2},$$

hay là

$$\sqrt{\frac{a^6}{a^6+8b^3c^3}}\geqslant\frac{a^4}{a^4+b^4+c^4}.$$

Tương tự

$$\sqrt{\frac{b^6}{b^6+8c^3a^3}}\geqslant\frac{b^4}{a^4+b^4+c^4},$$

$$\sqrt{\frac{c^6}{c^6+8a^3b^3}}\geqslant\frac{c^4}{a^4+b^4+c^4}.$$

Do đó

$$\frac{a^3}{\sqrt{a^6+8b^3c^3}}+\frac{b^3}{\sqrt{b^6+8c^3a^3}}+\frac{c^3}{\sqrt{c^6+8a^3b^3}}\geqslant\frac{a^4+b^4+c^4}{a^4+b^4+c^4}=1.$$

Cuối cùng thay $x=a^3$, $y=b^3$, $z=c^3$ ta sẽ có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$. □

Đến đây độc giả đã thấy bài toán bất đẳng thức thi IMO 2001 được chứng minh thông qua (12). Bây giờ ta làm chặt (12) và lặp lại cách làm tương tự, sẽ được một chuỗi bất đẳng thức chặt hơn bất đẳng thức IMO 2001 sau đây.

Bài toán. *Cho các số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng*

$$\begin{aligned}\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+8yz}}&\geqslant\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+\left(y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}\right)^3}}\geqslant\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+2(y+z)^2}}\\&\geqslant\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+2y^2+2z^2+2y^{\frac{4}{3}}z^{\frac{2}{3}}+2y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{4}{3}}}}\geqslant 1.\end{aligned}$$

Lời giải. Với ba số dương a, b, c áp dụng bất đẳng thức AM-GM và đánh giá

$$2\left(b^3+c^3\right)^2\geqslant\left(b^2+c^2\right)^3\geqslant 8b^3c^3,$$

ta được

$$\begin{aligned}\left(a^4+b^4+c^4\right)^2 &= a^8+\left(a^4b^4+b^8\right)+\left(a^4c^4+c^8\right)+\left(a^4b^4+b^4c^4\right)+\left(a^4c^4+b^4c^4\right)\\ &\geqslant a^8+2a^2b^6+2a^2c^6+2a^2b^4c^2+2a^2b^2c^4 \geqslant a^8+2a^2b^6+2a^2c^6+4a^2b^3c^3\\ &= a^2\left[a^6+2\left(b^3+c^3\right)^2\right] \geqslant a^2\left[a^6+\left(b^2+c^2\right)^3\right] \geqslant a^2\left[a^6+8b^3c^3\right].\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^6+8b^3c^3} &\geqslant \frac{1}{a^6+(b^2+c^2)^3} \geqslant \frac{1}{a^6+2(b^3+c^3)^2}\\ &\geqslant \frac{1}{a^6+2b^6+2c^6+2b^4c^2+2b^2c^4} \geqslant \frac{a^2}{(a^4+b^4+c^4)^2},\end{aligned}$$

tương đương với

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{a^6}{a^6+8b^3c^3}} &\geqslant \sqrt{\frac{a^6}{a^6+(b^2+c^2)^3}} \geqslant \sqrt{\frac{a^6}{a^6+2(b^3+c^3)^2}}\\ &\geqslant \sqrt{\frac{a^6}{a^6+2b^6+2c^6+2b^4c^2+2b^2c^4}} \geqslant \frac{a^4}{(a^4+b^4+c^4)}\end{aligned} \tag{13}$$

Tương tự thì

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{b^6}{b^6+8c^3a^3}} &\geqslant \sqrt{\frac{b^6}{b^6+(c^2+a^2)^3}} \geqslant \sqrt{\frac{b^6}{b^6+2(c^3+a^3)^2}}\\ &\geqslant \sqrt{\frac{b^6}{b^6+2c^6+2a^6+2c^4a^2+2c^2a^4}} \geqslant \frac{b^4}{(a^4+b^4+c^4)}.\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{c^6}{c^6+8a^3b^3}} &\geqslant \sqrt{\frac{c^6}{c^6+(a^2+b^2)^3}} \geqslant \sqrt{\frac{c^6}{c^6+2(a^3+b^3)^2}}\\ &\geqslant \sqrt{\frac{c^6}{c^6+2a^6+2b^6+2a^4b^2+2a^2b^4}} \geqslant \frac{c^4}{(a^4+b^4+c^4)}.\end{aligned} \tag{15}$$

Cộng tương ứng vế của (13), (14), (15) rồi rút gọn và đặt $x=a^3,\ y=b^3,\ z=c^3$ ta được

$$\begin{aligned}\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+8yz}} &\geqslant \sum\frac{x}{\sqrt{x^2+\left(y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}\right)^3}} \geqslant \sum\frac{x}{\sqrt{x^2+2(y+z)^2}}\\ &\geqslant \sum\frac{x}{\sqrt{x^2+2y^2+2z^2+2y^{\frac{4}{3}}z^{\frac{2}{3}}+2y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{4}{3}}}} \geqslant 1.\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh. □

5. Giới thiệu những bài toán mới được làm chặt từ những bài toán đã biết

Bài toán 5. *Cho* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\left(\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}} + \sqrt[n]{\frac{a_2}{a_3}} + \cdots + \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_1}}\right).$$

Bài toán 6. *Cho* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *là các số thực không âm. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n \geqslant a_n \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Bài toán 7. *Cho các số thực* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *và* $b_1, b_2, \ldots, b_n$, $(n \geqslant 2)$ *khi đó*

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) &\geqslant \left[\sum_{i=1}^n \left(a_i^2 + b_i^2\right)\right]\left[\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 b_i^2}{a_i^2 + b_i^2}\right] \\
&\geqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 + \frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^n \left|\sqrt{\frac{\left(a_i^2 + b_i^2\right)\left(a_{i+1}^2 b_{i+1}^2\right)}{a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2}} - \sqrt{\frac{\left(a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2\right)\left(a_i^2 b_i^2\right)}{a_i^2 + b_i^2}}\right|\right]^2 \\
&\geqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2,
\end{aligned}$$

quy ước $a_{n+1} = a_1$, $b_{n+1} = b_1$.

Bài toán 8. *Cho ba số thực dương* a, b, c *thỏa mãn* $abc = 1$. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương* $k \geqslant 3$ *ta luôn có*

$$\frac{1}{a^k(b+c)} + \frac{1}{b^k(c+a)} + \frac{1}{c^k(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Bài toán 9. *Cho ba số thực dương* a, b, c *và hai số nguyên dương* $p \geqslant 2q$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt[p]{(a^2+8bc)^q}} + \frac{b}{\sqrt[p]{(b^2+8ca)^q}} + \frac{c}{\sqrt[p]{(c^2+8ab)^q}} \geqslant (a+b+c)^{\frac{p-2q}{p}}.$$

Bài toán 10. *Với các số thực* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *và* $b_1, b_2, \ldots, b_n$, $(n \geqslant 2)$ *ta có*

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + b_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i + b_i}\right) &\geqslant \left[\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{a_i^2 + b_i^2} + \frac{1}{a_i + b_i}\right)\right]\left[\sum_{i=1}^n \frac{\left(\sqrt{a_i^2 + b_i^2}\right)\left(\frac{1}{a_i+b_i}\right)}{\left(\sqrt{a_i^2 + b_i^2} + \frac{1}{a_i+b_i}\right)}\right] \\
&\geqslant \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}{a_i + b_i}}\right)^2 \geqslant \frac{n^2}{\sqrt{2}} + \left[\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}{a_i + b_i} - \frac{1}{\sqrt{2}}}\right]^2 \geqslant \frac{n^2}{\sqrt{2}} \geqslant n\sqrt{n}.
\end{aligned}$$

Bài toán 11. *Cho các số thực* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *và* $b_1, b_2, \ldots, b_n$, $(n \geqslant 1)$ *khi đó giả sử* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *là một hoán vị nào đó của các số* $a_1, a_2, \ldots, a_n$. *Chứng minh rằng*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{c_i+b_i}\right) \geqslant \frac{n^2}{\sqrt{2}}.$$

Bài toán 12. *Ta chia số thực* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *và* $b_1, b_2, \ldots, b_n$, $(n \geqslant 1)$ *làm* n *nhóm sao cho trong mỗi nhóm có ít nhất một số. Gọi* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *lần lượt là tổng các số trong mỗi nhóm. Chứng minh rằng*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{M_i}\right) \geqslant \frac{n^2}{\sqrt{2}}.$$

Bài toán 13. *Cho* $a_i, b_i > 0,\ \forall i = \overline{1,n}$. *Chứng minh rằng*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+b_i}\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{a_i+b_i}}\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{b_i}{a_i+b_i}}\right)^2\right].$$

Bài toán 14. *Cho* $a_i, b_i, c_i > 0,\ \forall i = \overline{1,n}$. *Chứng minh rằng*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2+c_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+b_i+c_i}\right) \geqslant \frac{n^2}{\sqrt{3}}.$$

Bài toán 15. *Cho* $a_i, b_i, c_i > 0,\ \forall i = \overline{1,n}$. *Chứng minh rằng*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2+c_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+b_i+c_i}\right) \geqslant \frac{n^2}{\sqrt{3}}+\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\sqrt{a_i^2+b_i^2+c_i^2}}{a_i+b_i+c_i}-\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^2.$$

Bài toán 16. *Cho* $a_i, b_i, c_i > 0,\ \forall i = \overline{1,n}$ *và* $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *lần lượt tương ứng là một hoán vị tùy ý của* $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n), (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. *Chứng minh rằng*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2+c_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+y_i+z_i}\right) \geqslant \frac{n^2}{\sqrt{3}}.$$

Bài toán 17. *Cho* $a_i, b_i > 0,\ \forall i = \overline{1,n}$. *Chứng minh rằng*

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^m+b_i^m\right)\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(a_i+b_i)^m}\right] \geqslant \frac{n^2}{2^{m-1}}.$$

Bài toán 18. *Cho* $a_i, b_i > 0,\ \forall i = \overline{1,n}$. *Chứng minh rằng*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt[m]{a_i^m+b_i^m}}{a_i+b_i} \geqslant \frac{n}{\sqrt[m]{2^{m-1}}}.$$

Bài toán 19. *Cho* $a_i,\ b_i > 0,\ \forall i = \overline{1, n}$. *Chứng minh rằng*

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[m]{a_i} + \sqrt[m]{b_i}}\right]^m \geqslant \frac{n^{m+1}}{2^{m-1}}.$$

Bài toán 20. *Cho* $a_i,\ b_i > 0,\ \forall i = \overline{1, n}$. *Chứng minh rằng*

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{a_i^m + b_i^m} \geqslant \frac{1}{n\sqrt[m]{2^{m-1}}}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{b_i}\right)^2\right].$$

Bài toán 21. *Cho* $a_i,\ b_i > 0,\ \forall i = \overline{1, n}$. *Chứng minh rằng*

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{a_i^m + b_i^m} \geqslant \frac{1}{(n\sqrt[m]{2})^{m-1}}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{a_i}\right)^m + \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{b_i}\right)^m\right].$$

Bài toán 22. *Cho các số thực dương* $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ (n \geqslant 1)$. *Chứng minh rằng*

$$\prod_{i=1}^{n}\left(a_i^{n+2} - a_i^2 + n\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^n.$$

Bài toán 23. *Cho các số thực dương* $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ (n \geqslant 1,\ k \geqslant 2)$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a_1^{k+1}}{a_2^k} + \frac{a_2^{k+1}}{a_3^k} + \cdots + \frac{a_n^{k+1}}{a_1^k} \geqslant \frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_1}.$$

Bài toán 24. *Cho các số thực dương* $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ (n \geqslant 1,\ k \geqslant 2)$ *có tổng bằng* 1. *Với* $\alpha, \beta, \lambda \geqslant 0$ *thỏa mãn* $\alpha^2 + \beta^2 + \lambda^2 > 0$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{x_1^k}{\alpha x_1 + \beta x_2 + \lambda x_3} + \frac{x_2^k}{\alpha x_2 + \beta x_3 + \lambda x_4} + \cdots + \frac{x_n^k}{\alpha x_n + \beta x_1 + \lambda x_2} \geqslant \frac{1}{n^{k-2}(\alpha + \beta + \lambda)}.$$

Bài toán 25. *Cho ba số thực dương* $a,\ b,\ c$ *và số nguyên* $k \geqslant 3$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a^4 + 2b^2c^2}{(a^2 + 2bc)^k} + \frac{b^4 + 2c^2a^2}{(b^2 + 2ca)^k} + \frac{c^4 + 2a^2b^2}{(c^2 + 2ab)^k} \geqslant \frac{3^{k-2}}{(a + b + c)^{2k-4}}.$$

Bài toán 26. *Với sáu số thực dương* $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ *và số nguyên dương* $k \geqslant 2$ *thì*

$$\frac{a^k}{x} + \frac{b^k}{y} + \frac{c^k}{z} \geqslant \frac{(a + b + c)^k}{3^{k-2}(x + y + z)}.$$

Bài toán 27. *Cho ba số thực dương* $a,\ b,\ c$ *và số nguyên* $n \geqslant 2$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a^{n+1}}{b + c} + \frac{b^{n+1}}{c + a} + \frac{c^{n+1}}{a + b} \geqslant \frac{(a + b + c)^{n-1}}{2 \cdot 3^{n-2}} \cdot \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n + c^n}{3}}.$$

Bài toán 28. *Cho ba số thực dương* $a,\ b,\ c$ *và* p *là số nguyên dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt[p]{b + 2c}} + \frac{b}{\sqrt[p]{c + 2a}} + \frac{c}{\sqrt[p]{a + 2b}} \geqslant (a + b + c)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Bài toán 29. *Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a^4}{b^2c^2}+2}+\sqrt{\frac{b^4}{c^2a^2}+2}+\sqrt{\frac{c^4}{a^2b^2}+2}\geqslant 3\sqrt{3}.$$

Bài toán 30. *Với k là số tự nhiên và ba số thực dương x_k, y_k, z_k, α, β thỏa mãn*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k=\sum_{k=1}^{n} y_k=\sum_{k=1}^{n} z_k=1.$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên $p\geqslant 2$ ta có

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(1+x_k)^p}{\alpha y_k+\beta z_k}\geqslant\frac{2^p}{n^{p-2}(\alpha+\beta)}.$$

Bài toán 31. *Cho a_k, $b_k>0$, $k=\overline{1,n}$ và số nguyên dương m. Chứng minh rằng*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt[m]{a_k^m+b_k^m}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k+b_k}\right)\geqslant\frac{n^2}{\sqrt[m]{2^{m-1}}}.$$

Tài liệu

[1] Nguyễn Văn Mậu, Bất đẳng thức định lí và áp dụng, NXB Giáo dục, 2006.

[2] Phạm Kim Hùng, Sáng tạo bất đẳng thức, NXB Tri thức, 2006.

[3] Phạm Văn Thuận, Lê Vĩ, Bất đẳng thức suy luận và khám phá, NXB ĐHQG Hà Nội, 2007.

[4] Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

[5] Tạp chí Epilon.

BẢY TRỤ CỘT THÔNG THÁI CỦA THỐNG KÊ HỌC

Nguyễn Văn Tuấn

GIỚI THIỆU

Chuyên mục điểm sách kỳ này của Epsilon chúng tôi vinh dự nhận được bài viết từ giáo sư Nguyễn Văn Tuấn, với bài điểm về cuốn "Bảy trụ cột thông thái của thống kê học" ("The Seven Pillars of Statistical Wisdom") của tác giả Stephen M. Stigler. Đây là một quyển sách mang lại một góc nhìn và những lý giải mới về những phương pháp thống kê đã được sử dụng xuyên suốt chiều dài lịch sử của thống kê học. Chúng tôi chủ quan cho rằng tác phẩm sẽ giúp cho người đọc hiểu sâu hơn về các phương pháp thống kê, và qua đó, giúp chúng ta không chỉ dùng thống kê như những công cụ, mà còn hiểu được đó là cả một hệ thống tư duy. Xin mời độc giả đến với bài điểm sách này của giáo sư Nguyễn Văn Tuấn.

Một trong những cuốn sách khoa học mà tôi rất thích trong vài tháng gần đây là cuốn *"The Seven Pillars of Statistical Wisdom"* của tác giả Stephen M. Stigler (1). Đây là một cuốn sách nhỏ (200 trang) cung cấp cho chúng ta những lí giải cực kì lí thú về khoa học thống kê và lịch sử đằng sau những phương pháp mà chúng ta sử dụng trong suy luận khoa học. Như tựa đề cuốn sách, tác giả Stigler tập trung vào giải thích 7 trụ cột thông thái của thống kê học, và tôi thử tóm lược theo cách hiểu của tôi dưới đây.

Nhưng trước khi giải thích, tôi thấy cần phải dành vài chữ giải thích ý nghĩa chữ *wisdom*, mà tôi thấy hơi khó dịch sang tiếng Việt mình. Ở mức độc đơn giản nhất, *wisdom* là thông thái, khôn ngoan. Nhưng nếu có kinh nghiệm cọ sát với xã hội nói tiếng Anh thì hình như chữ "thông thái" và "khôn ngoan" có vẻ không tương đương với wisdom. Trong ngữ cảnh của tựa đề cuốn sách này, tôi hiểu *wisdom* như là những tri thức và trải nghiệm được đúc kết qua những trải nghiệm thực tế, cũng giống như những câu ca dao là những tinh tuý về ứng xử ở đời mà cha ông chúng ta đã đúc kết và truyền lại.

Để hiểu các khái niệm trong sách, cần phải phân biệt dữ liệu (*data*) và thông tin (*information*). Dữ liệu là những gì chúng ta thu thập từ nghiên cứu. Để chuyển hoá dữ liệu thành thông tin, chúng ta phải áp dụng phương pháp phân tích thống kê. Nói cách khác, thống kê học là công cụ để chúng ta thu nạp thông tin từ dữ liệu. Dĩ nhiên, từ thông tin, chúng ta có thể biến thành kiến thức (*knowledge*) qua dùng phương pháp qui nạp khoa học.

Sau khi phân biệt được sự khác biệt giữa dữ liệu, thông tin, và kiến thức, chúng ta thử điểm qua 7 trụ cột mà tác giả Stigler đề cập trong cuốn sách. Bảy trụ cột này cũng có thể xem là 7 nghịch lí, và tôi sẽ giải thích thêm dưới đây:

Trụ cột 1 - aggregation: Qui luật loại bỏ dữ liệu để thu nạp thông tin

Trong phần này, Stigler lí giải và đưa ra một nhận xét làm chúng ta ngạc nhiên: đó là chúng ta thu nạp kiến thức bằng cách loại bỏ thông tin! Chẳng hạn như đối phó với một dãy số liệu về chiều cao, chúng ta chỉ cần tính một số trung bình, và dùng nó như là một thông tin để kiến tạo tri thức. Còn tất cả những con số để tạo nên số trung bình thì bị loại bỏ, không được đề cập đến. Mỗi ngày, chúng ta đọc và nghe biết bao số trung bình, từ thị trường chứng khoán, chính sách kinh tế, đến nghiên cứu y khoa, tất cả đều dùng số trung bình để đi đến những quyết định phức tạp.

Lịch sử và sự ra đời của con số trung bình cũng được tác giả diễn giải rất tường tận. Thống kê học, hay ít ra là các khái niệm thống kê học, đã được sử dụng trong thiên văn học từ thế kỉ 18, phải đợi đến giữa thế kỉ 19 thì mới thịnh hành. Lí do là vấn đề đo lường và liên quan đến giá trị trung bình. Tác giả Stigler chỉ ra rằng nếu chúng ta đo lường [chẳng hạn như] Sao Mộc, thì chúng ta biết rõ đó là một thực thể, nó ở một vị trí và chúng ta có thể ước tính sai số. Nhưng nếu chúng ta đo lường tuổi thọ hay mức độ lạm phát kinh tế, thì chúng ta không có được cái "xa xỉ" như đo lường Sao Mộc, bởi vì những biến số như tuổi thọ nó xuất phát từ mẫu mà chúng ta có được và chúng ta không biết được giá trị thật của quần thể. Người có công đầu trong việc phát kiến trị số trung bình là Nhà khoa học người Bỉ Adolphe Quetelet (người sáng tạo ra chỉ số body mass index). Vào năm 1831, Quetelet "sáng chế" ra cái mà ông gọi là "L'homme Moyen" (người trung bình). Người trung bình là một cá nhân hư cấu, với giá trị trung bình mà chúng ta có thể sử dụng để đại diện một nhóm người. Do đó, Quetelet tính chiều cao và trọng lượng trung bình của một nhóm lính Pháp, rồi xem đó là một người lính tiêu biểu. Nhưng Quetelet hiểu được rằng trị số trung bình sẽ dao động giữa các nhóm lính, và ông bàn về độ chính xác cũng như cách tính. Từ đó, khoa học thống kê có một giá trị mà sau này trở thành phổ biến nhất và được áp dụng trong hầu như bất cứ lĩnh vực xã hội nào. Cái bất ngờ mà tác giả Stigler chỉ ra rằng chúng ta có cái giá trị tiêu biểu bằng cách loại bỏ dữ liệu!

Trụ cột 2 - information: Qui luật giảm lượng thông tin

Giả dụ như nếu chúng ta ước tính số trung bình quần thể dựa trên 100 đối tượng (và gọi là x1), và số trung bình dựa trên 200 đối tượng (x2), câu hỏi đặt ra là giá trị của thông tin trong x2 cao gấp 2 lần so với giá trị thông tin trong x1? Câu trả lời là không. Trong thực tế, nếu chúng ta tăng lượng dữ liệu gấp 2 lần thì giá trị thông tin chỉ tăng khoảng 1.4 lần. Nếu chúng ta tăng lượng dữ liệu gấp 3 lần thì lượng thông tin chỉ tăng 1.7 lần.

Từ đâu mà có các con số đó? Tác giả chỉ ra một sự thật hiển nhiên từ công thức tính sai số chuẩn (standard error). Sai số chuẩn bằng độ lệch chuẩn chia cho căn số bậc 2 của số cỡ mẫu; hay nói cách khác, độ lệch chuẩn bằng sai số chuẩn nhân cho căn số bậc 2 của lượng dữ liệu. Chẳng có gì mới ở đây, vì De Moivre đã chỉ ra từ 1738, và đó cũng chính là lí thuyết đằng sau Định lí giới hạn trung tâm (Central Limit Theorem).

Nhưng cái hay ở đây là tác giả Stigler đã đưa ra một cách diễn giải rất có ý nghĩa trong bối cảnh Dữ liệu Lớn (Big Data) đang rất thịnh hành như là một xu hướng thống kê "thời thượng". Những người tin vào Dữ liệu Lớn nghĩ rằng bằng cách tăng lượng dữ liệu thì chúng ta sẽ có thông tin chính xác hơn, đáng tin cậy hơn. Đúng nhưng chưa đủ, bởi vì lượng thông tin không phải là hàm số tuyến tính của lượng dữ liệu.

Trụ cột 3 - likelihood: Thu nạp thông tin từ tình trạng bất định

Trong chương này, tác giả Stigler bàn về lí thuyết khả dĩ (Likelihood). Trong phần này, tác giả Stigler lí giải rằng chúng ta thu nạp thông tin từ dữ liệu qua các phương pháp như kiểm định thống kê (test of significance) và trị số P mà Ronald Fisher đề xướng từ năm 1925, cùng với những phương pháp sau này như khoảng tin cậy 95%. Các phương pháp này cũng đã giúp chúng ta giảm sự bất định trong cuộc sống. Kiểm định thống kê mà Ronald Fisher đề xướng không phải là ý tưởng mới, bởi vì phương cách này đã được John Arbuthnot áp dụng trước đó để tính toán xem hiện tượng sinh con trai nhiều hơn con gái là do ý của Thượng đế hay ngẫu nhiên!

Trụ cột 4 - intercomparison: So sánh

Bất cứ ai làm nghiên cứu khoa học cũng cần so sánh. Thường là so sánh hai nhóm xem có khác nhau một cách có hệ thống hay khác biệt chỉ là do yếu tố ngẫu nhiên. Phương pháp kiểm định t (do William Gosset đề xướng) là một phương pháp quen thuộc. Một phương pháp so sánh khác cũng hay được áp dụng là phân tích phương sai (ANOVA hay analysis of variance) do Ronald Fisher phát kiến. Trong khi các ngành khác, người ta so sánh với một chuẩn vàng (gold standard), thì khoa học thống kê so sánh thông tin trong cùng một dữ liệu, một nghiên cứu.

Những ai đọc sách sử thống kê học đều biết rằng William Gosset từng làm việc cho hãng bia Guiness, và công việc của ông lúc đó là kiểm nghiệm chất lượng bia. Trong nhiệm vụ đó, ông phải làm nghiên cứu nhưng thường dựa trên số mẫu nhỏ, và "cái khó ló cái khôn", ông đã sáng chế ra phương pháp so sánh khác biệt dựa vào cỡ mẫu nhỏ. Trong một dịp nghỉ hè (sabbatical) ông thăm labo của Karl Pearson tại University College London, và viết bài báo nổi tiếng. Khi bài báo được gửi cho tập san thống kê học, ông không được kí tên thật (vì là nhân viên của Guiness), nên phải kí dưới bút danh là "Student". Từ đó, khoa học có phương pháp kiểm định gọi là "Student's test".

Trụ cột 5 - regression: Thu nạp thông tin từ qui luật hồi qui về số trung bình

Một trong những phương pháp để chúng ta thu nạp thông tin rất hữu hiệu là mô hình hồi qui tuyến tính (linear regression model). Mô hình này là một triển khai từ phương pháp phân tích tương quan (correlation analysis). Phân tích tương quan là phương pháp do Nhà nhân chủng học trứ danh Francis Galton đề xướng từ cuối thế kỉ 19. Lúc đó, Galton đang nghiên cứu về ảnh hưởng của di truyền đến trí thông minh, và ông dùng chiều cao là một marker. Ông quan sát rằng những cặp cha mẹ có chiều cao thấp hơn trung bình thường sinh con có chiều cao cao hơn cha mẹ; ngược lại, những cặp vợ chồng có chiều cao cao thường sinh con có chiều cao thấp hơn họ. Đây là hiện tượng hồi qui về số trung bình, hay thuật ngữ tiếng Anh là "regression to the mean".

Đây là một trong những chương hay nhất của cuốn sách. Tác giả bắt đầu với câu chuyện về Charles Darwin, một người em họ của Francis Galton. Darwin là người không thích toán, không phải ông kém khả năng về toán, mà ông cho rằng toán không giúp gì cho khoa học! Darwin đề ra ý tưởng gọi là "The Rule of Three" hay "Qui luật tam suất". Ông nói nếu chúng ta biết rằng a/b = c/d và nếu chúng ta biết 3 số, thì chúng ta có thể xác định được số thứ 4. Nhưng trong thực tế, chúng ta cần nhiều tập hợp 4 giá trị để ước tính tham số của mô hình hồi qui tuyến tính. Nhưng ý tưởng về phân loại chủng vật của Darwin sau này lại nhờ các phương pháp phân tích đa biến giúp đỡ rất nhiều. Tất cả các phương pháp phân tích đa biến đều xuất phát từ mô hình hồi qui tuyến tính.

Trụ cột 6 - design: Thu nạp thông tin từ số ngẫu nhiên

Ngạc nhiên thay, chúng ta thu nạp thông tin cơ chế ... ngẫu nhiên hoá. Ý nghĩa của trụ cột này cần một vài lời giải thích. Thiết kế là một phương pháp thu nạp thông tin có hệ thống. Nhưng thiết kế là phải dùng đến cơ chế ngẫu nhiên hoá (randomization). Chẳng hạn nếu chúng ta muốn đánh giá hiệu quả của một thuốc điều trị bệnh, chúng ta phải chia nhóm bệnh nhân một cách ngẫu nhiên để đảm bảo các nhóm đều có những yếu tố nhiễu giống nhau.

Thật ra, có thể xem thiết kế nghiên cứu là một cách tối ưu hoá. Trong chương này, tác giả Stigler dìu dắt chúng ta qua lịch sử của thiết kế nghiên cứu hết sức thú vị. Ý tưởng thiết kế nghiên cứu để thu nạp thông tin xuất phát từ sổ số bên Pháp vào năm 1757. Sổ số lúc đó đóng góp 4% cho ngân sách của Pháp (có lẽ giống như sổ số tràn lan hiện nay ở Việt Nam). Sau đó khi Ronald Fisher làm việc cho Trạm thí nghiệm Rothamsted, ông mới nghĩ ra phương pháp chia nhóm ngẫu nhiên (randomization). Trong một bài diễn thuyết trong Hội nghị Thống kê học Ấn Độ năm 1938, Fisher tuyên bố rằng *"To consult the statistician after an experiment is finished is often merely to ask him to conduct a post mortem examination. He can perhaps say what the experiment died of"* (Tư vấn nhà thống kê học sau khi thí nghiệm đã làm xong có thể ví von như là hỏi nhà thống kê học làm một cuộc giảo nghiệm tử thi. Nhà thống kê học có thể nói cái thí nghiệm chết vì lí do gì.) Ý của Fisher là muốn thí nghiệm có kết quả tốt và muốn thu nạp thông tin đáng tin cậy thì phải tư vấn nhà thống kê học trước khi làm thí nghiệm – một lời khuyên vẫn còn ý nghĩa thời sự ngày hôm nay. Nhưng việc này đòi hỏi nhà thống kê phải hiểu vấn đề khoa học và hiểu qui trình suy luận khoa học.

Trụ cột 7 - residual: Thu nạp thông tin từ ... sai số

Khi nói "sai số" ở đây, tôi muốn nói đến dao động dư, tức "residuals" hay "error terms" trong mô hình hồi qui tuyến tính. Trong khoa học, thỉnh thoảng chúng ta phát hiện những cái bình thường từ những dữ liệu bất bình thường. Cái bất bình thường ở đây chính là residuals, là sai số từ mô hình. Chẳng hạn như để phát hiện những gen có liên quan đến bệnh lí, chúng ta sẽ mô hình phân bố của gen dựa vào một qui luật sinh học, và các dữ liệu nằm ngoài hay lệch so với giá trị kì vọng chính là những gen đáng quan tâm. Như vậy, chúng ta phát hiện cái cơ chế sinh học từ những dữ liệu và thông tin bất thường.

Điều này có ý nghĩa rất quan trọng cho nhà thống kê học. Đối với những nhà thống kê học được huấn luyện trong các đại học mà không có tương tác với khoa học, phân tích dao động dư là để kiểm định tính hợp lí của mô hình của họ. Nhưng đối với khoa học, điều đó chẳng quan trọng; điều quan trọng là những dữ liệu mà mô hình không giải thích được.

Cuốn sách được viết với văn phong khoa học nhưng vẫn hấp dẫn với người ngoài khoa học. Nhưng thỉnh thoảng, tác giả có vẻ giả định người đọc phải hiểu một số khái niệm thống kê học. Chẳng hạn như người đọc phải "động não" để hiểu

$$L(\Theta) = L(\Theta)|X \text{ and } Cov(L, W) = E\{Cov(L, W|S)\} + Cov(E\{L|S\}, E\{W|S\})$$

Nhưng may mắn thay, nhưng công thức loại này chỉ xuất một vài lần trong sách, và người đọc không cần hiểu chúng mà vẫn nắm được ý nghĩa đằng sau các mô hình thống kê.

Tóm lại, cuốn sách *"The Seven Pillars of Statistical Wisdom"* là một tác phẩm rất hay và đáng đọc. Tác phẩm này hay là vì tác giả đã đem đến cho chúng ta những cái nhìn rất tươi, với những lí giải rất mới về những phương pháp thống kê cổ điển. Chỉ trong 200 trang sách mà tác giả đã lược qua những điểm chính (7 điểm) trong suốt chiều dài lịch sử của chuyên ngành khoa học thống kê. Cuốn sách còn giúp cho chúng ta, những người làm nghiên cứu thực nghiệm, hiểu sâu hơn về các phương pháp thống kê, và qua đó giúp chúng ta suy nghĩ một cách thống kê, chứ không phải suy nghĩ như là một công cụ. Xin nhấn mạnh: tôi xem thống kê học là một cách suy nghĩ. Thay vì tập trung vào những chi tiết tính toán, chúng ta cần phải hiểu ý nghĩa đằng sau của các phương pháp và mô hình thống kê. Nếu bạn là nhà thống kê học, nhà khoa học thực nghiệm, cuốn sách *"The Seven Pillars of Statistical Wisdom"* phải có trong tủ sách của các bạn.

Ghi thêm:

(1) Stephen M. Stigler là giáo sư xuất sắc chuyên ngành sử thống kê thuộc Đại học Chicago. Ông tốt nghiệp tiến sĩ thống kê học từ Đại học California, Berkeley, nhưng sau đó ông chuyển về Đại học Wisconsin, Madison, và năm 1979 thì chuyển sang Đại học Chicago cho đến nay. Ông công bố nhiều công trình nghiên cứu về sử thống kê rất có giá trị. Những công trình này được đúc kết thành cuốn sách *"The History of Statistics"* (1986) và *"Statistics on the Table"* (1999). Ngoài vai trò là sử gia của khoa học thống kê, ông còn biên tập phần lí thuyết cho tập san *Journal of the American Statistical Association* (1979-1982). Với những thành tích đó, Stigler là người có thẩm quyền để viết về những ý nghĩa đằng sau 7 wisdom thống kê mà tôi đang giới thiệu đến các bạn.

MỘT SỐ BÀI TOÁN TRÊN TÂM ĐƯỜNG TRÒN EULER

Trần Quang Hùng

GIỚI THIỆU

Bài viết xoay quanh một số bài toán liên quan tới tâm đường tròn Euler. Các bài toán này hầu như đều là kết quả của tác giả trong quá trình đi tập huấn một số đội tuyển thi HSG trên cả nước. Thời gian gần đây, nhiều bài toán rất thú vị trên tâm đường tròn Euler và đường tròn Euler liên tục được phát hiện, trong đó bản thân tác giả cũng tìm ra được một số bài toán mới về chủ đề này. Mặt khác quãng thời gian tác giả giảng dạy những bài toán này cách thời điểm hiện tại cũng đã lâu, tuy nhiên một số bài toán vẫn có nhiều giá trị. Đặc biệt là các bài toán đó vẫn được sử dụng khá tốt trong việc bồi dưỡng các em học sinh yêu hình học. Do đó tôi xin trân trọng giới thiệu với bạn đọc bài viết tổng hợp này.

1. Một số bài toán ví dụ

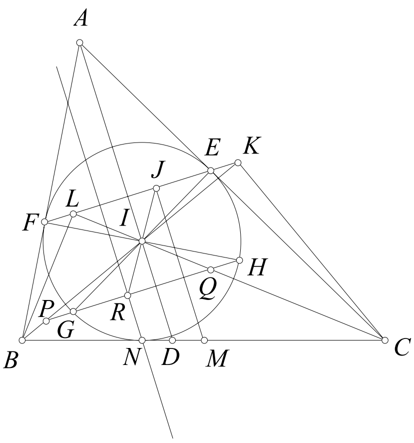
Đường tròn Euler hay tên quốc tế thường gọi là đường tròn 9 điểm [7], là đường tròn đi qua trung điểm ba cạnh, chân ba đường cao và trung điểm ba đoạn thẳng nối trực tâm và ba đỉnh tam giác. Đây là một kết quả rất nổi tiếng và được khai thác trong rất nhiều bài toán khác nhau. Tâm đường tròn này cũng là một đề tài thú vị của các bài nghiên cứu hình học sơ cấp và cũng là đề tài hay dành cho các cuộc thi học sinh giỏi toán trong nước và quốc tế. Phần này Tôi xin trình bày lại một số bài toán chủ yếu do tôi đề xuất liên quan đến tâm đường tròn thú vị này trong khoảng thời gian từ năm 2013-2014.

Kỳ thi học sinh giỏi toán quốc gia năm 2013 có bài toán như sau [1].

Bài toán 1 (VMO 2013)**.** *Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB lần lượt tại E, F. G, H lần lượt là đối xứng của E, F qua I. Đường thẳng GH giao IB, IC lần lượt tại P, Q. Giả sử B, C cố định, A thay đổi sao cho tỷ số $\frac{AB}{AC} = k$ không đổi. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải. Gọi IB, IC lần lượt cắt EF tại K, L. Chú ý tam giác AEF cân tại A nên $\angle KEC = \angle AEF = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\angle A}{2}) = 180^\circ - \angle BIC = \angle KIC$. Từ đó tứ giác $KEIC$ nội tiếp suy ra $\angle IKC = \angle IEC = 90^\circ$. Tương tự $\angle ILB - 90^\circ$. Từ đó nếu gọi M là trung điểm BC, J là trung điểm KL để có tam tam giác KLM cân nên $MJ \perp EF \quad (1)$.

Do G, H lần lượt là đối xứng của E, F qua I nên đường thẳng GH đối xứng đường thẳng EF qua I. GH, EF lần lượt cắt IB tại P, K suy ra I là trung điểm PK, tương tự I là trung điểm



QL. Vậy hai đoạn KL và PQ đối xứng nhau qua I. Từ đó nếu gọi R là trung điểm PQ thì trung điểm J của KL và R đối xứng nhau qua I hay I là trung điểm RJ.

Gọi trung trực PQ cắt BC tại N, ta thấy RN vuông góc PQ, PQ song song EF $\quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra RN song song JM. Gọi IA cắt BC tại D, dễ có $ID \equiv IA$ vuông góc EF nên ID cũng song song với RN, JM. Từ đó trong hình thang $RJMN$ có I là trung điểm RJ nên ID là đường trung bình, vậy D là trung điểm MN.

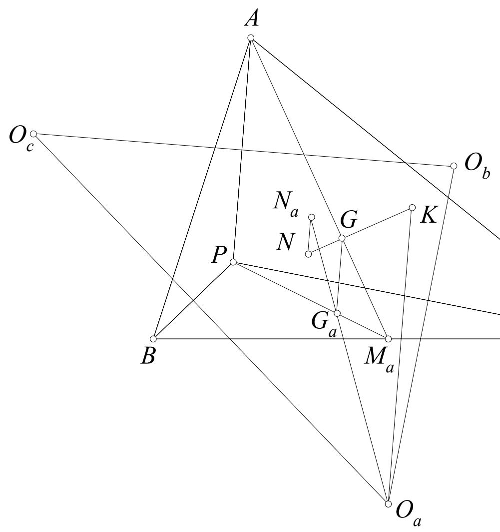
Theo tính chất đường phân giác $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = k$ không đổi nên D cố định. M là trung điểm BC cố định nên N đối xứng M qua D cố định. Vậy trung trực PQ đi qua N cố định. $\square$

Nhận xét. Việc dựng ra thêm các điểm phụ L, K trong lời giải đóng vai trò quan trọng, nó cho phép ta sử dụng phép vị tự để chuyển các tính chất đường thẳng RN và JM cho nhau. Trong quá trình tìm hiểu bài toán tôi nhận thấy rằng thực chất K, L, N là các chân đường cao từ C, B, I của tam giác IBC. Như vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác NKL là đường tròn Euler của tam giác IBC nên nó cũng đi qua M và vì vậy tâm đường tròn Euler của tam giác IBC nằm trên trung trực KL cũng là đường thẳng JM. Vậy nếu từ tâm đường tròn Euler của tam giác IBC mà ta vẽ đường thẳng song song với IA thì nó cũng chính là trung trực KL mà đi qua trung điểm BC. Ta dễ thấy là các đường thẳng qua trung điểm BC, CA, AB mà lần lượt song song với IA, IB, IC thì đồng quy. Do đó ta đề xuất bài toán như sau

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC tâm nội tiếp I. Gọi N_a, N_b, N_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác IBC, ICA, IAB thì các đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt song song với IA, IB, IC đồng quy.*

Qua tìm hiểu và khai thác tôi nhận ra rằng bài toán này đúng không chỉ với tâm nội tiếp I mà thực chất nó đúng với mọi điểm P bất kỳ trong mặt phẳng. Do đó tôi đề xuất bài toán sau

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ. Gọi N_a, N_b, N_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác PBC, PCA, PAB. Chứng minh rằng các đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy.*



Lời giải. Gọi O_a, O_b, O_c lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác PBC, PCA, PAB. Ta dễ thấy đường thẳng qua O_a song song PA chính là đường cao từ O_a của tam giác $O_aO_bO_c$ do đó các đường thẳng qua O_a, O_b, O_c lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy tại trực tâm K của tam giác $O_aO_bO_c$.

Gọi G_a, G_b, G_c, G lần lượt là trọng tâm tam giác PBC, PCA, PAB, ABC ta dễ thấy PG_a và AG đi qua trung điểm M_a của BC, từ đó dễ thấy G_aG song song PA nói cách khác các đường thẳng qua G_a, G_b, G_c lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy tại trọng tâm G của tam giác ABC.

Đến đây là lại chú ý vì N_a là tâm đường tròn Euler của tam giác PBC nên dễ có $2\overrightarrow{G_aN_a} + \overrightarrow{G_aO_a} = \overrightarrow{0}$. Từ đó sử dụng phép chiếu song song phương PA xuống đường thẳng KG, gọi N là hình chiếu song song phương PA của N_a xuống KG ta dễ suy ra $2\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{0}$ nói cách khác đường thẳng qua N_a song song PA đi qua N xác định. Tương tự các đường thẳng qua N_b, N_c lần lượt song song với PB, PC cũng đi qua N ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán trong trường hợp tâm nội tiếp là bài toán có ý nghĩa, việc tổng quát bài toán với điểm P bất kỳ rồi sau đó đặc biệt hóa cho P di chuyển trùng một số tâm đặc biệt để tạo ra bài toán mới là việc làm thú vị. Qua bài toán này ta cũng dễ rút ra tâm đường tròn Euler cũng chỉ là một trường hợp đặc biệt. Tương tư như cách chứng minh trên thì bài toán cũng sẽ đúng với trực tâm hoặc tổng quát hơn là một điểm trên đường thẳng Euler chia đoạn nối trực tâm, trọng tâm tỷ số cố định. Ta có các bài toán khác như sau

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ. Gọi H_a, H_b, H_c lần lượt là trực tâm của các tam giác PBC, PCA, PAB. Chứng minh rằng các đường thẳng qua H_a, H_b, H_c lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy.*

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ. Gọi H_a, H_b, H_c lần lượt là trực tâm của các tam giác PBC, PCA, PAB. Gọi G_a, G_b, G_c lần lượt là trọng tâm các tam giác PBC, PCA, PAB. Gọi L_a, L_b, L_c lần lượt chia các đoạn H_aG_a, H_bG_b, H_cG_c cùng một tỷ số. Chứng minh rằng các đường thẳng qua L_a, L_b, L_c lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy.*

Một khai thác tương tự được tác giả đề nghị trong cuộc thi giải toán mathley [3], các bạn hãy làm như bài luyện tập

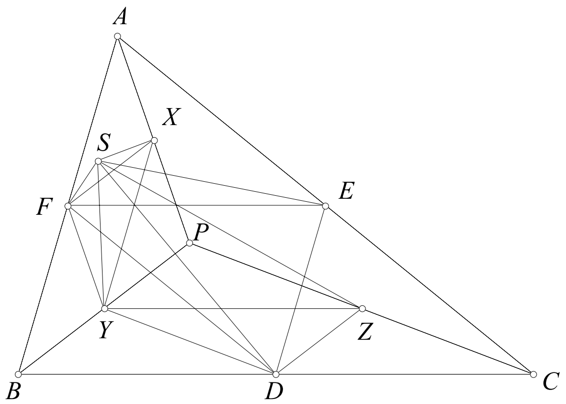
Bài toán 6. *Cho tam giác ABC và DEF nội tiếp đường tròn (O). Gọi N_a, N_b, N_c là tâm đường tròn Euler các tam giác DBC, ECA, FAB. Chứng minh rằng các đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt song song AD, BE, CF đồng quy.*

Sau khi đề xuất bài toán 3, tôi đã mạnh dạn nghĩ tới kết quả thay đường thẳng song song bởi đường thẳng vuông góc và thật tuyệt vời khi bài toán vuông góc đúng, bài toán phát biểu như sau

Bài toán 7 (Kiểm tra đội tuyển THPT chuyên KHTN năm 2014)**.** *Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ. Gọi N_a, N_b, N_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác PBC, PCA, PAB. Chứng minh rằng các đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt vuông góc với PA, PB, PC đồng quy.*

Bài toán trên theo đánh giá của tôi là bài toán hay. Tôi đã sử sụng bài toán này trong đợt kiểm tra đội tuyển VMO của trường THPT chuyên KHTN thật đáng tiếc là không có em nào giải được bài toán này.

Lời giải đầu tiên tôi có được cho bài toán này chưa đẹp, sau đây tôi trình bày một lời giải thứ hai tham khảo ý tưởng từ học trò **Tạ Hà Nguyên**, học sinh lớp 12A1 Toán, khóa 48, trường THPT chuyên KHTN. Trong suốt bài toán này ta ký hiệu (XYZ) chỉ đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ. Công cụ sử dụng trong phần này là góc định hướng giữa hai đường thẳng.



Lời giải. Gọi D, E, F, X, Y, Z lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB, PA, PB, PC, thì các đường tròn $(DYZ), (EZX), (FXY), (DEF)$ lần lượt là các đường tròn Euler của các tam giác PBC, PCA, PAB, ABC. Gọi đường tròn (DYZ) và đường tròn (DEF) cắt nhau tại S khác D. Ta có biến đổi góc có hướng như sau

$(SF, SY) = (SF, SD) + (SD, SY)$

$= (EF, ED) + (ZD, ZY)$ (Do S thuộc các đường tròn $(DYZ), (DEF)$)

$= (BD, BF) + (BY, BD)$ (Do $EF \parallel BD, ED \parallel AC, YZ \parallel BD, ZD \parallel BY$)

$= (BY, BF)$

$= (XF, XY)$ (Do $XY \parallel BF, XF \parallel BY$).

Do đó S thuộc (FXY). Tương tự S thuộc (EZX). Ta có điều phải chứng minh.

Theo bài toán 3 thì các đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt song song PA, PB, PC đồng quy tại Q. Ta chỉ cần chứng minh rằng Q nằm trên đường tròn $(N_aN_bN_c)$ thì hiển nhiên đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt vuông góc với PA, PB, PC sẽ đồng quy tại điểm đối tâm Q. Vậy ta biến đổi góc $(QN_b, QN_c) = (PB, PC) = (DZ, DY) = (SZ, SY) = (N_aN_b, N_aN_c)$. Ta chú ý đẳng thức cuối có là do đường tròn (N_a) và (N_b) có dây cung chung là SZ nên $N_aN_b \perp SZ$, tương tự $N_aN_c \perp SY$. Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán nếu cho P trùng với một số điểm đặc biệt cũng sẽ dẫn tới nhiều hệ quả quan trọng.

Ngoài ra khi khai thác các bài toán xoay quanh tâm đường tròn Euler, chúng ta cũng nhận được nhiều bài toán lạ mắt. Tôi xin giới thiệu một bài toán mà tôi cũng tình cờ tìm ra khi giải một bài toán liên quan tới vấn đề về điểm cố định và tâm đường tròn Euler.

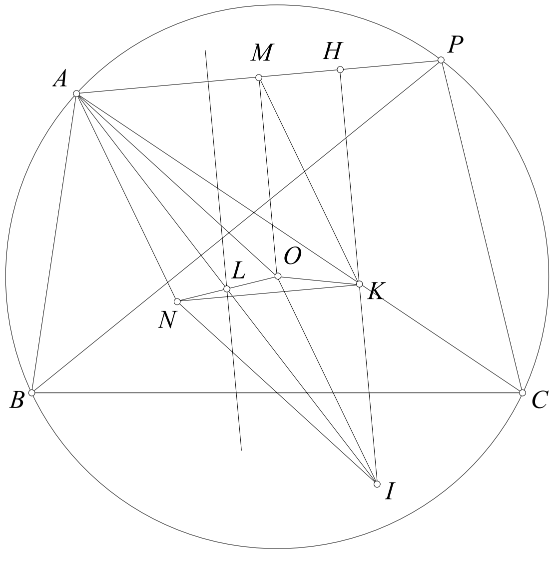
Bài toán 8. *Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi K, L, N lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác DEC, BCA, FAE. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của K, L, N theo thứ tự lên AD, BE, CF. Chứng minh rằng trung trực của AX, EY, CZ đồng quy.*

Trước hết ta có bổ đề sau

Bổ đề. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm trên (O). K là tâm đường tròn Euler của tam giác PBC.*

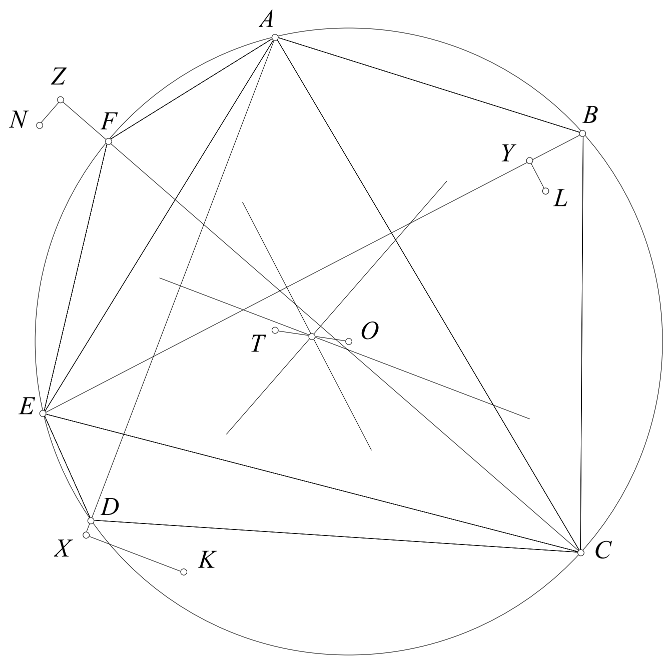
a) Chứng minh rằng đường thẳng qua K vuông góc với PA luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.

b) Gọi H là hình chiếu của K lên PA. Chứng minh rằng trung trực của AH luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.



Chứng minh. a) Gọi N là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC. Gọi L là trung điểm của ON. Gọi I đối xứng A qua L, gọi M là trung điểm PA. Ta đã biết kết quả quen thuộc $\overrightarrow{KN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{MA}$ suy ra $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MK}$. Do I đối xứng A qua L nên $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{OI}$. Vậy từ đó $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{KI}$ suy ra $KI \parallel OM \perp PA$. Vậy đường thẳng qua K vuông góc PA đi qua I cố định. Ta có điều phải chứng minh.

b) Dễ thấy trung trực của AH đi qua trung điểm L của AI cũng là trung điểm ON cố định. Ta có điều phải chứng minh. $\square$



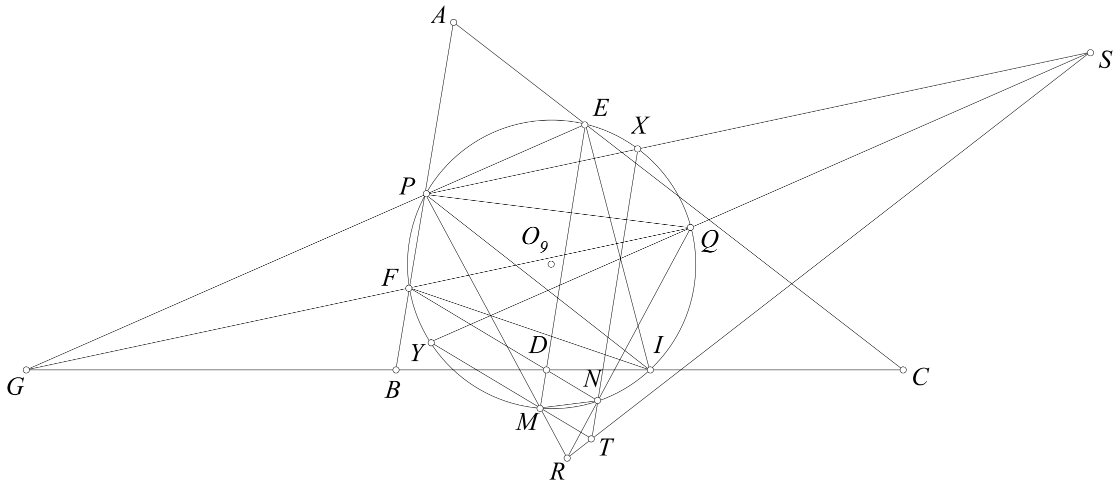
Lời giải bài toán. Bài toán là hệ quả của bổ đề trên ta dễ thấy trung trực các đoạn AX, EY, CZ đồng quy tại trung điểm OT với T là tâm đường tròn Euler của tam giác AEC. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bổ đề là một bài toán đi qua điểm cố định rất quan trọng. Chúng ta hoàn toàn có thể dựa vào bài toán đi qua điểm cố định để đề xuất thành các bài toán chứng minh đồng quy như đã làm trong bài toán trên. Bài toán trên đã từng được tác giả đề nghị trong kỳ thi chọn đội tuyển thi học sinh giỏi quốc gia trường THPT chuyên KHTN năm 2013 xem [4]. Sau đó bài toán này cũng xuất hiện trong [5] và không ghi nguồn gốc, nhân dịp bài viết này, tôi xin giới thiệu lại rõ nguồn gốc với bạn đọc như trên.

Sau đây là một bài toán tác giả cũng tình cờ tìm ra. Bài toán này được tác giả tạo ra khi đang tìm hiểu về các hệ thức trong hàng điểm điều hòa, bắt nguồn từ bài giảng cho lớp học toán online của EgoGreen. Bài toán này cũng đã xuất hiện trong [6] và không ghi nguồn gốc, tôi xin giới thiệu lại rõ nguồn gốc với bạn đọc như trên.

Bài toán 9. *Cho tam giác ABC đường cao BE, CF và đường tròn Euler là (O_9), D, G thuộc BC sao cho $(BC, DG) = -1$. ED, FD lần lượt cắt (O_9) lần lượt tại M, N khác E, F. GE, GF cắt (O_9) lần lượt tại P, Q khác E, F. PM giao NQ tại R. Gọi S là đối xứng của*

G qua trung điểm PQ. Gọi T là đối xứng của D qua trung điểm MN. Chứng minh rằng R, S, T thẳng hàng.



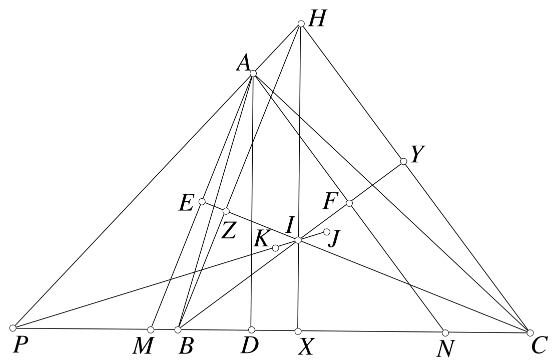
0

Lời giải. Gọi I là trung điểm của BC theo hệ thức Newton ta dễ có $IE^2 = IF^2 = IB^2 = IC^2 = \overline{ID}.\overline{IG}$.

Từ đó dễ có $\angle IFD = \angle IGF, \angle IED = \angle IGE$. Gọi PS cắt (O_9) tại X. Suy ra $\angle EPX = \angle EGF = \angle IGE - \angle IGF = \angle IED - \angle IFD = \angle IED - \angle IEN = \angle MEN$. Từ đó dễ suy ra $EM \parallel NX$ suy ra NT đi qua X. Tương tự gọi SQ cắt (O_9) tại Y thì MT đi qua Y. Áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} P & N & Y \\ Q & M & X \end{pmatrix}$ ta thu được R, S, T thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

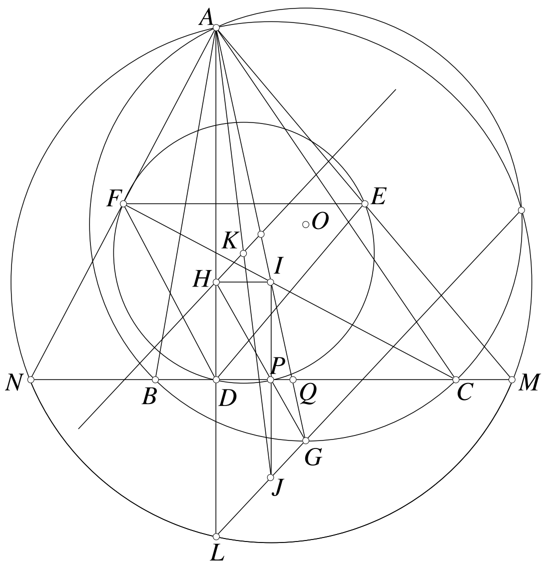
Sau đây là ba bài toán hay liên quan tới tâm đường tròn Euler và tâm đường tròn nội tiếp cũng do tôi đề xuất. Các bài toán này đã được hoàn thiện lời giải bởi một học trò xuất sắc của tôi là **Nguyễn Ngọc Chi Lan** học sinh lớp 12A1 Toán, khóa 48, trường THPT chuyên KHTN.

Bài toán 10. *Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I. D, E, F là hình chiếu của A lên BC, IC, IB. Gọi K là tâm ngoại tiếp tam giác DEF. Chứng minh rằng KI đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác IBC.*



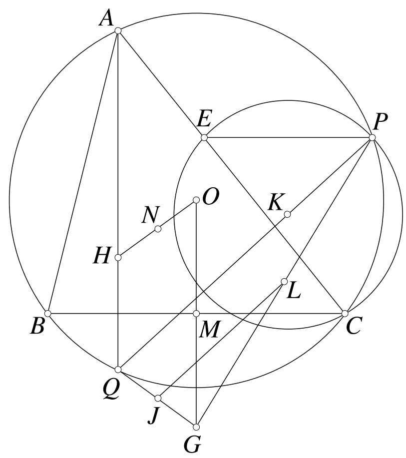
Lời giải. Gọi M, N lần lượt là giao điểm AE, AF với BC. Dễ dàng chứng minh E, F lần lượt là trung điểm AM, AN. Suy ra K là tâm ngoại tiếp tam giác DEF cũng là tâm đường tròn Euler của tam giác AMN. Cũng chứng minh được I là tâm ngoại tiếp tam giác AMN. Gọi IX, BY, CZ lần lượt là các đường cao của tam giác IBC và H là trực tâm tam giác. Dễ thấy $AM \parallel HB, AN \parallel HC$. Gọi P là giao điểm AH, BC. Phép vị tự tâm P biến tam giác AMN thành tam giác HBC. Lại có IK là đường thẳng Euler của tam giác AMN. Gọi J là tâm đường tròn Euler của tam giác HBC, khi đó IJ là đường thẳng Euler của tam giác HBC. Vậy I, J, K thẳng hàng. J là tâm ngoại tiếp (XYZ), suy ra J cũng là tâm Euler của tam giác IBC. Suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán 11. *Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I. D, E, F là hình chiếu của A lên BC, IC, IB. Gọi AI cắt đường tròn ngoại tiếp (O) của tam giác ABC tại G khác A. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác DEF đi qua trung điểm AG.*



Lời giải. Gọi M, N lần lượt là giao điểm AE, AF với BC. H, K lần lượt là trực tâm và tâm ngoại tiếp tam giác DEF. AH cắt (AMN) tại L. J là đối xứng của A qua K và P là hình chiếu của I lên BC. Ta có các kết quả quen thuộc: L là đối xứng của A qua H, I là tâm ngoại tiếp tam giác AMN và J là đối xứng của I qua BC. Như vậy, dễ thấy $HK \parallel JL$ hay JL song song với đường thẳng Euler của tam giác DEF. Do $\angle FAH = \angle FCD = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle ACF = \angle ADF = \angle FEH$ suy ra A, E, F, H cùng thuộc một đường tròn. Lại có $AE \perp IE, AF \perp IF$ suy ra A, E, F, I cùng thuộc một đường tròn, suy ra H thuộc đường tròn đường kính AI, suy ra $IH \perp AD$ suy ra $IHDP$ là hình chữ nhật. Ta chứng minh H, P, G thẳng hàng. Gọi Q là giao điểm AG, BC. Lại có G là tâm ngoại tiếp tam giác IBC nên dễ có $QG.QA = QI(QG + GI)$ suy ra $QG.IA = QI.GI$ suy ra $\frac{QG}{IG} = \frac{IQ}{IA}$ suy ra $\frac{PQ}{PD} = \frac{PQ}{HI} = \frac{QG}{IG}$, suy ra H, P, G thẳng hàng. Suy ra L, J, G thẳng hàng. Suy ra $HK \parallel LG$ suy ra HK đi qua trung điểm AG. □

Bài toán 12. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P di chuyển trên (O). Đường thẳng qua P song song BC cắt CA tại E. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PCE và L là tâm đường tròn Euler của tam giác PBC. Chứng minh rằng đường thẳng qua L song song PK luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.*



Lời giải. Gọi H, N lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn Euler của tam giác ABC. Gọi M là trung điểm BC, và G là đối xứng của P qua L. Kết quả quen thuộc, ta có G là đối xứng của O qua BC. Gọi Q là giao điểm AH với (O). Do $PE \parallel BC$ suy ra $\angle CEP = \angle ACB$, suy ra $\angle CPK = 90^\circ - \angle CEP = 90^\circ - \angle ACB = \angle CAQ = \angle CPQ$ suy ra P, K, Q thẳng hàng. Đường thẳng qua L song song PK cắt GQ tại J. Suy ra J là trung điểm LQ. Tứ giác $OHQG$ là hình thang cân, NJ là đường trung bình của hình thang. Suy ra J đối xứng N qua BC. Suy ra đường thẳng qua L song song PK luôn đi qua điểm cố định là điểm đối xứng với tâm Euler của tam giác ABC qua BC. $\square$

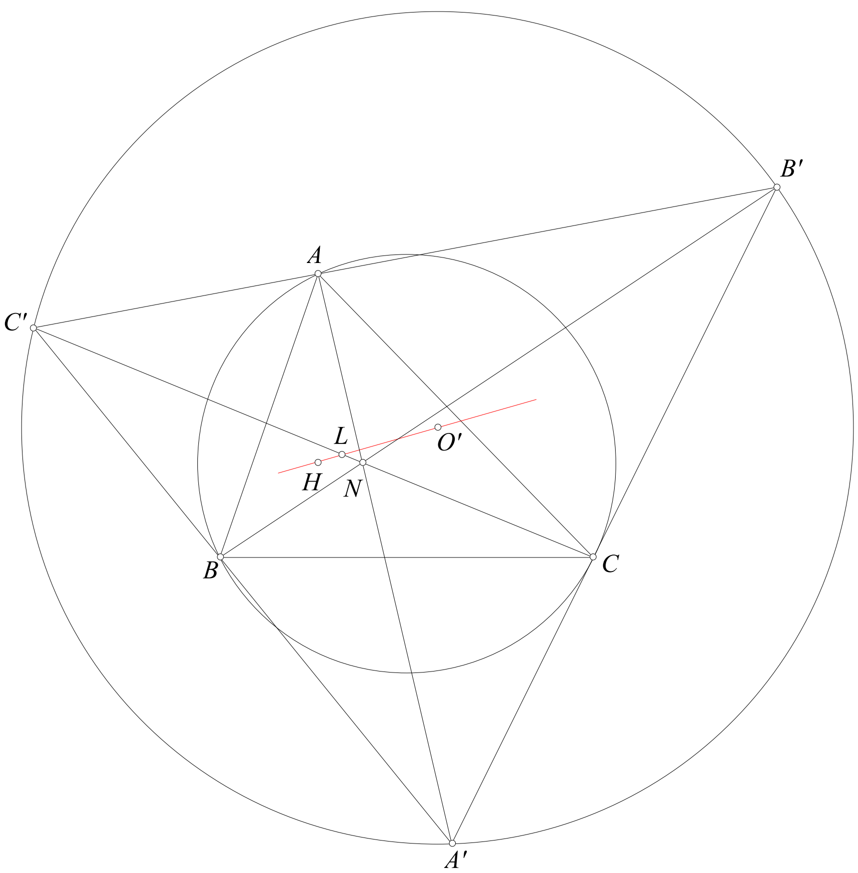
2. Một số bài toán luyện tập

Các bài toán này (trừ bài toán cuối cùng) đều được tác giả sáng tác và đã gửi lên diễn đàn AoPS trong một số năm gần đây.

Bài toán 13. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và có điểm Lemoine L. LA, LB, LC cắt lại (O) tại A', B', C'.*

1) *Chứng minh rằng ABC và $A'B'C'$ có chung hai điểm Brocard Ω_1 và Ω_2.*
2) *Gọi P là trung điểm của đoạn thẳng $\Omega_1\Omega_2$. N và N' là tâm đường tròn Euler của các tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng $PN = PN'$.*

Bài toán 14. *Cho tam giác ABC có trực tâm H, điểm Lemoine L và tâm đường tròn Euler N. Gọi $A'B'C'$ là tam giác anti-Ceva của N. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ nằm trên HL.*



Bài toán 15. *Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O. và tâm đường tròn Euler là N. Tam giác Napoleon là DEF.*

1) *Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác OEF, OFD, ODE đồng quy tại P.*

2) Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy tại Q.

3) Chứng minh rằng đường thẳng PQ chia đôi đoạn thẳng ON.

Bài toán 16 (Tham khảo [9])**.** *Cho tam giác ABC có N, N_a, N_b, và N_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác ABC, NBC, NCA, và NAB. Chứng minh rằng AN_a, BN_b, và CN_c đồng quy.*

Tài liệu

[1] T. Q. Hùng, Mở rộng bài toán hình học trong kỳ thi học sinh giỏi quốc gia năm 2013, tạp chí toán học và tuổi trẻ số 429 tháng 3 năm 2013.

[2] T. Q. Hùng, P. V. Thuận, Cuộc thi giải toán mathley,
`http://www.hexagon.edu.vn/mathley.html`

[3] T. Q. Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013.

[4] T. Q. Hùng, Tỷ số kép, phép chiếu xuyên tâm, hàng điểm điều hòa, chùm điều hòa,
`https://analgeomatica.blogspot.com/2014/01/bai-giang-ty-so-kep-phep-chieu-xuyen.html`

[5] DonaldLove (Nick name người Việt Nam), nice concurrent,
`https://artofproblemsolving.com/community/c6h577336`

[6] lambosama (Nick name người Việt Nam), Very hard concurrent problem,
`https://artofproblemsolving.com/community/c6h560895`

[7] E. W. Weisstein, Nine-Point Circle, from MathWorld–A Wolfram Web Resource,
`http://mathworld.wolfram.com/Nine-PointCircle.html`

[8] T. Q. Hùng, Diễn đàn các bài toán hình học nằm trong AoPS,
`https://artofproblemsolving.com/community/c374081`

[9] C. Kimberling, Encyclopedia of Triangle Centers,
`http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html`

ĐIỂM HUMPTY - DUMPTY TRONG TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG

Nguyễn Trường Sơn
(GV THPT Chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

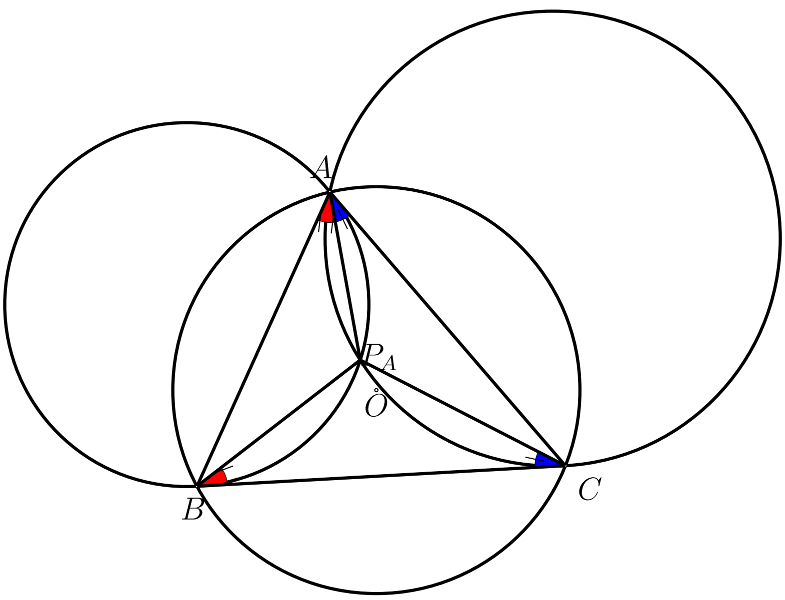
LỜI BAN BIÊN TẬP

Gần đây, nhiều mô hình được khai thác để "tăng tốc" việc tiếp cận các bài toán hình học khó. Ngoài các mô hình kinh điển như tứ giác toàn phần, tứ giác điều hòa, ... ta còn có các điểm đặc biệt với nhiều tính chất trong tam giác, tứ giác. Trong bài viết này, tác giả sẽ giới thiệu về hai điểm Humpty, Dumpty trong tam giác cùng với các ứng dụng của chúng để giải toán.

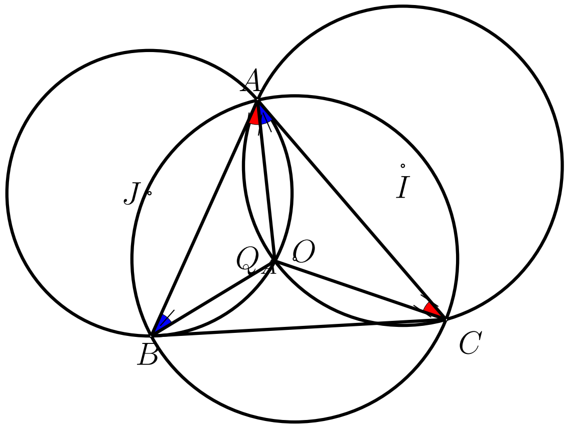
1. Điểm Humpty - Dumpty và một số tính chất liên quan.

1.1. Định nghĩa.

1. **Điểm Humpty.** Cho tam giác ABC. Điểm P_A nằm trong tam giác ABC thỏa mãn $\widehat{P_ACB} = \widehat{P_AAC}, \widehat{P_ABC} = \widehat{P_AAB}$ được gọi là điểm $A-$ Humpty.
Định nghĩa tương tự với các điểm $B-$ Humpty và $C-$ Humpty.



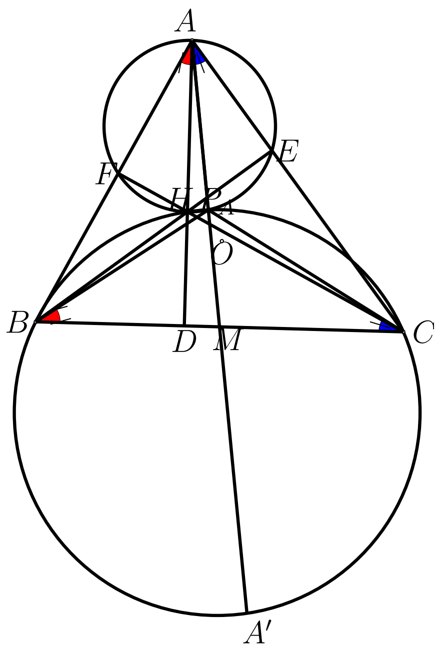
2. **Điểm Dumpty.** Cho tam giác ABC. Điểm Q_A nằm trong tam giác ABC thỏa mãn $\widehat{Q_ACA} = \widehat{Q_AAB}, \widehat{Q_ABA} = \widehat{Q_AAC}$ được gọi là điểm $A-$ Dumpty.
Định nghĩa tương tự với các điểm $B-$ Dumpty và $C-$ Dumpty.



1.2. Tính chất.

Tính chất 1. Cho tam giác ABC có trực tâm H. Giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính AH và đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC nằm trên đường trung tuyến AM. Giao điểm đó chính là điểm $A-$ Humpty.

Chứng minh. Gọi A' là điểm thỏa mãn $ABA'C$ là hình bình hành.
Vì $\widehat{BAC} = \widehat{BA'C} = \pi - \widehat{BHC}$. Suy ra A' thuộc đường tròn (BHC). Vì $\widehat{HBA'} = \widehat{HBC} + \widehat{A'BC} = \dfrac{\pi}{2} - \widehat{ACB} + \widehat{ACB} = \dfrac{\pi}{2}$, vì vậy HA' là đường kính của (BHC).
Khi đó: $\widehat{AP_AH} = \dfrac{\pi}{2} = \pi - \widehat{HP_AA'}$, suy ra P_A nằm trên đường trung tuyến AM.



□

Nhận xét 1. *Đường trung tuyến AM cắt đường tròn (BHC) tại điểm A' khác điểm P_A thì $ABA'C$ là hình bình hành.*

Tính chất 2. Gọi (I) là đường tròn qua A, B tiếp xúc với BC, (J) là đường tròn qua A, C và tiếp xúc với BC. Khi đó giao điểm khác A của hai đường tròn $(I), (J)$ chính là điểm $A-$ Humpty.

Chứng minh. Gọi P là giao điểm thứ hai của hai đường tròn $(I), (J)$.
Vì $\widehat{APB} = \pi - \widehat{CBA}$ và $\widehat{APC} = \pi - \widehat{ACB}$ nên

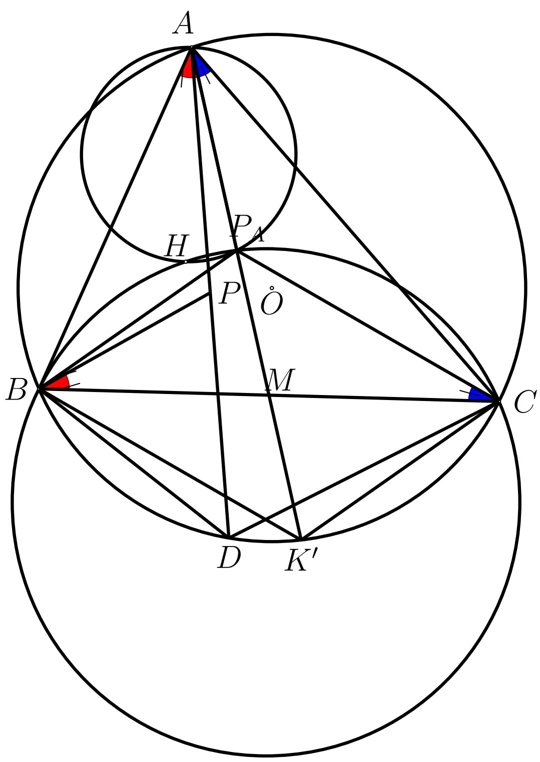
$$\widehat{BPC} = 2\pi - \widehat{APB} - \widehat{APC} = \widehat{ACB} + \widehat{CBA} = \pi - \widehat{BAC}$$

Suy ra P nằm trên đường tròn (BHC). Vì vậy theo tính chất 1, P nằm trên đường trung tuyến của tam giác ABC. Suy ra $P \equiv P_A$. □

Tính chất 3. Cho tam giác ABC nội tiếp (O).AD là đường đối trung của tam giác ABC, D thuộc (O). Gọi P là trung điểm AD. Khi đó P, P_A liên hợp đẳng giác.

Chứng minh. Do AD là đường đối trung của tam giác ABC, D thuộc đường tròn (O) nên tứ giác $ABDC$ là tứ giác điều hòa. Do đó BC là đường đối trung của tam giác BAD. Mặt khác, BP là đường trung tuyến của tam giác BDA. Do đó BC, BP đẳng giác.

Suy ra $\widehat{PBA} = \widehat{CBD} = \widehat{DAC} = \widehat{P_AAB} = \widehat{P_ABC}$. Vậy BP, BP_A là hai đường đẳng giác. Suy ra P, P_A là hai điểm đẳng giác liên hợp.



□

Tính chất 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O).AD$ là đường đối trung của tam giác ABC, D thuộc đường tròn (O). Khi đó D, P_A đối xứng với nhau qua BC.

Chứng minh. Bằng biến đổi góc, suy ra hai tam giác BP_AC và BDC bằng nhau nên dễ dàng suy ra D, P_A đối xứng nhau qua BC. Từ đây, ta còn suy ra kết quả: P_A nằm trên đường tròn $A-$ Apollonius của tam giác ABC. □

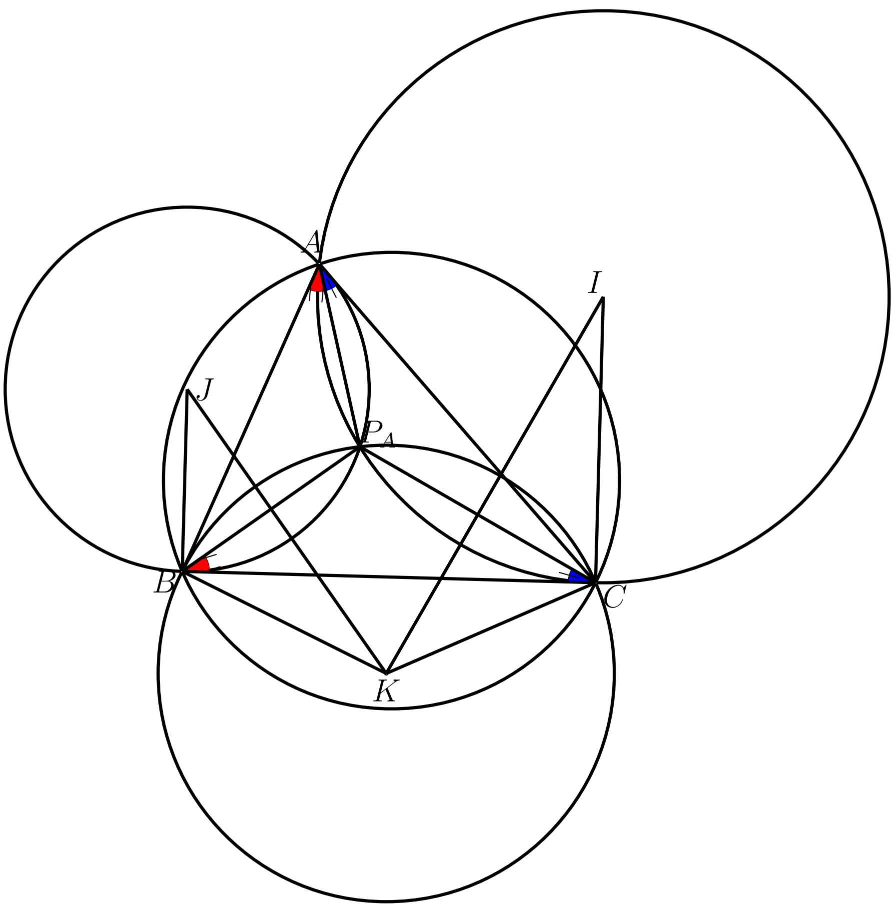
Tính chất 5. Gọi (I, R_1) là đường tròn qua A, B tiếp xúc với $BC, (J, R_2)$ là đường tròn qua A, C và tiếp xúc với BC. Gọi R, R_3 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $\Delta ABC, \Delta P_ABC$. Khi đó $R.R_3 = R_1.R_2$.

Chứng minh. Theo tính chất 4, suy ra $R = R_3$. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BP_AC. Dễ thấy, IK, JK tương ứng là trung trực của BP_A, CP_A, ta có

$$\widehat{BJK} = \frac{1}{2}\widehat{BJP_A} = \widehat{P_ABC} = \frac{1}{2}\widehat{P_AKC} = \widehat{CKI}$$

Tương tự, $\widehat{BKJ} = \widehat{CIK}$, do đó $\Delta BJK \sim \Delta CKI$. Suy ra

$$\frac{JB}{KC} = \frac{KB}{IC} \Leftrightarrow R_3^2 = R_1 \cdot R_2 \Rightarrow R \cdot R_3 = R_1 \cdot R_2$$



□

Nhận xét 2. *Từ chứng minh trên dẫn đến* $\Delta P_ABC \sim BJK \Rightarrow \dfrac{P_AB}{P_AC} = \dfrac{R_1}{R_3}$. *Tương tự,* $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{R_1}{R_3}$. *Do đó phân giác trong của hai góc* $\widehat{BAC}, \widehat{BP_AC}$ *cắt nhau tại một điểm thuộc BC.*

Tính chất 6. Giả sử AD là đường đối trung của tam giác $ABC, D \in BC$. Đường thẳng qua D và vuông góc với BC cắt đường trung tuyến AM tại S. Đường thẳng qua S và song song với BC cắt AB, AC theo thứ tự tại F, E. Khi đó $P_A \equiv BE \cap CF$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bài toán sau: Cho tam giác ABC, P_A là điểm $A-$ Humpty và M là trung điểm của đoạn BC. Gọi $E = BP_A \cap AC, F = CP_A \cap AB, S = EF \cap AM$. Gọi D là hình chiếu của S lên BC. Khi đó AD là đường đối trung của tam giác ABC.

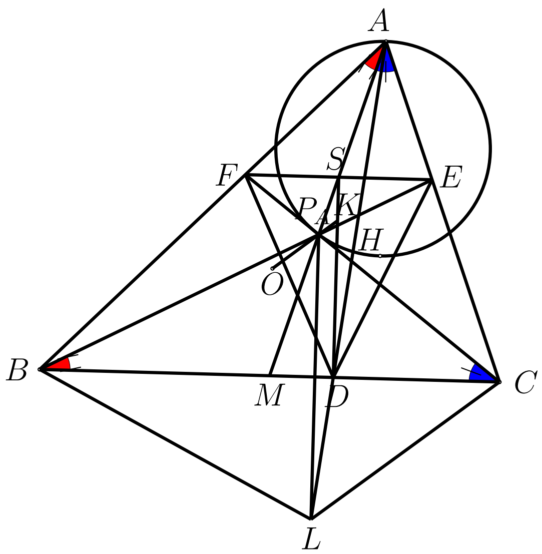
Thật vậy, ta có:

$$MB^2 = MA \cdot MP_A = MC^2 \Rightarrow \frac{MB}{MP_A} = \frac{MA}{MB}, \frac{MC}{MP_A} = \frac{MA}{MC}.$$

Suy ra các cặp tam giác $(MBP_A, MAB), (MCP_A, MAC)$ đồng dạng.

Do đó: $\dfrac{BP_A}{AB} = \dfrac{MB}{MA}, \dfrac{CP_A}{AC} = \dfrac{MC}{MA}$ nên $\dfrac{BP_A}{AB} = \dfrac{MC}{MA}$ (1).

Lấy điểm L trên AD sao cho $DS \parallel P_AL$. Từ đó, chú ý rằng DA, DP_A, DS, DM là chùm điều hòa, suy ra DM đi qua trung điểm của LP_A.



Từ đó, chú ý rằng $LP_A \perp DM$, suy ra L, P_A đối xứng nhau qua BC. (2).

Từ $(1), (2)$ suy ra $\dfrac{LB}{AB} = \dfrac{LC}{CA}$. Hơn nữa, $\widehat{BAC} + \widehat{BLC} = \widehat{BAC} + \widehat{BP_AC} = \pi$ Do đó, tứ giác $ABLC$ nội tiếp, và nó cũng điều hòa. Do đó AD là đường đối trung của tam giác ABC. □

Tính chất 7. Trực tâm K của tam giác DEF, P_A và tâm đường tròn ngoại tiếp O tam giác ABC thẳng hàng.

Chứng minh. Từ chứng minh ở tính chất 6, ta có

$$\widehat{DP_AC} = \widehat{DLC} = \widehat{FBC}, \widehat{FAE} + \widehat{FP_AE} = \pi.$$

Do đó các tứ giác FP_AEA, BFP_AD nội tiếp. Vì FP_AEA nội tiếp và BC tiếp xúc với đường tròn (AP_AB) nên $\widehat{P_AEF} = \widehat{P_AAF} = \widehat{P_ABC}$. Suy ra $BC \parallel EF$.

Vì các tứ giác FP_AEA, BFP_AD nội tiếp và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $\widehat{FDB} = \widehat{BP_AF} = \widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC} = \dfrac{\pi}{2} - \widehat{OBC}$. Suy ra $BO \perp FD$.

Từ đó, chú ý rằng, $EK \perp FD$, suy ra $BO \parallel EK$. Tương tự, $CO \parallel FK$.
Từ đó, ta suy ra được OK, BE, CF đồng quy tại P_A. Điều đó có nghĩa là K, P_A, O thẳng hàng. □

Ở trên là khá nhiều tính chất (từ dễ đến khó) của điểm **Humpty**. Sau đây, chúng tôi sẽ liệt kê một số tính chất của điểm **Dumpty,** bạn đọc thử tự đưa ra chứng minh, xem như bài tập.

Tính chất 8. Cho tam giác ABC có Q_A là điểm $A-$ Dumpty. Khi đó:

1. Q_A nằm trên đường $A-$ đối trung của tam giác ABC.
2. Q_A là tâm vị tự quay biến ΔAQ_AC thành ΔCQ_AB và biến AC thành BA.
3. Bốn điểm B, Q_A, O, C đồng viên trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
4. $OQ_A \perp AQ_A$.
5. Giao điểm của đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với AC và đường tròn đi qua A, C tiếp xúc với AB chính là điểm $A-$ Dumpty.

2. Bài tập áp dụng.

Bài toán 1. ***(ELMO shortlist 2013)*** *Cho tam giác ABC. Gọi D là điểm di động trên đường thẳng BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt AC tại điểm thứ hai E, đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC cắt AB tại điểm thứ hai F. Khi đó đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn đi qua một điểm cố định khác A, khi D di động.*

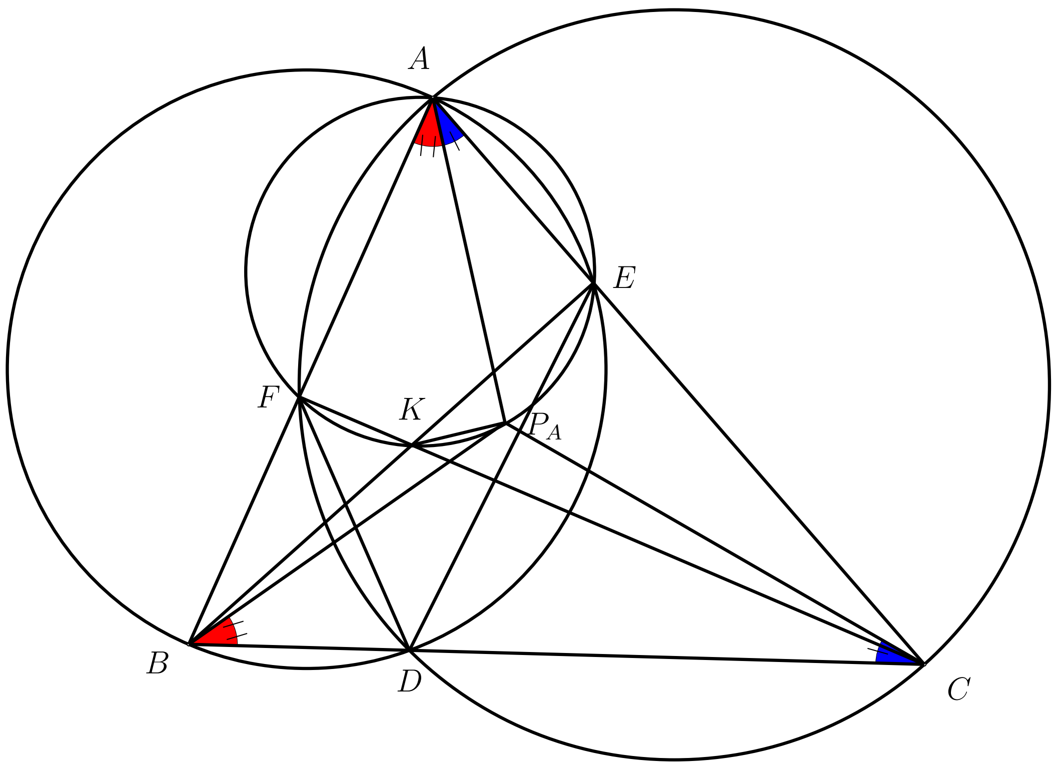
Lời giải. **Cách 1.** Gọi K là giao điểm của BE và CF. Áp dụng định lí Miquel cho tứ giác toàn phần $AEKFBC$ ta có D thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BFK.
Do đó: $(KF, KB) \equiv (DF, DB) \equiv (AF, AC) \pmod{\pi}$. Vậy tứ giác $AEKF$ nội tiếp đường tròn, suy ra

$$(KF, KE) \equiv (AF, AE) \equiv (AB, AC) \equiv (P_AB, P_AC) \pmod{\pi}.$$

Vậy tứ giác BKP_AC nội tiếp đường tròn, suy ra

$$(KP_A, KE) \equiv (CP_A, CB) \equiv (AP_A, AC) \equiv (AP_A, AE) \pmod{\pi}.$$

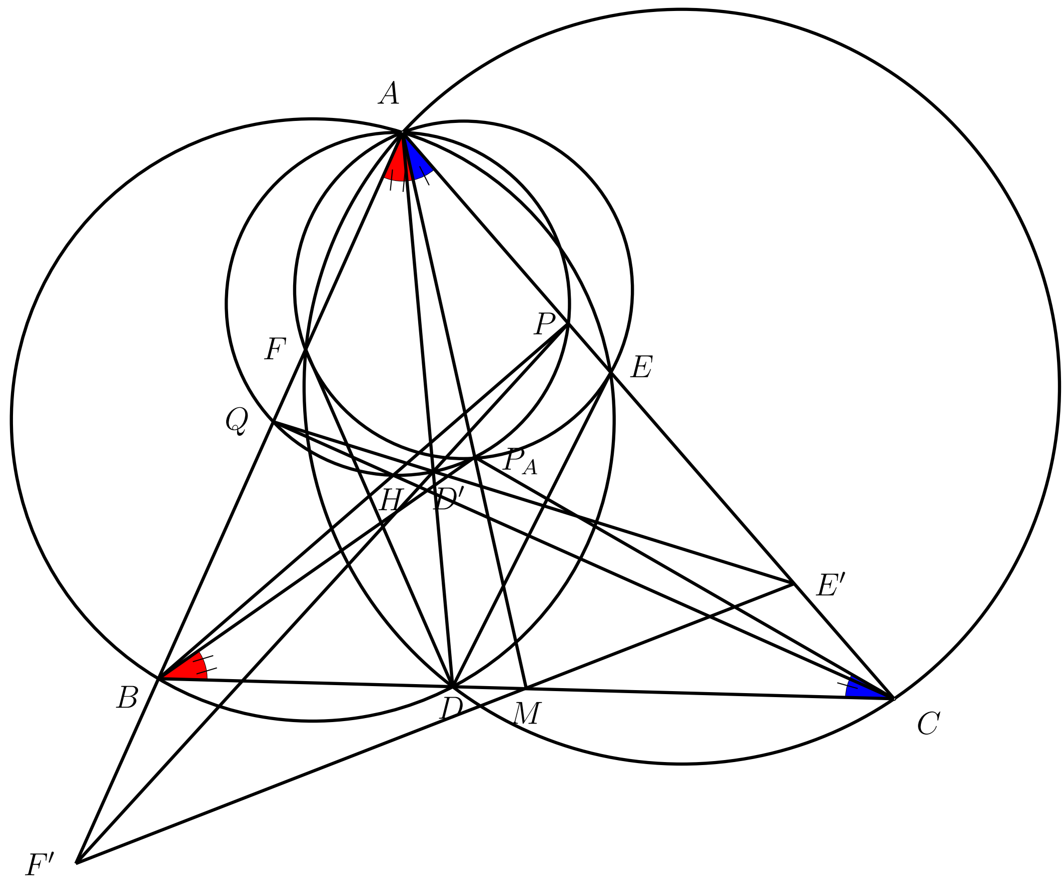
Vậy tứ giác AKP_AE nội tiếp đường tròn, hay đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn đi qua điểm $A-$ Humpty.



Cách 2. Ta phát biểu không chứng minh bổ đề sau: *Cho tam giác ABC có M là trung điểm $BC.CQ, BP$ là các đường cao của tam giác ABC. Khi đó MP, MQ và đường thẳng qua A song song với BC là các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ.*

Trở lại bài toán, gọi H là trực tâm của tam giác $ABC.P, Q$ theo thứ tự là hình chiếu của H lên AC, AB.
Phép nghịch đảo $I_A^{AP.AC}$ biến điểm B thành Q, C thành P, đường thẳng BC thành đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ, biến P_A thành trung điểm M của BC, biến D thành D' nằm trên đường tròn (APQ). Đường tròn (ABD) biến thành đường thẳng $D'Q$, biến đường tròn (ACD) thành đường thẳng $D'P$. Vì vậy $E' = QD' \cap AC, F' = PD' \cap AB$.
Suy ra đường tròn (AEF) biến thành đường thẳng $E'F'$. Ta sẽ chỉ ra đường thẳng $E'F'$ đi qua trung điểm M của BC.

Dễ thấy $E'F'$ là đường đối cực của điểm $AD' \cap PQ$. Áp dụng bổ đề trên ta có, PQ là đường đối cực của điểm M. Theo định lí La-hire, đường đối cực của điểm $AD' \cap PQ$ sẽ đi qua điểm M, hay M thuộc đường thẳng $E'F'$. Điều phải chứng minh.



□

Bài toán 2. ***(Tạp chí toán học tuổi trẻ, số 490, năm 2018).*** *Cho tam giác ABC có đường tròn (K) đi qua A, C tiếp xúc với AB; đường tròn (L) đi qua A, B tiếp xúc với AC.(K) cắt (L) tại D khác A.AK, AL lần lượt cắt BD, DC tại E, F. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BE, CF.P là điểm $A-$ Humpty của tam giác ABC. Chứng minh rằng bốn điểm A, P, M, N thẳng hàng.*

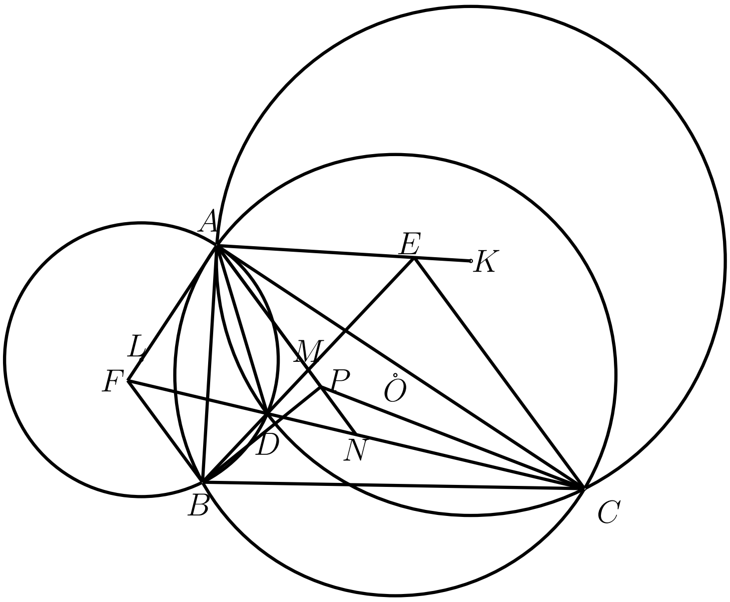
Lời giải. **Cách 1.** Từ giả thiết của đề bài ta thấy AB tiếp xúc với đường tròn (K) tại A, AC tiếp xúc với đường tròn (L) tại A. Trong tam giác vuông FAC có:

$$NA = NC = \frac{CF}{2} \Rightarrow \widehat{NAC} = \widehat{NCA}, \tag{1}$$

Mặt khác, do AB tiếp xúc với đường tròn (K) tại A, nên

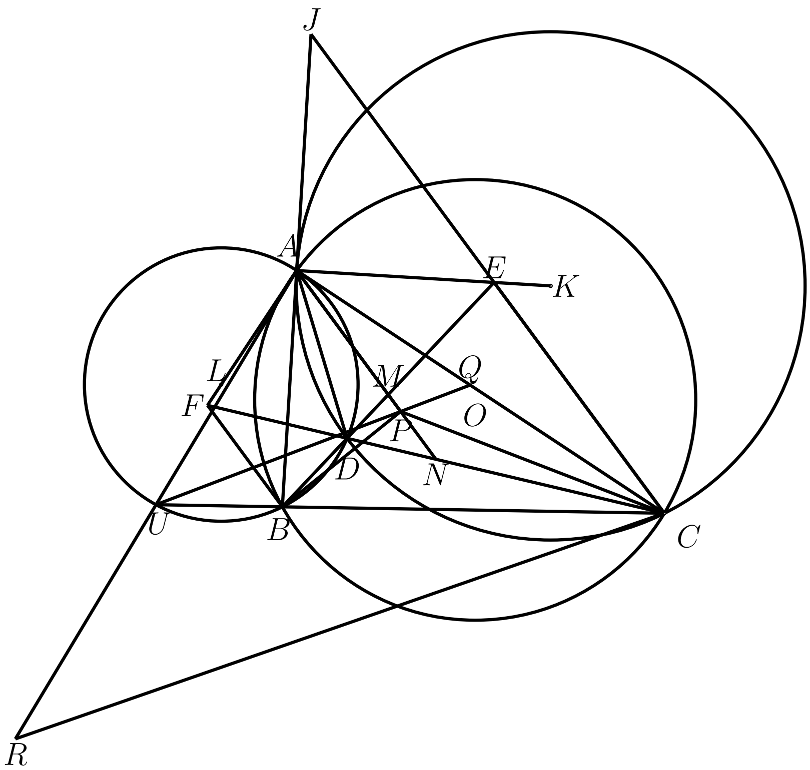
$$\widehat{NCA} = \widehat{DCA} = \widehat{BAD} \text{ (cùng chắn cung AD của đường tròn (K))} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{BAD} = \widehat{NAC}$, hay AD và AN là hai đường đẳng giác đối với $\widehat{BAC}$ (3). Tương tự, ta cũng chứng minh được $\widehat{BAM} = \widehat{CAD} \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAM}$ hay AD và AM là hai đường đẳng giác đối với góc $\widehat{BAC}$.
Từ $(3), (4)$ suy ra ba điểm A, M, N thẳng hàng.



Do $\Delta ABD \sim \Delta CAD(g.g)$ suy ra $\dfrac{d(D,AB)}{d(D,AC)} = \dfrac{AB}{AC}$ nên suy ra AD là đường đối trung của tam giác ABC. Do đó AM là đường trung tuyến của tam giác ABC. Do vậy A, P, M thẳng hàng. Suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2.



Giả sử đường tròn (L) cắt BC tại điểm thứ hai $U.UD$ cắt AC tại điểm Q thì $\widehat{QUC} = \widehat{DAB} = \widehat{DCA}$. Do đó $\Delta QCD \sim \Delta QUC$, nên $QC^2 = QD \cdot QU = QA^2$.

Gọi J là điểm đối xứng của B qua A và R là điểm đối xứng của A qua U. Do hai tam giác CUA và CAB đồng dạng, nên hai tam giác CRA và CJB đồng dạng. Từ đó chú ý tam giác JBE cân tại E nên

$$\widehat{BJC} = \widehat{ARC} = \widehat{AUQ} = \widehat{ABD} = \widehat{BJE}.$$

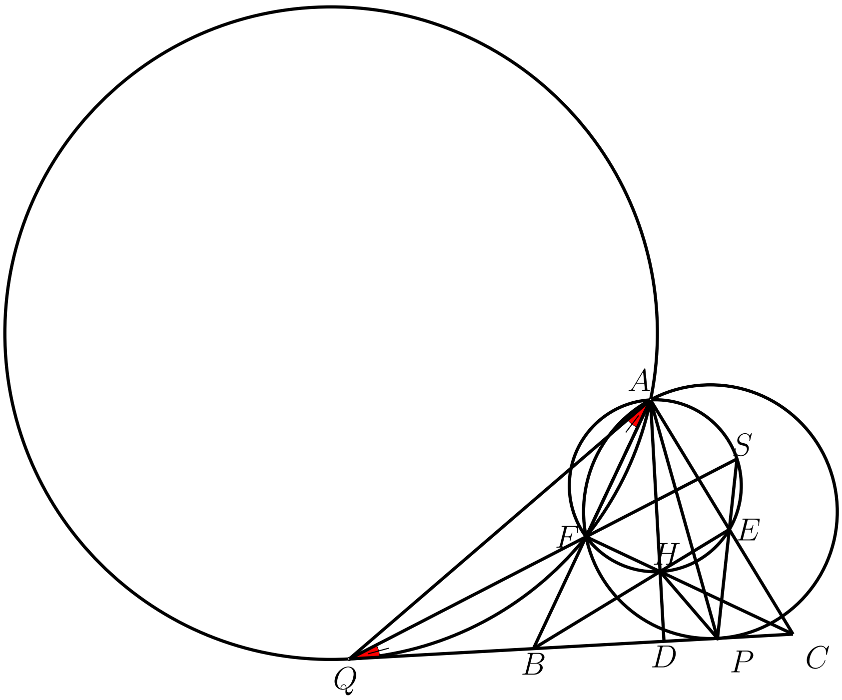
Suy ra C, E, J thẳng hàng, mà A là trung điểm BJ do đó $AM \parallel CE$. Tương tự $AN \parallel BF$.
Lại có $\widehat{CFA} = 90° - \widehat{ACF} = 90^0 - \widehat{BAD} = \widehat{DAE}$; tương tự thì $\widehat{AED} = \widehat{DAF}$. Từ đó hai tam giác AFD và EAD đồng dạng (g.g).
Kết hợp với tam giác BAD và ACD đồng dạng (g.g) ta suy ra

$$DF \cdot DE = DA^2 = DB \cdot DC.$$

Từ đây ta thấy $\dfrac{DB}{DE} = \dfrac{DF}{DC}$ nên $BF \parallel CE$ suy ra A, M, N thẳng hàng.
Do $\Delta ABD \sim \Delta CAD(g.g)$ suy ra $\dfrac{d(D, AB)}{d(D, AC)} = \dfrac{AB}{AC}$ nên suy ra AD là đường đối trung của tam giác ABC. Do đó AM là đường trung tuyến của tam giác ABC. Do vậy A, P, M thẳng hàng. Suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán 3. ***(IMO Shorlist 2008, G4).*** *Cho tam giác nhọn ABC và BE, CF là hai đường cao của tam giác. Hai đường tròn cùng đi qua hai điểm A và E và tiếp xúc với đường thẳng BC tại P và Q sao cho B nằm giữa C và Q. Chứng minh rằng hai đường thẳng PE và QF sẽ cắt nhau và giao điểm của hai đường thẳng này nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.*

Lời giải. **Cách 1.**



Theo tính chất của điểm Humpty ta có B là trung điểm của PQ.
Vẽ đường cao AD và gọi H là trực tâm của tam giác ABC.
Các tứ giác $CDFA, CDHE$ nội tiếp nên $BA \cdot BF = BC \cdot BD = BE \cdot BH$.

Từ đây suy ra $BP^2 = BE \cdot BH \Rightarrow \dfrac{BP}{BH} = \dfrac{BE}{BP}$ hay tam giác BPH và BEP đồng dạng. Suy ra $\widehat{BPE} = \widehat{BHP}$ (1).
Điểm P nằm giữa D và C, lại có $BP^2 = BC \cdot BD$ nên

$$\begin{aligned} DP \cdot DQ &= (BP - BD) \cdot (BD + BQ) = BP^2 - BD^2 \\ &= BC \cdot BD - BD^2 = BD \cdot (BC - BD) = BD \cdot DC \end{aligned}$$

Vì hai tam giác vuông BDH và ADC đồng dạng nên $BD \cdot DC = AD \cdot DH$. Kết hợp với đẳng thức trên ta được $DP \cdot DQ = AD \cdot DH \Rightarrow \dfrac{DA}{DQ} = \dfrac{DP}{DH}$.
Từ đó hai tam giác vuông DAQ và DPH đồng dạng nên $\widehat{HPD} = \widehat{QAD}$. Có thể viết lại đẳng thức trên là $\widehat{BPH} = \widehat{BAD} + \widehat{BAQ}$.
Vì BQ là tiếp tuyến của (AFQ) nên $\widehat{BQF} = \widehat{BAQ} = \widehat{BPH} - \widehat{BAD}$. (2).
Từ (1) và (2) suy ra

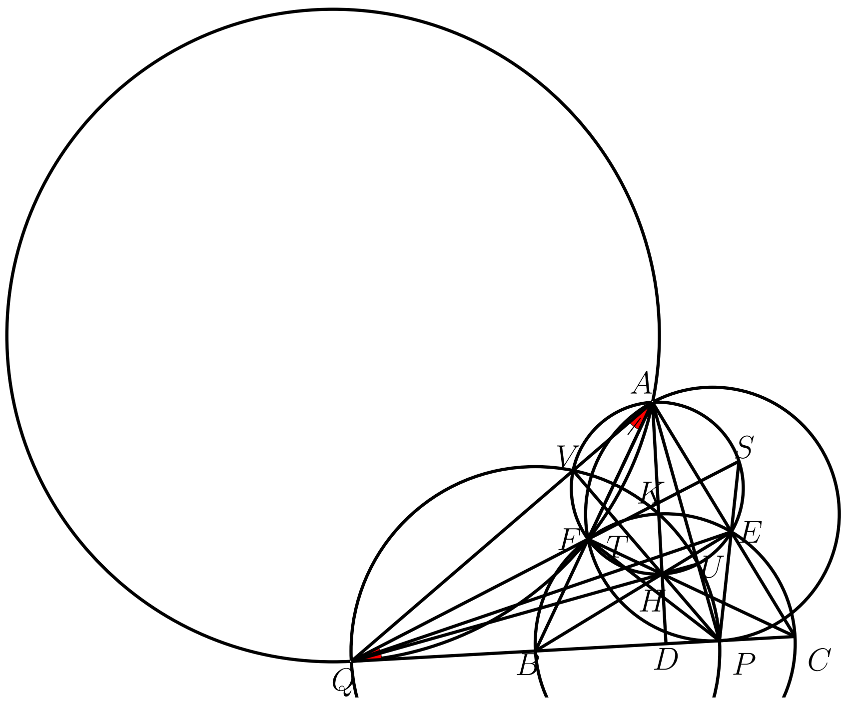
$$\begin{aligned} \widehat{BPE} + \widehat{BQF} &= \widehat{BHP} + \widehat{BPH} - \widehat{BAD} = (180^0 - \widehat{PBH}) - \widehat{BAD} \\ &= (90^0 + \widehat{BCA}) - (90^0 - \widehat{ABC}) = \widehat{BCA} + \widehat{ABC} = 180^0 - \widehat{CAB} \end{aligned}$$

Do đó $\widehat{BPE} + \widehat{BQF} < 180^0$, vì vậy hai tia PE và QF phải cắt nhau.
Gọi S là giao điểm của PE và QF. Khi đó:

$$\widehat{PSQ} = 180^0 - (\widehat{BPE} + \widehat{BQF}) = \widehat{CAB} = \widehat{EAF}.$$

Nếu S nằm giữa P, E thì $\widehat{PSQ} = 180^0 - \widehat{ESF}$; còn nếu E nằm giữa P, S thì $widehat PSQ = \widehat{ESF}$.
Từ đó ta nhận được S nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

Cách 2.



Gọi U, V, S là giao điểm thứ hai của PA, PH, PE với đường tròn đường kính AH. Tam giác AHP có các đường cao AV, BC, HU chúng đồng quy tại Q'.
Áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm $AESFHV$ ta có ba điểm

$$C = AE \cap FH, P = ES \cap HV, SF \cap VA$$

thẳng hàng, suy ra $Q' \in FS$. Giả sử đoạn thẳng AD theo thứ tự cắt đường tròn đường kính $(BC), (PQ')$ tại K, L. Vì H là trực tâm tam giác ABC, và ΔBKC vuông nên

$$\Delta ABD \sim \Delta ADC \Rightarrow DA \cdot DH = DB \cdot DC = DK^2.$$

Vì H là trực tâm tam giác $AQ'P$ ta có $DL^2 = DA \cdot DH$. Vì vậy $DK = DL \Rightarrow K \equiv L$. Kết hợp ΔBKC vuông và $\Delta ABD \sim \Delta CBF$, suy ra

$$BD \cdot BC = BA \cdot BF = BK^2.$$

Mặt khác, $BA \cdot BF = BP^2 = BQ^2$, suy ra $BK = BP = BQ$. Điều này suy ra B là tâm đường tròn đường kính PQ'. Do đó $Q \equiv Q'$. Do đó giao điểm của PE và QF là S nằm trên đường tròn (AEF). □

Nhận xét 3.

1. *Bài toán này ta nhận thấy, F chính là điểm A-Humpty của tam giác APQ. Đồng thời, H vừa là trực tâm tam giác ABC vừa là trực tâm tam giác APQ.*

2. *Nếu ta áp dụng định lí Pascal với sáu điểm $AFTEHV$ ta cũng thấy ET đi qua Q'. Như vậy: PF và QE cũng cắt nhau tại một điểm trên đường tròn (AEF).*

3. *Bài tập tương tự như sau:*
   Cho tam giác ABC nhọn, có các đường cao BE, CF. Gọi P trên cạnh BC, Q thuộc tia đối của tia BC sao cho $BQ^2 = BP^2 = BF \cdot BA$. Gọi $S = QF \cap PE$. Chứng minh bốn điểm E, S, A, F đồng viên.

Một bài tập có mô hình tương tự, xin được chia sẻ tới bạn đọc.

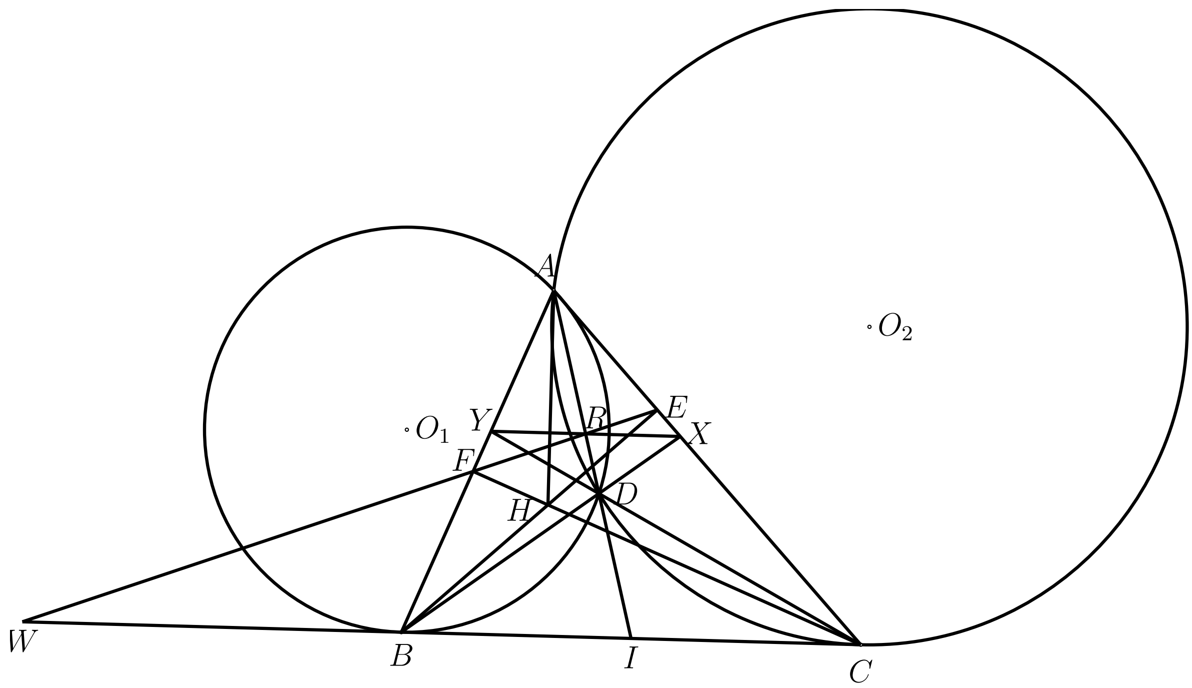
Bài toán 4. *Cho tam giác ABC không cân và không vuông tại A. Các đường cao BE, CF. Các đường tròn $(O_1), (O_2)$ cùng đi qua A và theo thứ tự tiếp xúc với BC. D là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2). M, N theo thứ tự là giao điểm thứ hai của BA, BD và (O_2).P, Q theo thứ tự là giao điểm thứ hai của CA, CD với (O_1). R là giao điểm của AD với EF. S là giao điểm của MP và NQ. Chứng minh rằng $RS \perp BC$.*

Lời giải. Ta cần có một bổ đề: Cho tam giác ABC. Các đường cao BE, CF. Các đường tròn $(O_1), (O_2)$ cùng đi qua A và theo thứ tự tiếp xúc với BC. D là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2). R là giao điểm của AD với EF. X là giao điểm của BD và AC. Y là giao điểm của CD và AB. Khi đó:

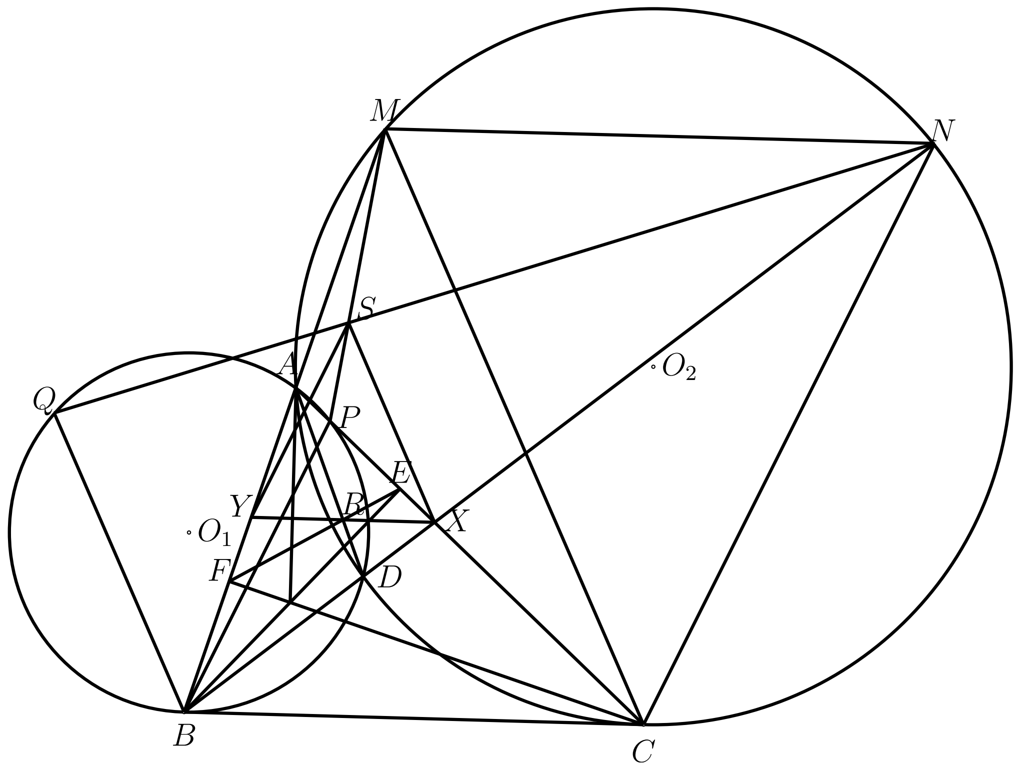
a. R thuộc XY.

b. $XY \parallel BC$ và $RX = RY$.

Chú ý rằng D là điểm $A-$ Humpty của tam giác ABC nên bổ đề này không khó, xin dành chứng minh cho bạn đọc.



Trở lại bài toán,



Gọi X là giao điểm của BD và AC, Y là giao điểm của CD và AB.

Dễ thấy:

$$\begin{aligned}(PB, PQ) &\equiv (DB, DC) \equiv (DB, BC) + (BC, DC) \equiv (AD, AB) + (AC, AD) \\ &\equiv (AC, AB) \equiv (AP, AB) \equiv (QP, QB) \equiv -(QB, QP) \pmod{\pi}\end{aligned}$$

Do đó, tam giác BPQ cân tại B. Kết hợp với BC tiếp xúc với (O_1), suy ra $PQ \parallel BC$.
Tương tự, tam giác CNM cân tại C và $NM \parallel BC$.
Dễ thấy

$$\begin{aligned}(PB, CN) &\equiv (PB, AP) + (AC, NC) \equiv (BD, AD) + (AD, ND) \\ &\equiv (BD, ND) \equiv 0 \pmod{\pi}\end{aligned}$$

Do đó: $BP \parallel CN$.
Tương tự $BQ \parallel CM$.
Vậy $PQ \parallel BC \parallel NM, BP \parallel CN, BQ \parallel CM$.
Do đó các tam giác CMN, BPQ hoặc là ảnh của nhau qua một phép vị tự hoặc là ảnh của nhau qua một phép tịnh tiến. Vậy nên

$$\frac{\overline{XP}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{NC}} = -\frac{\overline{PB}}{\overline{NC}} = -\frac{\overline{PQ}}{\overline{NM}} = \frac{\overline{QP}}{\overline{NM}} = \frac{\overline{SP}}{\overline{SM}}$$

Do đó $SX \parallel CM$. Tương tự, chú ý rằng $BP \parallel CN$, ta có $SY \parallel BP \parallel CN$. Theo bổ đề trên, chú ý rằng $MN \parallel BC$, ta có $XY \parallel BC \parallel MN$.
Vậy các tam giác SXY, CMN đồng dạng cùng hướng. Từ đó, chú ý rằng tam giác CMN cân tại C, suy ra tam giác SXY cân tại S. Lại theo bổ đề trên thì $RX = RY$ nên suy ra $RS \perp BC$. □

Bài toán 5. ***(ELMO 2014.)*** *Cho tam giác ABC với O, H lần lượt là tâm ngoại tiếp tam giác, trực tâm tam giác ABC. Gọi ω_1, ω_2 là đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC, BHC. Giả sử đường tròn đường kính AO cắt ω_1 tại điểm thứ hai M, đường thẳng AM cắt lại đường tròn ω_1 tại điểm N. Tương tự, giả sử đường tròn đường kính AH cắt đường tròn ω_2 tại điểm thứ hai N và đường thẳng AN cắt lại đường tròn ω_2 tại Y. Chứng minh rằng $MN \parallel XY$.*

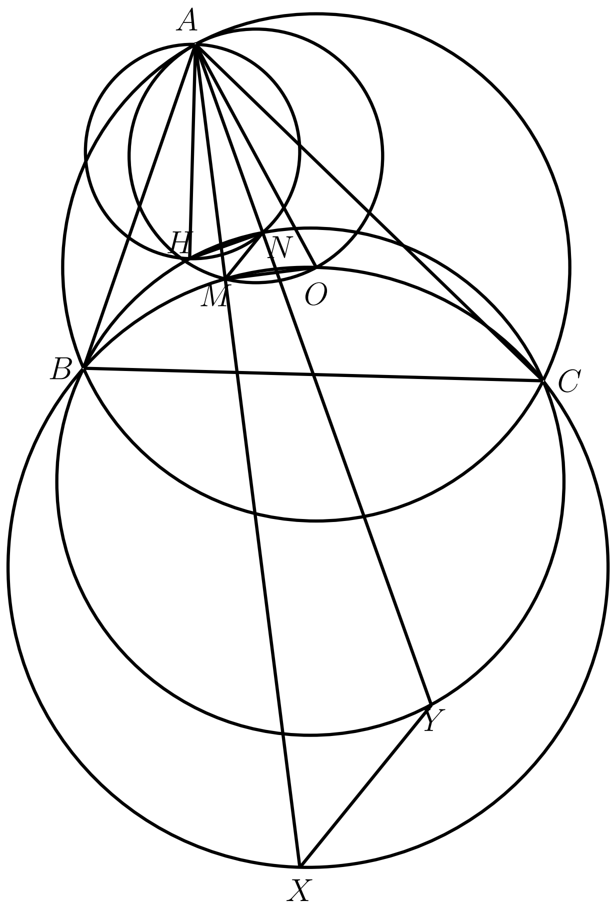
Lời giải. Do $OM \perp AX$ nên OX là đường kính của đường tròn ω_1. Suy ra $XC \perp OC, XB \perp OB$ hay XC, XB là các tiếp tuyến của đường tròn (O). Suy ra AX là đường đối trung của tam giác ABC. Ta có

$$\widehat{BMX} = \widehat{BCX} = \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{MAC}.$$

Tương tự ta cũng suy ra $\widehat{MCA} = \widehat{MAB}$. Ta có N là giao điểm thứ hai của hai đường tròn $(AH), (BHC)$, nên theo tính chất 1 thì N là điểm $A-$ Humpty. Suy ra, N nằm trên đường trung tuyến dựng từ A của tam giác ABC. Do $ABYC$ là hình bình hành và AX, AY đẳng giác nên

$$\widehat{MAC} = \widehat{NAB} = \widehat{AYC} \Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{AYC}.$$

Suy ra $\Delta AMB \sim \Delta ACY \Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AB}{AY} \Rightarrow AM \cdot AY = AC \cdot AB$ (1).
Lại có: $\widehat{MBA} = \widehat{MAC} = \widehat{NAB} = \widehat{NBC}$.
Suy ra $\Delta ANB \sim \Delta ACX \Rightarrow \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AB}{AX} \Rightarrow AN \cdot AX = AC \cdot AB$ (2).
Từ $(1), (2)$ suy ra $AM \cdot AY = AN \cdot AX \Rightarrow \dfrac{AM}{AX} = \dfrac{AN}{AY} \Rightarrow MN \parallel XY$.

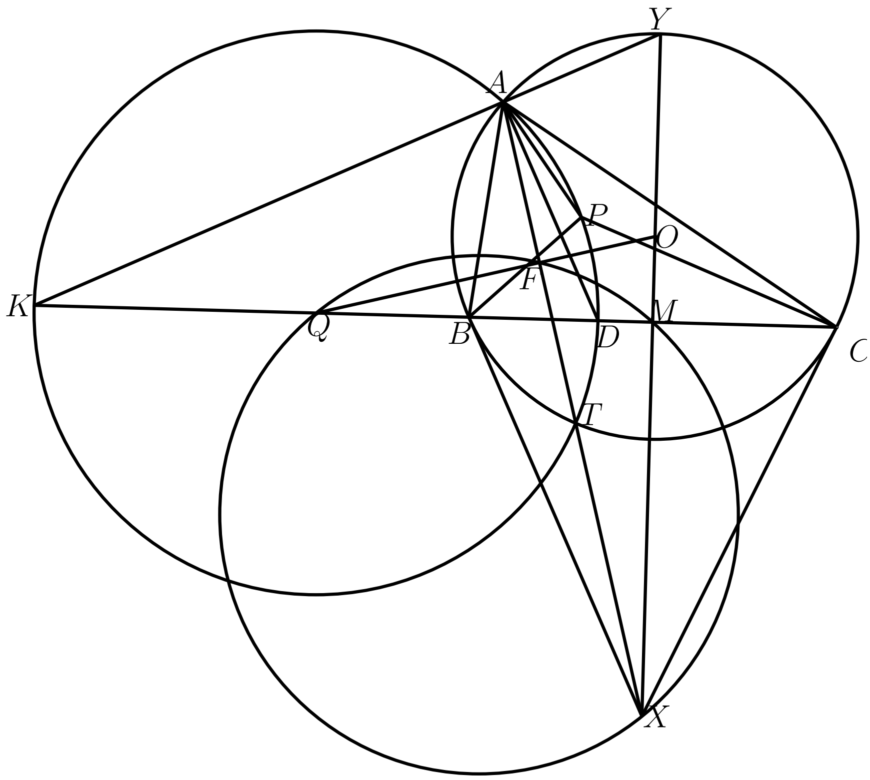


□

Bài toán 6. ***(USA TST 2005.)*** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm P nằm trong tam giác ABC thỏa mãn $\widehat{PCB} = \widehat{PAC}, \widehat{PBC} = \widehat{PAB}$. Trung trực của đoạn AP cắt BC tại Q. Chứng minh rằng $\widehat{AQP} = 2\widehat{OQB}$.*

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của đoạn $BC.D, K$ lần lượt là giao điểm của đường phân giác trong, phân giác ngoài ứng với góc A của tam giác $ABC.X$ là giao điểm của hai tiếp tuyến tại B, C của đường tròn $(O).Y$ là giao điểm thứ hai của AK với (O). Suy ra Y, O, M, X thẳng hàng.
Theo giả thiết, suy ra P chính là một điểm $A-$ Humpty của tam giác ABC. Theo tính chất về điểm $A-$ Humpty thì P nằm trên đường tròn $A-$ Apollonius, đường tròn đường kính KD. Suy ra Q chính là trung điểm của KD. Khi đó, $\widehat{AQP} = 2\widehat{AKP}$.
Gọi F là giao điểm của OQ với AX, T là giao điểm thứ hai của AX với đường tròn (O). Theo tính chất 4, ta suy ra T cũng thuộc đường tròn $A-$ Apollonius. Vậy $OQ \perp AX$. Suy ra $QFMX$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{FQM} = \widehat{FXM}$. Do BX là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên

$$\widehat{ACB} = \widehat{ABX} + \widehat{BXA} \Rightarrow \widehat{ACP} + \widehat{BCP} = \widehat{ABX} + \widehat{BXA} \Rightarrow \widehat{ACP} = \widehat{BXA}$$



Xét hai tam giác: $\Delta APC, \Delta ABX$ có $\widehat{PAC} = \widehat{BAX}, \widehat{ACP} = \widehat{AXB}$. Suy ra

$$\Delta APC \sim \Delta ABX \Rightarrow AP \cdot AX = AB \cdot AC.$$

Xét hai tam giác: $\Delta ABK, \Delta AYC$ có $\widehat{YAC} = \widehat{BAK}, \widehat{ABK} = \widehat{AYC}$. Suy ra

$$\Delta ABK \sim \Delta AYC \Rightarrow AK \cdot AY = AB \cdot AC.$$

Từ đó, suy ra $AP \cdot AX = AK \cdot AY$. Kết hợp với điều kiện $\widehat{PAK} = \widehat{YAX}$, ta suy ra

$$\Delta APK \sim \Delta AYX \Rightarrow \widehat{AKP} = \widehat{AXY}.$$

Mặt khác, $\widehat{OQB} = \widehat{OQM} = \widehat{FQM} = \widehat{FXM} = \widehat{AKP}$, kết hợp với $\widehat{AQP} = 2\widehat{AKP}$, suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán 7. ***(Brazil National Olympiad 2015.)*** *Cho tam giác ABC không đều có H, G lần lượt là trực tâm, trọng tâm của tam giác. Gọi X, Y, Z là các điểm theo thứ tự nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB thỏa mãn $\widehat{AXB} = \widehat{BYC} = \widehat{CZA}$. Hai đường tròn $(BXZ), (CXY)$ cắt nhau tại điểm thứ hai P. Chứng minh rằng P nằm trên đường tròn đường kính HG.*

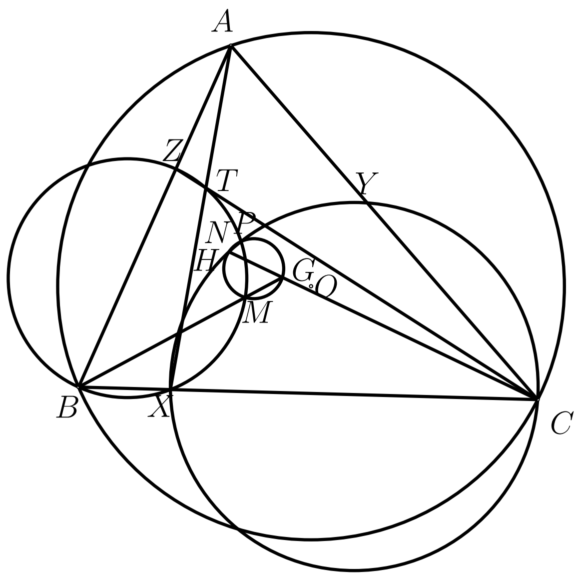
Lời giải. Gọi M là điểm $B-$ Humpty, N là điểm $C-$ Humpty. Dễ thấy: $M \in BG, N \in CG$. và M, N cùng thuộc đường tròn đường kính HG.
Do $\widehat{BXA} + \widehat{BZC} = \pi$ nên giao điểm T của đường thẳng AX và CZ nằm trên đường tròn (BXZ). Lại có

$$(TA, TC) \equiv (BA, BC) \equiv (MA, MC) \pmod{\pi}$$

nên bốn điểm A, T, M, C đồng viên. Suy ra:

$$(TX, TM) \equiv (CA, CM) \equiv (BC, BM) \equiv (BX, BM) \pmod{\pi}.$$

Do đó: B, M, T, Z đồng viên. Vậy nên M thuộc vào đường tròn (BXZ). Chứng minh tương tự N thuộc vào đường tròn (CXY).
Áp dụng định lí Miquel vào tam giác BGC ta có: P thuộc vào đường tròn (GMN). Vậy P nằm trên đường tròn đường kính HG. Điều phải chứng minh.



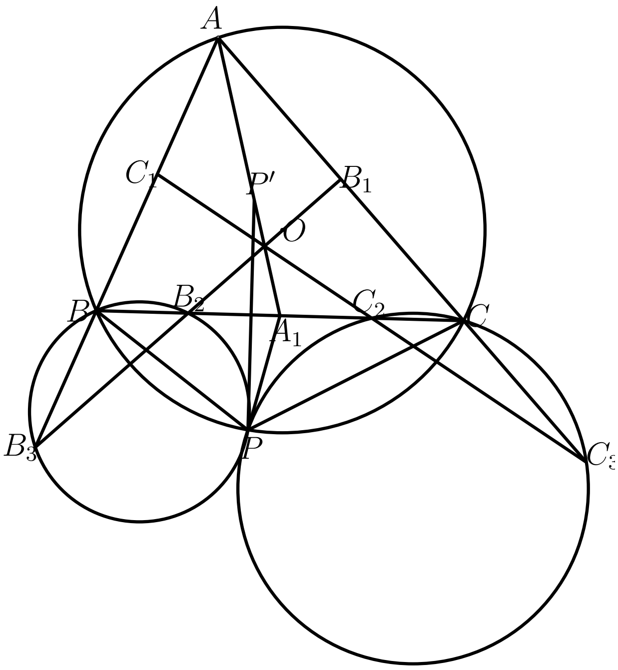
□

Bài toán 8. ***(Sharygin Geometry Olympiad 2015.)*** *Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi B_2, C_2 lần lượt là trung điểm của BA_1, CA_1. Gọi B_3, C_3 lần lượt là điểm đối xứng của C_1 qua B và của B_1 qua C. Chứng minh rằng giao điểm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BB_2B_3, CC_2C_3 nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

Lời giải. Gọi P là điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC sao cho AP là đường đối trung của tam giác. Gọi P' là điểm đối xứng của P qua BC. Theo tính chất trên ta suy ra P' là điểm $A-$ Humpty của tam giác ABC và P' nằm trên đoạn AA_1.Ta có

$$\widehat{PA_1B} = \widehat{AA_1B} = \widehat{ACP} = \widehat{PBB_3}$$

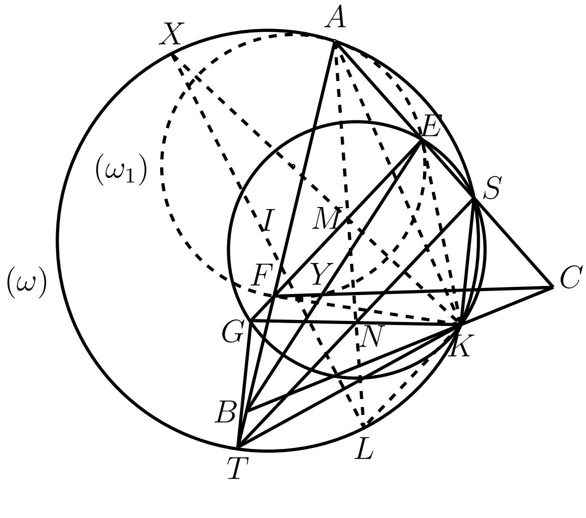
Suy ra AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BA_1P. Từ đó, ta có $\widehat{PBA} = \widehat{CA_1P} = \widehat{CA_1P'}$. Lại có $\widehat{P'CA_1} = \widehat{B_1AP}$ nên $\Delta PBA \sim \Delta P'A_1C$. Suy ra $\Delta PBA \sim \Delta PA_1C$.
Từ đó, dễ dàng suy ra P là tâm vị tự quay biến CA_1 thành AB. Do $\dfrac{\overline{B_2A_1}}{\overline{B_2C}} = \dfrac{\overline{B_3B}}{\overline{B_3A}} = \dfrac{1}{2}$ nên qua phép vị tự quay tâm P trên sẽ biến B_2 thành B_3. Suy ra: $\widehat{B_2PB_3} = \widehat{A_1PB} = \widehat{ABB_2}$ hay P thuộc đường tròn (BB_2B_3).
Chứng minh tương tự ta suy ra được P thuộc đường tròn (CC_1C_2). Điều phải chứng minh.



□

Bài toán 9. ***(G6, IMO Shortlist 2014)** Cho tam giác nhọn ABC. Xét các điểm E, F lần lượt nằm trên các cạnh CA, AB. Gọi M là trung điểm của EF. Trung trực của EF cắt BC tại K. Trung trực của MK cắt AC, AB theo thứ tự tại S, T. Giả sử cặp điểm E, F được gọi là thú vị nếu tứ giác $KSAT$ nội tiếp. Giả sử các cặp E_1, F_1 và E_2, F_2 là cặp điểm thú vị. Chứng minh rằng $\dfrac{E_1E_2}{AB} = \dfrac{F_1F_2}{AC}$.*

Lời giải. Với mỗi cặp điểm thú vị (E, F), ta sẽ nói tam giác KEF là tam giác thú vị.



Tam giác EFK là tam giác thú vị. Trước hết ta chứng minh rằng $\widehat{KEF} = \widehat{KFE} = \widehat{A}$, điều đó có nghĩa là đường tròn (ω_1) ngoại tiếp tam giác AEF tiếp xúc với KE và KF.

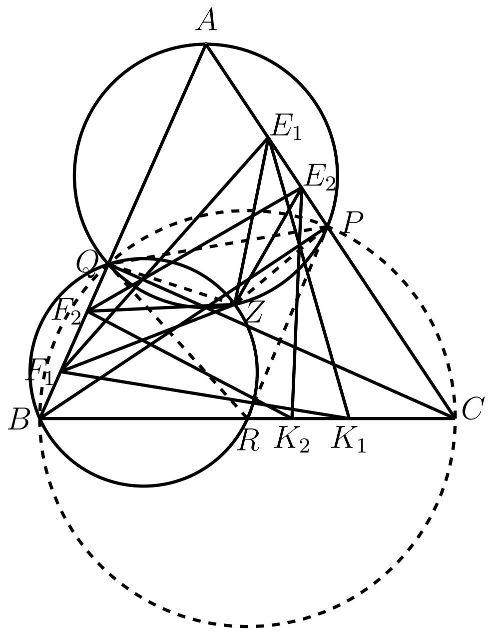
Kí hiệu (ω) là đường tròn đi qua các điểm A, K, S và T. Đường thẳng AM cắt ST và đường tròn (ω) tại N và điểm L.
Vì $EF \parallel TS$ và M là trung điểm của EF, N là trung điểm của ST. Do K, M đối xứng với nhau qua ST nên $\widehat{KNS} = \widehat{MNS} = \widehat{LNT}$. Vì vậy K, L đối xứng với nhau qua trung trực của ST. Vì vậy $LK \parallel ST$. Gọi G là điểm đối xứng với K qua N. Khi đó G nằm trên đường thẳng EF và ta có thể giả sử G nằm trên tia MF. Ta có:

$$\widehat{KGE} = \widehat{KNS} = \widehat{SNM} = \widehat{KLA} = 180^0 - \widehat{KSA}$$

(nếu $K \equiv L$ thì góc $\widehat{KLA}$ được hiểu là góc giữa AL và tiếp tuyến của đường tròn (ω) tại L). Điều này có nghĩa là K, G, E, S đồng viên. Vì $KSGT$ là hình bình hành nên

$$\widehat{KEF} = \widehat{KSG} = 180^0 - \widehat{TKS} = \widehat{A}$$

Vì $KE = KF$ nên ta có: $\widehat{KEF} = \widehat{KFE} = \widehat{A}$ Suy ra AK là đối trung của tam giác AST.



Gọi Y là giao điểm của BE và CF. Xét bộ sáu điểm $(EEYFFA)$ có $K = EE \cap FF, B = EY \cap FA, C = FY \cap EA$ thẳng hàng, nên theo định lí Pascal đảo ta có: Y thuộc đường tròn (AEF). Đường cao BP, CQ của tam giác ABC cắt nhau tại Z nên

$$\widehat{BYC} = \widehat{EYF} = 180^0 - \widehat{BAC} = \widehat{BZC} \Rightarrow Y \in (BZC)$$

Gọi R là trung điểm của BC, AR giao với đường tròn (BZC) tại điểm thứ hai H. Khi đó H là điểm $A-$ Humpty của tam giác ABC. Ta có:

$$\widehat{FYH} = \widehat{HBC} = \widehat{HAF} \Rightarrow H \in (AEF)$$

Mà $H \in (APQ)$ nên theo phép vị tự quay tâm H, tỉ số $\dfrac{HQ}{HP}$, góc quay $\widehat{QHP}$ biến Q thành L, biến F thành E và biến F_1 thành E_1, biến F_2 thành E_2. Do đó $\dfrac{E_1E_2}{F_1F_2} = \dfrac{HP}{HQ} = \dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{AB}{AC}$.
□

Bài toán 10. ***(Đề xuất 30/4/2016, THPT Chuyên Lê Hồng Phong, TPHCM.)*** *Cho tam giác nhọn ABC và điểm D di động trên tia đối của tia CB. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABD và đường tròn (J) nội tiếp tam giác ACD. Giả sử H, K là giao điểm của hai đường tròn $(I), (J)$. Chứng minh HK luôn đi qua một điểm cố định khi D di động.*

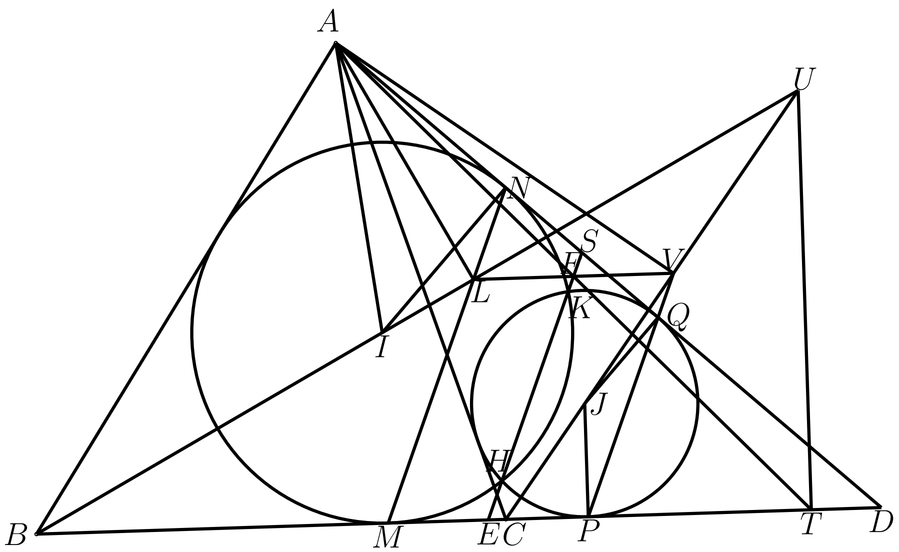
Lời giải. Gọi N, M lần lượt là các điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp (I) với các cạnh $AD, BD.Q, P$ lần lượt là các điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp (J) với các cạnh $AD, BD.S$ là giao điểm của HK với AD.
Theo định lí về điểm Humpty ta suy ra E, F là trung điểm của MP và NQ. Do đó: $EM = EP = FN = FQ$.
Gọi T là hình chiếu của tâm bàng tiếp ứng với đỉnh B của tam giác ABC. Suy ra T cố định.
Gọi F là giao điểm của AT với HK. Ta có:

$$CP = \frac{CA + CD - AD}{2}, CT = \frac{CA + AB - BC}{2}$$
$$\Rightarrow PT = CT - CP = \frac{AB + AD - BD}{2} = AN$$

Từ đây suy ra $ET = AS, ED = SD$. Áp dụng định lí Menelaus vào tam giác ATD với ba điểm S, F, E thẳng hàng ta có

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FT}} \cdot \frac{\overline{ET}}{\overline{ED}} \cdot \frac{\overline{SD}}{\overline{SA}} = 1 \Rightarrow \overline{FA} = \overline{FT}$$

Suy ra F là trung điểm của đoạn AT, là điểm cố định.



□

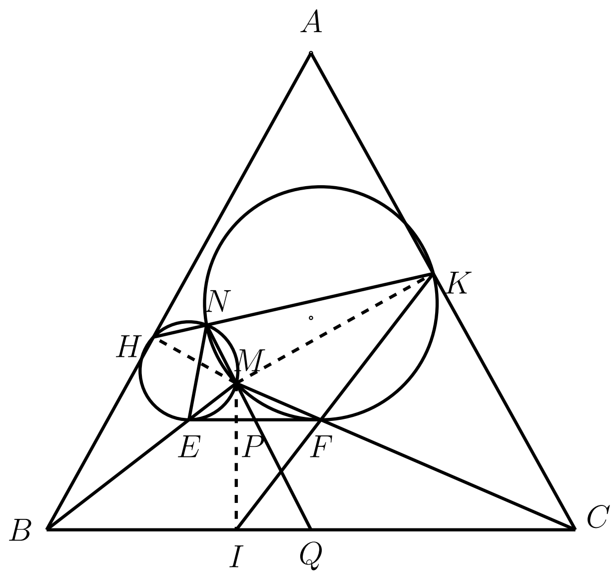
Bài toán 11. *Cho tam giác ABC cân tại A và M là điểm ở trong tam giác ABC sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{BCM}$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M lên AB, BC, CA. Gọi E là giao điểm của MB và IH, F là giao điểm của MC và IK. Giả sử hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác MEH và MFK cắt nhau tại điểm thứ hai N. Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua trung điểm của BC.*

(Tạp chí toán học tuổi trẻ số 4/477-2017)

Lời giải. Dễ thấy các tứ giác $HBIM, KCIM$ nội tiếp, suy ra

$$\widehat{HIM} = \widehat{ABM} = \widehat{BCM}; \widehat{KIM} = \widehat{ACM} = \widehat{CBM}.$$

Do đó $\widehat{EMF} = \widehat{EIF} = \widehat{EMF} + \widehat{HIM} + \widehat{KIM} = \widehat{BMC} + \widehat{BCM} + \widehat{CBM} = 180°$ nên $EMFI$ nội tiếp, ta có: $\widehat{MFE} = \widehat{MIE} = \widehat{MBH} = \widehat{BCM}$. Suy ra $EF \parallel BC$. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của MN với EF và BC. Ta có: $\widehat{PNE} = \widehat{MHE} = \widehat{MBC} = \widehat{MEP}$.
Tương tự ta chứng minh được $\widehat{PNF} = \widehat{MFP}$. Suy ra M là điểm $N-$ Humpty của tam giác NEF. Do đó P là trung điểm EF, suy ra Q là trung điểm BC.



□

Bài toán 12. *Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) với trung tuyến AM. Đường thẳng AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai D. Đường thẳng AB cắt đường thẳng CD tại E, đường thẳng AC cắt đường thẳng BD tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE tại hai điểm A và P. Gọi (S_1) là đường tròn đi qua C và tiếp xúc với AB tại A, (S_2) là đường tròn đi qua B tiếp xúc với AC tại A. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và Q là giao điểm thứ hai của (S_1) và (S_2). Chứng minh tam giác OPQ là tam giác vuông.*

(Đề thi chọn đội tuyển HSG quốc gia TP. Hà Nội, 2016 - 2017)

Lời giải. Nhận thấy điểm Q chính là điểm $A-$ Dumpty của tam giác ABC. Ta có

$$\begin{aligned}(PE, PF) &= (PE, PA) + (PA, PF) = (CE, CA) + (BA, BF) \\ &= (CD, CA) + (BA, BD) = (CD, CA) + (CA, CD) = 0 \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

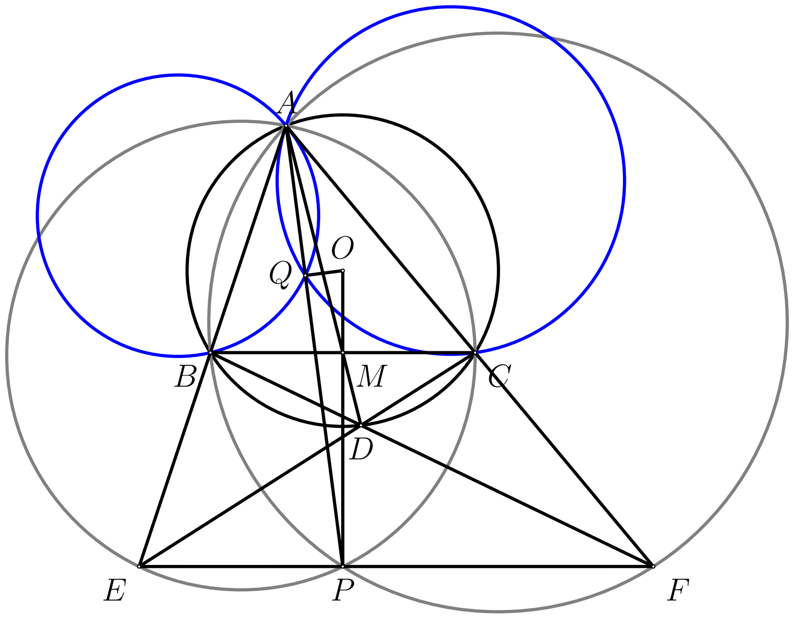
Do đó E, P, F thẳng hàng. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABM với cát tuyến EDC và tam giác ACM với cát tuyến FBD ta có

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{DM}}{\overline{DA}} = 1 \quad \text{và} \quad \frac{\overline{FA}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BM}} \cdot \frac{\overline{DM}}{\overline{DA}} = 1.$$

Suy ra $\dfrac{EA}{EB} = \dfrac{FA}{FC}$ hay $BC \parallel EF$. Khi đó

$$\widehat{PBD} = \widehat{DEP} = \widehat{BCD},$$

dẫn đến PB là tiếp tuyến của đường tròn (O). Chứng minh tương tự ta cũng có PC là tiếp tuyến của đường tròn (O). Gọi Q' là hình chiếu của O trên AP thì O, Q', B, C, P cùng nằm trên đường tròn đường kính OP.



Suy ra

$$\begin{aligned}\widehat{ABQ'} &= \widehat{ABC} - \widehat{Q'BC} = \widehat{ABC} - \widehat{Q'PC} = \widehat{ABC} - \widehat{APC}\\ &= \widehat{ABC} - \widehat{AEC} = \widehat{BCD} = \widehat{BAD}.\end{aligned}$$

Mặt khác, do $BC \parallel EF$ nên $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = \widehat{CEP} = \widehat{CAP} = \widehat{CAQ'}$. Do đó $\widehat{ABQ'} = \widehat{CAQ'}$. Suy ra AC là tiếp tuyến của (ABQ') nên $(ABQ') \equiv (S_2)$. Chứng minh tương tự ta có $(ACQ') \equiv (S_1)$, suy ra $Q \equiv Q'$. Vậy tam giác OPQ vuông tại Q. □

Bài toán 13. ***(Iranian Mathematical Olympiad.)*** *Giả sử rằng P là một điểm nằm trong tứ giác $ABCD$ sao cho*

$$\widehat{BPC} = 2\widehat{BAC}, \widehat{PCA} = \widehat{PAD}, \widehat{PDA} = \widehat{PAC}$$

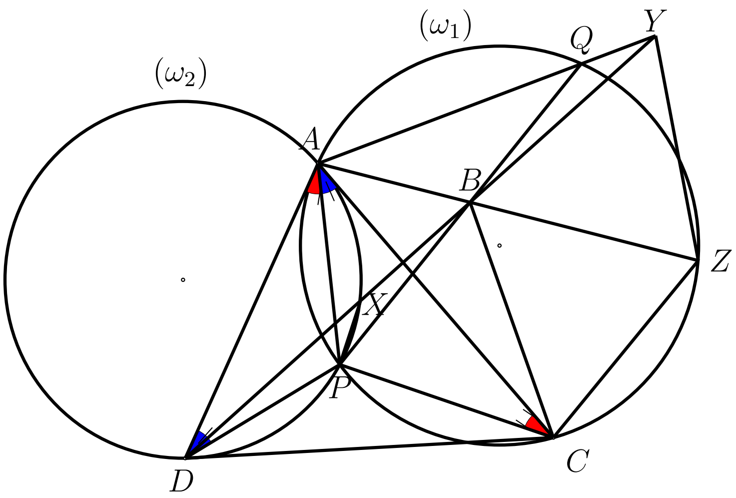
Chứng minh rằng $\widehat{PBD} = |\widehat{PCA} - \widehat{BCA}|$

Lời giải. Ta dễ dàng nhận thấy P là điểm $A-$ Dumpty của tam giác ADC. Kí hiệu $(\omega_1), (\omega_2)$ theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp các tam giác APC, APD. Q là giao điểm thứ hai của PB với đường tròn (ω_1), DB cắt (ω_2), AQ theo thứ tự tại X, Y. Giả sử rằng Z là điểm thứ hai của AB với (ω_1).
Đặt $\widehat{PAD} = \widehat{PCA} = \beta, \widehat{PDA} = \widehat{PAC} = \theta$.
(Dễ thấy Y tồn tại, vì nếu ngược lại thì $AQ \parallel DB$, khi đó $\widehat{DXP} = \widehat{AQB} = \widehat{DBP}$. Suy ra

$B \equiv X$, khi đó $\widehat{ABD} = \widehat{AXD} = \widehat{APD} = 180^0 - (\beta + \theta)$. Xét tam giác ABD ta nhận được $\widehat{BAC} + \widehat{ADB} = 0^0$, điều này chỉ xảy ra khi A, B, C, D thẳng hàng (vô lí).)
Ta có:

$$\widehat{PQA} = \widehat{PCA} = \widehat{PAD} = \widehat{PXD}$$

Suy ra tứ giác $PXQY$ nội tiếp. Suy ra $BX \cdot BY = BP \cdot BQ$.



Lại có: $\mathcal{P}_{B/(\omega_1)} = BP \cdot BQ = BZ \cdot BA$ nên $BX \cdot BY = BZ \cdot BA$. Điều này có nghĩa là $AXZY$ nội tiếp. Do đó,

$$\widehat{AZY} = \widehat{AXY} = 180^\circ - \widehat{AXD}$$

Mặt khác, $\widehat{AXD} = \widehat{APD} = 180^\circ - (\beta + \theta)$ nên $\widehat{AZY} = \beta + \theta$. Hơn thế nữa, $\widehat{AZC} = \widehat{PAC} + \widehat{PCA} = \beta + \theta$. Vậy nên $\widehat{AZC} = \widehat{AZY} = \beta + \theta$. Mà $\widehat{ZAC} + \widehat{ZAY} = \widehat{QAC} = \widehat{BPC} = 2\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{ZAC} = \widehat{ZAY} = \alpha$ nên suy ra $\Delta AZC = \Delta AZY \Rightarrow AC = AY$. Điều này dẫn tới $\Delta BAC = \Delta BAY \Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{BYA}$. Vì vậy

$$\widehat{PBD} = \widehat{QBY} = |\widehat{BQA} - \widehat{BYA}| = |\widehat{PCA} - \widehat{BCA}|.$$

□

3. Bài tập tự luyện.

Bài tập 1. (USA TSTST 2015) Cho tam giác ABC không đều. Gọi K_a, L_a, M_a theo thứ tự là giao điểm của BC với phân giác trong, phân giác ngoài và đường trung tuyến của tam giác ứng với góc A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AK_aL_a cắt AM_a tại điểm thứ hai X_a. Định nghĩa tương tự với X_b, X_c. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $X_aX_bX_c$ nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Bài tập 2. (IMO 2010/4, Modified) Cho tam giác ABC với trực tâm H. Giả sử P là hình chiếu của H lên trung tuyến CM của tam giác ABC. Giao điểm thứ hai của AP, BP, CP với đường tròn (ABC) theo thứ tự là K, L, M. Chứng minh rằng $MK = ML$.

Bài tập 3. (USA TST 2008) Cho tam giác ABC với trọng tâm G. P là điểm di động trên đoạn thẳng BC. Gọi Q, R lần lượt là các điểm trên AC, AB sao cho $PQ \parallel AB, PR \parallel AC$. Chứng minh rằng khi P di động trên BC, đường tròn ngoại tiếp AQR luôn đi qua điểm cố định X thỏa mãn $\widehat{BAG} = \widehat{CAX}$.

Bài tập 4. (EGMO 2016/4) Hai đường tròn ω_1, ω_2 có bán kính bằng nhau, cắt nhau tại hai điểm X_1, X_2. Xét đường tròn ω tiếp xúc ngoài với ω_1 tại T_1 và tiếp xúc trong với ω_2 tại T_2. Chứng minh rằng X_1T_1, X_2T_2 cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn ω.

Bài tập 5. (Mathematical Reflections O371) Cho tam giác ABC với $AB < AC$. Gọi D, E lần lượt là chân đường vuông góc của B, C xuống AC, AB. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, MD, ME. Gọi S là giao điểm của NP và BC. Đường thẳng qua A song song với BC cắt DE tại T. Chứng minh rằng ST tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE.

Bài tập 6. (EGMO Shortlist 2012/G7) Cho tam giác $ABC(AB < AC)$ nhọn với O là tâm ngoại tiếp tam giác. Q là giao điểm của phân giác ngoài góc A với BC. P là điểm bên trong tam giác ABC sao cho $\Delta BPA \sim \Delta APC$. Chứng minh rằng $\widehat{QPA} + \widehat{OQB} = 90^0$.

Bài tập 7. (Iranian Geometry Olympiad 2014) Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác nhọn $ABC(AB < AC)$ cắt BC tại P. Gọi X là điểm trên OP sao cho $\widehat{AXP} = 90^0$. Điểm E, F lần lượt nằm trên cạnh AB, AC và ở cùng phía so với OP sao cho $\widehat{EXP} = \widehat{ACX}, \widehat{FXO} = \widehat{ABX}$. K, L là giao điểm của EF với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng OP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KLX.

Bài tập 8. Cho P là một điểm trên đường đối trung của tam giác ABC. Gọi O_1, O_2, O lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác APB, CAP, ABC. Chứng minh rằng AO chia đôi O_1O_2.

Bài tập 9. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên nửa đường tròn đường kính AB, tâm O. X là giao điểm của MN với AB. Gọi K là giao điểm thứ hai của hai đường tròn MBO, NAO. Chứng minh rằng $XK \perp KO$.

Bài tập 10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AD. Đường tròn với tâm trên AD và tiếp xúc ngoài với đường tròn (BOC) tại X. Chứng minh rằng AX là đường đối trung của tam giác ABC.

Bài tập 11. (Dựa theo đề đề xuất của Luxembourg, IMO Shortlisted 2017,G2 Cho hai điểm R và S phân biệt trên đường tròn Ω và Δ là tiếp tuyến của Ω tại R. Gọi R' là điểm đối xứng của R qua S. Lấy điểm I trên cung nhỏ của cung RS của đường tròn Ω. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ISR' cắt đường thẳng Δ tại hai điểm phân biệt và A là một điểm cắt gần điểm R. Đường thẳng AI cắt Ω tại điểm thứ hai J và K là giao điểm thứ hai của $R'I$ với Ω. Chứng minh rằng S là điểm $R'-$ Dumpty của tam giác TAK.

Bài tập 12. (IMO Shortlisted 2017, G3) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). H là trực tâm tam giác ABC. Đường thẳng OA cắt đường cao của tam giác ABC hạ từ B, C theo thứ tự $P, Q. GiLl Øim$ A- $Humptycatamgic$ ABC $.Chngminhrng$ L $nmtrnØngtrnØngknh$ HT vi T $ltmØngtrnngoitiptamgic$ HPQ.

Bài tập 13. Cho tam giác ABC có trực tâm H. Gọi M là trung điểm của đoạn BC, N là giao điểm của đoạn AM với đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC. D là điểm nằm trong tam giác HBC. Gọi $X \in BD$, $Y \in CD$ sao cho N là trung điểm của đoạn XY. Giả sử AD, BY, CX đồng quy tại L. Chứng minh rằng A là trung điểm của LD và bốn điểm L, Y, X, D đồng viên.

Bài tập 14. (Toán học và tuổi trẻ, T12/492). Cho tam giác ABC nhọn với các đường cao BE, CF. ST là một dây cung của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Hai đường tròn qua S, T tiếp xúc với đường thẳng BC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng PE, QF cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

Bài tập 15. Trong mặt phẳng cho hai đường tròn (ω_1) và (ω_2) cắt nhau tại A và B. Một tiếp tuyến chung của hai đường tròn tiếp xúc với (ω_1) ở P và (ω_2) ở T. Các tiếp tuyến tại P và T của đường tròn ngoại tiếp tam giác APT cắt nhau tại S. Gọi H là điểm đối xứng của B qua PT. Chứng minh A, H, S thẳng hàng.

Bài tập 16. (USAMO 2008.) Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC. Trung trực của AB, AC cắt trung tuyến AP theo thứ tự tại D, E. Gọi F là giao điểm của BD và CE. Chứng minh rằng bốn điểm A, M, F, N đồng viên.

Bài tập 17. (VN TST 2012.) Trên mặt phẳng, cho đường tròn (O) và hai điểm cố định B, C trên đường tròn này sao cho BC không là đường kính của (O). Gọi A là điểm di động trên đường tròn (O) và A không trùng B, C. Gọi D, K, J lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và E, M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên BC, DJ, DK. Chứng minh rằng các tiếp tuyến tại M, N của đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN luôn cắt nhau tại T cố định khi A thay đổi trên (O).

Tài liệu

[1] Anant Mudgal,Gunmay Handa, *A Special Point On The Median.*

[2] Tạp chí Toán học & tuổi trẻ, ,Nhà xuất bản giáo dục Việt Nam.

[3] Các bài toán trên các diễn đàn `https://artofproblemsolving.com`, `https://diendantoanhoc.net`.

[4] Trần Quang Hùng, *Mỗi tuần một bài toán hình học*, NXB ĐHQG Hà Nội.

[5] Nguyễn Văn Linh, *108 bài toán hình học sơ cấp*, NXB ĐHQG Hà Nội.

[6] Trần Nam Dũng (Chủ biên), *Các phương pháp giải toán qua các kì thi Olympic.*

MỘT SỐ BỔ ĐỀ HỮU DỤNG TIẾP CẬN LỜI GIẢI TRONG CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

Lê Viết Ân
(TP Hồ Chí Minh)

GIỚI THIỆU

Trong bài viết này, chúng tôi xin giới thiệu một số bổ đề rất hữu ích có thể áp dụng trong các bài toán hình học, đặc biệt là có thể áp dụng tốt trong các bài hình thi học sinh giỏi. Các bổ đề được phát biểu đơn giản nhưng lại cho chúng ta một góc nhìn đơn giản hơn khi vẽ thêm hình phụ, thậm chí đặc biệt hóa chúng để áp dụng vào các bài toán khác.

1. Bổ đề 1. Định lý Reim

Trong một bài viết [1] của tác giả người Pháp Jean-Louis Ayme có đưa ra một kết quả và gọi là định lí Reim như sau:

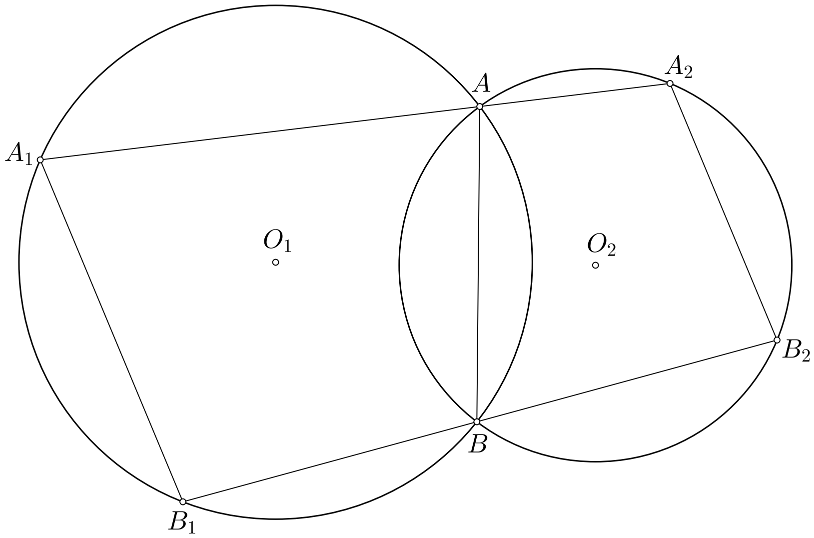
Bổ đề 1. *Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng đi qua A cắt (O_1) và (O_2) thứ tự tại A_1 và A_2; và một đường thẳng đi qua B cắt (O_1) và (O_2) theo thứ tự tại B_1 và B_2. Khi đó $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.*

Chứng minh. Có nhiều trường hợp xảy ra cho hình vẽ, ở đây tác giả chỉ chứng minh cho một trường hợp như hình 1.1. Các trường hợp khác bạn đọc chứng minh tương tự.

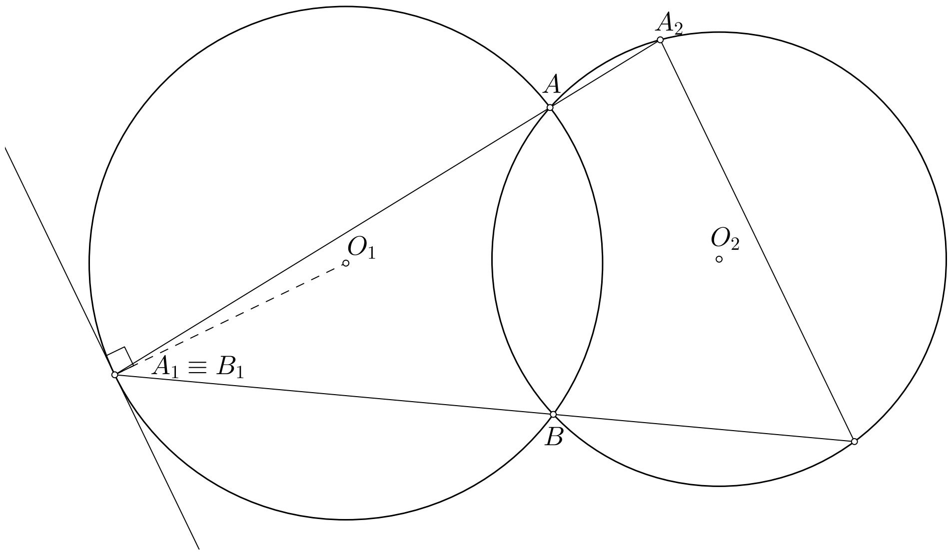
Ta có $\widehat{A_1B_1B} = 180^\circ - \widehat{A_1AB}$ (vì ABB_1A_1 nội tiếp) $= \widehat{A_2AB} = 180^\circ - \widehat{A_2B_2B}$ (vì ABB_2A_2 nội tiếp).
Suy ra $\widehat{A_1B_1B} + \widehat{A_2B_2B} = 180^\circ$. Do đó $A_1B_1 // A_2B_2$ (theo dấu hiệu hai góc trong cùng phía bù nhau). □

Nhận xét. *Ngoài ra bổ đề 1 vẫn đúng trong các trường hợp suy biến khi các điểm trùng nhau và khi đó ta xem cạnh do một cặp điểm trùng nhau là tiếp tuyến tại cặp điểm trùng nhau đó hoặc hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc với nhau. Các trường hợp được minh họa bằng các hình vẽ sau đây (xem các hình 1.a, 1.b, 1.c, 1.d, 1.e, 1.f, 1.g, 1.h).*

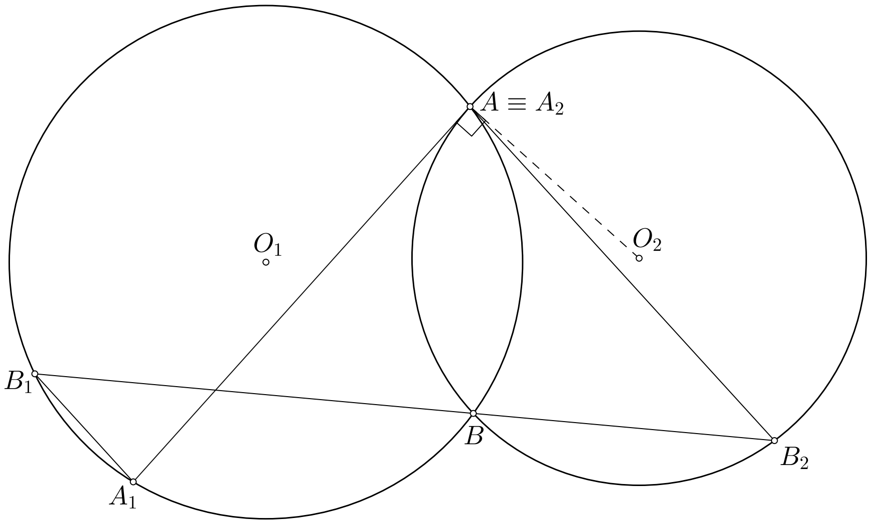
Điều ngược lại của bổ đề 1 cũng đúng. Và ta gọi là định lí Reim đảo với nội dung như sau:
Cho bốn điểm A, B, A_1, B_1 cùng nằm trên đường tròn (O_1). Trên các đường thẳng AA_1, BB_1



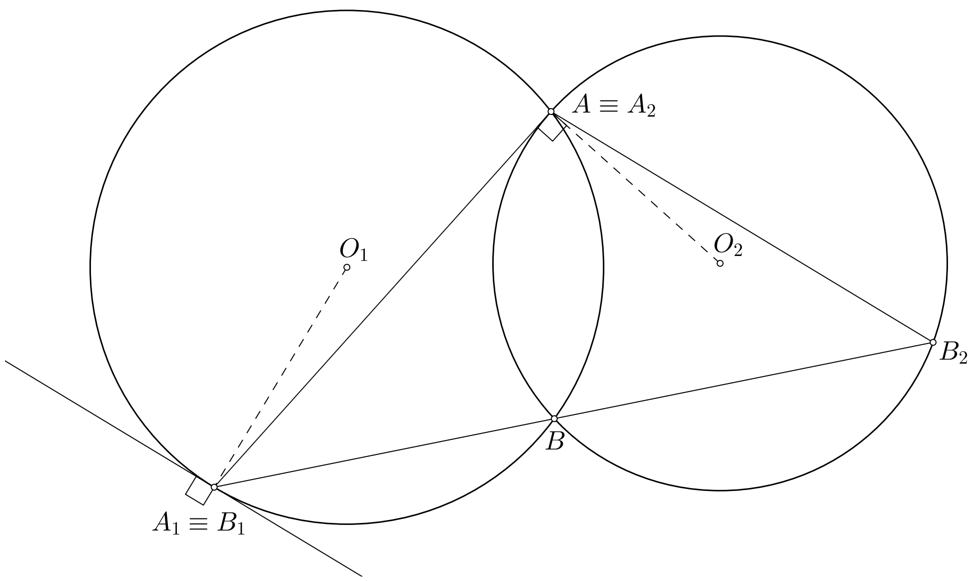
Hình 1.1



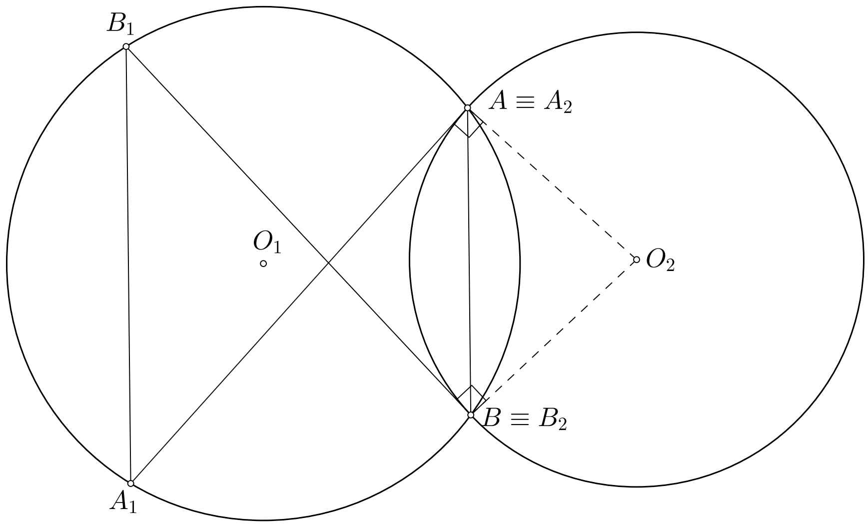
Hình 1.a



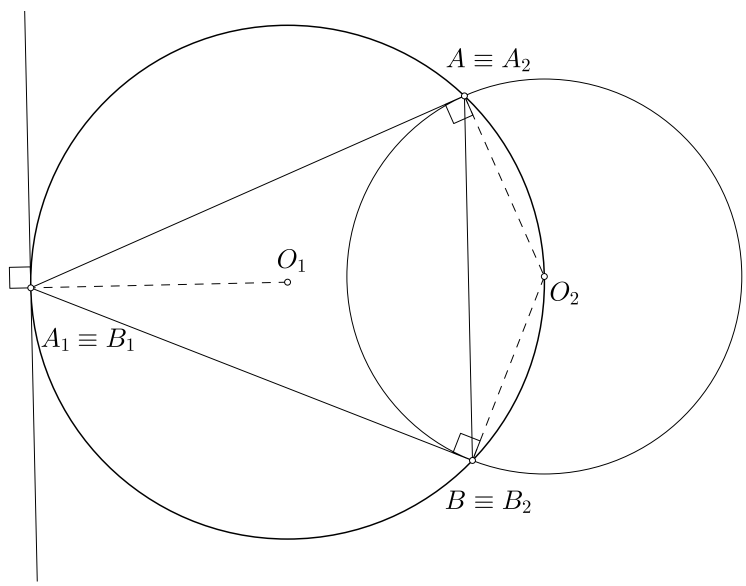
Hình 1.b



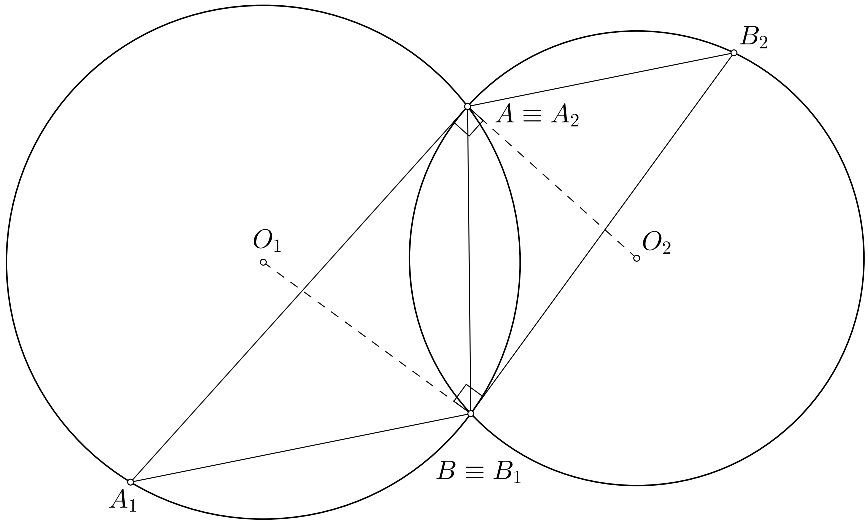
Hình 1.c



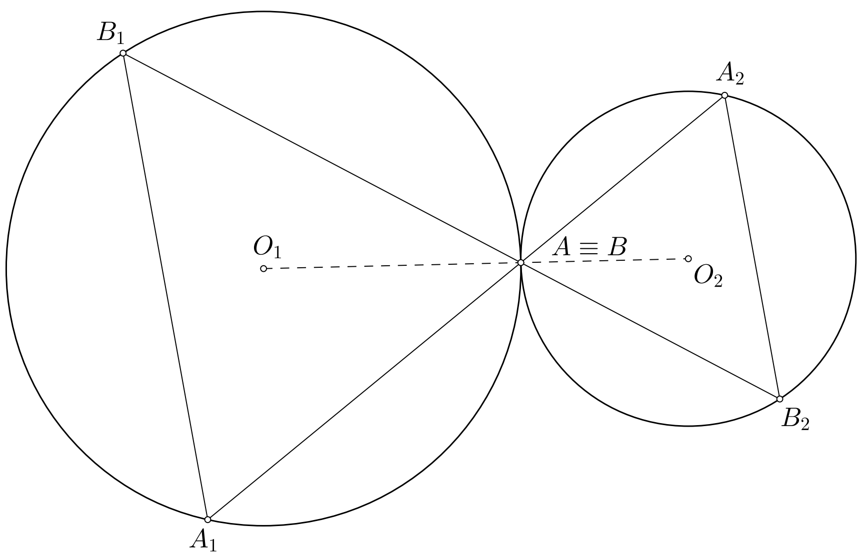
Hình 1.d



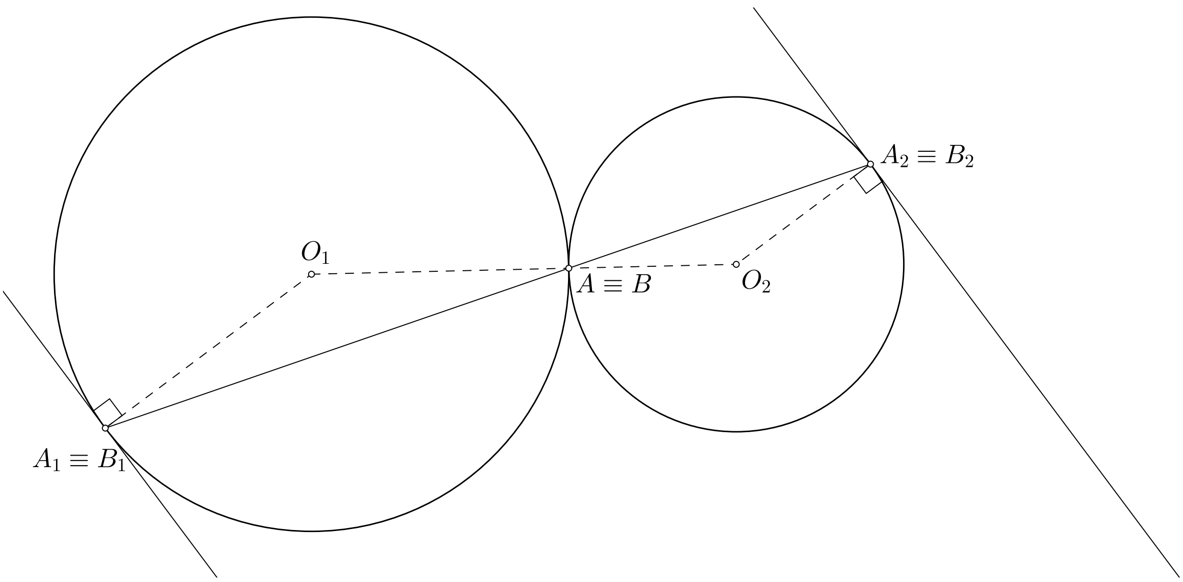
Hình 1.e



Hình 1.f



Hình 1.g



Hình 1.h

lấy các điểm A_2, B_2 khác tương ứng sao cho $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ thì khi đó tồn tại đường tròn (O_2) đi qua bốn điểm A, B, A_2, B_2.

Từ bổ đề 1 (định lí Reim thuận) và định lí Reim đảo, ta có hai hệ quả rất hay dùng để chứng minh đường thẳng tiếp xúc với đường tròn và hai đường tròn tiếp xúc với nhau.

Hệ quả 1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (O') đi qua các đỉnh B và C lần lượt cắt các đường thẳng AB và AC tại B' và C' khác A. Đường thẳng t đi qua đỉnh A. Khi đó t tiếp xúc với (O) khi và chỉ khi $t \parallel B'C'$.*

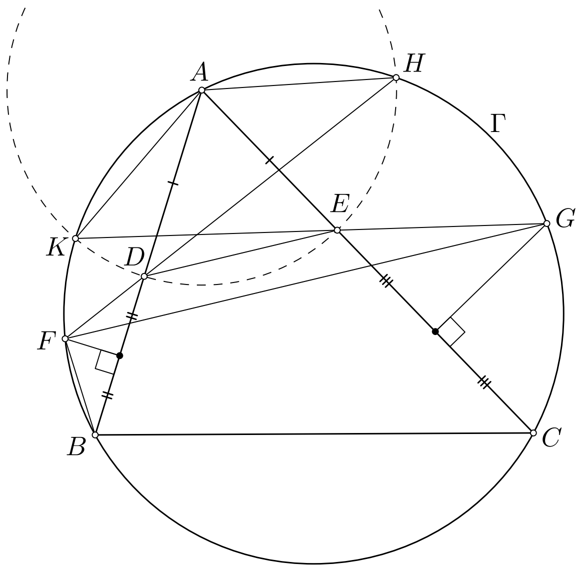
Hệ quả 2. *Cho tam giác ABC. Các điểm B' và C' lần lượt nằm trên các đường thẳng AB và AC và khác với các đỉnh của tam giác. Khi đó hai đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABC và $AB'C'$ tiếp xúc với nhau (tại A) khi và chỉ khi $BC \parallel B'C'$.*

Bây giờ ta đi xét một số thí dụ sau:

Ví dụ 1 (P1, IMO 2018). *Cho Γ là đường tròn ngoại tiếp của tam giác nhọn ABC. Các điểm D và E lần lượt được chọn trên các đoạn thẳng AB và AC sao cho $AD = AE$. Các đường trung trực của BD và CE lần lượt cắt các cung nhỏ AB và AC của Γ tại các điểm F và G. Chứng minh rằng DE và FG song song với nhau.*

Lời giải.. Từ nội dung bổ đề 1, rõ ràng có hai hướng vẽ đường phụ để áp dụng bổ đề 1. Hướng thứ nhất, chúng ta xét hai giao điểm của các cặp đường thẳng FD và GE với đường tròn Γ; và hướng thứ hai là xét hai giao điểm của các cặp đường thẳng FE và GD với Γ. Sau đó tìm cách chứng minh hai giao điểm của mỗi hướng với các điểm D và E đồng viên. Tuy nhiên, khi vẽ hình và quan sát thì chú ý rằng từ giả thiết chúng ta có $FD = FB$ (tương ứng $GE = GC$). Do đó hướng thứ hai là hướng tốt nhất để có thể sử dụng được $FD = FB$. Cụ thể chúng ta đi đến lời giải như sau (xem h. 1.2):

Gọi H, K lần lượt là giao điểm thứ hai của các đường thẳng FD và GE với đường tròn Γ.



Hình 1.2

Dễ thấy $\triangle FBD \sim \triangle AHD$ (g.g). Kết hợp với $FB = FD$. suy ra $AH = AD$. Tương tự, ta cũng có $AK = AE$. Do đó $AH = AD = AE = AK$, suy ra bốn điểm D, E, H, K cùng thuộc đường tròn $\odot(A; AD)$.

Áp dụng bổ đề 1 cho hai đường tròn $\odot(A; AD)$ và Γ cắt nhau tại H và K với hai cát tuyến $\overline{HDF}$ và $\overline{KEG}$ thì $DE \parallel FG$. □

Ví dụ 2 (P4, IMO 2015). *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn Ω tâm O. Đường tròn Γ tâm A cắt đoạn thẳng BC tại các điểm D và E sao cho B, D, E và C đôi một phân biệt và nằm trên đường thẳng BC theo đúng thứ tự đó. Gọi F và G là các giao điểm của Γ và Ω, sao cho A, F, B, C và G nằm trên Ω theo thứ tự đó. Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDF và đoạn thẳng AB. Gọi L là giao điểm giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác CGE và đoạn CA. Giả sử các đường thẳng FK và GL phân biệt và cắt nhau tại điểm X. Chứng minh rằng X nằm trên đường thẳng AO.*

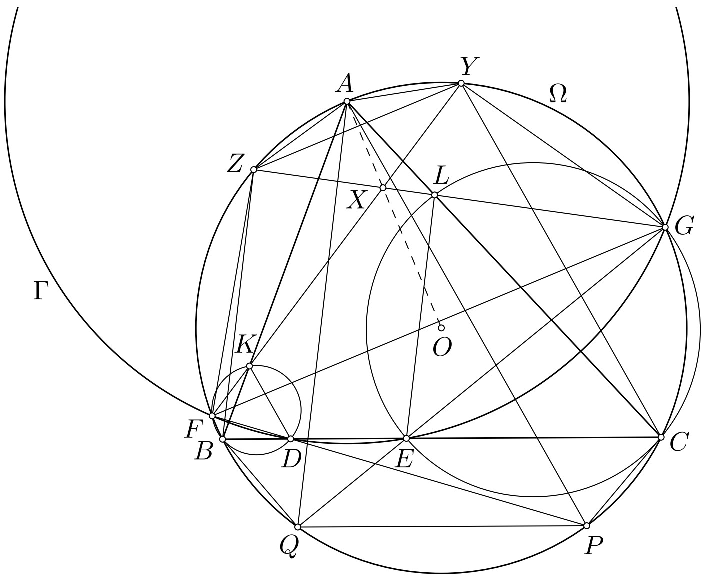
***Lời giải.*.** Giả sử các đường thẳng FD, GE, FK, GL cắt lại Ω tại các điểm P, Q, Y, Z (xem h. 1.3).

Áp dụng bổ đề 1 cho hai đường tròn Γ và Ω cắt nhau tại F và G với hai cát tuyến $\overline{FDP}$ và $\overline{GEQ}$, ta có $PQ//DE \equiv BC$. Do đó

$$BQ = CP. \tag{1}$$

Áp dụng bổ đề 1 cho hai đường tròn $\odot(BDF)$ và Ω cắt nhau tại B và F với hai cát tuyến $\overline{BDC}$ và $\overline{FKY}$, ta có

$$DK \parallel CY. \tag{2}$$



Hình 1.3

Áp dụng bổ đề 1 cho hai đường tròn $\odot(BDF)$ và Ω cắt nhau tại B và F với hai cát tuyến $\overline{BKA}$ và $\overline{FDP}$, ta có

$$KD \parallel AP. \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra $YC \parallel AP$. Do đó

$$AY = CP. \tag{4}$$

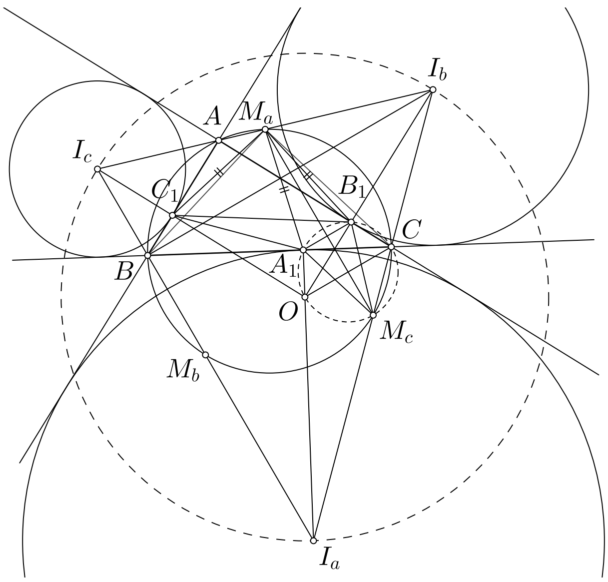
Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$AZ = BQ. \tag{5}$$

Từ (1), (4) và (5), suy ra $AY = AZ$, suy ra $AO \perp YZ$. Từ đó $YZ \parallel FG$ nên $FGYZ$ là hình thang cân. Suy ra giao điểm hai đường chéo FK và GL phải nằm trên đường trục đối xứng của hình thang, cũng là trung trực của hai đáy FG và YZ. Tức là $X \in AO$. □

Nhận xét. *Hầu hết các lời giải cho bài toán này bằng cách biến đổi góc để chứng minh $XF = XG$. Tuy nhiên bằng cách sử dụng bổ đề 1 một cách khéo léo, chúng ta đã có một lời giải rất nhẹ nhàng cho bài toán mà không cần qua một bước biến đổi góc. Hơn nữa với cách giải tương tự, chúng ta còn có thể mở chứng minh cho bài toán mở rộng bài toán bằng cách thay đường tròn Γ tâm A bởi đường tròn Γ có tâm nằm trên đường thẳng AO.*

Ví dụ 3 (P3, IMO 2013). *Đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC tại điểm A_1 . Điểm B_1 trên CA và điểm C_1 trên AB được định nghĩa một cách tương tự bằng cách xét đường tròn bàng tiếp góc B và góc C tương ứng. Giả sử tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_2C_1$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.*



Hình 1.4

Lời giải.. Giả sử I_a, I_b, I_c là tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC . Gọi M_a, M_b và M_c thứ tự là trung điểm của I_bI_c, I_cI_a và I_aI_b.

Dễ thấy A, B, C là chân các đường cao của tam giác $I_aI_bI_c$ (xem h. 1.4).

Vì sáu điểm A, B, C, M_a, M_b, M_c cùng nằm trên đường tròn Euler của tam giác $I_aI_bI_c$. Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{BM_aC}$ nên $\widehat{BM_aC_1} = \widehat{CM_aB_1}$. Lại có $\widehat{M_aBC_1} = \widehat{M_aBA} = \widehat{M_aCA} = \widehat{M_aCB_1}$ và $M_aB = M_aC$ nên $\triangle M_aBC_1 = \triangle M_aCB_1$. Suy ra $M_aB_1 = M_aC_1$.
Chứng minh tương tự, ta cũng có $M_bC_1 = M_bA_1$ và $M_cA_1 = M_cB_1$. Các điều này chứng tỏ rằng các đường trung trực của các đoạn thẳng B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là các điểm trong ba điểm M_a, M_b, M_c. Do đó giả thiết tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, suy ra có một điểm trong ba điểm $M_aM_bM_c$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử M_a là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác$A_1B_1C_1$. Khi đó $M_aM_c \perp A_1B_1$. Mà $M_aM_c \parallel AC$ và $I_bB \perp CA$ nên

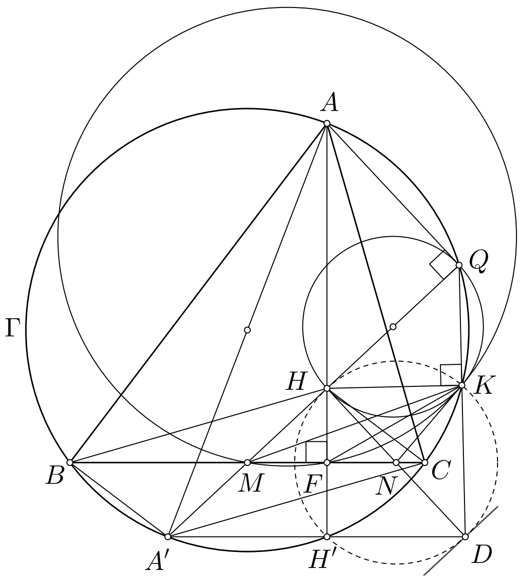
$$A_1B_1 \parallel I_bB. \tag{6}$$

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $I_aI_bI_c$. Vì bốn điểm I_b, I_c, B, C cùng nằm trên một đường tròn đường kính I_bI_c nên theo $OI_a \perp BC$ (một kết quả quen thuộc), mà $I_aA_1 \perp BC$ tại A_1 nên ba điểm I_a, A, O thẳng hàng. Từ đó bốn điểm C, B_1, A_1 và O cùng nằm trên đường tròn đường kính OC . Lại từ (6) nên theo phần đảo của bổ đề 1, ta có bốn điểm I_b, B, C, O cùng nằm trên một đường tròn, suy ra O nằm trên đường tròn đường kính I_bI_c hay $\widehat{I_bOI_c} = 90°$. Từ đó chú ý rằng $OI_b \perp CA$ và $OI_c \perp AB$ nên $\widehat{BAC} = \widehat{I_bOI_c} = 90°$ (cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc). □

Nhận xét. *Có thể nói rằng, bổ đề 1 cũng như phần đảo của nó rất hữu hiệu trong bài toán mà giả thiết có nhiều đường tròn tham gia.*

Ví dụ 4 (P3, IMO 2015). *Cho tam giác nhọn ABC với $AB > AC$. Ký hiệu Γ là đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm và F là chân đường cao hạ từ A của tam giác đó. Gọi M là trung điểm của BC. Gọi Q là điểm trên Γ sao cho $\widehat{HQA} = 90°$, và gọi K là điểm trên Γ sao cho $\widehat{HKQ} = 90°$. Giả sử rằng các điểm A, B, C, K và Q đôi một phân biệt và nằm trên Γ theo đúng thứ tự đó. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác KHQ và FKM tiếp xúc với nhau.*

Lời giải.. Kẻ đường kính AA' của Γ thì ta có $CH \parallel BA'$ (vì cùng vuông góc với AB). Tương tự $BH \parallel CA'$. Do đó $BHCA'$ là hình bình hành. Suy ra M là trung điểm HA' (xem h. 1.5).



Hình 1.5

Lại có $\widehat{AQA'} = 90° = \widehat{AQH}$ nên ba điểm Q, H, A'thẳng hàng. Từ đó bốn điểm Q, H, M, A' thẳng hàng.

Đường thẳng AH cắt lại Γ tại H' thì $\widehat{AHA'} = 90°$. Do đó nếu gọi $D := QK \cap A'H'$ thì từ $\widehat{HKD} = \widehat{DH'H} = 90°$, ta có tứ giác $DKHH'$ nội tiếp đường tròn đường kính DH .

Vẽ đường tròn (N) đường kính DH thì N là trung điểm của DH . Ta có $BC \parallel A'D$(vì cùng vuông góc với AH), kết hợp với BC đi qua trung điểm của HA’ , suy ra BC là đường trung bình của tam giác $HA'D$ nên BC đi qua trung điểm của HD hay $N \in BC$.

Áp dụng bổ đề 1 cho hai bộ bốn điểm cùng nằm trên đường tròn dạng suy biến $\odot(HKQ)$ và $\odot(HKD)$ với hai cát tuyến $\overline{HHD}$ và $\overline{KQD}$ thì ta có $QH \parallel DD$ (với ký hiệu DD là tiếp tuyến của (N) tại D), mà theo tính chất tiếp tuyến thì $DD \perp ND$, suy ra $ND \perp QH \equiv QA'$ tại H. Từ đó ta có $NK^2 = ND^2 = \overline{NF}.\overline{NM}$ (hệ thức lượng cho tam giác vuông HMN). Điều này chứng tỏ

$$NK \text{ tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp } FKM. \qquad (7)$$

Lại vì $NH \perp QH$ nên NH tiếp xúc với đường tròn đường kính QH (cũng chính là đường tròn ngoại tiếp HKQ), suy ra $\widehat{NKH} = \widehat{NHK} = \widehat{HQK}$ nên NK cũng tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp HKQ, kết hợp với (7) ta suy ra đpcm. □

Nhận xét. *Khéo léo áp dụng bổ đề 1 ở dạng suy biến cũng cho lời giải đẹp.*

2. Bổ đề 2. Bổ đề góc thứ nhất

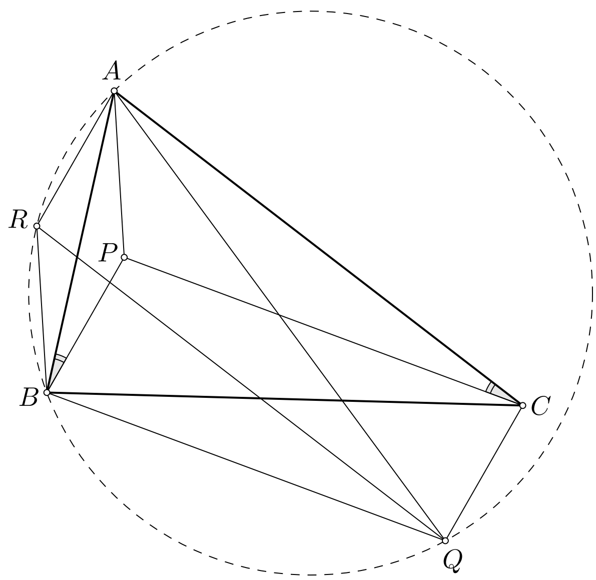
Trong kì thi BrMO 2012-2013, vòng 2 có một bài toán sau:

Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC và điểm P nằm trong tam giác sao cho $\widehat{ABP} = \widehat{ACP}$. Dựng hình bình hành $PBQC$. Khi đó $\widehat{QAB} = \widehat{CAP}$.*

Đây là một kết quả liên quan chặt chẽ đến tứ giác nội tiếp trong một đường tròn, điều này sẽ được thấy rõ khi ta gọi giao điểm của các đường thẳng BP, CP và AC, AB tương ứng thì các giao điểm đó cùng với các đỉnh B, C cùng nằm trên một đường tròn. Sau đây chúng ta đi đến một số chứng minh cho bổ đề 2:

Chứng minh. **Cách 1.** Nhận xét rằng yếu tố hình bình hành "gợi" cho chúng ta về quan hệ song song và bằng nhau của các cạnh đối diện của hình bình hành. Do đó sẽ "tận dụng" các cặp góc so le, đồng vị trong biến đổi góc, các đoạn thẳng bằng nhau để xem xét hai tam giác bằng nhau. Vì vậy chúng ta sẽ dựng thêm hình bình hành để tạo sự thuận lợi trong phép chứng minh. Cụ thể như sau:

Dựng hình bình hành $APBR$ (xem h.2.1). Dễ thấy $ACQR$ là hình bình hành và $\triangle PAC =$



Hình 2.1

$\triangle BRQ$ (c.c.c). Do đó $\widehat{PCA} = \widehat{BQR}$. Chú ý rằng $\widehat{PBA} = \widehat{BAR}$ (so le trong). Vậy

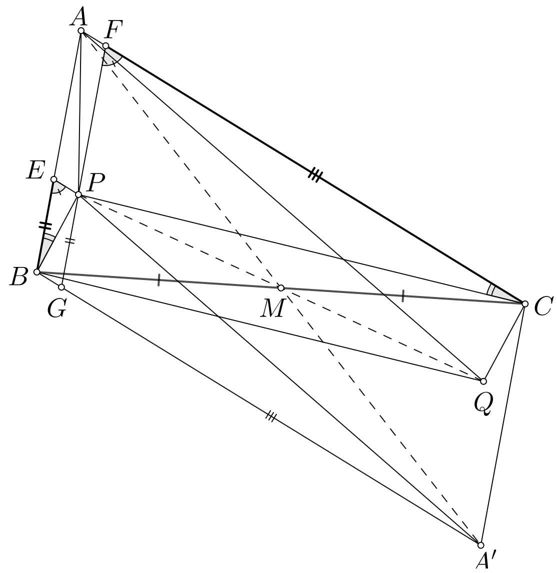
$$\widehat{BQR} = \widehat{PCA} = \widehat{PBA} = \widehat{BAR}.$$

Suy ra tứ giác $AQBR$ nội tiếp. Do đó

$$\widehat{PAB} = \widehat{ABR} = \widehat{AQR} = \widehat{QAC}.$$

Cách 2. Chú ý rằng hình bình hành có một tâm đối xứng. Do đó, xem xét cấu hình của bổ đề 1, chúng ta sẽ tận dụng phép đối xứng tâm với tâm là trung điểm của BC. Cụ thể như sau:

Gọi M là trung điểm cạnh BC; dựng hình bình hành $ABA'C$; kẻ từ P các đường song song với các cạnh AB, AC cắt $AB, AC, A'B$ thứ tự tại E, F, G (xem h. 2.a).



Hình 2.a

Dễ thấy $\triangle PBE \sim \triangle PCF$ (g.g) và các hình bình hành $AEPF, BEPG$ và $A'CFG$. Do đó

$$\frac{EP}{EA} = \frac{EP}{FP} = \frac{EB}{FC} = \frac{GP}{GA'},$$

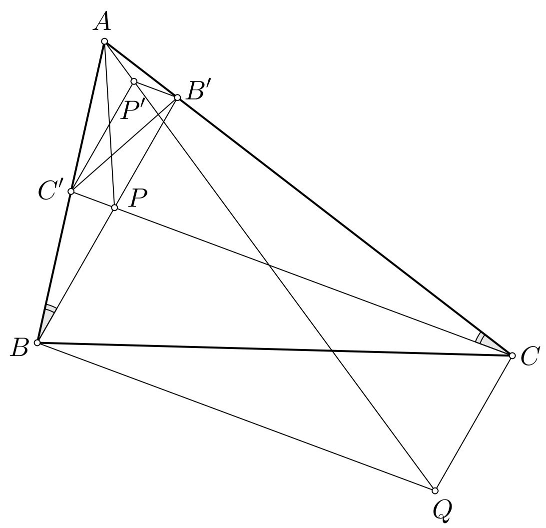
kết hợp với $\widehat{PEA} = \widehat{AFP} = \widehat{PGA'}$.
Suy ra $\triangle PEA \sim \triangle PGA'$ (c.g.c). Do đó $\widehat{PAE} = \widehat{PA'G}$.

Xét phép đối xứng tâm M: qua phép biến hình này thì các điểm A, B, C, P theo thứ tự biến thành A', C, B, Q nên $\widehat{QAC} = \widehat{PA'B}$.

Vậy $\widehat{PAB} = \widehat{PAE} = \widehat{PA'B} = \widehat{QAC}$.

Cách 3. Cách chứng minh tiếp theo là dựa vào quan hệ đồng dạng của hai hình, việc sử dụng mối quan hệ của hai hình đồng dạng vào giải toán là một kỹ năng nên rèn luyện nhuần nhuyễn sẽ cho chúng ta cái nhìn nhanh chóng trong việc định hướng lời giải và vẽ thêm hình phụ. Cụ thể như sau:

Gọi $B' = BP \cap AC$ và $C' = CP \cap AB$. Dễ thấy $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$. Do đó chúng ta có thể dựng điểm P' sao cho $\triangle ABC \cup \{P\} \sim \triangle AB'C' \cup \{P'\}$ (xem h.2.b).



Hình 2.b

Dễ thấy $B'P'CP$ là hình bình hành. Do đó $\triangle ABC \cup \{P; Q\} \sim \triangle AB'C' \cup \{P'; P\}$. Suy ra $\widehat{QAC} = \widehat{PAC'} = \widehat{PAB}$.

Cách 4. Từ giả thiết $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$ và chú ý $\widehat{PBQ} = \widehat{PCQ}$. Suy ra $\widehat{QBA} = \widehat{QCA}$. Do đó chúng ta sẽ nghỉ đến định lí sin trong tam giác. Thật vậy, áp dụng định lí sin cho các tam giác ABP, ACP (xem h.2.1 hoặc h.2.a hoặc h.2.b), ta có:

$$\frac{PB}{\sin\widehat{PAB}} = \frac{PA}{\sin\widehat{PAB}} = \frac{PA}{\sin\widehat{PAC}} = \frac{PC}{\sin\widehat{PAC}} \Longrightarrow \frac{\sin\widehat{PAB}}{\sin\widehat{PAC}} = \frac{PB}{PC}.$$

Tương tự, áp dụng định lí sin cho các tam giác ABQ, ACQ ta cũng thu được

$$\frac{\sin\widehat{QAC}}{\sin\widehat{QAB}} = \frac{QC}{QB}.$$

Chú ý $PB = QC$ và $PC = QB$, suy ra

$$\frac{\sin\widehat{PAB}}{\sin\widehat{PAC}} = \frac{\sin\widehat{QAC}}{\sin\widehat{QAB}}.$$

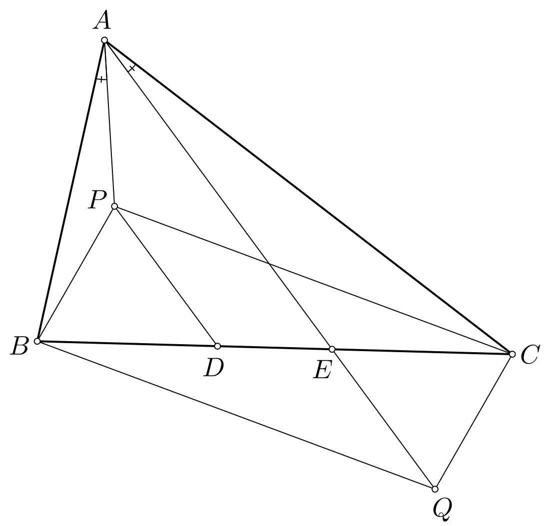
Đến đây, kết hợp với $\widehat{PAB} + \widehat{PAC} = \widehat{BAC} = \widehat{QAC} + \widehat{QAB}$. Do đó ta phải có $\widehat{PAB} = \widehat{QAC}$ và $\widehat{PAC} = \widehat{QAB}$ (xem thêm bài viết **ứng dụng của tỉ số đoạn thẳng và tỉ số lượng giác**, Chuyên đề Toán học 10, PTNK). □

Nhận xét. *Chú ý rằng bổ đề 2 vẫn đúng khi điểm P nằm phía trong góc BAC chứ không nhất thiết điểm P phải nằm trong tam giác ABC.*

Ta sẽ điểm qua một số bài toán có thể áp dụng được bổ đề 1 sau:

Ví dụ 5 (P5, ELMO 2012). *Cho ABC là một tam giác nhọn với $AB < AC$, và D và E là các điểm nằm trên cạnh BC sao cho $BD = CE$ và D nằm giữa B và E. Giả sử có điểm P nằm bên trong tam giác ABC sao cho $PD \parallel AE$ và $\widehat{PAB} = \widehat{EAC}$. Chứng minh rằng $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$.*

Lời giải. Dựng hình bình hành $BPCQ$ (xem h. 2.3).



Hình 2.2

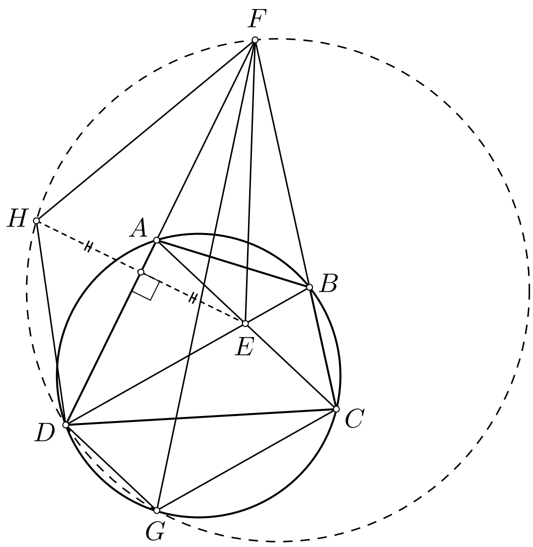
Khi đó dễ thấy rằng từ $BD = CE$, suy ra $QE \parallel PD \parallel AE$ suy ra ba điểm A, E và Q thẳng hàng.

Áp dụng bổ đề 2, ta suy ra được $\widehat{ABQ} = \widehat{ACQ}$. Và do đó $\widehat{ABP} = \widehat{ACP}$. □

Ví dụ 6 (IMOSL G2, 2012). *Cho $ABCD$ là một tứ giác nội tiếp với hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Các đường thẳng AD và BC kéo dài về phía A và B cắt nhau tại F. Cho G là điểm sao cho $ECGD$ là hình bình hành, và H là đối xứng của E qua AD. Chứng minh rằng D, H, F, G đồng viên.*

Hướng dẫn. (xem h. 2.3) Từ $\widehat{FCE} = \widehat{FDE}$. Do đó theo bổ đề 2, ta có $\widehat{CFG} = \widehat{DFE} = \widehat{DFH}$. Do đó tứ giác $DGFH$ nội tiếp khi và chỉ khi $\widehat{DGH} + \widehat{DHF} = 180°$. Tuy nhiên, chú ý rằng $\widehat{FHG} = \widehat{FED}$ (tính chất đối xứng trục) và $\widehat{FEB} + \widehat{FED} = 180°$. Do đó bài táo quy về chứng minh $\widehat{FEB} = \widehat{FGD}$. Điều này đồng nghĩ với việc chứng minh $\triangle FEB \sim \triangle FGD$, tức là ta chỉ cần chứng minh $\widehat{FBE} = \widehat{FDG}$.

Thật vậy, vì tứ giác $ABCD$ và $DG \parallel AC$ nội tiếp nên $\widehat{FBE} = \widehat{FBD} = \widehat{FAC} = \widehat{FDG}$. □

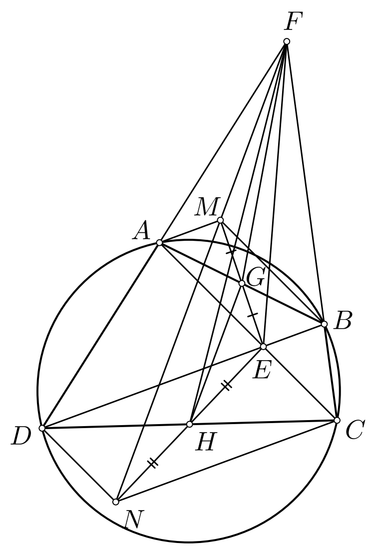


Hình 2.3

Nhận xét. *Rõ ràng, nếu chúng ta biết đến bổ đề 2 thì ví dụ 6 thì thấy rõ được hướng đi của lời giải một cách nhanh chóng.*

Ví dụ 7 (G4, IMOSL 2009). *Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có các đường chéo AC và BD cắt nhau tại E, và các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại F. Gọi G và H theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng EF là tiếp tuyến tại E của đường tròn đi qua các điểm E, G và H.*

Lời giải.. Dựng các hình bình hành $AEBM$ và $CEDN$ (xem h. 2.4).



Hình 2.4

Khi đó G, H lần lượt là trung điểm của EM và FN. Do đó $GH \parallel MN$. Suy ra

$$\widehat{EHG} = \widehat{ENM}. \tag{8}$$

Áp dụng bổ đề 2 cho tam giác FAB với chú ý $\widehat{FAE} = \widehat{FBE}$, và cho tam giác FCD với chú ý $\widehat{FCE} = \widehat{FDE}$. Suy ra $\widehat{MFA} = \widehat{EFB} = \widehat{EFC} = \widehat{NFD}$. Suy ra ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Dễ thấy $\triangle EAB \cup \{M; E; G\} \sim \triangle FCD \cup \{E; H; N\}$. Suy ra

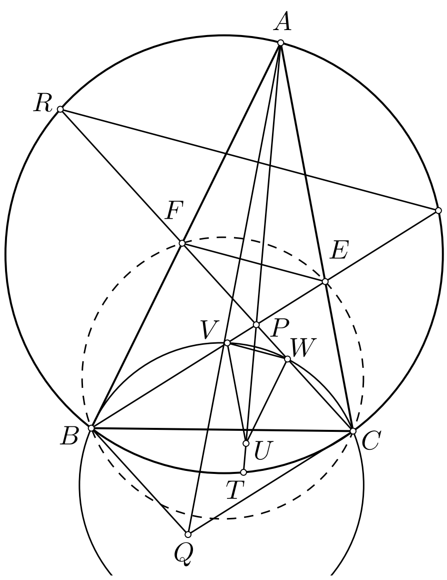
$$\widehat{FEG} = \widehat{FNH}. \tag{9}$$

Từ (8) và (9), suy ra $\widehat{FEG} = \widehat{EFG}$, tức là EF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác EFG. □

Nhận xét. *Bài toán chỉ đúng khi E, F, G không thẳng hàng. Điều này tương đương với AB và CD không song song với nhau.*

Ví dụ 8 (Đài Loan TST 2014). *Cho tam giác ABC và điể P nằm trong tam giác, và các đường thẳng AP, BP, CP theo thứ tự cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại T, S, R. Cho U là một điểm nằm trên đoạn thẳng PT. Một đường thẳng qua U song song với AB cắt CR tại W, và đường thẳng khác qua U song song với AC cắt BS tại V. Các đường thẳng qua B song song với CP, qua C song song với BP cắt nhau tại Q. Giả sử rằng RS và VW song song với nhau, chứng minh rằng $\widehat{CAP} = \widehat{BAQ}$.*

Hướng dẫn. Gọi $E = BP \cap AC$ và $F = CP \cap AB$ (xem h. 2.5).



Hình 2.5

Theo bổ đề 2, bài toán quy về chứng minh bốn điểm B, C, E, F đồng viên.

Áp dụng định lí Thales, ta có $\frac{\overline{PV}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{PU}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PW}}{\overline{PF}}$. Suy ra $VW \parallel EF$. Do đó $RS \parallel VW \parallel EF$.

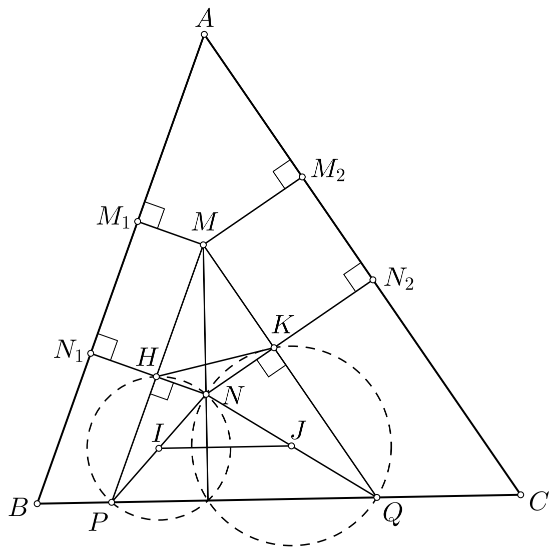
Ta có tứ giác $BCSR$ nội tiếp với chú ý $VW \parallel RS$ nên theo định lí Reim đảo, ta có tứ giác $BCWV$ nội tiếp. Tiếp tục áp dụng định lí Reim đảo cho tứ giác $BCSR$ với chú ý $EF \parallel RS$, ta có tứ giác $BCEF$ nội tiếp. □

3. Bổ đề 3. Định lý Koutras

Dưới đây tác giả xin trình bày một tiêu chuẩn vuông góc của hai đường thẳng được biết đến với tên gọi là định lí Koutras. Kết quả này mặt dù đã biết đến trước năm 1980, tuy nhiên Stathis Koutras, một nhà nghiên cứu người Hy Lạp đã có những áp dụng đẹp cho tiêu chuẩn đơn giản này (hơn 300 bài toán có thể áp dụng nó) và phổ biến kết quả này. Nội dung của định lí này như sau:

Bổ đề 3 (Định lí Koutras). *Cho tam giác ABC và đoạn thẳng MN. Gọi M_1, N_1 lần lượt là hình chiếu của M, N lên AB; M_2, N_2 lần lượt là hình chiếu của M, N lên AC. Khi đó $MN \perp BC$ khi và chỉ khi $\frac{\overline{AB}}{\overline{M_2N_2}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{M_1N_1}}$.*

Chứng minh. Có rất nhiều chứng minh cho bổ đề 3(xem thêm tại [5]), ở đây tác giả xin giới thiệu một cách chứng minh bằng trục đẳng phương (xem h. 3.1).



Hình 3.1

Đường thẳng qua M theo thứ tự song song với AB, AC cắt NN_1, NN_2 tương ứng tại H, K và cắt BC tại P, Q. Gọi $(I), (J)$ là đường tròn ngoại tiếp các tam giác HPN, KQN.

Dễ thấy hai tam giác ABC và MPQ có các cặp cạnh tương ứng đôi một hoặc song song hoặctrùng nhau nên tồn tại một phép vị tự hoặc một phép tịnh tiến biến tam giác này thành tam giác kia. Suy ra

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MQ}}. \tag{10}$$

Mặt khác, lại có

$$\overline{MH} = \overline{M_1N_1} \text{ và } \overline{MK} = \overline{M_2N_2}. \tag{11}$$

Dễ thấy I, J là trung điểm của NP, NQ nên

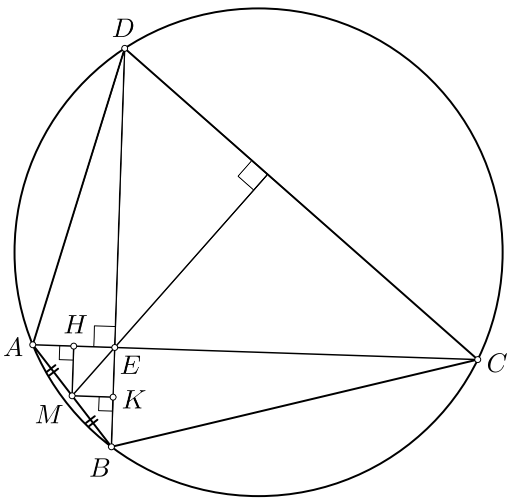
$$IJ \parallel PQ \equiv BC. \tag{12}$$

Vậy $\frac{\overline{AB}}{\overline{M_2N_2}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{M_1N_1}}$ (vì (10) và (11)) $\Longleftrightarrow \overline{MH}.\overline{MP} = \overline{MK}.\overline{MQ} \Longleftrightarrow \mathcal{P}_{M/(I)} = \mathcal{P}_{M/(J)} \Longleftrightarrow$ MN là trục đẳng phương của (I) và $(J) \Longleftrightarrow MN \perp IJ \Longleftrightarrow MN \perp BC$ (vì (12)). □

Ta đi xem xét một số ví dụ minh họa cho sự áp dụng của bổ đề 3:

Ví dụ 9 (Định lí Brahmagupta). *Đường thẳng nối giao điểm của hai đường chéo vuông góc trong tứ giác nội tiếp đường tròn với trung điểm của một cạnh bên thì luôn vuông góc với cạnh bên đối diện.*

Lời giải. Xét tứ giác $ABCD$ nội tiếp có $AC \perp BD$ tại E. M là trung điểm của AB. Ta cần chứng minh $ME \perp BC$ (xem h. 3.2)



Hình 3.2

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AE, BE. Khi đó H, K lần lượt là trung điểm của AE, BE.Chú ý tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên

$$\overline{EA}.\overline{EC} = \overline{EB}.\overline{ED} \Longrightarrow \frac{\overline{EH}}{\overline{EK}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{EC}}.$$

Theo bổ đề 3, ta suy ra $ME \perp BC$. □

Nhận xét. *Cách chứng minh định lí Brahmagupta ở trên là một hướng đi mới lạ. Không những thế, chúng ta còn có thể mở rộng kết quả này cho đường đối song của tam giác ở ví dụ tiếp theo sau đây mà cách chứng minh hoàn toàn tương tự.*

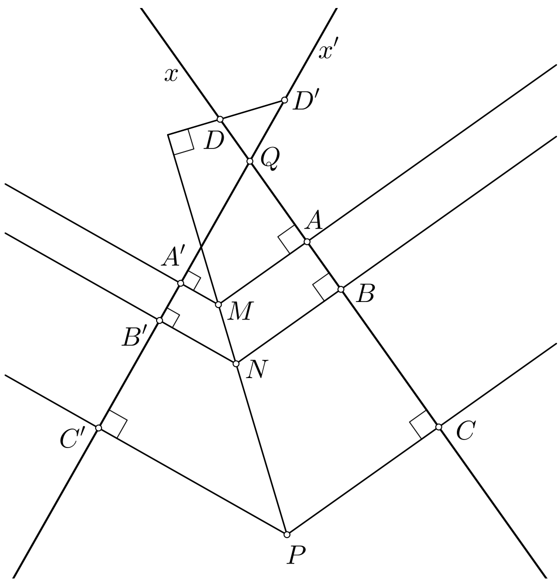
Ví dụ 10. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng đường đối song ứng với đỉnh A của tam giác vuông góc với AO (đường đối song ứng với đỉnh A là đường thẳng có ảnh đối xứng qua đường phân giác đỉnh A của tam giác song song với BC).*

Hướng dẫn. Cho ℓ là một đường đối song của ứng với đỉnh A của tam giác, ta cần chứng minh $AO \perp \ell$. Giả sử $CA \cap \ell = E$ và $AB \cap \ell = F$. Khi đó B, C, E, F đồng viên. Phần tiếp theo bạn đọc chứng minh hoàn toàn tương tự như ví dụ trước. □

Nhận xét. *Ví dụ này là một kết quả cơ bản của đường đối song trong tam giác. Kết quả này cũng có rất nhiều áp dụng và bạn đọc nên nhớ.*

Ví dụ 11. *Cho hai đường thẳng x và x' không song song với nhau. Các điểm phân biệt A, B, C thuộc x và các điểm phân biệt A', B', C' thuộc x'. Gọi a, b, c là các đường thẳng lần lượt đi qua A, B, C và cùng vuông góc với x; các đường thẳng a', b', c' lần lượt đi qua A', B', C' và cùng vuông góc với x'. Gọi $M = a \cap a'$, $N = b \cap b'$ và $P = c \cap c'$. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$.*

Lời giải.. Gọi $Q = x \cap x'$; tồn tại ít nhất cặp điểm $D \in x$ và $D' \in x'$ sao cho $D \neq D'$ và $DD' \perp MN$ (xem h. 3.3)



Hình 3.3

Áp dụng bổ đề 3, từ $MN \perp DD'$ suy ra

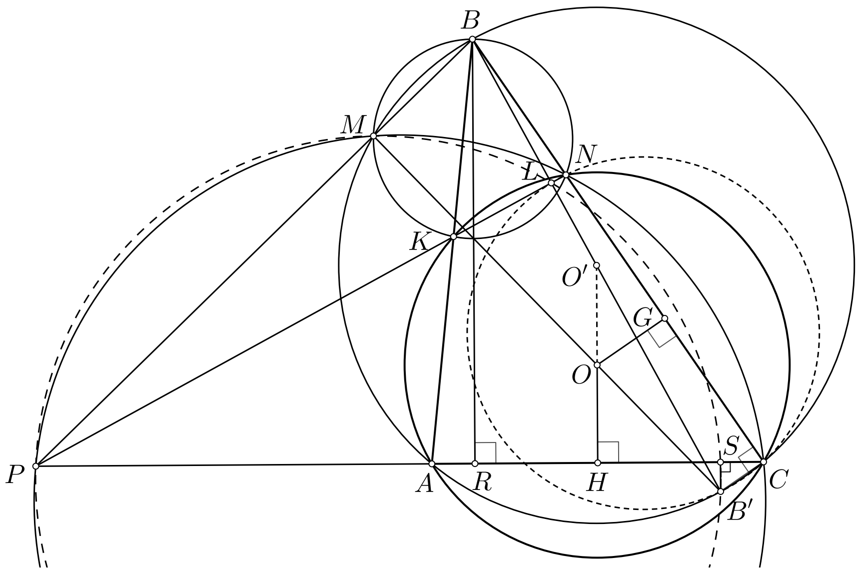
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{QD'}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{QD}}. \tag{13}$$

Ta có M, N, P thẳng hàng $\iff PM \perp DD' \iff \frac{\overline{AC}}{\overline{QD'}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{QD}} \iff \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{QD}}$ (vì (13)). □

Nhận xét. *Ví dụ này cũng là một kết quả cơ bản có nhiều áp dụng và bạn đọc cũng nên nhớ. Hơn nữa chúng ta còn có thể chứng minh kết quả tổng quát như sau:*
Cho góc BAC và các đoạn thẳng MN và KL. Gọi M_1, N_1, K_1, L_1 theo thứ tự là hình chiếu của M, N, K, L lên AB, và M_2, N_2, K_2, L_2 là hình chiếu vuông góc của M, N, K, L lên AC. Khi đó $\frac{M_1N_1}{K_1L_1} = \frac{M_2N_2}{K_2L_2}$ khi và chỉ khi hai đường thẳng MN và KL cùng phương (song song hoặc trùng nhau).

Ví dụ 12 (P5, IMO 1985). *Một đường tròn tâm O đi qua các đỉnh A và C của tam giác ABC và cắt AB và BC lần lượt tại các điểm thứ hai K và N. Gọi M là giao điểm khác B của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và KBN. Chứng minh rằng $\widehat{OMB} = 90°$.*

Lời giải. Vì M khác B nên tam giác ABC không cân tại B. Không mất tính tổng quát, giả sử $AB < BC$ (xem h. 3.4).



Hình 3.4

Ta có BM, KN, AC đồng quy tại tâm đẳng phương của ba đường tròn $(O), \odot(ABC), \odot(BKN)$. Gọi $P := BM \cap KN \cap AC$; BB' là đường kính của $\odot(ABC)$ và $L = BB' \cap KN$.

Áp dụng tính chất điểm Miquel cho tứ giác toàn phần $ACNKBF$, ta có $M \in \odot(CNP)$.

Và áp dụng tính chất đường đối song (xem ví dụ 10) cho tam giác ABC, ta có $BB' \perp KN$ tại L nên $\widehat{B'LN} = 90° = \widehat{B'CN}$. Suy ra bốn điểm B', C, N, L đồng viên. Do đó

$$\overline{BL}.\overline{BB'} = \mathcal{P}_{B/\odot(B'CNL)} = \overline{BC}.\overline{BN} = \mathcal{P}_{B/\odot(CNP)} = \overline{BP}.\overline{BM}.$$

Suy ra B', L, M, P đồng viên hay $B'M \perp BP$. Do đó bài toán sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $O \in B'M$ hay $B'O \perp BP$.

Thật vậy, gọi O' là tâm của $\odot(ABC)$; G, H lần lượt là trung điểm của AC, CN; và R, S lần lượt là hình chiếu của B, B' lên AC. Khi đó O' là trung điểm của BB' và $\overline{OO'H}$ là trung trực của AC nên $AR \parallel O'H \parallel BS$ nên

$$\overline{RS} = 2\overline{HS}. \tag{14}$$

Mặt khác, lại có

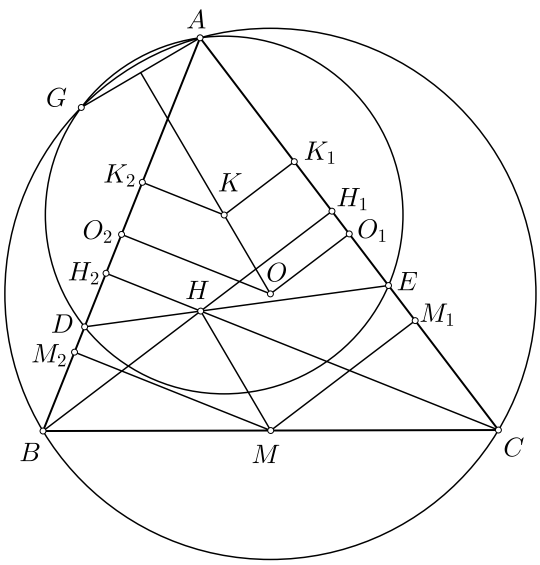
$$\overline{NC} = 2\overline{GC}. \tag{15}$$

Áp dụng bổ đề 3 với chú ý $BB' \perp PN$. Ta có $\frac{\overline{RS}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{PC}}$. Kết hợp với (14) và (15), suy ra $\frac{\overline{HS}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{PC}}$. Do đó lại theo bổ đề 3, ta có $B'O \perp BP$. Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét. *Bài toán được xử lí theo hướng sử dụng bổ đề 3 cho ta một cách nhìn khá thú vị và tự nhiên.*

Ví dụ 13 (IMOSL G5, 2005). *Cho tam giác nhọn ABC với $AB \neq AC$, H là trực tâm của tam giác và M là trung điểm của BC. Các điểm D trên AB và E trên AC và sao cho $AE = AD$ và D, H, E thẳng hàng. Chứng minh rằng HM vuông góc với dây cung chung của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và ADE.*

***Lời giải.*.** Gọi $(O), (K)$ là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, ADE; G là giao điểm khác A của (O) và (K). Ta cần chứng minh $HM \perp AG$ (xem h. 3.5)



Hình 3.5

Dễ thấy OK là trung trực của AG nên $OK \perp AG$. Do đó ta chỉ cần chứng minh $HM \parallel OK$.

Thật vậy, gọi O_1, K_1, M_1, H_1 lần lượt là hình chiếu của O, K, M, H lên AB, O_2, K_2, M_2, H_2 lần lượt là hình chiếu của O, K, M, H lên AC.

Ta có $\overline{O_1K_1} = \overline{O_1A} - \overline{K_1A} = \frac{\overline{CA}}{2} - \frac{\overline{EA}}{2} = \frac{\overline{CE}}{2}$. Tương tự, $\overline{O_2K_2} = \frac{\overline{BD}}{2}$. Suy ra

$$\frac{\overline{O_1K_1}}{\overline{O_2K_2}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BD}}. \tag{16}$$

Mặt khác, lại có $\widehat{AEH} = \widehat{ADH}$ (vì $AE = AD$) và $\widehat{ECH} = \widehat{DBH}$ nên $\triangle ECH \sim \triangle DBH$. Do đó $\widehat{EHC} = \widehat{DHB}$, kết hợp với D, H, E thẳng hàng. Suy ra DE là phân giác ngoài tại đỉnh H của tam giác BCH. Do đó

$$HE \text{ và } HD \text{ theo thứ tự là phân giác trong của các tam giác } H_1CH \text{ và } H_2BH. \tag{17}$$

Dễ dàng có được

$$\text{hai tam giác } H_1CH \text{ và } H_2BH \text{ đồng dạng ngược hướng.} \tag{18}$$

Từ (17) và (18) suy ra

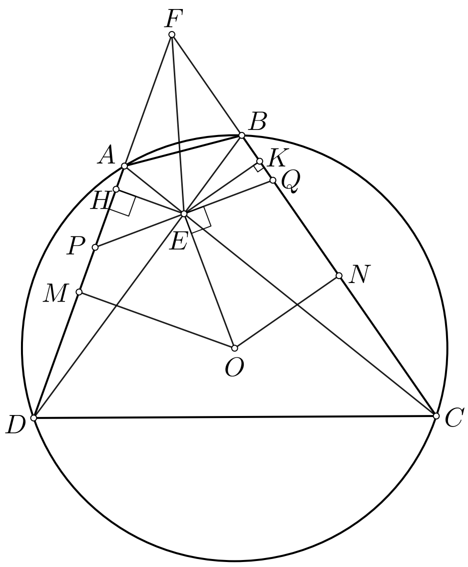
$$\frac{\overline{CE}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CH_1}}{\overline{BH_2}} = \frac{2\overline{M_1H_1}}{2\overline{M_2H_2}} = \frac{\overline{M_1H_1}}{\overline{M_2H_2}}. \tag{19}$$

Từ (16) và (19) suy ra $\frac{\overline{O_1K_1}}{\overline{O_2K_2}} = \frac{\overline{M_1H_1}}{\overline{M_2H_2}}$. Do đó $MH \parallel OK$. Vậy $MH \perp AG$ (đpcm). □

Nhận xét. *Có thể áp dụng kết quả ví dụ 12 để giải ví dụ 13. Và ngược lại có thể sử dụng cách chứng minh của ví dụ 13 để giải ví dụ 12.*

Ví dụ 14 (Định lí "Bướm đơn"). *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Đường thẳng qua E vuông góc với OE cắt AD, BC thứ tự tại P và Q. Chứng minh rằng $EP = EQ$.*

Lời giải. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của AD, BC; H, K thứ tự là hình chiếu của E lên AD, BD; và gọi $F = AD \cap BC$ (điểm F luôn tồn tại vì do hai điểm P và Q xác định) (xem h. 3.6)



Hình 3.6

Vì $OE \perp PQ$ nên áp dụng bổ đề 3, ta có

$$\frac{MH}{KN} = \frac{FQ}{FP}. \tag{20}$$

Vì $\triangle EAD \sim \triangle EBC$ với chú ý M, N là các trung điểm của các cặp cạnh AD, BC và EH, EK là hai đường cao của hai tam giác này. Do đó $\triangle EAD \cup \{H; P\} \sim \triangle EBC \cup \{K; N\}$. Do đó

$$\frac{EH}{EK} = \frac{MH}{KN}. \tag{21}$$

Từ (20) và (21), suy ra $EH.FP = EK.FQ$. Tức là diện tích hai tam giác EFP và EFQ bằng nhau. Do đó E là trung điểm của PQ. □

Nhận xét. *Chứng minh định lí "Bướm đơn" có rất nhiều cách khác nhau, tuy nhiên dưới góc nhìn bằng cách sử dụng bổ đề 3 là một hướng đi rất mới lạ.*

4. Bổ đề 4. Bổ đề góc thứ hai

Tại facebook [6] của một nhóm hình học PERU GEOMETRICO, trong đó có một bài toán của tác giả Miguel Ochoa Sanchez như sau:

Bổ đề 4. *Cho tam giác ABC và các điểm P thuộc AB và Q thuộc AC. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABQ và ACP cắt nhau tại D khác A. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và PQ. Khi đó $(AB, NM) \equiv (AC, AD) (\mod \pi)$.*

Chứng minh. Gọi G là trung điểm của BD (xem h. 4.1).

Dễ thấy $(PB, PD) \equiv (PA, PD) \equiv (CA, CD) \equiv (CQ, CD) (\mod \pi)$ và $(BP, BD) \equiv (BA, BD) \equiv (QA, QD) \equiv (QC, QD) (\mod \pi)$. Do đó

$$\text{hai tam giác } DBP \text{ và } DQC \text{ đồng dạng cùng hướng.} \tag{22}$$

Suy ra

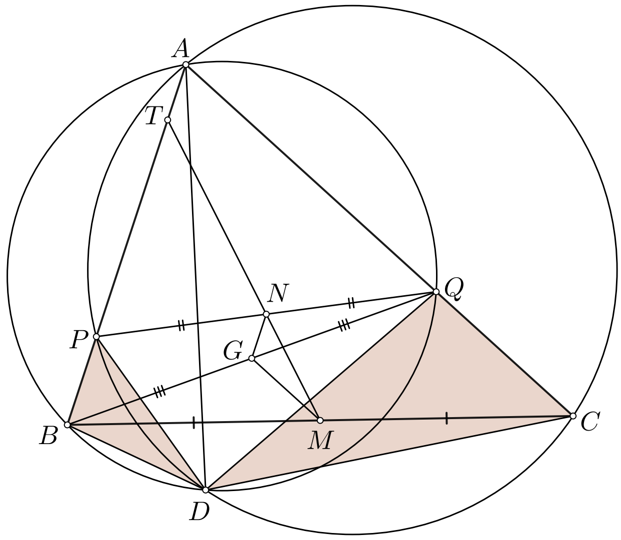
$$\frac{DB}{DQ} = \frac{BP}{QC} = \frac{2GN}{2GM} = \frac{GN}{GM},$$

và

$$(\overrightarrow{GM}, \overrightarrow{GN}) \equiv (\overrightarrow{QC}, \overrightarrow{BP}) \equiv (\overrightarrow{DQ}, \overrightarrow{DB}) (\text{vì (22)}) (\mod 2\pi).$$

Do đó hai tam giác GMN và DQB đồng dạng cùng hướng.
Suy ra $(MN, AB) \equiv (NM, NG) \equiv (BQ, BD) \equiv (AC, AD) (\mod \pi)$. □

Nhận xét. *Nếu MN cắt AB tại T. Khi đó hoặc $\widehat{BTM} = \widehat{DAC}$ hoặc $\widehat{BTM} + \widehat{DAC} = 180°$.*



Hình 4.1

Bổ đề 4 ở dưới dạng tổng quát, do đó đặc biệt hóa kết quả này sẽ thu được một số bài toán có ý nghĩa.

Nếu cho MN đi qua đỉnh A của tam giác thì khi đó $PQ \parallel BC$. Theo bổ đề 4 thì khi đó AD là đường đối trung đỉnh A của tam giác. Do đó chúng ta thu được bài toán sau

Ví dụ 15 (P2, Balkan MO, 2009). *Cho tam giác ABC, các điểm M và N lần lượt nằm trên các canhj AB và AC sao cho $MN \parallel BC$. Gọi P là giao điểm của BN và CM. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMP và CNP cắt nhau tại hai điểm phân biệt P và Q. Chứng minh rằng $\widehat{BAQ} = \widehat{CAP}$.*

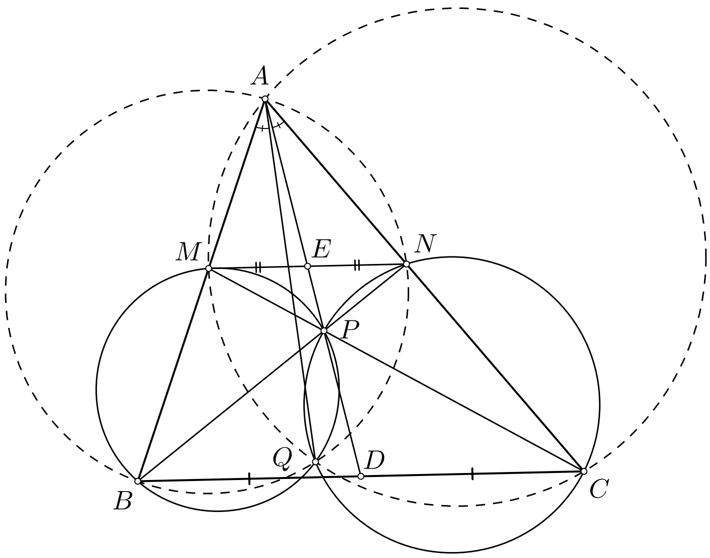
Lời giải. Dễ thấy Q là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $AMPNBC$. Do đó $P \equiv \odot(ABN) \cap \odot(ACM) \cap \odot(BPM) \cap \odot(CPN)$ (xem h. 4.2).

Gọi $D := AP \cap BC$ và $F := AP \cap MN$. Khi đó, từ $MN \parallel BC$ suy ra D, E là trung điểm của BC và MB.

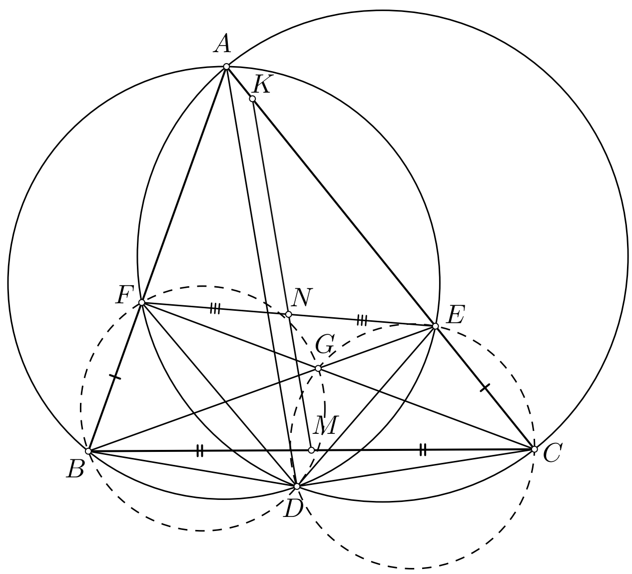
Áp dụng bổ đề 4, ta có $\widehat{BAQ} = \widehat{EAC} = \widehat{PAC}$. □

Bây giờ, ở cấu hình của bổ đề 4, nếu cho AD là phân giác trong của $\widehat{BAC}$. Khi đó, $DB = DQ$, $DC = DP$ và vì $\triangle DCQ \sim \triangle DPB$. Suy ra $BP = CQ$. Hơn nữa, theo kết quả bổ đề 4 thì MN tạo với hai đường thẳng AB, AC một cặp góc bằng nhau nên MN song song với AD. Ta thu được một kết quả kinh điển như sau

Ví dụ 16. *Cho tam giác ABC. Các điểm E và F theo thứ tự nằm trên các tia CA và BA sao cho $BF = CE$. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của BC và EF. Chứng minh rằng MN song song với phân giác trong góc A của tam giác ABC.*



Hình 4.2



Hình 4.3

Lời giải. Gọi $G = CF \cap BE$; $K = MN \cap AC$ và D là điểm Miquel của tứ giác $AFGEBC$.

Áp dụng bổ đề 4, ta có

$$\widehat{BAD} = \widehat{MKC}. \tag{23}$$

Dễ thấy $\triangle DBF \sim \triangle DEC$, mà $BF = CE$ nên $DB = DE$. Do đó AD là phân giác của $\triangle BAE$. Suy ra

$$\widehat{BAD} = \widehat{BAC}. \tag{24}$$

Từ (23) và (24) suy ra $\widehat{MKC} = \widehat{DAC}$. Do đó $MN \equiv MK \parallel AD$. □

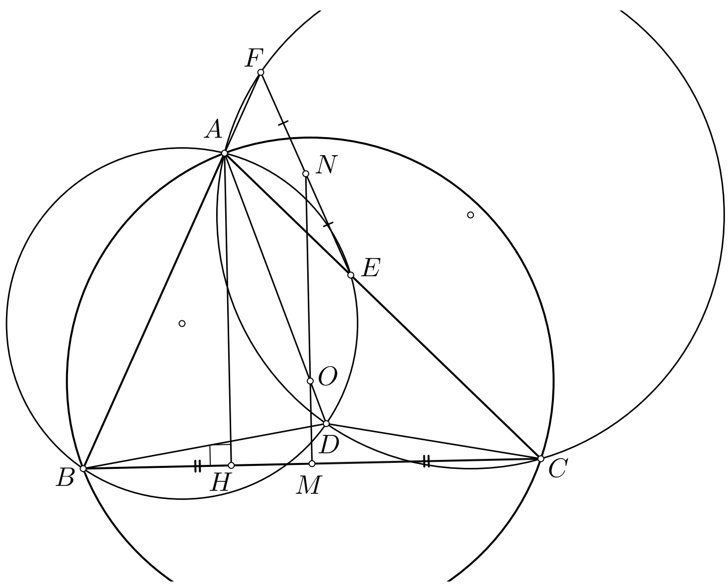
Nhận xét. *Bài toán này có nhiều cách giải đơn giản hơn trên, tuy nhiên chúng ta đi từ bổ đề 4 cho ta một góc nhìn khác để dẫn đến ví dụ này.*

Ở cấu hình bổ đề 4, nếu chọn các điểm P, Q sao cho PQ là đường đối song của tam giác ABC thì chúng ta thấy rằng bổ đề 4 là mở rộng của bổ đề 2.

Bây giờ, nếu từ cấu hình của bổ đề 4, cho đường thẳng AD đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp thì chúng ta thu được $MN \perp BC$. Do đó N thuộc trung trực của BC. Ta đi đến bài toán sau

Ví dụ 17. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm D nằm trên AO khác A. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ACD theo thứ tự cắt AB, AC tại E, F. Chứng minh rằng trung điểm của EF cách đều hai đỉnh B và C.*

Lời giải. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, EF; và H là hình chiếu của A lên BC (xem h. 4.4).



Hình 4.4

Áp dụng bổ đề 4 với chú ý rằng AH và AO là đẳng giác nhau qua $\widehat{BAC}$, ta có

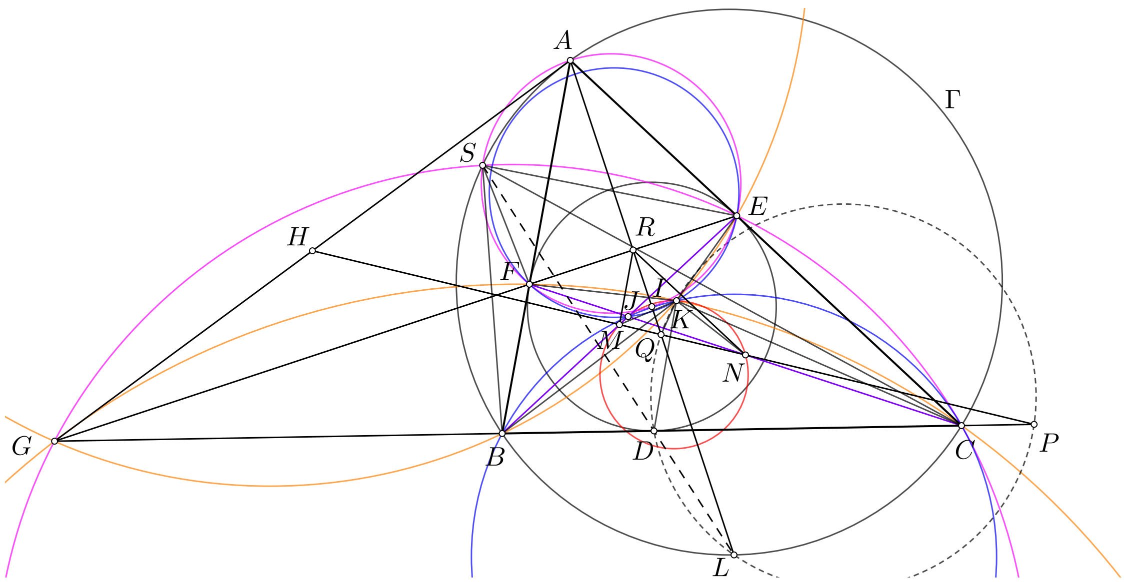
$$((MN, AB) \equiv (AC, AD) \equiv (AC, AO) \equiv (AH, AB)(\mod \pi).$$

Suy ra $MN \parallel AH \perp BC$. Do đó MN là trung trực của BC nên $NB = NC$ (đpcm). $\square$

Cuối cùng, chúng ta sẽ đi đến một áp dụng đẹp của bổ đề 4 thông qua bài toán sau đây

Ví dụ 18. *Cho tam giác không cân ABC nội tiếp đường tròn Γ, và đường tròn nội tiếp tâm I tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại D, E, F. Tia AI cắt Γ tại L, và đường thẳng EF cắt BC tại G. Các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác GBE và GCF cắt nhau tại K khác G. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác DKL cắt lại các đường thẳng BC và AL thứ tự tại P và Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ chia đôi các đoạn thẳng AG, BE và CF.*

Lời giải. Gọi H, M, N lần lượt là trung điểm của AG, BE, CF thì H, M, N là cùng nằm trên đường thẳng Gauss của tứ giác $BCEF$; ta định nghĩa lại điểm P và Q là giao điểm của đường thẳng $\overline{HMN}$ lần lượt với BC và AL. Do đó bài toán trở thành việc chứng minh năm điểm D, K, L, P, Q cùng nằm trên một đường tròn (xem h. 4.5).



Hình 4.5

Trước hết, gọi S là giao điểm khác A của đường tròn (AEF) và Γ. Khi đó S là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $BCEFAG$. Do đó $S \in \odot(CEG)$. Áp dụng bổ đề 4, ta có

$$(PQ, PD) \equiv (HM, GC) \equiv (CA, CS)(\mod \pi). \tag{25}$$

Mặt khác, dễ thấy có một phép vị tự quay $\mathbb{S}_1$ biến $\triangle SBF$ thành $\triangle SCE$. Chú ý rằng $BF = BD$ và $CE = CD$. Suy ra $\frac{SB}{SC} = \frac{BF}{CE} = \frac{BD}{CD}$. Do đó SD là phân giác của tam giác SBC nên SD đi qua điểm L là trung điểm của cung BC không chứa A của Γ. Do đó

$$(CA, CS) \equiv (LA, LS) \equiv (LQ, LD)(\mod \pi). \tag{26}$$

Từ (25) và (26) suy ra $(PQ, PD) \equiv (LQ, LD)(\mod \pi)$. Vậy

$$\text{bốn điểm } D, L, P, Q \text{ đồng viên.} \tag{27}$$

Gọi $R = AL \cap EF$ thì E là trung điểm của EF. Khi đó RM, RN là các đường trung bình của các tam giác BEF và CEF. Do đó $RM \parallel AB, RN \parallel AC$ và $RM = \frac{BF}{2}$ và $RN = \frac{CE}{2}$. Kết hợp với AQ là phân giác trong của $\widehat{BAC}$, suy ra RQ là phân giác của tam giác RMN. Suy ra $\frac{QM}{QN} = \frac{RM}{RN} = \frac{BF}{CE} = \frac{BD}{CD}$. Chú ý các điểm D, Q cùng nằm trong đoạn BC và MN nên

$$\frac{\overline{QM}}{\overline{QN}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}. \tag{28}$$

Gọi $J := BE \cap CF$. Áp dụng định lí Miquel cho tứ giác toàn phần $BCEFGJ$ ta có K là điểm Miquel của tứ giác này. Do đó K là giao điểm khác J của hai đường tròn $\odot(JBC)$ và $\odot(JEF)$. Do đó tồn tại một phép vị tự quay $\mathbb{S}_2$ biến $\triangle KBE$ thành $\triangle KCF$. Chú ý rằng M, N theo thứ tự là trung điểm của BE và CF. Do đó qua phép biến hình $\mathbb{S}_2$ thì M biến thành N. Vì vậy $(KM, KN) \equiv (BE, CF) \equiv (IB, IC) \equiv (IM, IN)(\mod \pi)$. Do đó $K \in \odot(IMN)$. Do đó

$$\text{tồn tại một phép vị tự quay } \mathbb{S}_3 \text{ biến } \triangle KBC \text{ thành } \triangle KMN. \tag{29}$$

Từ (28) và (29) suy ra qua phép biến hình $\mathbb{S}_3$ biến D thành Q. Do đó $(DP, DK) \equiv (DC, DK) \equiv (QN, QK) \equiv (QP, QK)(\mod \pi)$. Do đó

$$\text{bốn điểm } D, K, P, Q \text{ đồng viên.} \tag{30}$$

Từ (27) và (30) suy ra năm điểm D, K, L, P, Q cùng nằm trên một đường tròn. Ta có đpcm. $\square$

5. Bài tập

Bài toán 1 (IMOSL G1, 2015). *Cho tam giác nhọn ABC với trực tâm H. Lấy điểm G sao cho tứ giác $ABGH$ là hình bình hành. Gọi I là điểm trên đường thẳng GH sao cho AC chia đôi HI. Giả sử đường thẳng AC cắt đường tròn ngoại tiếp GCI tại C và J. Chứng minh rằng $IJ = AH$.*

Bài toán 2 (P2, AMPO 2017). *Cho tam giác ABC với $AB < AC$. Gọi D là giao điểm thứ hai của phân giác trong của góc BAC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi Z là giao điểm của trung trực của AC với phân giác ngoài của góc BAC. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng AB nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ADZ.*

Bài toán 3 (P1, Advanced, IGO 2018). *Hai đường tròn ω_1, ω_2 cắt nhau tại A và B. Gọi PQ là một tiếp tuyến chung của hai đường tròn với $P \in \omega_1$ và $Q \in \omega_2$. Một điểm X bất kì nằm trên ω_1. Đường thẳng AX cắt ω_2 tại điểm thứ hai Y. Điểm $Y' \neq Y$ nằm trên ω_2 sao cho $QY = QY'$. Đường thẳng $Y'B$ cắt ω_1 tại điểm thứ hai X'. Chứng minh rằng $PX = PX'$.*

Bài toán 4 (P4, Iranian TST 2018). *Cho ABC là một tam giác ($\widehat{A} \neq 90°$). BE, CF là các đường cao của tam giác. Phân giác góc A cắt EF, BC lần lượt tại M, N. Cho P là một điểm sao cho $MP \perp EF$ và $NP \perp BC$. Chứng minh rằng AP đi qua trung điểm của BC.*

Bài toán 5 (P3, USAMO 2005). *Cho ABC là một ttam giác nhọn, và P và Q là hai điểm nằm trên cạnh BC. Lấy điểm C_1 sao cho tứ giác lồi $APBC_1$ nội tiếp, $QC_1 \parallel CA$ và các điểm C_1 và Q_1 nằm cùng phía so với AB. Lấy điểm B_1 sao cho tứ giác lồi $APCB_1$ nội tiếp, $QB_1 \parallel BA$ và các điểm B_1 và Q_1 nằm cùng phía so với AC. Chứng minh rằng các điểm B_1, C_1, P và Q cùng nằm trên một đường tròn.*

Bổ đề 5 (P3, China TST 2018). *Cho đường tròn ω tiếp xúc với các cạnh AB, AC của tam giác ABC lần lượt tại D, E, sao cho $D \neq B$, $E \neq C$ và $BD + CE < BC$. Các điểm F, G nằm trên cạnh BC sao cho $BF = BD$ và $CG = CE$. Các đường thẳng DG và EF cắt nhau tại K. Điểm L nằm trên cung nhỏ DE của đường tròn ω, sao cho tiếp tuyến của ω tại L song song với BC. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC nằm trên đường thẳng KL.*

Bài toán 6 (P5, China TST 2018). *Cho tam giác ABC với $\widehat{BAC} > 90°$, và cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp và ω là đường tròn ngoại tiếp của tam giác. Tiếp tuyến của ω tại A cắt tiếp tuyến của ω tại B và C lần lượt tại P và Q. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ P, Q đến BC. F, G là hai điểm nằm trên đoạn PQ khác A sao cho A, F, B, E và A, G, C, D là các bộ điểm đồng viên. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng DF, OM, EG đồng quy.*

Bài toán 7 (P3, Intermediate, IGO 2015). *Trong tam giác ABC, M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Dựng các nữa đường tròn đường kính AB, AC ra bên ngoài tam giác ABC. MK, MN cắt các nữa đường tròn thứ tự tại X, Y. Tiếp tuyến của các nữa đường tròn tại X, Y cắt nhau tại Z. Chứng minh rằng $AZ \perp BC$.*

Bài toán 8 (Bài O286, Mathematical reflections). *Cho tam giác ABC với trực tâm H. Gọi HM là đường trung tuyến và HS là đường đối trung của tam giác BHC. Gọi P là hình chiếu vuông góc của A trên HS. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác MPS và ABC tiếp xúc với nhau.*

Bài toán 9 (P4, IMO 2013). *Cho tam giác nhọn ABC với trực tâm H, W là một điểm tùy ý nằm trên cạnh BC và W nằm giữa B và C. Các điểm M và N lần lượt là chân đường vuông cao hạ từ các đỉnh B và C. Kí hiệu ω_1 là đường tròn ngoại tiếp tam giác BWN, và gọi X là điểm trên ω_1 sao cho WX là đường kính của ω_1 . Tương tự kí hiệu ω_2 là đường tròn ngoại tiếp tam giác CWM, và gọi Y là điểm trên ω_2 sao cho WY là đường kính của ω_2 . Chứng minh rằng ba điểm X, Y, H thẳng hàng.*

Bài toán 10 (P2, EGMO 2016). *Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$, và các đường chéo AC và BD cắt nhau tại X. Gọi C_1, D_1 và M theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng CX, DX và CD. Các đường thẳng AD_1 và BC_1 cắt nhau tại Y, và đường thẳng MY cắt các đường chéo AC và BD thứ tự tại các điểm phân biệt E và F. Chứng minh rằng đường thẳng XY tiếp xúc với đường tròn đi qua E, F và X.*

Bài toán 11 (Việt Nam TST 2006). *Cho tam giác nhọn ABC và trực tâm H. Phân giác ngoài của tam giác ABC cắt các cạnh AB, AC thứ tự tại D và E. Đường phân giác trong của góc BAC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE tại K. Chứng minh rằng HK đi qua trung điểm của BC.*

Bài toán 12. *Cho tam giác cân ABC với $AB = AC$. T là một điểm trong đoạn CA. Trên tia BT lấy điểm S sao cho $BS = BA$. Gọi O, I theo thứ tự tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABT. Chứng minh rằng OI vuông góc CS.*

Bài toán 13. *Cho tam giác không cân ABC có O, I theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp của tam giác. Gọi M, N theo thứ thứ tự là đối xứng của các đỉnh B, C tương ứng qua CI, BI. Chứng minh rằng OI vuông góc với MN.*

Bài toán 14. *Cho tam giác ABC không cân tại A và nội tiếp đường tròn (O). Đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác cắt BC tại M và (O) tại G khác A. Gọi H, K thứ tự là hình chiếu của G lên AB, AC. Gọi N và P theo thứ tự là trung điểm của BK và CH. Chứng minh rằng AG tiếp xúc với đường tròn đi qua M, N, P.*

Bài toán 15 (P7, USA TSTST 2012). *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn Ω. Phân giác trong góc A cắt BC và Ω thứ tự tại D và L (khác với A). Gọi M là trung điểm cạnh BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt các cạnh AB và AC thứ tự tại Q và P khác A. Gọi N là trung điểm của PQ, và H là chân đường vuông góc hạ từ N xuống đường thẳng ND. Chứng minh rằng đường thẳng ML tiếp xúc với ngoại tiếp của tam giác HMN.*

Lời kết

Bài viết đã giới thiệu một số bổ đề điển hình để bạn đọc có thêm công cụ trong việc giải các bài toán hình học ở các kì thi HSG. Tất nhiên để giải quyết các bài toán hình học, chúng ta cần phải khéo léo, tư duy trừu tượng nhạy bén. Để đạt được những điều này thì việc rèn luyện thường xuyên để tăng thêm kinh nghiệm cho bản thân. Vẫn còn rất nhiều bổ đề khác nữa tác giả sẽ giới thiệu cho bạn đọc vào một bài viết khác. Rất mong nhận được sự góp ý của bạn đọc về nội dung.

Cuối cùng, tác giả gửi lời cảm ơn đến thầy Trần Nam Dũng và các bạn trong Ban biên tập đã đọc lại bản thảo và đưa ra những góp ý xác đáng để bài viết được hoàn thiện hơn.

Tài liệu

[1] http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/Anton%20Reim.pdf.

[2] http://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/Reim1.shtml.

[3] https://www.imo-official.org/.

[4] Diễn đàn AoPS, topic https://artofproblemsolving.com/community/c6_high_school_olympiads.

[5] http://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/StathisKoutras.shtml.

[6] https://www.facebook.com/groups/perugeometrico1.

BÀI TOÁN HAY LỜI GIẢI ĐẸP

Nguyễn Duy Liên
(Trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc)

GIỚI THIỆU

Giải được bài toán Số học hay và khó, ta đã cảm thích thú rồi. Nhưng nếu một bài toán Số học hay và khó mà giải được bằng nhiều cách mà từ đó ta có thể giải được, hay tạo ra một số bài toán cùng lớp bài toán đó thì niềm vui còn nhân lên nhiều lần. Bài viết này, tôi xin giới thiệu với các bạn 4 cách giải cho bài toán số 2 về Số học khá hay và khó trong kỳ thi Olympic Toán học Hoa Kỳ 2005 (USAMO 2005).

Bài toán. *Chứng minh rằng hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^6 + x^3 + x^3y + y = 147^{157} \\ x^3 + x^3y + y^2 + y + z^9 = 157^{147} \end{cases}$$

không có nghiệm nguyên x, y, z.

Lời giải 1. Ta sử dụng modulo 19 để chứng minh hệ phương trình này không có nghiệm nguyên.

Ta có $152 = 8 \cdot 19$, $157 \equiv -147 \pmod{19}$. Bảng giá trị của 5^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ theo $\pmod{19}$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$
5^n	5	6	-8	-2	9	7	-3	4	1	5	6	$\cdots$

Do đó $147^{157} \equiv (-5)^{13} \equiv -5^4 \equiv 2 \pmod{19}$ và $157^{147} \equiv 5^3 \equiv -8 \pmod{19}$. Viết lại hệ phương trình

$$\begin{cases} x^6 + x^3 + x^3y + y = 147^{157} \\ x^3 + x^3y + y^2 + y + z^9 = 157^{147} \end{cases}$$

Cộng tương ứng theo vế ta được

$$\left(x^3 + y + 1\right)^2 + z^9 = 147^{157} + 157^{147} + 1.$$

Lại thấy $147^{157} + 157^{147} + 1 \equiv -5 \pmod{19}$, từ đó suy ra

$$\left(x^3 + y + 1\right)^2 + z^9 \equiv -5 \pmod{19}. \tag{1}$$

Mặt khác theo định lý Femat's ta có $z^{18} \equiv 0,\ 1 \pmod{19}$ suy ra $z^9 \equiv -1,\ 0,\ 1 \pmod{19}$ do đó để (1) xảy ra thì $(x^3+y+1)^2 \equiv -4,\ -5,\ -6 \pmod{19}$ vô lý, vì với mọi số nguyên a thì $a^2 \equiv -8,\ -3,\ -2,\ 0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9 \pmod{19}$. Vậy (1) không thể xảy ra hay là hệ phương trình không có nghiệm nguyên $x,\ y$ và z. $\square$

Lời giải 2. Ta sử dụng modulo 13. Cộng vế theo vế ta được

$$(x^3+y+1)^2+z^9 = 147^{157}+157^{147}+1.$$

Theo định lý Femat's ta có $a^{12} \equiv 1 \pmod{13},\ \forall a \in \mathbb{Z},\ a \not\equiv 0 \pmod{13}$, ta có

$$147^{157} \equiv 4^{157} \equiv 4^1 \pmod{13},\ 157^{147} \equiv 1^{147} \equiv 1 \pmod{13}.$$

Lại có $147^{157}+157^{147}+1 \equiv 6 \pmod{13}$, từ đó suy ra

$$(x^3+y+1)^2+z^9 \equiv 6 \pmod{13}. \tag{2}$$

Mặt khác với mọi số nguyên a thì $a^3 \equiv -5,\ -1,\ 0,\ 1,\ 5 \pmod{13}$. Viết phương trình đầu tiên của hệ thành

$$(x^3+1)(x^3+y) = 147^{157} \equiv 4 \pmod{13},$$

suy ra $x^3 \not\equiv -1 \pmod{13}$ nên chỉ có thể $x^3 \equiv 0,\ 1,\ 5,\ -5 \pmod{13}$ khi đó sẽ tương ứng với $x^3+y \equiv 4,\ 2,\ 5,\ -1 \pmod{13}$, suy ra $(x^3+y+1)^2 \equiv 12,\ 9,\ 10,\ 0 \pmod{13}$.

Vậy để xảy ra (2) thì $z^9 \equiv 7,\ 10,\ 9,\ 6 \pmod{13}$ vô lý, vì $z^3 \equiv -5,\ -1,\ 0,\ 1,\ 5 \pmod{13}$, suy ra $z^9 \equiv 5,\ 12,\ 0,\ 1,\ 8 \pmod{13}$. Vậy (2) không thể xảy ra, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Lời giải 3. Ta sử dụng modulo 7, modulo 8 và định lý Mihailescu's. Viết lại hệ phương trình

$$\begin{cases} (x^3+y)(x^3+1) = 147^{157} & (1) \\ (x^3+y)(y+1) = 157^{147}-z^9 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta được $x^3+y \mid 147^{157}$. Ta xét ba trường hợp sau:

- $x^3+y=\pm 1$: Từ (1) suy ra $\pm(x^3+1) = 147^{157}$, cho nên

  $$147^{157}-1 = x^3 \vee 147^{157}-1 = (-x)^3,$$

  điều này vô lý vì x chẵn $x^3 \equiv (-x)^3 \equiv 0 \pmod 8$ mà

  $$147^{157}-1 = 2 \pmod 8,\ 147^{157}+1 = 4 \pmod 8.$$

- $7 \mid x^3+y$: Từ phương trình (2) suy ra $7 \mid 157^{147}-z^9$ nên $z^9 \equiv 157^{147} \pmod 7$, suy ra $z^3 \equiv 3^{49} \equiv 3 \pmod 7$, vô lý vì $z^3 \equiv -1,\ 0,\ 1 \pmod 7,\ \forall z \in \mathbb{Z}$.

- $3 \mid x^3 + y$: Từ (1) suy ra $\pm 3^k \left(x^3 + 1\right) = 147^{157}$, $k \in \mathbb{Z}$, từ đó dẫn đến $x^3 + 1 = \pm\frac{147^{157}}{3^k}$, cho nên $3^{157-k} \cdot 7^{2\cdot 157} + 1 = (-x)^3 \ \vee \ 3^{157-k} \cdot 7^{2\cdot 157} - 1 = x^3$, suy ra x chẵn, và ta có $x^3 \equiv (-x)^3 \equiv 0 \pmod 8$.

  Phương trình $3^{157-k} \cdot 7^{2\cdot 157} + 1 = (-x)^3$ không xảy ra $3^{157-k} \cdot 7^{2\cdot 157} + 1 \equiv 2,\ 4 \pmod 8$. Phương trình $3^{157-k} \cdot 7^{2\cdot 157} - 1 = x^3$ để xảy ra thì $157 - k = 2r$, $r \in \mathbb{N}^*$ khi đó trở thành $3^{2\cdot r} \cdot 7^{2\cdot 157} - 1 = x^3$ vô lý (định lý Mihailescu's [1]).

Từ các trường hợp trên đều không xảy ra, ta có điều phải chứng minh. □

Lời giải 4. Ta sử dụng modulo 9, modulo 37 và Bổ đề LTE. Viết lại hệ phương trình

$$\begin{cases} (x^3 + y)(x + 1)(x^2 - x + 1) = 7^{314}3^{157} & (1) \\ (x^3 + y)(y + 1) = (157^{49} - z^3)(157^{98} + 157^{49}z^3 + z^6) & (2) \end{cases}$$

Ta thấy rằng

- $x^2 - x + 1 = (x + 1)^2 - 3(x + 1) + 3$ suy ra $\gcd\left(x + 1, x^2 - x + 1\right) \leqslant 3$
- $(x + 1)\left(x^2 - x + 1\right) = x^3 + 1 = 7^a \cdot 3^b$, $a,\ b \in \mathbb{N}$.
- $x^2 \geqslant 2x$ khi $|x| \geqslant 2$ tương đương $x^2 - x + 1 \geqslant x$ khi $|x| \geqslant 2$

Nếu $|x| < 2$:

- $x = 1 \vee x = -1$ khi đó vế trái của (1) chẵn suy ra $147^{157} \equiv 0 \pmod 2$ vô lý.
- $x = 0$ thay vào (1) ta được $y + 1 = 147^{157}$, suy ra $y = 147^{157} - 1$, thế vào (2) ta được

$$147^{157}\left(147^{157} + 1\right) = 157^{147} - z^9.$$

  Mà $148 \mid (147^{157} + 1)$ và $148 = 4{\cdot}37$, suy ra $37 \mid (147^{157} + 1)$, do đó $37 \mid (157^{147} - z^9)$, tương đương với $z^9 \equiv 157^{147}$, hay $z^9 \equiv 9^{147} \pmod{37}$, vô lý vì

$$1 \equiv z^{36} \equiv \left(9^{147}\right)^4 \equiv 26^4 \equiv 26 \pmod{37}.$$

Nếu $|x| \geqslant 2$: Từ (1) chú ý rằng nếu có $x + 1 = \pm 3^k \cdot 7^j$ với mỗi cặp số nguyên dương (j, k) có nghĩa là $\left|x^2 - x + 1\right| \leqslant 3$, điều đó không thể đúng. Vì vậy chỉ có thể $x + 1 = \pm 3^k$, $\pm 7^k$ tương ứng với $x^2 - x + 1 = 3 \cdot 7^m$, 3^m với $m,\ k \in \mathbb{N}^*$.

- Nếu $x + 1 = \pm 7^k$, thì $(x + 1)^2 - 3(x + 1) + 3 = 3^m$, do đó $7^{2k} \pm 3 \cdot 7^k + 3 = 3^m$, cho nên $7^{2k} \equiv 0 \pmod 3$, vô lý.

[1] Định lý Mihailescu's: *Nghiệm nguyên dương của phương trình* $x^a - y^b = 1$, *với* $a, b > 1$ *và* $x, y > 0$ *là* $x = 3,\ a = 2,\ y = 2,\ b = 3$.

- Nếu $x+1 = \pm 3^k$, thì $(x+1)^2 - 3(x+1) + 3 = 3 \cdot 7^m$, dẫn đến $3^{2k} \pm 3^{k+1} + 3 = 3 \cdot 7^m$, cho nên $3^{2k-1} \pm 3^k + 1 = 7^m$, vì thế $3^k\left(3^{k-1} \pm 1\right) = 7^m - 1$. Theo bổ đề LTE ta có $v_3\left(3^k\left(3^{k-1} \pm 1\right)\right) = v_3\left(7^m - 1\right)$, suy ra $k = 2 + v_3(m) \leqslant 2 + \log_3 m$. Vì thế

$$7^m - 1 = 3^k\left(3^{k-1} \pm 1\right) \leqslant 3^{2+\log_2 m}\left(3^{1+\log_2 m} \pm 1\right) = 9m\,(3m \pm 1)\,. \tag{3}$$

  Với $m > 2$ thì (3) vô lý vì $7^m - 1 > 9m\,(3m \pm 1)$ qua quy nạp.

  Với $0 \leqslant m \leqslant 2$:

  - Với $m = 2$, từ phương trình $7^m - 1 = 3^k(3^{k-1} \pm 1)$ ta thấy không tồn tại $k \in \mathbb{Z}$.
  - Với $m = 1$ từ phương trình $7^m - 1 = 3^k(3^{k-1} \pm 1)$, suy ra $k = 1,\ x = -4$, thế vào (1), (2) ta có $3^{155} \mid (x^3 + y)$ nên

$$3^{155} \left|\left(157^{49} - z^3\right)\left(157^{98} + 157^{49}z^3 + z^6\right)\right.. \tag{4}$$

    Để (4) là đúng thì 9 chia hết ít nhất một trong hai thừa số vế phải của (4). Nếu $9 \mid 157^{49} - z^3$, thì $z^3 \equiv 157^{49} \equiv 4^{49} \equiv 4 \pmod 9$, vô lý.
    Còn nếu $9 \mid 157^{98} + 157^{49}z^3 + z^6$, thì $157^{98} + 157^{49}z^3 + z^6 \equiv 0 \pmod 9$. Tuy nhiên

$$157^{98} + 157^{49}z^3 + z^6 \equiv 7 + 4z^3 + z^6 \equiv \left(z^3 + 2\right)^2 + 3 \not\equiv 0 \pmod 9.$$

  - Với $m = 0$ từ phương trình $7^m - 1 = 3^k\left(3^{k-1} \pm 1\right)$, suy ra $k = 1,\ x = 2$ cũng giống như trường hợp khi $m = 1$ không tồn tại nghiệm nguyên của hệ.

Vậy do đó không có trường hợp nào hệ có nghiệm nguyên. □

Bốn lời giải trên cho ta vẻ đẹp của mỗi con số, cách chọn modulo cho nó thật đắt giá như việc chọn modulo 19 ở lời giải 1, chọn modulo 13 ở lời giải 2. Sự kết hợp nhẹ nhàng và logic giữa các modulo đan xen vào đó là các phép biến đổi đại số, lập luận số học cho một lời giải gần gũi hơn đối với học trò qua các lời giải 3 và 4. Đặc biệt tôi ấn tượng với lời giải 3 đích cuối cùng của lời giải dẫn đến một bài toán mới định lý Mihailescu's, một định lý rất mới được hoàn thiện và công bố năm 2004, tình yêu với những con số đã thôi thúc về tìm tòi cái mới lạ đã đưa tôi đên với định lý Mihailescu's. Tôi đã đọc, suy nghĩ, kiểm chứng nội dung định lý, nguồn gốc định lý và hiểu được cách chứng minh định lý này trong một đêm hè đấy. Ngoài cách giải trên các bạn cùng tôi tiếp tục đi tìm những lời giải mới, có thể cho những bài hay và khó trong vốn bài của bạn. Cứ như tôi thiết nghĩ đã mới khi trong đời ta đạt được các lời giải thật ngắn, đẹp và đắt. Nên ta vẫn trân trọng những lời giải của cá nhân tuy có dài dòng chút đỉnh với phương châm "*Cách giải này dài với bài này nhưng sẽ ngắn với bài khác*."

HƯỚNG TỚI KỲ THI VMO 2018-2019

Lê Phúc Lữ
(Lớp Cao học Khoa học tự nhiên TP.HCM)

LỜI BAN BIÊN TẬP

Kỳ thi chọn HSG cấp quốc gia (viết tắt là VMO) năm nay diễn ra vào các ngày 13 và 14 tháng 01/2019. Trong bài viết này, tác giả sẽ đưa ra giới thiệu một số nội dung hướng đến rèn luyện chuẩn bị cho kỳ thi này, bao gồm: phân tích một số bài toán trong đề thi HSG các tỉnh, giới thiệu một số bài toán hay, đề thi thử và đáp án chi tiết.

1. Phân tích một số bài toán trong đề thi các tỉnh 2018

1.1. Bài Cấp số cộng - Cấp số nhân đề Ninh Bình

Ta xét bài toán sau trong đề thi của Ninh Bình

Bài toán 1. *Cho cấp số cộng (a_n) và cấp số nhân (b_n) đều có các số hạng dương. Biết rằng $a_1 = b_1, a_n = b_n$. Chứng minh rằng $a_k \geq b_k$ với mọi $k = 2, 3, \ldots, n-1$.*

Bài toán này chính là đề chọn kỹ sư tài năng của ĐH Bách Khoa Hà Nội 2012, cũng có xuất hiện trong đề thi HSG lớp 11 không chuyên của TP.HCM năm trước với trường hợp $n = 5$. Bài toán đòi hỏi so sánh các số hạng "nằm giữa" của hai CSC, CSN hữu hạn có cùng số hạng đầu và cuối. Như thế ta cần tìm mối liên hệ giữa các số ở giữa đó và các số ở hai đầu?

$$a_n = a_1 + (n-1)d; a_k = a_1 + (k-1)d \text{ hay } a_k = \frac{(n-k)a_1 + (k-1)a_n}{n-1}.$$

Tương tự thì $b_k = \sqrt[n-1]{b_1^{n-k} b_n^{k-1}}$. Áp dụng trực tiếp bất đẳng thức AM-GM cho $n-1$ số dương, ta có đpcm.

Xem lại các bài toán trước đó thì trong đề thi HSG QG 2012, đã có một bài đa thức tương tự, thực ra chỉ là giải phương trình bậc hai nhưng có liên quan đến CSC này; và năm đó, nhiều thí sinh đã lúng túng, không tìm được mối liên hệ như trên nên không xử lý được bài toán.

Bài toán 2. *(VMO 2012) Cho hai CSC $(a_n), (b_n)$ và xét dãy đa thức $P_k(x) = x^2 + a_k x + b_k$ với $1 \leq k \leq n$. Giả sử $P_1(x), P_n(x)$ vô nghiệm. Chứng minh rằng các đa thức $P_k(x)$ với $2 \leq k \leq n-1$ đều vô nghiệm.*

Tóm tắt lời giải bài VMO 2012. Theo giả thiết thì $a_1^2 - 4b_1 < 0, a_n^2 - 4b_n < 0$. Ta cần chứng minh $a_k^2 - 4b_k < 0$ với $1 < k < n$. Dùng công thức mối liên hệ ở trên, ta đưa về

$$\left[\frac{(n-k)a_1 + (k-1)a_n}{n-1}\right]^2 - 4\frac{(n-k)b_1 + (k-1)b_n}{n-1} < 0$$
$$\Leftrightarrow (n-k)^2 a_1^2 + (k-1)^2 a_n^2 + 2(n-k)(k-1)a_1 a_n - 4(n-1)\left[(n-k)b_1 + (k-1)b_n\right] < 0.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM thì $a_1 a_n \le \frac{a_1^2 + a_n^2}{2}$ nên

$$2(n-k)(k-1)a_1 a_n \le (n-k)(k-1)(a_1^2 + a_n^2).$$

Chú ý $(n-k)^2 + (n-k)(k-1) = (n-k)(n-1)$ và $(k-1)^2 + (n-k)(k-1) = (k-1)(n-1)$ nên ta viết thành

$$(n-k)(n-1)(a_1^2 - 4b_1) + (k-1)(n-1)(a_n^2 - 4b_n) < 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên ta có đpcm.

Từ ý tưởng về công thức mối liên hệ ở trên, ta có thể "chế biến" đề như sau:

- Xây dựng hai CSC ứng với tung độ, hoành độ của dãy điểm trong mặt phẳng Oxy.
- Giấu đi yếu tố CSC bằng cách dùng công thức đặc trưng $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$.
- Chuyển thành dạng căn thức, lũy thừa để làm khó hơn yếu tố tuyến tính.

Từ đó ta có bài toán sau (bài này đã được dùng đề thi chọn đội tuyển của Ả Rập).

Bài toán 3. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho dãy các điểm phân biệt có tọa độ dương $A_n(x_n; y_n)$ với $n \ge 1$, trong đó các dãy số thực dương $(x_n), (y_n)$ xác định bởi công thức*

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + x_{n+2}^2}{2}}, y_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{y_n} + \sqrt{y_{n+2}}}{2}\right)^2.$$

Biết rằng các điểm O, A_1, A_{2015} cùng nằm trên một đường thẳng d. Chứng minh không tồn tại hai chỉ số i, j với $1 < i < j < 2015$ sao cho đoạn thẳng A_iA_j cắt d.

Lời giải. Theo giả thiết, ta thấy hai dãy $(x_n), (y_n)$ thỏa mãn $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_{2015}}{y_{2015}} = k > 0$.Ta sẽ chứng minh rằng với mọi $i = \overline{2, 2014}$ thì $\frac{x_i}{y_i} > k$. Thật vậy, ta thấy

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + x_{n+2}^2}{2}} \Leftrightarrow x_{n+1}^2 = \frac{x_n^2 + x_{n+2}^2}{2}$$

nên dãy (x_n^2) lập thành một cấp số cộng. Do đó, với mọi $i = \overline{2, 2014}$, đặt $\alpha_i = \frac{2015-i}{2014}, \beta_i = \frac{i-1}{2014}$ thì $\alpha_i + \beta_i = 1, 2 \le i \le 2014$ và ta có

$$x_i^2 = \alpha_i x_1^2 + \beta_i x_{2015}^2 \Leftrightarrow x_i = \sqrt{\alpha_i x_1^2 + \beta_i x_{2015}^2}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$y_i = (\alpha_i\sqrt{y_1} + \beta_i\sqrt{y_{2015}})^2 \text{ nên } ky_i = (\alpha_i\sqrt{x_1} + \beta_i\sqrt{x_{2015}})^2.$$

Ta cần có

$$\sqrt{\alpha_i x_1^2 + \beta_i x_{2015}^2} > (\alpha_i\sqrt{x_1} + \beta_i\sqrt{x_{2015}})^2$$

với mọi $2 \leq i \leq 2014$ (*) Tuy nhiên, (*) đúng theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz vì

$$(\alpha_i + \beta_i)\left(\alpha_i x_1^2 + \beta_i x_{2015}^2\right) \geq (\alpha_i x_1 + \beta_i x_{2015})^2 \geq (\alpha_i\sqrt{x_1} + \beta_i\sqrt{x_{2015}})^4.$$

Do đây là các điểm phân biệt nên $A_1 \neq A_{2015} \Leftrightarrow x_1 \neq x_{2015}$ và đẳng thức ở (*) không xảy ra. Từ đó suy ra tất cả các điểm $A_2, A_3, \ldots, A_{2014}$ đều nằm dưới đường thẳng d. Ta có đpcm. □

Cuối cùng, ta xét bài toán tương tự sau:

Bài toán 4. *Chứng minh rằng tồn tại 4037 số nguyên dương, bao gồm các số $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ là số hạng của một cấp số nhân và $b_1, b_2, \ldots, b_{2018}$ là các số hạng của một cấp số cộng sao cho*

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_{2018} < b_{2018} < a_{2019}.$$

1.2. Về bài toán đa thức trong đề KHTN

Ta xét bài toán sau trong đề thi của KHTN Hà Nội

Bài toán 1. *Tìm tất cả đa thức $P(x)$ hệ số thực sao cho*

$$P^2(x) - P(x^2) = cx^{2018}, \forall x.$$

Bài toán này thuần túy là một bài đồng nhất hệ số; tuy nhiên, ta không thể làm một cách tổng quát ngay từ đầu được. Để xử lý triệt để, ta dùng nhận xét quan trọng sau:

Bổ đề. Nếu đa thức $P(x)$ là tổng của ít nhất 3 đơn thức (khác bậc) thì $P^2(x) - P(x^2)$ có ít nhất hai số hạng.

Chứng minh. Thật vậy, gọi $ax^m + bx^n$ là hai đơn thức có bậc thấp nhất của $P(x)$ với $m > n \geq 0$; khi đó, trong $P^2(x)$ sẽ có chứa số hạng $2abx^{m+n}$. Tuy nhiên, vì $2n < m + n < 2m$ nên số hạng này chắc chắn không thể bị triệt tiêu.

Tương tự nếu xét hai đơn thức bậc cao nhất. Bổ đề được chứng minh. □

Trở lại bài toán, ta xét các trường hợp sau

1. Nếu $P(x) = ax^n$ thì $P^2(x) - P(x^2) = (a^2 - a)x^{2n}$ nên đồng nhất hệ số có $2n = 2018, a^2 - a = c$ nên $c \geq -\frac{1}{4}$.

2. Nếu $P(x) = ax^n + bx^m$ thì

$$P^2(x) - P(x^2) = (a^2 - a)x^{2n} + 2abx^{m+n} + (b^2 - b)x^{2m}$$

thì phải có $a = b = 1$ và $2x^{m+n} = cx^{2018}$ nên $c = 2, m + n = 2018$.

Vậy nếu $c < -\frac{1}{4}$ thì không tồn tại đa thức thỏa đề; nếu $c \geq -\frac{1}{4}, c \neq 2$ thì có đúng một đa thức thỏa mãn có dạng ax^n với $a^2 - a = c$; nếu $c = 2$ thì có các đa thức thỏa đề là

$$-x^{1009}, 2x^{1009}, x^m + x^n$$

với $m + n = 2018, m, n \in \mathbb{N}$. Bài toán khá nhẹ nhàng.

Tiếp theo, ta xét một bài toán tương tự trong đề thi chọn đội tuyển của TPHCM 2014:

Bài toán 2. *Tìm tất cả đa thức $P(x), Q(x)$ hệ số nguyên sao cho*

$$P(Q(x)) = x^{2013} + 2014x + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài này cũng tương tự bài trên là phải tìm cách thu hẹp số trường hợp cần xét khi đồng nhất hệ số; nhưng khó hơn ở chỗ ta không thể dùng thuần túy đại số để làm điều đó. Ta xử lý như sau:

Đạo hàm hai vế, ta có

$$Q'(x) \cdot P'(Q(x)) = 2013x^{2012} + 2014.$$

Dùng tiêu chuẩn Eisenstein ứng với số nguyên tố $p = 2$, ta có vế phải bất khả quy. Do đó, nếu $\deg P(x) > 1, \deg Q(x) > 1$ thì vô lý. Vì thế nên chỉ cần xét trường hợp $\deg P(x) = 1$ hoặc $\deg Q(x) = 1$.

Bài toán đến đó chỉ cần xét trường hợp và làm cẩn thận các bước đồng nhất hệ số là được.

Dù có nhiều kỹ thuật đi kèm bài toán về đa thức nhưng việc đồng nhất bậc, hệ số của đa thức vẫn là công cụ thuần túy và hiệu quả. Chẳng hạn tiêu chuẩn Eisenstein và định lý về đa thức nguyên bản cũng được chứng minh bằng đồng nhất hệ số.

Tiếp theo, ta xét bài toán sau về việc đồng nhất hệ số:

Bài toán 3. *Tìm tất cả đa thức khác hằng thỏa mãn*

$$P(x)P(x + 1) = P(x^2 + x + 1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Một lời giải kinh điển của bài này là dùng số phức, chứng minh rằng nó chỉ có nghiệm là $x = \pm i$. Ở đây, ta xét một cách tiếp cận khác.

Trước hết, rõ ràng $P(x)$ vô nghiệm vì nếu nó có nghiệm x_0 thì cũng sẽ có nghiệm khác là $x_0^2 + x_0 + 1 > x_0$. Điều này cho phép xây dựng một dãy vô hạn nghiệm của $P(x)$, kéo theo $P(x) \equiv 0$, không thỏa do không xét đa thức hằng. Từ đây suy ra $\deg P(x)$ luôn chẵn và trong trường hợp $\deg P = 2$, ta tìm được $P(x) = x^2 + 1$.

Ta sẽ chứng minh rằng tất cả đa thức thỏa đề có dạng $(x^2+1)^n$. Thật vậy, đồng nhất hệ số bậc cao nhất, ta có $P(x)$ monic. Đặt $P(x) = (x^2+1)^n + Q(x)$ với $\deg Q(x) = m < 2n$. Thay vào đẳng thức đã cho

$$\begin{aligned}&\left[(x^2+1)^n + Q(x)\right]\left[(x^2+2x+2)^n + Q(x+1)\right]\\ &= \left[\left((x^2+x+1)^2+1\right)^n + Q(x^2+x+1)\right]\end{aligned}$$

hay

$$(x^2+1)^n Q(x+1) + (x^2+2x+2)^n Q(x) = Q(x^2+x+1).$$

Nếu $Q(x) \equiv 0$ thì ta có đpcm. Nếu không thì so sánh bậc hai vế, ta được $2n+m = 4n \Rightarrow m = 2n$, không thỏa. Bài toán được giải quyết.

Bằng cách tương tự, ta có thể giải được các bài toán sau:

Bài toán 4. *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn $P(x)P(x+1) = P(2x^2+8x+6), \forall x$. Đáp số là $P(x) = (2x+3)^n$.*

Bài toán 5. *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn $P(x^2-4x) = P^2(x-6), \forall x$. Đáp số là $P(x) = (x+4)^n$.*

Cuối cùng, ta xét bài toán kinh điển sau về ước lượng đa thức:

Bài toán 6. *Cho đa thức hệ số nguyên, bậc chẵn, monic $P(x)$ sao cho $P(n)$ là số chính phương với vô số $n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng $P(x)$ là bình phương của một đa thức hệ số nguyên.*

Lời giải. Bài toán trong trường hợp $\deg P(x) = 2$ là khá quen thuộc, nhưng với bậc cao thì không dễ! Ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. Với mọi đa thức monic hệ số nguyên $P(x)$ có $\deg P$ chẵn thì tồn tại đa thức hệ số hữu tỷ $Q(x)$ sao cho

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{P(x)} - Q(x)\right) = 0.$$

Thật vậy, ta có

$$\sqrt{P(x)} - Q(x) = \frac{P(x) - Q^2(x)}{\sqrt{P(x)} + Q(x)}.$$

Bậc của mẫu là n nên cần tìm Q để bậc của tử $\le n-1$. Nghĩa là các hệ số của $x^n, x^{n+1}, \ldots, x^{2n}$ đều bị triệt tiêu. Tuy nhiên, rõ ràng ta cũng chọn $\deg Q(x) = n$ nên sẽ có $n+1$ hệ số để "cơ cấu", tức là bản chất là giải một hệ phương trình có $n+1$ biến.

Ở đây, ta dùng cực hạn để thực hiện điều đó dễ hơn. Trong các đa thức monic $Q(x)$ có $\deg Q(x) = n$, xét $Q_0(x)$ sao cho $d = \deg(P(x) - Q_0^2(x))$ min. Giả sử $d \ge n$ thì $P(x) - Q_0^2(x) = ax^d + f(x)$ với $\deg f < d$. Xét $Q(x) = Q_0 + \frac{a}{2}x^{d-n}$ thì

$$P(x) - Q^2(x) = P(x) - \left(Q_0(x) + \frac{a}{2}x^{d-n}\right)^2 = ax^d + f(x) - ax^{d-n}Q_0(x) - \frac{a^2x^{2d-2n}}{4}.$$

Chú ý rằng $Q_0(x)$ monic nên ax^d bị triệt tiêu; ngoài ra $2d - 2n < n$ nên đa thức này có bậc nhỏ hơn d, vô lý vì đang xét đa thức có bậc nhỏ nhất. Do đó $d < n$. Suy ra tồn tại $Q(x)$ thỏa mãn bổ đề trên.

Ngoài ra, tồn tại $M \in \mathbb{Z}$ để $M \cdot Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Xét dãy số $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ là các số để $P(a_i)$ là số chính phương, tức là tương ứng tồn tại các số nguyên dương $b_1 < b_2 < b_3 < \ldots$ để $P(a_i) = b_i^2$. Suy ra

$$M(Q(a_i) - b_i) = M\left[Q(a_i) - \sqrt{P(a_i)}\right] + M\left[\sqrt{P(a_i)} - b_i\right] \to 0$$

khi $i \to +\infty$. Vì $M(Q(a_i) - b_i) \in \mathbb{Z}$ nên tồn tại i_0 đủ lớn để

$$|Q(a_i) - b_i| < 1, \forall i > i_0 \Rightarrow Q(a_i) = b_i, \forall i > i_0.$$

Suy ra $P(a_i) = Q^2(a_i)$ với mọi $i > i_0$, điều này đúng với vô số i nên $P(x) = Q^2(x)$. Cuối cùng, chú ý rằng nếu $Q(x) \notin \mathbb{Z}[x]$ thì tồn tại $m \in \mathbb{Z}$ và $mQ(x)$ là đa thức nguyên bản. Suy ra $m^2P(x) = (mQ(x))^2$ cũng là đa thức nguyên bản, vô lý. Vậy nên $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, bài toán được giải quyết hoàn toàn. □

Trên cơ sở lời giải trên, thử giải bài toán mở rộng sau:

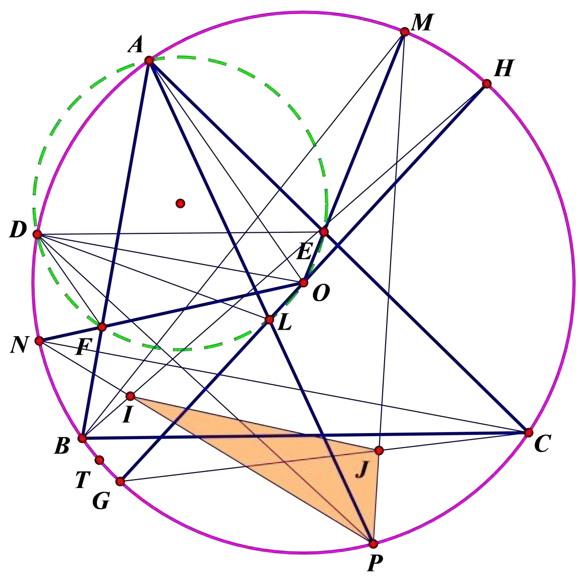
Bài toán 7. *Giả sử $P(x)$ là đa thức hệ số nguyên, monic, sao cho tồn tại vô hạn cặp số nguyên dương (m, n) mà $P(n) = m^3 + 3m + 1$. Chứng minh rằng tồn tại đa thức hệ số nguyên $Q(x)$ sao cho $P(x) = Q^3(x) + 3Q(x) + 1$.*

1.3. Về bài toán hình học trong đề Đà Nẵng

Dưới đây là một bài toán toán trong đề ôn của Đà Nẵng (tác giả chính là thầy Trần Quang Hùng).

Bài toán 1. *Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp (O) và một đường tròn (ω) cố định qua A, O cắt AB, AC ở F, E. Giả sử OE, OF cắt (O) ở M, N. Gọi P là điểm trên cung BC của (O). $AP \cap (\omega) = L$ và OL cắt (O) ở G, H (điểm G, N cùng phía so với AP). $MP \cap CG = J, NP \cap BH = I$. Chứng minh rằng khi P thay đổi trên đường tròn thì (PIJ) luôn qua điểm cố định.*

Lời giải. Gọi D là giao điểm khác A của $(\omega), (O)$.



Ta có $\angle ECD = \frac{\angle AOD}{2} = \frac{\angle AED}{2}$ nên tam giác ECD cân tại E hay $EC = ED$, mà $OC = OD$ nên OE là trung trực của CD.

Suy ra M là trung điểm cung CD của (O). Do đó BM là phân giác góc B của tam giác BCD. Tương tự với N. Cũng bằng cách trên, ta có $LD = LP$ và OL là trung trực DP, kéo theo G, H là trung điểm hai cung của (O), suy ra I, J là tâm nội tiếp tam giác DBP, DCP. Giả sử (PIJ) cắt (O) ở T thì theo mô hình vị tự quay (chú ý rằng $JM = DM, IN = DN$), ta có

$$\frac{TM}{TN} = \frac{JM}{IN} = \frac{DM}{DN}.$$

Do đó tứ giác $DNTM$ điều hòa và T là điểm cố định. Ta có đpcm. □

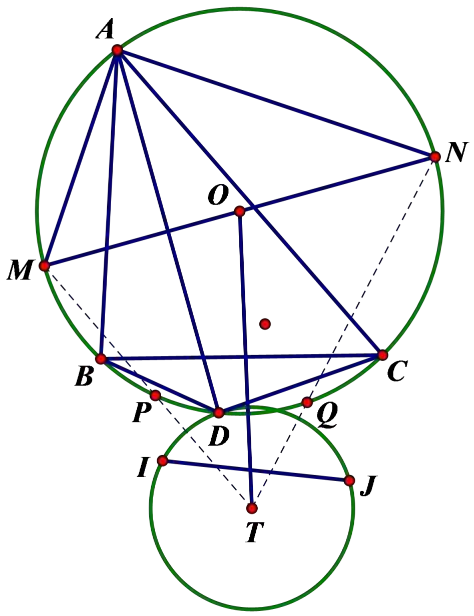
Bài này không khó nhưng vì hình vẽ hơi rối nên gây trở ngại nhiều. Bài toán này làm mình nhớ đến bài toán hình học thi thử VMO 2018 của năm trước với nội dung như sau:

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có điểm D di động trên cung nhỏ BC và không trùng với các đỉnh B, C. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A của các tam giác ABD, ACD. Chứng minh rằng khi D thay đổi thì*

1. *Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DIJ luôn thuộc một đường tròn cố định.*

2. *Đường tròn ngoại tiếp tam giác DIJ luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải. 1) Giả sử trung trực AD cắt (O) tại M, N và P, Q lần lượt là trung điểm các cung nhỏ DB, DC. Do I là tâm bàng tiếp tam giác ABD nên $PI = PD, MI = MD$.

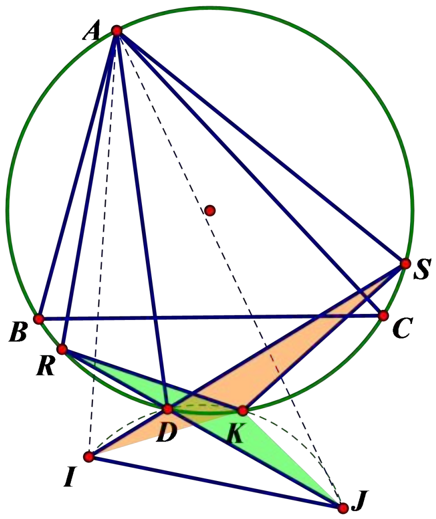


Gọi T là tâm của (DIJ) thì T, M, P thẳng hàng (cùng thuộc trung trực của ID) hay $T \in MP$. Tương tự ta cũng có $T \in NQ$. Mặt khác,

$$\angle NMP = \frac{1}{2}\left(A\overset{\frown}{C}D + \overset{\frown}{BD}\right) = \frac{1}{2}A\overset{\frown}{C}B,$$

tương tự thì $\angle MNP = \frac{1}{2}A\overset{\frown}{B}C$. Điều này chứng tỏ tam giác TMN có kích thước cố định (vì có hai góc và một cạnh kề cố định) nên TO là trung tuyến cố định. Vậy T thuộc đường tròn tâm O với bán kính không đổi.

2) Gọi R, S lần lượt là trung điểm các cung lớn AC, AB. Dễ thấy $I \in DS, J \in DR$ và $SA = SI, RA = RJ$ (tính chất của tâm đường tròn bàng tiếp).



Gọi K là giao điểm khác D của (DIJ) và (O). Ta có $\angle KSD = \angle KRD, \angle KID = \angle KJD$ nên $\Delta KRJ \sim \Delta KSI(g.g)$.

Do đó, $\frac{KR}{KS} = \frac{RJ}{SI} = \frac{RA}{SA}$, điều này cho thấy tứ giác $ARKS$ là điều hòa, suy ra K cố định (vì R, S cố định). Vậy (DIJ) luôn đi qua điểm K cố định. $\square$

Chú ý rằng K cũng chính là tiếp điểm của đường tròn A – Mixtilinear ngoại của tam giác ABC đối với (O). Ngoài ra, ta còn chứng minh được rằng:

- Đường tròn đường kính IJ luôn đi qua tâm bàng tiếp góc A của tam giác ABC.
- Trung điểm IJ luôn thuộc một cung chứa góc cố định dựng trên RS.

Đây là các bài toán thú vị, mọi người hãy thử sức. Bài toán cũng đúng khi thay tâm bàng tiếp bởi tâm nội tiếp của tam giác ABD, ACD.

Thực ra mô hình nội tiếp là bài toán cũ (trong tài liệu Around the world giai đoạn 1997 – 2002 của tác giả Titu Andreescu có); mô hình bàng tiếp vừa nêu là nhờ tương tự hóa mà thành.

Trở lại bài toán ban đầu, ta cũng có thể chứng minh điểm cố định là tiếp điểm của Mixtilinear nội của tam giác DBC với (O) (chẳng hạn dùng nghịch đảo đối xứng, nhưng do đề VMO ít khi đề cập đến chủ đề Mixtilinear nên ta cũng không khai thác khía cạnh này nhiều).

Bài toán ban đầu là sự LẮP GHÉP bài toán gốc và đưa vào mô hình đường tròn (ω) để gây rắc rối hơn. Thực ra phương pháp này không làm cho bài toán đẹp hơn, nhưng lại làm cho nó thích hợp hơn với kiểu đề VMO (ít vẽ đường phụ, chỉ nhìn và khai thác mô hình).

Qua bài toán trên, ta thu được một bổ đề khá thú vị. Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp (O) và một đường tròn (ω) thay đổi đi qua A, O cắt $(O), AB, AC$ ở D, E, F. Khi đó ta có $ED = EC, FD = FC$. Ta có thể khai thác bổ đề đó để "chế biến" thành các bài toán sau:

Bài toán 3. *Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp (O) và một đường tròn (ω) thay đổi đi qua A, O cắt $(O), AB, AC$ ở D, E, F. Tiếp tuyến ở D của (O) cắt BC ở L và trung trực DL cắt EF ở K. Chứng minh rằng KD tiếp xúc (ω).*

Bài toán 4. *Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp (O) có trực tâm H và M là trung điểm AH. Gọi (ω) là đường tròn đi qua A, M, tiếp xúc với AO ở A. Đường tròn (ω) cắt đường tròn đường kính AH, cắt AB, AC ở T, R, S. Lấy $D \in AB, E \in AC$ sao cho $RT = RD, ST = SE$. Chứng minh rằng $DE \parallel AO$.*

1.4. Về bài toán bất đẳng thức trong đề Cần Thơ

Bài toán 1. *Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của*

$$P = \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1}.$$

Câu này có hai hướng tiếp cận là

- Thay $1 \to ab + bc + ca$, quy đồng mẫu đưa về $P = \frac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ rồi dùng đánh giá
$$8(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq 9(a+b)(b+c)(c+a).$$
- Lượng giác hóa, đặt $(a, b, c) \to \left(\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}\right)$ rồi có
$$P = \frac{1}{2}\left(\cos A + \cos B + \cos C + 3\right).$$

Nếu đề đổi yêu cầu thành $\min P$ thì sao? Khi đó, chắc chắn đẳng thức không xảy ra tại "tâm" nữa mà phải là tại "biên". Ta phải dự đoán dấu bằng xảy ra khi có một số bằng 0 và hai số bằng 1, và đưa về$P \geq 2$. Như thế có cần phải dồn biến? Thực ra chưa cần, ta chứng minh điều này không khó vì

$$P \geq 2 \Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) \geq (a+b)(b+c)(c+a) \Leftrightarrow abc \geq 0.$$

Như thế miền giá trị của biểu thức P khá hẹp, $2 \leq P \leq \frac{9}{4}$. Bài toán trên biến đổi thuận lợi vì giả thiết $ab + bc + ca = 1$ tạo điều kiện cho phép thế và quy đồng mẫu. Ta thử thay thành $ab + bc + ca = 3$. Xét bài toán sau

Bài toán 2. *Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$P = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2}.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử c là số nhỏ nhất, suy ra $3ab \geq ab + bc + ca = 3 \Rightarrow ab \geq 1$. Ta chứng minh được $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$ vì nó tương đương $(ab-1)(a-b)^2 \geq 0$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{1+ab} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{3}{2} \\
&\Leftrightarrow 2(2 + 2c^2 + 1 + ab) \geq 3(1 + ab + c^2 + abc^2) \\
&\Leftrightarrow c^2 + 3 \geq ab + 3abc^2 \\
&\Leftrightarrow c^2 + ab + bc + ca \geq ab + 3abc^2 \\
&\Leftrightarrow c^2 + bc + ca \geq 3abc^2 \\
&\Leftrightarrow c(a + b + c - 3abc) \geq 0
\end{aligned}$$

Mặt khác, ta cũng có $(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 9abc$ nên $a+b+c \geq 3abc$. Do đó, bất đẳng thức cuối ở trên là đúng và ta có $P \geq \frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = \sqrt{3}, c = 0$ và các hoán vị. □

Bài toán trên cho thấy dấu bằng tại tâm và tại biên của bài toán gốc đã rơi vào cùng thời điểm tại giá trị nhỏ nhất (chú ý rằng biểu thức trên không có giá trị lớn nhất).

Những bài toán có "hai dấu bằng" thường là những bài toán khó và đẹp. Dưới đây là đề chọn đội tuyển Quốc gia của Vĩnh Long 2018:

Bài toán 3. *Cho a, b, c có tổng bằng 0, tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$P = \frac{a-1}{a^2+8} + \frac{b-1}{b^2+8} + \frac{c-1}{c^2+8}.$$

Lời giải. Dùng đánh giá ghép cặp hai trong ba phân số. Dự đoán $P \geq -\frac{3}{8}$ nên đưa về chứng minh

$$\frac{a-1}{a^2+8} + \frac{b-1}{b^2+8} + \frac{c-1}{c^2+8} \geq -\frac{3}{8}$$

hay

$$\frac{(a+2)^2}{a^2+8} + \frac{(b+2)^2}{b^2+8} + \frac{(c+2)^2}{c^2+8} \geq \frac{3}{2}.$$

Giả sử $ab \geq 0$ thì ta có

$$\frac{(a+2)^2}{a^2+8} + \frac{(b+2)^2}{b^2+8} \geq \frac{(a+b+4)^2}{a^2+b^2+16} \geq \frac{(a+b+4)^2}{(a+b)^2+16} = \frac{(c-4)^2}{c^2+16}.$$

Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\frac{(c-4)^2}{c^2+16} + \frac{(c+2)^2}{c^2+8} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{c^2(c-4)^2}{(c^2+8)(c^2+16)} \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 0$ hoặc $a = b = -2, c = 4$. □

Sau đây là một số bài toán tương tự

Bài toán 4. *Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca = 1$. Tìm GTLN của $P = \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1{,}5}{c^2+1}$.*

Gợi ý. Sử dụng lượng giác $(a, b, c) \to \left(\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}\right)$ đưa về $2P = \cos A + \cos B - 3\sin^2\frac{C}{2} + 5 = -3\left(\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{16}{3} \Rightarrow P \leq \frac{8}{3}$. □

Bài toán 5. *Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca = 3$. Tìm GTLN của $P = \frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{b^2+2} + \frac{1}{c^2+2}$.*

Gợi ý. Ta cần chứng minh $P \leq 1$ hay $\frac{a^2}{a^2+2} + \frac{b^2}{b^2+2} + \frac{c^2}{c^2+2} \geq 1$. Tuy nhiên, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì $VT \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6} = \frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2+6} = 1$. □

Cuối cùng, xét bài toán hay và khó sau trong đề Brazil Revenge 2013, mở rộng bốn biến của bài toán mở đầu. Tác giả của lời giải đẹp bên dưới là thầy Võ Quốc Bá Cẩn.

Bài toán 6. *Cho $a, b, c, d \geq 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca + ad + ac + bd = 6$. Chứng minh rằng $3 > \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq 2$.*

Ở trường hợp tìm giá trị lớn nhất, ta cho $a = b = c = \frac{1}{n}, d = 2n$ với $n \to +\infty$ thì có $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \to 3$. Ở đây, ta phân tích trường hợp tìm giá trị nhỏ nhất. Xét các trường hợp sau

1. Nếu $ac < 1$ thì $bd < 1$, ta có $1 + c^2 < 1 + \frac{1}{a^2} = \frac{1+a^2}{a^2}$ và $1 + d^2 < 1 + \frac{1}{b^2} = \frac{1+b^2}{b^2}$ nên
$$P > \left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{a^2}{1+a^2}\right) + \left(\frac{1}{1+b^2} + \frac{b^2}{1+b^2}\right) = 2.$$

2. Nếu $ac \geq 1$, ta có các nhận xét sau:

   - $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{2}{1+ac}$ vì khai triển và rút gọn, ta có $(a-c)^2(ac-1) \geq 0$, đúng.
   - $a+b+c+d \geq 4$ vì theo khai triển bình phương của tổng và bất đẳng thức AM-GM, ta có: $(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+bc+cd+da+ac+bd)$ và $2(ab+bc+cd+da+ac+bd) \leq 3(a^2+b^2+c^2+d^2)$ nên suy ra $a+b+c+d \geq 4$.

   Từ đó, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì
   $$P \geq \frac{2}{1+ac} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+d^2} = \frac{1}{1+ac} + \frac{1}{1+ac} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+d^2} \geq \frac{9}{3+2ac+b^2} + \frac{1}{1+d^2}.$$
   Chú ý rằng
   $$2ac+b^2 = (b-a)(b-c)+ab+bc+ca \leq ab+bc+ca = 6-d(a+b+c) \leq 6-d(4-d).$$
   Do đó $P \geq \frac{9}{9-4d+d^2} + \frac{1}{1+d^2}$. Xét hiệu
   $$P - 2 = \frac{9}{9-4d+d^2} + \frac{1}{1+d^2} - 2 = \frac{2d(2-d)(d-1)^2}{(9-4d+d^2)(1+d^2)} \geq 0,$$
   đúng vì $0 \leq d \leq 2$.

Do đó ta có $P \geq 2$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = 1$ hoặc $a = b = c = \sqrt{2}, d = 0$.

1.5. Về bài toán tổ hợp trong đề trường Đông miền Nam

Bài toán 1. *Tìm số hoán vị* $(a_1, a_2, \ldots, a_{2018})$ *của* 2018 *số nguyên dương đầu tiên sau cho*

i) $a_{i+1} - a_i \leq 1$ *với mọi* $i = 1, 2, \ldots, 2017$.

ii) Tồn tại đúng hai chỉ số i *mà* $a_i = i$*?*

Ý i) của bài toán là khá "kinh điển" trong các tài liệu về đếm bằng truy hồi; ý ii) thêm vào dù không mới, nhưng cũng rất hay trong việc khai thác sự phân bố các số trong hoán vị. Ta có hai hướng tiếp cận để đếm số hoán vị ĐẸP chỉ thỏa mãn i), gọi s_n là số hoán vị của n số nguyên dương đầu tiên sao cho $a_{i+1} - a_i \leq 1$ với $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

Cách 1. Gọi k là vị trí thỏa mãn $a_k = n$. Ta có $a_{k-1} \geq a_k - 1 = n - 1$ nên phải có $a_{k-1} = n - 1$, cứ như thế, ta suy ra $a_1 = n - k + 1$. Còn lại các số phía sau a_k là $1, 2, 3, ..., n - k$ tạo thành hoán vị đẹp nên trong trường hợp $a_k = n$ thì số hoán vị thỏa mãn là s_{n-k}. Chú ý rằng nếu $k = n$ thì chỉ có 1 hoán vị thỏa mãn là $1, 2, 3, ..., n$. Từ đó suy ra số hoán vị thỏa mãn là

$$s_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} s_{n-k} = s_1 + s_2 + ... + s_{n-1} + 1.$$

Chú ý rằng $s_1 = 1, s_2 = 2$ nên xử lý công thức truy hồi trên, ta có được $s_n = 2^{n-1}$. □

Tiếp theo là một cách chỉ dùng nguyên lý nhân.

Cách 2. Đầu tiên, ta viết số 1; số 2 sẽ nằm trước hoặc sau số 1 nên có 2 cách đặt; số 3 sẽ nằm phía trước hoặc sau số 2 nên sẽ có 2 cách đặt, ... Cứ như thế, nếu đã xếp được $k - 1$ số đầu tiên, ta sẽ xếp số k vào hai vị trí: đầu dãy hoặc sau số $k - 1$. Do đó, theo nguyên lý nhân, ta sẽ có 2^{n-1} cách xếp. □

Trở lại bài toán đã cho, giả sử ta có $a_i = i$ và $a_j = j$ với $1 \leq i < j \leq 2018$. Ta có

$$a_j \leq a_{j-1} + 1 \leq a_{j-2} + 2 \leq \ldots \leq a_{j-(j-i)} + (j - i) = i + (j - i) = j.$$

Đẳng thức xảy ra nên tất cả các số ở giữa đều "bất động"; thế nên i, j phải là hai số liên tiếp. Mặt khác, $a_{i+1} \leq a_i + 1 = i + 1$, nhưng không thể có $a_{i+1} = i + 1$ (do chỉ có 1 chỉ số thỏa mãn ii) nên $a_{i+1} \leq i$, mà $a_i = i$ nên $a_{i+1} \leq i - 1$. Tiếp theo, $a_{i+2} \leq a_{i+1} + 1 \leq i$ nên $a_{i+2} \leq i - 1$.

Do đó, các số từ a_{j+1} đến a_{2018} nhận giá trị không vượt quá $i - 1$. Lập luận tương tự, các số từ a_1 đến a_{i-1} phải nhận giá trị không nhỏ hơn $j + 1$. Do đó, hai đoạn hoán vị phía trước a_i và phía sau a_j phải có độ dài bằng nhau. Từ đó ta suy ra $i = 1009, j = 1010$. Rõ ràng các hoán vị phía trước và phía sau đều phải là hoán vị đẹp và được sắp xếp độc lập với nhau. Vậy số hoán vị cần tìm là

$$s_{1008} \cdot s_{1008} = \left(2^{1007}\right)^2 = 2^{2014}.$$

Chú ý rằng một cách tương tự, nếu thay số $2018 \to n$ thì số điểm bất động trong hoán vị sẽ cùng tính chẵn lẻ với n.

Ta xét bài toán khó hơn bài đã cho và từng xuất hiện trong đề thi của KHTN 2010:

Bài toán 2. *Tìm số hoán vị của $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ của các số $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ với $n \geq 2$ thỏa mãn đồng thời:*

i) $a_i \neq i$ *với mọi* $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

ii) $a_{i+1} - a_i \leq 1$ *với mọi* $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

Trước hết, ta sẽ tính số các hoán vị thỏa mãn điều kiện ii nhưng không thỏa mãn điều kiện i, tức là trong hoán vị có ít nhất một chỉ số i mà $a_i = i$. Ta thấy rằng nếu tồn tại $i \neq j$ mà $a_i = i, a_j = j$ thì tương tự trên, ta có:

- Với mọi k mà $i \leq k \leq j$ thì $a_k = k$.
- Gọi x, y lần lượt là số nhỏ nhất, lớn nhất thỏa mãn $a_i = i, 1 \leq i \leq n$ thì $x + y = n + 1$.

Với mỗi x mà $1 \leq x \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$, tương tự cách tính số hoán vị thỏa mãn điều kiện ii ở trên, ta thấy số hoán vị thỏa mãn là $2^{2(x-2)}$ nếu $x \geq 2$ và bằng 1 nếu $x = 1$. Khi đó, số hoán vị thỏa mãn điều kiện ii nhưng không thỏa mãn điều kiện i là

$$1 + \sum_{i=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} 2^{2(x-2)} = 1 + \sum_{i=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} 4^{x-2} = 1 + \frac{4^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} - 1}{3} = \frac{4^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} + 2}{3}.$$

Vậy số hoán vị cần tìm chính là

$$2^{n-1} - \frac{4^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1} + 2}{3}.$$

Một số bài toán tương tự về kiểu đếm dãy số hoặc hoán vị

Bài toán 3. *(Ả Rập 2015) Hỏi có bao nhiêu dãy số* $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_{12} \leq 2018$ *sao cho* $a_i \equiv i^2 (\mathrm{mod} 12)$*?*

Hướng dẫn. Liệt kê cụ thể các số dư của i^2 khi chia cho 12, ta có $1, 4, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 4, 1, 0$. Trừ mỗi số cho số dư trên rồi chia cho 12, ta đưa về việc đếm số dãy

$$0 \leq b_1 \leq b_2 \leq b_3 < b_4 < b_5 < b_6 \leq b_7 \leq b_8 \leq b_9 < b_{10} < b_{11} < b_{12} \leq 168.$$

Đến đây, ta dùng song ánh hoặc chia kẹo Euler. □

Bài toán 4. *(TP.HCM 2018) Hỏi có bao nhiêu hoán vị* $(a_1, a_2, \ldots, a_{164})$ *của* 164 *số nguyên dương đầu tiên sao cho* $a_i \neq i$ *và* $a_i \equiv i \pmod{41}$ *với mọi* $i = 1, 2, \ldots, 164$?

Hướng dẫn. Chia các số từ $1, 2, \ldots, 164$ thành 41 nhóm theo số dư khi chia cho 41 thì rõ ràng mỗi nhóm có 4 số. Theo giả thiết thì các số trong mỗi bộ sẽ được hoán đổi vị trí cho nhau. Ta thấy với một bộ (x_1, x_2, x_3, x_4), ta có 9 cách hoán vị "không có điểm cố định (có thể liệt kê hoặc dùng công thức kinh điển $4!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 9$).

Vì thế nên có tất cả 9^{41} hoán vị thỏa mãn đề bài. □

Bài toán 5. *(dựa theo đề trường Đông miền Nam 2014) Có bao nhiêu hoán vị* $(a_1, a_2, \ldots, a_{2018})$ *của* $(3, 4, 5, \ldots, 2020)$ *sao cho* $a_i \geq i$?

Hướng dẫn. Trước hết, ta có $a_{2018} \in \{2018, 2019, 2020\}$ nên có 3 cách chọn. Tương tự thì $a_{2017} \in \{2017, \ldots, 2020\}$ nhưng loại đi số dùng cho a_{2018} nên cũng chỉ còn 3 cách. Cứ như thế, đến a_3 còn 3 cách; a_2 còn 2 cách và a_1 còn 1 cách. Tổng số hoán vị là $2 \cdot 3^{2016}$. □

Bài toán 6. *(bài toán phát kẹo) Cô giáo có* 10 *loại kẹo (mỗi loại có nhiều viên) và cần phát cho* 30 *học sinh của lớp (một em nhận không quá* 1 *viên/loại), giả sử rằng các em này có học lực đôi một khác nhau. Hỏi cô giáo có bao nhiêu cách phát kẹo, biết rằng nếu học sinh* A *giỏi hơn* B *thì* B *có kẹo gì là* A *có kẹo đó (tính cả trường hợp không em nào nhận được kẹo)?*

Hướng dẫn. Xếp 30 học sinh này thành một dãy $A_1, A_2, \ldots, A_{30}$ theo thứ tự tăng dần của học lực. Xét loại kẹo đầu tiên, nếu em A_k được nhận thì tất cả các em $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_{30}$ đều có; như thế số cách phát kẹo bằng với số cách chọn em đầu tiên tính từ trái qua được nhận kẹo, có tất cả 31 cách như thế. Tương tự với các loại kẹo còn lại, vậy nên có 31^{10} cách phát. □

Bài toán 7. *(Bài toán con nhện) Một con nhện có* 8 *cái chân,* 8 *cặp vớ - giày khác nhau (vớ chỉ dùng chung với chiếc giày tương ứng). Con nhện có bao nhiêu thứ tự mang vớ và giày để sao cho trên cùng một chân, giày phải được mang vào sau vớ?*

Hướng dẫn. Ta "tuyến tính hóa" các cặp giày và vớ, đặt là $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_8, b_8)$.

Hoán vị của 16 chữ cái này là $16!$, nhưng trong mỗi cặp chữ cái, ta phải có b_i đứng trước a_i (các chữ cái khác có xuất hiện ở giữa chúng hay không cũng không ảnh hưởng). Do đó, ta không xét hoán vị của các chữ cái cùng cặp nên chỉ còn $\frac{16!}{2^8}$ cách mang giày và vớ cho nhện. □

1.6. Về bài toán hình học trong đề trường Đông ở Phú Yên

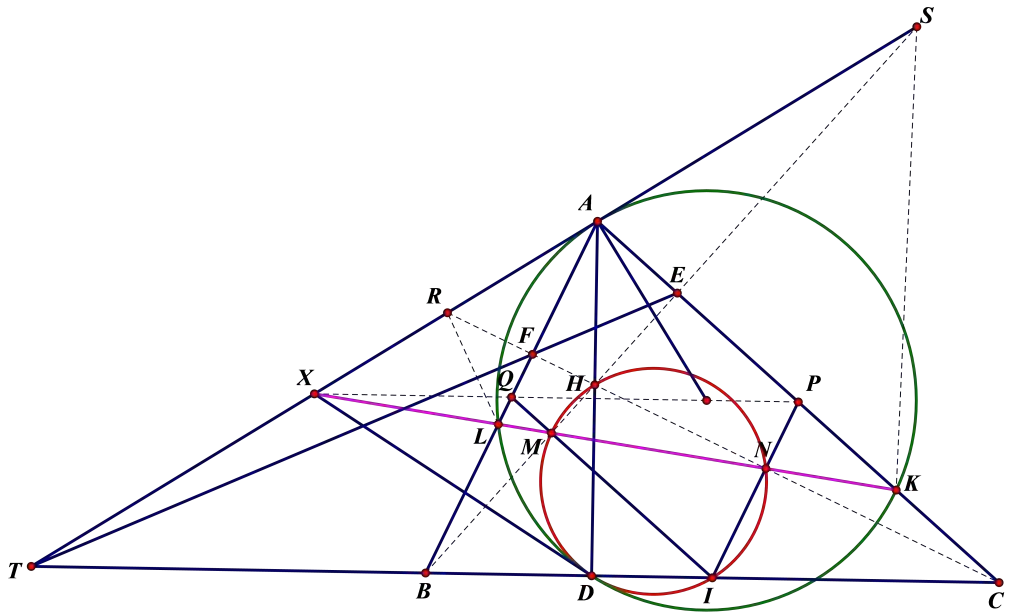
Bài toán 1. *Cho tam giác nhọn* ABC *có trực tâm* H *và đường cao* BE, CF. *Gọi* M, N, P, Q *là trung điểm* BE, CF, AC, AB. *Giả sử* MN *cắt* AB, AC *ở* L, K. *Gọi* J *là tâm của* (ALK).

1. *Chứng minh rằng* J, P, Q *thẳng hàng.*
2. *Chứng minh rằng* (HMN) *tiếp xúc với* (ALK).

Lời giải. Bài toán này là một ứng dụng đẹp cho mô hình tứ giác toàn phần, kết hợp hàng loạt hàng điểm điều hòa.

1) Giả sử EF cắt BC ở T thì có tứ giác toàn phần $BCEF.AT$ với đường thẳng Gauss MN nên MN đi qua trung điểm X của AT. Đường cao BE, CF cắt AT ở S, R. Ta có hàng điểm điều hòa quen thuộc $(CF, HR) = -1$ nên theo hệ thức Maclaurin thì

$$HF \cdot HC = HN \cdot HR.$$



Tương tự thì $HE \cdot HB = HM \cdot HS$ nên $HN \cdot HR = HM \cdot HS$. Do đó $MNSR$ là tứ giác nội tiếp. Vì $MQ \parallel PK, QL \parallel PN$ nên

$$\frac{XQ}{XP} = \frac{XM}{XK} = \frac{XL}{XN},$$

suy ra

$$XM \cdot XN = XL \cdot XK = XR \cdot XS = XA^2$$

nên XA tiếp xúc với (ALK). Kẻ XD tiếp xúc với (J) thì $XA = XD = XT$ góc ADT vuông. Ngoài ra tứ giác $ALDK$ điều hòa nên $A(AD, LK) = -1$, suy ra $A(TD, BC) = -1$ dẫn đến D chính là chân đường cao đỉnh A. Do đó $JA = JD$, điều này cho thấy J thuộc trung trực AD, chính là PQ.

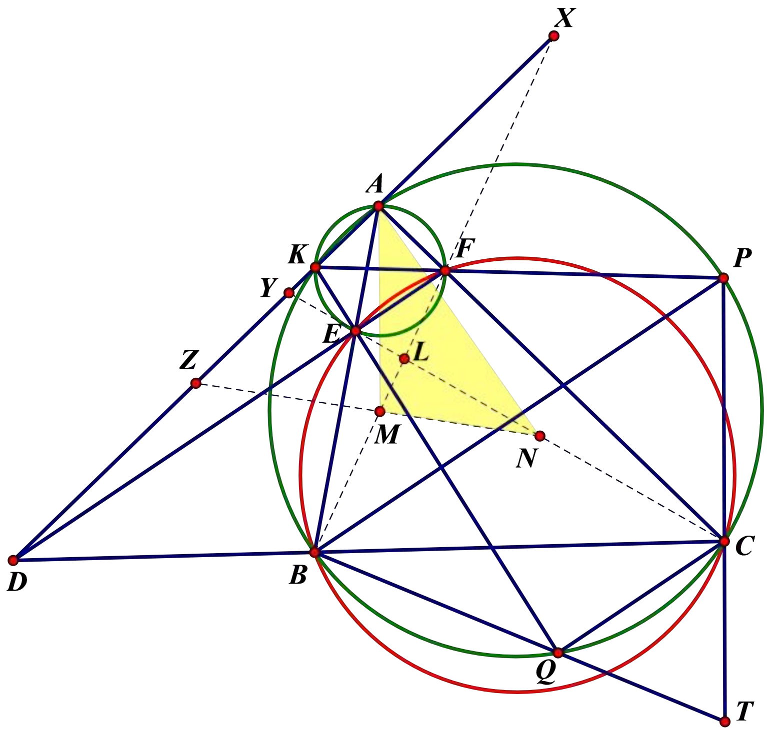
2) Dễ thấy 5 điểm H, M, N, D, I cùng thuộc đường tròn đường kính HI (với I là trung điểm BC). Do đó: $(HMN), (ALK)$ cùng đi qua D. Theo câu 1 thì $XD^2 = XL \cdot XK = XM \cdot XN$ nên XD là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn. □

Một bài toán tương tự đã có xuất hiện trong trường Đông 2015:

Bài toán 2. *Cho tam giác nhọn ABC không cân nội tiếp đường tròn ω. Đường tròn ω' thay đổi đi qua B, C cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt lại đường tròn [ω tại K. KE, KF lần lượt cắt lại đường tròn [ω tại Q, P. Gọi T là giao điểm của BQ và CP. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BF, CE.*

1. *Chứng minh rằng T thuộc một đường thẳng cố định khi đường tròn ω' thay đổi.*
2. *Chứng minh rằng KA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.*

Ở đây ta không phân tích chi tiết lời giải bài này, có lẽ qua hình vẽ sau, đối chiếu lại với bài trên, ta có thể hình dung ra cụ thể hơn:



Nếu tổng quát bài trường Đông Phú Yên, thay EF thành đối song bất kỳ, các yếu tố sau sẽ vẫn đúng: XA tiếp xúc (AMN) và $(HMN), (AKL)$ tiếp xúc.

Đến đây, ta lại nhớ đến bài toán khá quen thuộc trong đề IMO Shortlist 2009:

Bài toán 3. *Cho tứ giác $ABCD$ không phải là hình thang, nội tiếp trong đường tròn (O) có $AC \cap BE = E$ và $AD \cap BC = F$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng đường thẳng EF tiếp xúc với đường tròn (EMN).*

Thế thì bài toán này với bài vừa phát biểu ở trên có liên hệ gì?

Nếu tinh ý, ta có thể đổi thứ tự điểm, từ tứ giác toàn phần $BCEF.AT$, ta được tứ giác "lõm" $BECF.TA$. Như thế, bài toán IMO Shortlist trên phát biểu thành TA tiếp xúc với (AMN).

Vậy hóa ra bài toán tổng quát ở trên chính là một cách nhìn khác của đề IMO Shortlist.

Chú ý rằng bổ đề này còn một cách khác để chứng minh là dùng đẳng giác trong các tam giác đồng dạng nghịch. Như thế, quay lại mô hình trên, ta phát hiện ra một điều thú vị là: AM, AN đẳng giác trong góc A; còn DM, DN đẳng giác trong góc D của tứ giác $AKDL$. Như thế, có thể đặt thêm các câu hỏi đại loại như: Chứng minh rằng phân giác góc $\angle MAN$ luôn đi qua điểm cố định. Ngoài ra, ta còn một cách tiếp cận nhẹ nhàng hơn cho bài toán trên là:

Lời giải khác. Vì các tam giác ABE, ACF đồng dạng nghịch nên AM, AN đẳng giác trong A, kéo theo hai đường tròn $(AMN), (AKL)$ tiếp xúc nhau ở A (tính chất quen thuộc đã xuất hiện trong VMO 2015). Mà $XK \cdot XL = XM \cdot XN$ nên X thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn và XA tiếp xúc với cả $(AKL), (AMN)$. $\square$

Nói tóm lại, thay vì dùng điều hòa, việc dùng đẳng giác giúp cho bài toán tổng quát ở trên, cũng như đề trường Đông Phú Yên, có thể được giải quyết trong vài dòng!

Nói đến bổ đề này, ta có một bài toán tương tự của tác giả Trần Quang Hùng ôn luyện cho đội IMO cách đây vài năm:

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC và một đường tròn (I) thay đổi luôn qua B, C cắt đoạn AB, AC lần lượt tại D, E. Giả sử CD cắt BE ở K và M, N là trung điểm BD, CE. Đường thẳng KM cắt (KCE) ở R và KN cắt (KBD) ở S. Chứng minh rằng AI vuông góc với RS.*

Cuối cùng, xin mời mọi người thử sức với bài toán trong đề chọn đội tuyển Ả Rập 2017, cũng là một ứng dụng thú vị của mô hình trên.

Bài toán 5. *Cho tứ giác $ABCD$ không phải là hình thang, nội tiếp (O) có $AB \cap CD = E, AD \cap BC = F$ và $AC \cap BD = K$. Gọi G, H là trung điểm AB, CD và I là tâm của (GHK). Giả sử (I) cắt (O) ở M, N sao cho tứ giác $MGHN$ lồi. Đặt $P = MG \cap HN, Q = MN \cap GH$.*

1. *Chứng minh rằng IK, OE song song.*
2. *Chứng minh rằng PK, IQ vuông góc.*

Nếu dùng cực – đối cực, bài toán khá nhẹ nhàng và nếu đã biết bổ đề trong shortlist nêu trên thì bài toán cồng kềnh này cũng khá "hiển nhiên".

1.7. Về bài toán max min trong đề trường Đông Phú Yên

Ta xuất phát bằng bài toán tìm max của min sau đây, xuất hiện trong đề kiểm tra trường Đông ở Phú Yên

Bài toán 1. *Với mỗi cặp số thực α, β, đặt $M(\alpha,\beta) = \max\limits_{x\in[-1;1]} \frac{|x^2+\alpha x+\beta|}{|x|+1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M(\alpha,\beta)$ khi α, β thay đổi.*

Dưới đây là đáp án của đề thi trong đề Phú Yên

Lời giải. Đặt $g(x) = x^2+\alpha x+\beta$ thì $|g(x)| \le M(\alpha,\beta)\,(|x|+1)$, thay các số $g(-1), g(0), g(1)$, ta có $\max\{g(-1)-g(0), g(1)-g(0)\} \le 3M(\alpha,\beta)$. Ngoài ra, $g(-1) = 1-\alpha+\beta, g(0) = \beta, g(1) = 1+\alpha+\beta$ nên $3M(\alpha,\beta) \ge \max\{1-\alpha, 1+\alpha\} \ge 1$. Suy ra $M(\alpha,\beta) \ge \frac{1}{3}$.

Để ý rằng muốn có được $M = 1/3$ thì phải có các đẳng thức xảy ra trong các đánh giá trước đó, tức là

$$|1-\alpha+\beta| = |1+\alpha+\beta| = \frac{2}{3}, |\beta| = \frac{1}{3}$$

và giải hệ này được $\alpha = 0, \beta = -\frac{1}{3}$.

Cuối cùng, chỉ cần chứng minh rằng $\left|x^2 - \frac{1}{3}\right| \le \frac{1}{3}\,(|x|+1)$ với mọi $x \in [-1;1]$ là bài toán kết thúc. ∎

Dạng toán min của max này trong năm 2017 - 2018 vừa qua đã xuất hiện khá nhiều (trong đề thi thử THPT QG). Quả thật nếu lần đầu gặp dạng này và ta tiếp cận theo cách nghĩ đơn giản là: tính $M(\alpha,\beta)$ theo α,β rồi tìm min của hàm hai biến trên miền $[a;b]$ thu được thì chắc chắn sẽ rơi vào bế tắc khi chia trường hợp. Có 2 hướng xử lý bài toán dạng này

1. Cách 1. (theo hướng đại số)
   - Thay các số thích hợp để đánh giá được $M \geq \max\{f(a), f(b), f(x_0)\}$
   - Tìm cách phối hợp thích hợp các giá trị f để triệt tiêu được tham các tham số.
2. Cách 2. (theo hướng giải tích, dùng đồ thị) Dựa trên ý tưởng là: "trên đoạn AB, muốn chọn một điểm C sao cho khoảng cách $\max\{AC, BC\}$ là nhỏ nhất" thì rõ ràng, C phải là trung điểm AB. Điều này khá hiển nhiên!

Ta xét toán sau để thấy rõ nội dung của cách 1:

Bài toán 2. *Với $a \in \mathbb{R}$, đặt $M(a) = \max\limits_{[-1;2]} |-9x^2+4x+a|$, tìm a để $M(a)$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

Lời giải. Đặt $y = -9x^2+4x$ thì với $x \in [-1;2]$, ta có $y \in [-28; \frac{4}{9}]$. Ta đưa bài toán về tìm GTNN của $M(a) = \max\limits_{[-28,\frac{4}{9}]} |y+a|$. Ở đây hàm f cần xét chính là $f(y) = y+a$.

Vì $M(a) \geq |f(-28)|, \left|f\left(\frac{4}{9}\right)\right|$ nên $2M \geq \left|-28+a-a-\frac{4}{9}\right| \Rightarrow M \geq \frac{128}{9}$. Khi $M = \frac{128}{9}$, các đánh giá ở trên phải xảy ra dấu bằng, tức là

$$\begin{cases} f(-28) = f\left(\dfrac{4}{9}\right) = \dfrac{128}{9} \\ (28-a)\left(\dfrac{4}{9}+a\right) \geq 0 \end{cases} \to a = \frac{124}{9}.$$

Cuối cùng, ta chỉ cần chứng minh khi $a = \frac{124}{9}$ thì max đúng là $\frac{128}{9}$. Bước này có thể xử lý nhẹ nhàng bằng khảo sát hàm số. $\square$

Như thế, trong trường hợp chỉ có một tham số và biến với tham số "độc lập", bài toán được giải quyết trọn vẹn theo cách trên. Dưới đây là một số dạng tương tự:

Bài toán 3. *Tìm min của* $\max|3^x+m|$ *trên* $D = [0;2]$. *Đáp số là:* $\min\max = 4$ *khi* $m = -5$.

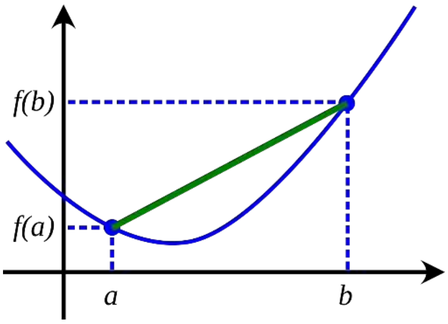
Bài toán 4. *Tìm min của*

$$\max\left|\frac{x^2+2x-1}{x+1}+m\right|$$

trên $D = [0;2]$. *Đáp số:* $\min\max = \frac{5}{3}$ *khi* $m = \frac{2}{3}$.

Câu hỏi đặt ra là ngoài hai đầu mút thì giá trị thứ ba là x_0 cần chọn là giá trị nào, có phải luôn là $x_0 = \frac{a+b}{2}$? Thật rất khó để trả lời tổng quát khi chỉ dùng cách thứ 1, dưới đây ta sẽ tiếp cận theo hướng dùng đồ thị, phát hiện rõ hơn bản chất của dạng Toán này.

Ta xét đồ thị của hàm lõm bên dưới:



Đồ thị này lõm nên trên miền $[a; b]$, hàm số sẽ có đúng một cực trị, đồng thời cũng có đúng một tiếp tuyến song song với đoạn nối hai đầu mút.

Gọi tên hai đầu mút là A, B. Muốn tìm một đường thẳng (d) nào đó trên mặt phẳng sao cho khoảng cách xa nhất từ các điểm trên phần đường cong giới hạn giữa A, B cho đến (d) là nhỏ nhất, ta sẽ:

- Tìm vị trị D xa đoạn AB nhất trên đường cong.
- Chọn tiếp tuyến (d) của (C) tại D sao cho tiếp tuyến đó song song AB.
- Đường thẳng cần tìm sẽ nằm giữa AB và (d) và cách đều hai đường đó.

Đây chính là "tinh thần" của cách thứ 2. Ta xét ví dụ sau để thấy rõ hơn:

Bài toán 5. *Với $a, b \in \mathbb{R}$, đặt $M(a, b) = \max\limits_{[1;2]} \left|\frac{1}{x} - (ax + b)\right|$, tìm GTNN của $M(a, b)$.*

Lời giải. Đặt $f(x) = \frac{1}{x}$, đặt $A(1; 1)$ và $B(2; \frac{1}{2})$ là hai đầu mút của phần đồ thị của $\frac{1}{x}$ trên miền đang xét. Phương trình $AB : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Xét $x_0 \in [1; 2]$ thì $k = f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ là hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0. Tiếp tuyến song song với AB khi

$$-\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{2} \to x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ta viết được phương trình tiếp tuyến là $(d) : y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{2}$.

Phương trình cần tìm song song và cách đều hai đường thẳng $AB, (d)$ nên có phương trình là $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$ và khoảng cách khi đó là $\frac{1}{2}\left|\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right| = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Do đó, khi $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $\min M(a, b) = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$. ☐

Dưới đây là một số dạng tương tự:

Bài toán 6. *Với $a, b \in \mathbb{R}$, đặt $M(a, b) = \max\limits_{[-1;4]} |x^2 - (ax + b)|$, tìm GTNN của $M(a, b)$. Đáp số là: $a = 3, b = \frac{7}{8}$ và $\min = \frac{25}{8}$.*

Bài toán 7. *Với* $a, b \in \mathbb{R}$*, đặt* $M(a,b) = \max\limits_{[0;1]} \left| \frac{x^2+2x-1}{x+1} - (ax+b) \right|$*, tìm GTNN của* $M(a,b)$*.*
Đáp số là: $a = 2, b = \frac{1}{2} - \sqrt{2},\ \min = \sqrt{2} - \frac{3}{2}$.

Ở trên là các dạng chuẩn mực, cuối cùng xin giới thiệu một bài toán trong đề Hướng tới VN TST năm 2011:

Bài toán 8. *Tìm số* m *nhỏ nhất sao cho từ ba số thực bất kỳ thuộc đoạn* $[0;1]$ *luôn tìm được hai số* x, y *sao cho*

$$0 \leq xy(x-y) \leq m.$$

Lời giải. Đặt đoạn $E = [0,1]$. Bài toán tương đương với việc tìm

$$m = \max_{(a,b,c)\in E^3} \left\{ \min_{\{x,y\}\subset\{a,b,c\}} \{|xy(x-y)|\} \right\}$$

Xét bộ (a,b,c). Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a \leq b \leq c$. Khi đó rõ ràng

$$ab(b-a) \leq ac(c-a) \text{ và } bc(c-b) \leq ac(c-a)$$

Do đó

$$\min_{\{x,y\}\subset\{a,b,c\}} \{|xy(x-y)|\} = \min\{ab(b-a), bc(c-b)\}$$

Mặt khác, do $bc(c-b) \leq b(1-b) v ab(b-a) \leq \frac{b^3}{4}$ nên

$$\min\{ab(b-a), bc(c-b)\} \leq \min\left\{ \frac{b^3}{4}, b(1-b) \right\}$$

Do đó

$$m = \max_{b\in E} \left\{ \min\left\{ \frac{b^3}{4}, b(1-b) \right\} \right\}$$

Giải phương trình $\frac{b^3}{4} = b(1-b)$ với $b \in E$, ta được $b_1 = -2 + \sqrt{8}$. Suy ra

$$\min\left\{ \frac{b^3}{4}, b(1-b) \right\} = \begin{cases} \dfrac{b^3}{4} & \text{khi} \quad b \leq b_1. \\ b(1-b) & \text{khi} \quad b \geq b_1. \end{cases}$$

Từ đó dễ dàng tìm được $m = 10\sqrt{2} - 14$. □

1.8. Về bài tổ hợp trong đề Ninh Bình

Bài toán 1. *Viện toán cao cấp VIASM tổ chức* 6 *buổi chuyên đề cho* n *sinh viên mà mỗi buổi có đúng* 100 *sinh viên tham gia. Biết rằng không có* 2 *sinh viên nào mà hợp lại tham gia đủ* 6 *buổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của* n*.*

Lời giải. (tham khảo của thầy Nguyễn Thái Vũ, Titan Education Hà Nội). Ta xét các trường hợp sau:

1. Nếu có một sinh viên học 5 buổi, thì vì buổi còn lại có 100 người học nên tồn tại hai người đi học đủ 6 buổi, mâu thuẫn.

2. Nếu có một sinh viên học 4 buổi, thì 2 tập hợp sinh viên học 2 buổi còn lại phải không giao nhau. Do đó, số sinh viên tối thiểu là 201 người.

3. Ta sẽ chứng minh rằng số sinh viên tối thiểu là 200người, và mỗi người học 3 buổi. Thật vậy, số cách chọn một tập hợp buổi để học là $C_6^3 = 20$. Tuy nhiên, mỗi tổ hợp buổi có một tổ hợp đối (vì không có hai sinh viên hợp lại đủ cả 6 môn) nên số tổ hợp có thể lựa chọn thực tế là 10 tổ hợp. Ta chia 200 sinh viên thành 10 nhóm 20 người, mỗi nhóm học 1 tổ hợp, được số buổi là $10 \times 20 \times 3 = 600$, thỏa mãn yêu cầu đề bài.

4. Nếu số sinh viên ít hơn 200, sẽ có tối thiểu một người học 4 buổi, và theo lập luận ở trên thì số sinh viên ít nhất là 201, mâu thuẫn.

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là 200. □

Câu hỏi dạng này thường phổ biến trong các bài toán đếm bằng hai cách. Bên dưới mình xin phân tích thêm vài nội dung liên quan đến bài toán này. Xuất phát từ bài IMC 2002 (khá quen thuộc):

Bài toán 2. *Lớp học có 200 học sinh , tham gia giải 6 bài toán mà mỗi bài có ít nhất 120 hs giải được. Chứng minh rằng có 2 học sinh có thể "hợp tác" với nhau cùng giải hết 6 bài.*

Lời giải. Phản chứng, mỗi cặp 2 học sinh đều cùng không giải được ít nhất 1 bài. Ta đếm số bộ $S = \#\left(\{A, B\}, C\right)$ với cặp học sinh A, B cùng không giải được bài C.

- chọn cặp A, B, có C_{200}^2, chọn bài C, có ít nhất là 1 nên $S \geq C_{200}^2$.

- chọn bài C, có 6 cách, chọn cặp học sinh cùng không giải được bài này, có không quá C_{80}^2 nên $S \leq 6 \cdot C_{80}^2$.

Suy ra $C_{200}^2 \leq 6 \cdot C_{80}^2$, vô lý. □

Năm 2015, Việt Nam TST có một bài tương tự, nhưng không giải theo cách như trên được!

Bài toán 3. *Trong kỳ thi vấn đáp, có 100 thí sinh và 25 giám khảo, mỗi thí sinh được hỏi bởi ít nhất 10 giám khảo. Chứng minh rằng có 7 giám khảo có thể "hợp tác" với nhau hỏi hết 100 thí sinh trên.*

Thực ra so với bài 1 thì bài 2 tương tự, theo nghĩa:

- 200 học sinh và 25 giám khảo.

- 6 bài toán và 100 thí sinh.

- Số mối quan hệ: 120 học sinh /bài và 10 giám khảo/thí sinh.

- 2 học sinh hợp tác nhau và 7 giám khảo hợp tác nhau.

Nếu thực hiện theo cách tương tự thì bất đẳng thức cuối lại không bị mâu thuẫn (nếu đề đổi số từ 25 thành 24 thì lại được). Do đó, bài này cần có cách tiếp cận chặt hơn. May mắn là điều này không khó, thậm chí còn tự nhiên hơn.

Ta giải lại bài 2 theo cách khác như sau, mọi người có thể tự giải bài 3 theo cách này

Cách khác. Chọn ra hs giỏi nhất. Số cặp (học sinh ,bài toán) mà học sinh giải được bài toán ít nhất là $6 \cdot 120 = 720$; mà $\left[\frac{720}{200}\right] + 1 = 4$ nên học sinh giỏi nhất này phải giải được ít nhất là 4 bài (theo Dirichlet).

Loại học sinh này ra cùng với 4 bài bạn này giải được; còn 119 học sinh và 2 bài. Số cặp lúc này ít nhất là $2 \cdot 119 = 238$, mà $\left[\frac{238}{199}\right] + 1 = 2$ nên sẽ giải được cả 2 bài này. Do đó hai hs giỏi nhất nhì lớp ở trên sẽ giải được cả 6 bài. □

Bài toán đề Ninh Bình cho ta một tình huống đặc biệt: "tìm cực trị của số học sinh", tức là phải chỉ ra dấu bằng xảy ra khi nào. Bài toán đã chọn các con số lý tưởng, thuận lợi cho việc xây dựng đó. Và lời giải bên dưới cũng thể hiện được ý tưởng cách đã nêu ở trên.

Cuối cùng, ta xem thử đề IMC 2013, dữ kiện khá giống với bài toán ban đầu

Bài toán 4. *Trong trường có $2n$ học sinh, $n \geq 2$. Mỗi tuần có n học sinh tham gia dã ngoại. Ta thấy rằng: 2 học sinh tùy ý đều có tham gia chung ít nhất 1 chuyến đi. Hỏi có ít nhất bao nhiêu chuyến đi?*

Đáp số bài toán là 6.

Nhận xét rằng các bài toán dạng này có "hơi hướng" đếm bằng hai cách. Tuy nhiên, do các con số cho rơi vào dạng đặc biệt và hơi lớn nên việc đánh giá thông thường sẽ gặp nhiều khó khăn, thậm chí bị ngược dấu. Lúc đó, ta cần phải "quên bớt" các kỹ thuật mạnh mà suy luận nhẹ nhàng (như ở trên dùng Dirichlet + cực hạn rất tự nhiên) thì mới giải quyết được. Thử giải hai bài toán tương tự sau

Bài toán 5. *Câu lạc bộ có n thành viên, tham gia 12 buổi chuyên đề mà mỗi buổi có 24 thành viên. Biết rằng 2 thành viên bất kỳ tham gia chung không quá một buổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của n. Câu hỏi tương tự nếu thay $(12, 24)$ bởi cặp $(10, 7)$.*

Gợi ý. Gọi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là số buổi mà thành viên thứ $1, 2, \ldots, n$ tham gia. Ta có hai ước lượng

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 288, \\ a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \leq 420 \end{cases}$$

Dùng đánh giá $a_i^2 \geq 3a_i - 2$, ta có được $n \geq 222$. Ý sau vẫn thực hiện tương tự như đánh giá $a_i^2 \geq 5a_i - 6$, thu được $n \geq 32$. □

1.9. Về bài số học trong đề TPHCM

Bài toán 1. *Tồn tại hay không một hoán vị* $(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{164}) \in S$*, thỏa mãn với mỗi* $i \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, 164\}$ *luôn tồn tại* $b_i \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, 40\}$ *sao cho*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_i \equiv b_i^2 \pmod{41}?$$

Dưới đây là hai cách tiếp cận theo hướng dùng các kỹ thuật mạnh hoặc đi xây dựng (lời giải tham khảo của tác giả Nguyễn Song Minh và Nguyễn Ngọc Trung trên diễn đàn Mathscope.org):

Cách 1. Đầu tiên xây dựng dãy:

$$\{0, 1, 40, 2, 39, 4, 37, 5, 36, 8, 33, 9, 32, 10, 31, 16, 25, 18, 23, 20, 21\}.$$

Với 20 số còn lại, ta chia thành 10 cặp mà tổng 2 số của 1 cặp chia hết cho 41. Với một cặp (a, b) mà $a < b$, có thể kiểm tra được rằng tồn tại

$$i \in \{1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 16, 18, 20\},\ j \in \{21, 23, 25, 31, 32, 33, 36, 37, 39, 40\}$$

mà $b + i \equiv j \pmod{41}$. Chèn cặp số (b, a) vào ngay sau i là xong. □

Cách 2. Giả sử r_k là số dư của 6^k khi chia 41, do 6 là căn nguyên thủy mod 41 và

$$6^2 + 6 \equiv 1 \pmod{41}, \quad 6^{20} + 1 \equiv 0 \pmod{41}.$$

Nên ta chia 40 số nguyên dương đầu tiên làm 10 bộ, mỗi bộ 4 số ở dạng

$$\left(r_{2k},\ r_{2k-1},\ r_{20+2k-1},\ r_{20+2k}\right), \quad \forall\, k = 1, 2,\ \ldots, 10.$$

Còn $a_i = i$ nếu $41 \mid i$, và $a_{41t+r} = 41t + a_r$ với $t = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ và $1 \le r \le 40$.

Để ý rằng, với mỗi $0 \le i \le 9$, $0 \le t \le 3$ sẽ tồn tại $k \in \mathbb{Z}^+$ thỏa

$$\begin{aligned}&\left(a_{41t+4i+1},\ a_{41t+4i+2},\ a_{41t+4i+3},\ a_{41t+4i+4}\right)\\ &= \left(41t + r_{2k},\ 41t + r_{2k-1},\ 41t + r_{20+2k-1},\ 41t + r_{20+2k}\right).\end{aligned}$$

Vì thế nên ta có

$$\begin{aligned} a_{41t+4i+1} + a_{41t+4i+2} + a_{41t+4i+3} + a_{41t+4i+4} &\equiv r_{2k} + r_{2k-1} + r_{20+2k-1} + r_{20+2k}\\ &\equiv 6^{2k} + 6^{2k-1} + 6^{20+2k-1} + 6^{20+2k}\\ &\equiv \left(6^{20}+1\right)\left(6^{2k} + 6^{2k-1}\right) \equiv 0 \pmod{41}.\end{aligned}$$

Kết hợp $41 \mid a_i$ nếu $i \mid 41$, nên nếu m chia 41 dư n thì có

$$S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_n \pmod{41}.$$

Giả sử n chia 4 dư r, ta xét

- Nếu $r = 0$, thì $S_m \equiv 0 \pmod{41}$.
- Nếu $r = 1$, thì tồn tại $i,\ k \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$S_m \equiv a_{4i+1} \equiv r_{2k} \equiv \left(6^k\right)^2 \equiv (r_k)^2 \pmod{41}.$$

- Nếu $r = 2$, thì tồn tại $i,\ k \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} S_m &\equiv a_{4i+1} + a_{4i+2} \equiv r_{2k} + r_{2k-1} \\ &\equiv 6^{2k} + 6^{2k-1} \equiv 6^{2k-2}\left(6^2 + 6\right) \equiv (r_{k-1})^2 \pmod{41}. \end{aligned}$$

- Nếu $r = 3$, thì tồn tại $i,\ k \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} S_m &\equiv a_{4i+1} + a_{4i+2} + a_{4i+3} \\ &\equiv r_{2k} + r_{2k-1} + r_{20+2k-1} \equiv 6^{2k} + 6^{2k-1} + 6^{20+2k-1} \\ &\equiv 6^{2k} + 6^{2k-1}\left(6^{20} + 1\right) \equiv (r_k)^2 \pmod{41}. \end{aligned}$$

Tóm lại là tồn tại hoán vị như yêu cầu. □

Tiếp theo, ta sẽ nêu các cách tiếp cận nhẹ nhàng hơn, cũng là ý mà tác giả "chế biến" ra bài này.

Cách 3. Dùng bổ đề: số nguyên tố $p = 3k + 2$ sẽ có tính chất $\{1^3, 2^3, \ldots, p^3\}$ là hệ thặng dư đầy đủ mod p. Khi đó, ta chọn $a_i \equiv i^3 \pmod{41}$ là xong, vì để ý rằng

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3$$

luôn là số chính phương.

Chứng minh bổ đề: Giả sử trong bộ trên có hai số $i \neq j$ sao cho $i^3 \equiv j^3 \pmod{p}$, suy ra $i^{3k} \equiv j^{3k} \pmod{p}$. Theo định lý Fermat nhỏ thì $i^{3k+1} \equiv j^{3k+1} \pmod{p}$ nên

$$i^{3k+1} \equiv j^{3k+1} = j \cdot j^{3k} \equiv j \cdot i^{3k} \pmod{p},$$

kéo theo $i^{3k}(i - j)$ chia hết cho p hay $i \equiv j \pmod{p}$, vô lý vì $i, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ và $i \neq j$. □

Cách 4. Nhận xét

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2k - 1 = k^2$$

nên cách hoán vị sau đây sẽ thỏa mãn đề bài: Xếp các số lẻ từ 1 đến 41, xếp các số chẵn từ 2 đến 40, tiếp tục xếp các số lẻ từ 43 đến 81, ... cứ như thế. □

Lời giải thứ ba cho thấy bất kỳ số nguyên tố $p = 3k + 2$ nào cũng tồn tại hoán vị như thế. Tuy nhiên, lời giải cuối cùng cho thấy, các số như thế có rất nhiều. Ta thử phân tích ề các số thỏa mãn tồn tại hoán vị như thế, tạm gọi là "số đẹp".

Theo cách giải đó, rõ ràng bất kỳ số nguyên dương lẻ $2m + 1$ nào cũng là "số đẹp". Tiếp theo, ta thấy bội của $2m + 1$ cũng đẹp, vì rõ ràng ta xếp hết $2m + 1$ số đầu xong thì cứ cộng mỗi số cho $2m+1$ rồi xếp đến các số tiếp theo, và cứ thế. Như thế, số nguyên dương không phải lũy thừa của 2 đều đẹp. Vậy còn lũy thừa của 2 thì sao?

Số 2 đẹp, xét hoán vị $1, 2$. Số $n = 2^k$ có tổng của tất cả n số là $2^{k-1}(2^k - 1)$, số này chia n dư là 2^{k-1}. Như thế thì với k chẵn, không tồn tại hoán vị thỏa mãn đề bài. Tuy nhiên, ta có nhận xét rằng nếu a đẹp thì các ước của a cũng đẹp, nhưng vì số 4 không đẹp nên tất cả các lũy thừa khác của 2 cũng thế.

Vậy nên tất cả các số đẹp cần tìm là 2 cùng tất cả các số có ước nguyên tố lẻ.

Liên quan đến tính chất của số nguyên tố $p = 3k+2$, ta có bài toán sau:

Bài toán 2. *Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 15, \\ a_{n+3} = 2a_{n+2}^3 - a_{n+1} - a_n^3 \end{cases}$. Chứng minh rằng tồn tại hai số hạng liên tiếp của dãy chia hết cho* 1019.

Lời giải. Để ý rằng dãy số tuần hoàn, và vì 1019 là số nguyên tố có dạng $3k+2$ nên nếu $x^3 \equiv y^3 \pmod{1019}$ thì suy ra $x \equiv y \pmod{1019}$. Do đó, dãy tuần hoàn từ số hạng đầu tiên.

Tính ra $a_0 = a_{-1} = 0$ thì bài toán được giải quyết. □

Liên quan đến hoán vị thỏa mãn điều kiện cho trước, ta có bài toán sau trong đề thi APMO:

Bài toán 3. *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại hoán vị $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ của $\{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho $\{a_1+1, a_2+2, \ldots, a_n+n\}$ và $\{a_1-1, a_2-2, \ldots, a_n-n\}$ cũng là hệ thặng dư đầy đủ theo modulo n.*

Lời giải. Trước hết, xét hiệu

$$0 \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} i \equiv \sum_{i=1}^{n} (a_i - i) \equiv \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \pmod{n}$$

nên n lẻ. Tiếp theo, ta cũng có

$$\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} = 2\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^2 + i^2)\right) \equiv \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} \pmod{n}$$

nên n không chia hết cho 3. Do đó $(n, 6) = 1$. Ta chỉ cần xét $a_i \equiv 2i \pmod{n}$ là thỏa mãn. □

2. Đề thi thử VMO và đáp án chi tiết

Nhằm chuẩn bị cho kỳ thi, tác giả bài viết có biên soạn hai đề thi thử theo đúng cấu trúc đề chọn HSG quốc gia các năm gần đây cùng với lời giải chi tiết, nhận xét, mở rộng. Các bài toán có tham khảo thêm của các tác giả: *thầy Vũ Đình Hòa (đề 2, bài 2a), thầy Đàm Văn Nhĩ (đề 2, bài 1b), thầy Nguyễn Minh Hà (đề 2, bài 6b), thầy Lê Bá Khánh Trình (đề 2, bài 4b), thầy Dương Châu Dinh (đề 1, bài 5b), thầy Vũ Thế Khôi (đề 2, bài 5), thầy Nguyễn Văn Linh (đề 1, bài 6b),* cùng một số đề thi thật khác. Các bài còn lại do tác giả tự biên soạn thêm để cân đối tính khó-dễ và phù hợp với thí sinh.

2.1. Đề số 1

2.1.1. Đề thi

Bài toán 1. *Cho dãy số* $(a_n), (b_n)$ *xác định bởi* $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ *và với mỗi* $n \geq 0$, *các số hạng* a_{n+1}, b_{n+1} *được xác định theo* a_n, b_n *bởi một trong hai cách*

i) $a_{n+1} = \frac{2018a_n}{2019}$, $b_{n+1} = 1 - \frac{a_n}{2019}$ *hoặc*

ii) $a_{n+1} = a_n^2$, $b_{n+1} = a_n$.

1. *Chứng minh rằng nếu* $a_0 \in (-1; 1)$ *thì dãy số* (a_n) *có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.*

2. *Giả sử* $a_{2018} \leq a_0$, *tìm giá trị lớn nhất của tổng* $S = b_1 + b_2 + \cdots + b_{2018}$.

Bài toán 2. *Cho tam giác* ABC *nhọn, không cân, nội tiếp trong đường tròn* (O). *Một đường tròn* (O') *thay đổi, luôn đi qua* B, C *và cắt các cạnh* AB, AC *theo thứ tự ở* D, E. *Gọi* D', E' *lần lượt là các điểm đối xứng với* D, E *qua trung điểm các cạnh* AB, AC.

1. *Chứng minh rằng trung điểm* $D'E'$ *luôn thuộc một đường thẳng cố định.*

2. *Trên cung nhỏ và cung lớn* BC *của* (O), *lần lượt lấy các điểm* R, S *sao cho* $(DER), (DES)$ *tiếp xúc trong với* (O). *Phân giác trong của các góc* BRC, BSC *cắt nhau ở* K. *Chứng minh rằng đường tròn* (DEK) *luôn tiếp xúc với đường thẳng* BC.

Bài toán 3. *Đa thức* $f(x)$ *hệ số thực được gọi là "đẹp" nếu có thể biểu diễn thành* $f(x) = (P(x))^3 - (Q(x))^2$, *trong đó* $P(x), Q(x)$ *là các đa thức hệ số thực.*

1. *Chứng minh rằng* $f(x) = 2018x^2 - 2019$ *là đa thức đẹp.*

2. *Hỏi có tồn tại hay không đa thức* $f(x)$ *bậc nhất là đa thức đẹp?*

Bài toán 4. *Một bảng ô vuông kích thước* 2019×2019 *được phủ kín bởi các hình: chữ* L, *vuông và chữ* Z *như bên dưới (có thể xoay hình tùy ý nhưng không được đè lên nhau).*

1. *Hỏi có thể phủ được bảng hay không nếu không sử dụng hình vuông* 2×2 *nào?*

2. *Chứng minh rằng trong mọi cách phủ, ta đều cần dùng ít nhất* 4039 *hình chữ* L.

Bài toán 5. *Cho các số thực* x, y, z *thỏa mãn đồng thời các điều kiện* $0 < z \leq y \leq x \leq 8$ *và* $3x + 4y \geq \max\left\{xy; \frac{1}{2}xyz - 8z\right\}$.

1. *Chứng minh rằng* $\frac{8}{x} + \frac{6}{y} + \frac{3}{z} \geq 3$.

2. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $P = x^5 + y^5 + z^5$.

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp đường tròn (O) có M, N lần lượt là trung điểm AB, AC và D là trung điểm cung lớn BC của (O). Giả sử K là một điểm nằm trong tam giác và thỏa mãn $\angle KAB = 2\angle KBA$, $\angle KAC = 2\angle KCA$.*

1. *a) Chứng minh rằng $KA = KD$.*
2. *Giả sử AD cắt BC ở T và TM cắt (BMC) ở R, TN cắt (BNC) ở S. Gọi P là giao điểm của KB và OM, Q là giao điểm của KC và ON. Chứng minh rằng trục đẳng phương của hai đường tròn $(TQR), (TPS)$ đi qua O.*

Bài toán 7. *Với các số nguyên a, b nguyên tố cùng nhau và $a > b > 1$, xét dãy số sau*

$$u_n = \varphi\left(a^{2n-1} + b^{2n-1}\right) \text{ với } n = 1, 2, 3, \dots$$

trong đó $\varphi(x)$ là số các số nguyên dương không vượt quá x và nguyên tố cùng nhau với x.

1. *Chứng minh rằng nếu $p > 3$ là số nguyên tố lẻ và có số hạng nào đó của dãy trên bằng $2p$ thì $a + b = 2p + 1$ hoặc $a + b = 2(2p + 1)$.*
2. *Chứng minh rằng $u_1 u_2 \dots u_{1009}$ chia hết cho $\frac{2018!}{1009!}$.*

2.1.2. Lời giải chi tiết và bình luận

Bài toán 1. *Cho dãy số $(a_n), (b_n)$ xác định bởi $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ và với mỗi $n \geq 0$, các số hạng a_{n+1}, b_{n+1} được xác định theo a_n, b_n bởi một trong hai cách*

i) $a_{n+1} = \frac{2018a_n}{2019}$, $b_{n+1} = 1 - \frac{a_n}{2019}$ hoặc

ii) $a_{n+1} = a_n^2$, $b_{n+1} = a_n$.

1. *Chứng minh rằng nếu $a_0 \in (-1; 1)$ thì dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.*
2. *Giả sử $a_{2018} \leq a_0$, tìm giá trị lớn nhất của tổng $S = b_1 + b_2 + \cdots + b_{2018}$.*

Lời giải. 1) Nếu $a_0 = 0$ thì tất cả các số hạng của dãy đều bằng 0 và rõ ràng đó cũng là giới hạn cần tìm. Nếu $a_0 \neq 0$ thì dễ thấy $a_n \neq 0, \forall n$, suy ra $c_n = |a_n| \in (0; 1)$ và

$$c_{n+1} = \frac{2018}{2019} c_n \text{ hoặc } c_{n+1} = c_n^2 \text{ với } n \geq 0.$$

Rõ ràng $c_{n+1} < c_n$ và dãy (c_n) bị chặn dưới bởi 0 nên có giới hạn, đặt là $L \in [0; 1)$. Trong hai công thức trên, ta cho $n \to +\infty$ thì $L = \frac{2018}{2019} L$ hoặc $L = L^2$.

Suy ra $L = 0$ hay $\lim c_n = \lim |a_n| = 0$, kéo theo $\lim a_n = 0$.

2) Ta thấy nếu dãy số xác định theo i) thì $b_{n+1} - a_{n+1} = 1 - a_n$, còn nếu xác định theo ii) thì

$$b_{n+1} - a_{n+1} = a_n - a_n^2 \leq 1 - a_n.$$

Do đó, trong mọi trường hợp, ta luôn có

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq 1 - a_n \Rightarrow b_{n+1} \leq 1 + (a_{n+1} - a_n).$$

Suy ra

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{2018} \leq 2018 + (a_{2018} - a_{2017}) + \cdots + (a_1 - a_0) = 2018 + a_{2018} - a_0 \leq 2018.$$

Từ đó ta có giá trị lớn nhất của S là 2018, đạt được chẳng hạn khi $a_0 = 0$ (tất cả các số hạng của (a_n) là 0, tất cả các số hạng của (b_n) là 1). □

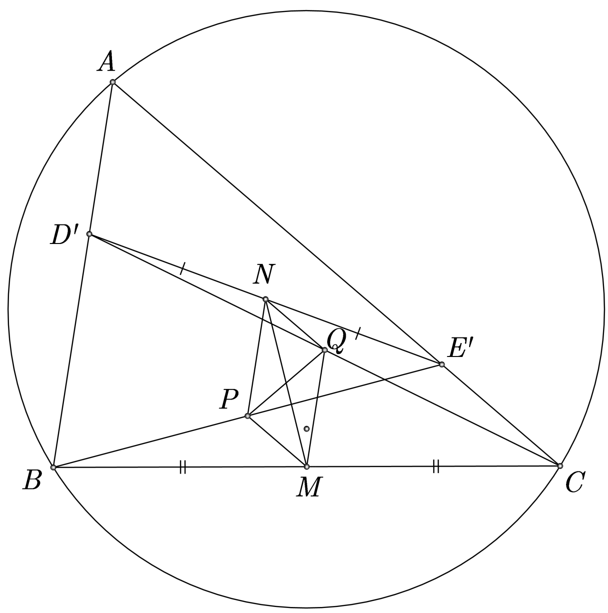
Nhận xét. *Chú ý rằng nếu* $\lim |a_n| = L \neq 0$ *thì chưa suy ra được dãy* (a_n) *hội tụ, vì nó có thể tiến đến* L *hoặc* $-L$. *Câu b tuy không khó nhưng ý tưởng khá mới mẻ, không dễ tiếp cận.*

Bài toán 2. *Cho tam giác* ABC *nhọn, không cân, nội tiếp trong đường tròn* (O). *Một đường tròn* (O') *thay đổi, luôn đi qua* B, C *và cắt các cạnh* AB, AC *theo thứ tự ở* D, E. *Gọi* D', E' *lần lượt là các điểm đối xứng với* D, E *qua trung điểm các cạnh* AB, AC.

1. *Chứng minh rằng trung điểm* $D'E'$ *luôn thuộc một đường thẳng cố định.*

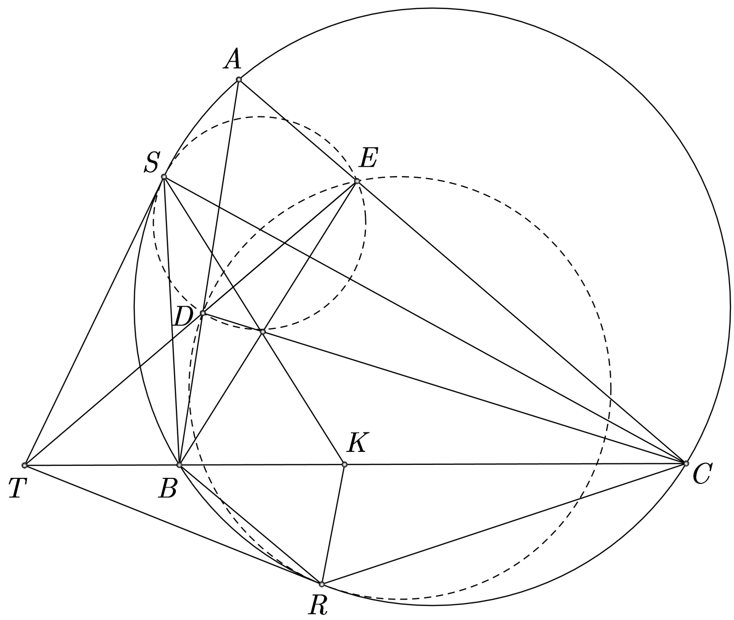
2. *Trên cung nhỏ và cung lớn* BC *của* (O), *lần lượt lấy các điểm* R, S *sao cho* $(DER), (DES)$ *tiếp xúc trong với* (O).*Phân giác trong của các góc* BRC, BSC *cắt nhau ở* K. *Chứng minh rằng đường tròn* (DEK) *luôn tiếp xúc với đường thẳng* BC.

Lời giải. 1) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm $BC, D'E', BE', CD'$ thì dễ thấy tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành. Vì MP, MQ là các đường trung bình nên $MP = \frac{1}{2}CE', MQ = \frac{1}{2}BD'$. Ta có $\frac{MP}{MQ} = \frac{E'C}{BD'} = \frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC}$, không đổi.



Tam giác MPQ có M cố định, hai cạnh song song với AC, AB và có tỷ lệ không đổi nên đường trung tuyến MN của nó sẽ có phương không đổi. Đó chính là đường cố định cần tìm.

2) Xét ba đường tròn $(DER), (O), (O')$ có các trục đẳng phương của các cặp đường tròn là $DE, BC,$ tiếp tuyến của (O) ở R nên chúng phải đồng quy tại T. Chứng minh tương tự thì tiếp tuyến của (O) ở S cũng đi qua T. Từ đó suy ra $BRCS$ là tứ giác điều hòa nên $\frac{SB}{SC} = \frac{RB}{RC}$ nên giao điểm K hai phân giác trong của $\angle BRC, \angle BSC$ thuộc BC.



Ta có $\angle TSK = \angle TSB + \angle BSK = \angle BCS + \angle CSK = \angle TKS$ nên $TS = TK$. Suy ra

$$TK^2 = TS^2 = TB \cdot TC = TD \cdot TE.$$

Điều này cho thấy (DEK) tiếp xúc với BC ở K. $\square$

Nhận xét. *Ở câu a, ta có thể chỉ ra đường cố định cần tìm chính là đường đối trung đỉnh M của tam giác $MB'C'$ với B', C' là trung điểm AC, AB. Thực ra tỷ số $\frac{BD'}{CE'}$ ở đây không nhất thiết phải bằng $\frac{AC}{AB}$, bài toán vẫn đúng nếu thay tỷ số đó bởi một hằng số bất kỳ. Ở câu b, đây là bài toán nhẹ nhàng khai thác mô hình quen thuộc về đường đối song kết hợp với tính chất tứ giác điều hòa.*

Bài toán 3. *Đa thức $f(x)$ hệ số thực được gọi là "đẹp" nếu có thể biểu diễn thành $f(x) = (P(x))^3 - (Q(x))^2$, trong đó $P(x), Q(x)$ là các đa thức hệ số thực.*

1. *Chứng minh rằng $f(x) = 2018x^2 - 2019$ là đa thức đẹp.*

2. *Hỏi có tồn tại hay không đa thức $f(x)$ bậc nhất là đa thức đẹp?*

Lời giải. 1) Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại $a, b, c \in \mathbb{R}$ ứng với $P(x) = a^2x^2 + b, Q(x) = a^3x^3 + cx$. Thay vào và khai triển, ta có

$$(3a^4b - 2a^3c)x^4 + (3a^2b^2 - c^2)x^2 + b^3 = 2018x^2 - 2019.$$

Ta đưa về hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 3a^4b - 2a^3c = 0 \\ 3a^2b^2 - c^2 = 2018 \\ b^3 = -2019 \end{cases}$$

Từ phương trình đầu ta có $ab = \frac{2}{3}c$ nên $3 \cdot \frac{4}{9}c^2 - c^2 = 2018 \Rightarrow c^2 = 6054$. Ta tính được b, c nên cũng tính được $a \neq 0$. Vậy nên $f(x) = 2018x^2 - 2019$ là đa thức đẹp.

2) Giả sử tồn tại $m, n \in \mathbb{R}$ với $m \neq 0$ sao cho $P^3(x) - Q^2(x) = mx + n$. Đặt $u = \deg P(x), v = \deg Q(x)$ thì dễ thấy $\deg P^3(x) = 3u, \deg Q^2(x) = 2v$ và $3u, 2v > 1$ nên ta cần có $3u = 2v$ (để hệ số cao nhất triệt tiêu nhau), từ đây suy ra $u < v$.

Đạo hàm hai vế, ta có $3P^2(x) \cdot P'(x) - 2Q(x) \cdot Q'(x) = m$. Do đó $2Q(x) \cdot Q'(x) + m$ chia hết cho đa thức $P^2(x)$. Theo đề thì $Q^2(x) + mx + n = P^3(x)$ cũng chia hết cho $P^2(x)$. Do đó, ta có

$$R(x) = Q(x)\left[2Q(x) \cdot Q'(x) + m\right] - 2Q'(x)\left[Q^2(x) + mx + n\right] = m \cdot Q(x) - 2Q'(x) \cdot (mx + n)$$

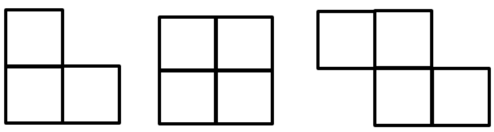
chia hết cho đa thức $P^2(x)$. Ta xét các trường hợp sau:

1. Nếu $R(x) \equiv 0$ thì $R(x) = m \cdot Q(x) - 2Q'(x) \cdot (mx + n)$. Gọi $\alpha \neq 0$ là hệ số bậc cao nhất của $Q(x)$ thì $m\alpha - 2vm\alpha = 0 \Rightarrow 2v = 1$, vô lý.
2. Nếu $\deg R(x) > 0$ thì $\deg R(x) \leq \deg Q(x) = v$, mà $R(x)$ chia hết cho $P(x)$ nên $\deg R(x) \geq 2 \deg P(x) = 2u = \frac{4}{3}v$. Điều này cũng vô lý.

Vậy nên không tồn tại đa thức bậc nhất thỏa mãn đề bài. □

Nhận xét. *Ở câu b, nếu chỉ dùng đánh giá đại số trực tiếp thì khó xử lý được bài toán một cách nhẹ nhàng mà không sa đà vào các tính toán hệ số. Việc dùng đạo hàm đã cho ta thêm một ràng buộc bổ sung cho điều kiện đề bài, giúp chỉ ra sự mâu thuẫn nhanh chóng hơn.*

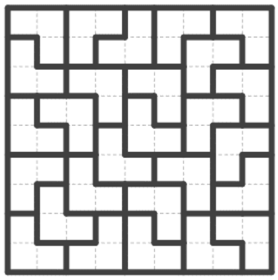
Bài toán 4. *Một bảng ô vuông kích thước 2019×2019 được phủ kín bởi các hình: chữ L, vuông và chữ Z như bên dưới (có thể xoay hình tùy ý nhưng không được đè lên nhau).*



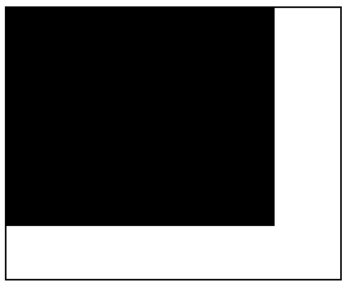
1. *Hỏi có thể phủ được bảng hay không nếu không sử dụng hình vuông 2×2 nào?*

2. *Chứng minh rằng trong mọi cách phủ, ta đều cần dùng ít nhất* 4039 *hình chữ* L.

Lời giải. 1) Câu trả lời là khẳng định. Mấu chốt là phải lát được một bảng hình vuông kích thước lẻ, cụ thể như hình bên dưới



Dùng bảng 9×9 này, ta lát được hình vuông 2007×2007 ở góc trên bên trái, còn lại phần viền trắng có bề rộng 12, ta lát bởi các hình chữ nhật kích thước 2×3 (tạo bởi hai khối L).



2) Đánh số bảng như bên dưới

3	-1	3	-1	3
-1	-1	-1	-1	-1
3	-1	3	-1	3
-1	-1	-1	-1	-1
3	-1	3	-1	3

Dễ thấy rằng hình vuông 2×2 hoặc hình chữ Z sẽ phủ lên ba số -1 và một số 3 nên tổng các số trong mỗi hình bằng 0. Còn hình chữ L sẽ phủ lên một số 3 và hai số -1, hoặc ba số -1 nên tổng các số trong mỗi hình chữ L là 1 hoặc -3. Gọi x, y lần lượt là số lượng hình chữ L mà tổng ba số trên đó là $1, -3$. Ta tính được tổng các số của bảng là

$$1010 \times (3 \times 1010 - 1 \times 1009) + 1009 \times (-1 \times 2019) = 4039.$$

Suy ra $x - 3y = 4039$. Do đó, tổng số hình chữ L là $x + y \geq x - 3y = 4039$. Ta có đpcm. $\square$

Nhận xét. *Ta thấy rằng với 2 khối chữ L (trimino) và* k $(k \in \mathbb{Z}^+)$ *khối chữ Z (tetromino), ta có thể tạo được hình chữ nhật kích thước* $(2k + 3) \times 2$.

Tuy nhiên, cần phải có một hình chữ nhật có kích thước lẻ thì câu a mới có thể giải quyết được. Người ta còn chứng minh được rằng bảng ô vuông kích thước $n \times n$ với n không chia hết cho 3, khi bỏ đi một ô bất kỳ thì đều lát được bởi các trimino.

Ở câu b, việc đánh số khéo léo như trên khiến cho việc đánh giá rất hiệu quả và nhanh gọn, nhất là việc tổng các số trên hai hình kia bằng 0.

Bài toán lát gạch dùng trimino và tetromino là các bài kinh điển, được nghiên cứu nhiều và việc dùng tô màu, đánh trọng số là các cách tiếp cận phổ biến để xử lý. Ngoài ra, đối với các domino (hình 2×1), người ta cũng xét các bài toán đếm số cách lát cho các hình đặc biệt cho trước.

Bài toán 5. *Cho các số thực x, y, z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $0 < z \leq y \leq x \leq 8$ và $3x + 4y \geq \max\left\{xy; \frac{1}{2}xyz - 8z\right\}$.*

1. *Chứng minh rằng $\frac{8}{x} + \frac{6}{y} + \frac{3}{z} \geq 3$.*

2. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^5 + y^5 + z^5$.*

Lời giải. 1) Theo giả thiết thì $3x + 4y + 8z \geq \frac{1}{2}xyz \Rightarrow \frac{3}{yz} + \frac{4}{zx} + \frac{8}{xy} \geq \frac{1}{2}$. Áp dụng bất đẳng thức $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$, ta có

$$\left(\frac{8}{x} + \frac{6}{y} + \frac{3}{z}\right)^2 \geq 3\left(\frac{48}{xy} + \frac{18}{yz} + \frac{24}{zx}\right) = 18\left(\frac{3}{yz} + \frac{4}{zx} + \frac{8}{xy}\right) \geq 9.$$

Do đó $\frac{8}{x} + \frac{6}{y} + \frac{3}{z} \geq 3$, đẳng thức xảy ra khi $x = 8, y = 6, z = 3$.

2) Ta có $\frac{8}{x} \geq 1$, $\frac{8}{x} + \frac{6}{y} \geq 2$, $\frac{8}{x} + \frac{6}{y} + \frac{3}{z} \geq 3$ nên ta dự đoán cực trị xảy ra khi $x = 8, y = 6, z = 3$. Sử dụng khai triển Abel, ta có

$$\begin{aligned}
&8^5 + 6^5 + 3^5 = x^5\left(\frac{8^5}{x^5}\right) + y^5\left(\frac{6^5}{y^5}\right) + z^5\left(\frac{3^5}{z^5}\right) \\
&= (x^5 - y^5)\left(\frac{8^5}{x^5}\right) + (y^5 - z^5)\left(\frac{8^5}{x^5} + \frac{6^5}{y^5}\right) + z^5\left(\frac{8^5}{x^5} + \frac{6^5}{y^5} + \frac{3^5}{z^5}\right) \\
&\geq (x^5 - y^5)\left(\frac{8}{x}\right)^5 + (y^5 - z^5)\left(\frac{8}{x} + \frac{6}{y}\right)^5 \cdot \frac{1}{16} + z^5\left(\frac{8}{x} + \frac{6}{y} + \frac{3}{z}\right)^5 \cdot \frac{1}{3^4} \\
&\geq x^5 - y^5 + 2(y^5 - z^5) + 3z^5 = x^5 + y^5 + z^5
\end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $8^5 + 6^5 + 3^5 = 40787$, đạt được khi $x = 8, y = 6, z = 3$. □

Nhận xét. *Tổng quát của ý 2 là $\frac{a}{x} \geq 1, \frac{a}{x} + \frac{b}{y} \geq 2, \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq 3$ và $x \geq y \geq z > 0, a \geq b \geq c > 0$ thì $x^k + y^k + z^k \leq a^k + b^k + c^k$ với mọi số nguyên dương k. Bài toán không mấy xa lạ và giải theo cách kinh điển là dùng khai triển Abel.*

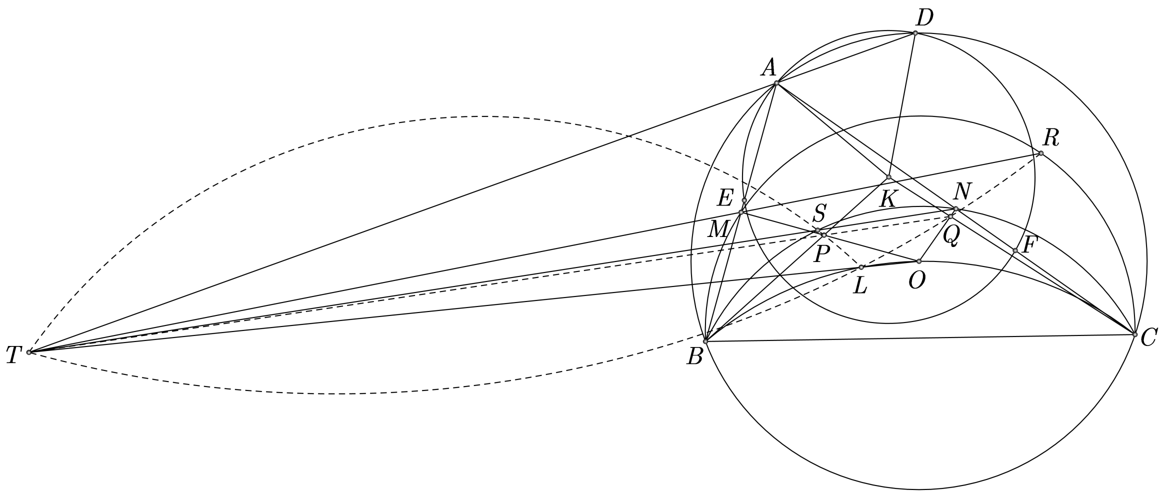
Bài toán 6. *Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp đường tròn (O) có M, N lần lượt là trung điểm AB, AC và D là trung điểm cung lớn BC của (O). Giả sử K là một điểm nằm trong tam giác và thỏa mãn $\angle KAB = 2\angle KBA$, $\angle KAC = 2\angle KCA$.*

1. *a) Chứng minh rằng $KA = KD$.*

2. *Giả sử AD cắt BC ở T và TM cắt (BMC) ở R, TN cắt (BNC) ở S. Gọi P là giao điểm của KB và OM, Q là giao điểm của KC và ON. Chứng minh rằng trục đẳng phương của hai đường tròn $(TQR), (TPS)$ đi qua O.*

Lời giải. 1) Trên AB, AC lấy các điểm E, F sao cho $KA = KD = KE = KF$ thì theo tính chất của K, ta có $\angle KAE = 2\angle KBA = \angle KEA$ nên $EK = EB$. Tương tự thì $FK = FC$.

Mặt khác $DB = DC$ và $\angle DBE = \angle DCF$ nên hai tam giác DBE, DCF bằng nhau, kéo theo $\angle DEA = \angle DFA$ nên $D \in (AEF)$. Mà K là tâm của (AEF) nên suy ra $KA = KD$.



2) Ta có $P \in OM$ nên $PA = PB$, kéo theo AP là phân giác $\angle KAB$, tương tự thì AQ là phân giác $\angle KAC$. Theo tính chất đường phân giác thì

$$\frac{PK}{PB} = \frac{AK}{AB}, \frac{QK}{QC} = \frac{AK}{AC}, \frac{TB}{TC} = \frac{AB}{AC}.$$

Từ đó, theo định lý Menelaus trong tam giác KBC, dễ thấy rằng P, Q, T thẳng hàng. Do $\angle PAK = \angle PBA, \angle QAK = \angle QCA$ nên đường thẳng KA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(ABP), (ACQ)$; suy ra $KA^2 = KP \cdot KB = KQ \cdot KC$ và $BPQC$ nội tiếp.

Gọi L là giao điểm của TO và (BOC) thì $TL \cdot TO = TB \cdot TC$. Xét phép nghịch đảo Ω tâm T, phương tích $\mathcal{P}_{T/(O)}$ thì

$$\Omega : O \to L,\ N \to S,\ Q \to P.$$

Mà O, N, Q thẳng hàng nên (SPL) đi qua tâm nghịch đảo T hay (SPT) đi qua L. Tương tự thì (SQT) cũng đi qua L nên trục đẳng phương của hai đường tròn $(SPT), (SQT)$ chính là TL đi qua O. Ta có đpcm. □

Nhận xét. *Ở bài toán trên, ta cũng thấy được cách để dựng điểm K là: cho trung trực AD cắt cung chứa góc $\frac{3}{2}\angle BAC$ dựng trên BC. Ta cũng có khoảng cách từ khoảng cách từ M, N đến hình chiếu của K xuống cạnh tương ứng thì bằng nhau.*

Bài toán 7. *Với các số nguyên a, b nguyên tố cùng nhau và $a > b > 1$, xét dãy số sau*

$$u_n = \varphi\left(a^{2n-1} + b^{2n-1}\right) \text{ với } n = 1, 2, 3, \ldots$$

trong đó $\varphi(x)$ là số các số nguyên dương không vượt quá x và nguyên tố cùng nhau với x.

1. *Chứng minh rằng nếu $p > 3$ là số nguyên tố lẻ và có số hạng nào đó của dãy trên bằng $2p$ thì $a + b = 2p + 1$ hoặc $a + b = 2(2p + 1)$.*
2. *Chứng minh rằng $u_1u_2 \ldots u_{1009}$ chia hết cho $\frac{2018!}{1009!}$.*

Lời giải. 1) Ta sẽ chứng minh nhận xét:

Nếu $\varphi(x) = 2p$ với $p > 3$ là số nguyên tố thì $x = 2p + 1$ hoặc $x = 2(2p + 1)$. Ta xét các trường hợp sau:

1. Nếu $x = 2^kq$ với q lẻ và $k \geq 2$ thì $\varphi(x) = \varphi(2^k)\varphi(q) = 2^{k-1} \cdot \varphi(q)$, mà $\varphi(q)$ chẵn với mọi $q \geq 3$,mà $v_2(2p) = 1$ nên ta buộc phải có $k = 2, q = 1$, tức là $x = 4$, không thỏa.
2. Nếu $x = 2q$ với q lẻ thì $\varphi(x) = \varphi(2)\varphi(q) = \varphi(q)$ nên ta có thể đưa về xét trường hợp $x = q$. Nếu q là hợp số, ta có các trường hợp sau
   (a) Nếu q không là lũy thừa của số nguyên tố thì có thể viết $q = q_1q_2$ với $\gcd(q_1, q_2)$ và $q_1 > 1, q_2 > 1$ là các số lẻ, kéo theo $\varphi(q) = \varphi(q_1)\varphi(q_2)$ chia hết cho 4, không thỏa.
   (b) Nếu $q = r^k$ với r là số nguyên tố lẻ, $k > 1$, thì $\varphi(q) = \varphi(r^k) = r^{k-1}(r-1)$. So sánh $r^{k-1}(r-1) = 2p$ nên $r - 1 = 2$ và $k = 2$, kéo theo $p = 3$, không thỏa.
   (c) Nếu q là số nguyên tố thì $\varphi(q) = q - 1 = 2p$, suy ra $x = q = 2p + 1$.

Tóm lại, $x = q$ hoặc $2q$, trong đó $q = 2p + 1$ là số nguyên tố. Từ đó suy ra

$$\varphi(a^{2n-1} + b^{2n-1}) = 2p \Rightarrow a^{2n-1} + b^{2n-1} = \left[\begin{array}{l} 2p+1 \\ 2(2p+1) \end{array}\right.$$

với $2p+1$ nguyên tố. Ta biết rằng nếu $n > 1$ thì $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ là hợp số vì nó chia hết cho $a + b$ nên $a^{2n-1} + b^{2n-1} = 2(2p + 1)$. Suy ra $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ chỉ có 4 ước là $1, 2, 2p + 1, 2(2p + 1)$, trong khi số này lại có ước là $a + b$ với $2 < a + b < \frac{a^{2n-1}+b^{2n-1}}{2}$, vô lý.

Do đó, ta phải có $n = 1$ và $a + b = 2p + 1 \vee a + b = 2(2p + 1)$.

2) Ta sẽ chứng minh bổ đề: Với mọi a, b nguyên tố cùng nhau và $n \in \mathbb{Z}^+$ thì $\varphi(a^n + b^n)$ chia hết cho $2n$. Thật vậy,

Số $c = 2n$ là giá trị nhỏ nhất của c để $a^c - b^c$ chia hết cho $a^n + b^n$. Vì nếu không, giả sử có $0 < k < n$ để $a^{n+k} - b^{n+k}$ chia hết cho $a^n + b^n$ thì $a^k(a^n + b^n) - b^n(a^k + b^k)$ chia hết cho $a^n + b^n$. Suy ra $b^n(a^k + b^k)$ chia hết cho $a^n + b^n$. Mà $\gcd(a, b) = 1$ nên $\gcd(b^n, a^n + b^n) = 1$, kéo theo $a^k + b^k$ chia hết cho $a^n + b^n$, vô lý.

Bằng cách tương tự, ta thấy rằng với mọi $c \in \mathbb{Z}^+$ mà $a^c - b^c$ chia hết cho $a^n - b^n$ thì $2n|c$. Mặt khác, theo định lý Euler thì

$$a^{\varphi(a^n+b^n)} \equiv 1, b^{\varphi(a^n+b^n)} \equiv 1 \ (\mathrm{mod} a^n + b^n) \Rightarrow a^{\varphi(a^n+b^n)} - b^{\varphi(a^n+b^n)}$$

cũng chia hết cho $a^n + b^n$. Điều này cho thấy $\varphi(a^n + b^n)$ chia hết cho $2n$.

Trở lại bài toán, ta có $u_1 u_2 \ldots u_{1009}$ chia hết cho

$$2^{1009} \cdot 1 \cdot 3 \cdots 2017 = \frac{2^{1009} \cdot 1009!\,(1 \cdot 3 \cdots 2017)}{1009!} = \frac{2018!}{1009!}.$$

□

Nhận xét. *Bài toán này kết hợp nhiều kết quả cũ của hàm phi Euler. Ở câu a, ta cần vận dụng khéo léo tính chất nhân tính của hàm này cũng như $v_2(2p) = 1$ để giới hạn lại các trường hợp. Ở câu b, việc chứng minh bổ đề có ý tưởng tương tự như tính chất của ord (nhưng ở đây xét cho biểu thức khá đặc biệt). Từ ý tưởng câu a, ta có thể chứng minh rằng, phương trình $\varphi(x) = 2 \cdot 3^{6k+1}$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ có đúng hai nghiệm trên tập số nguyên dương.*

2.2. Đề số 2

2.2.1. Đề thi

Bài toán 1. *Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức*

$$\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 4\sqrt{2}, \\ u_{n+2} = 4\sqrt{2}u_{n+1} - 7u_n, n \geq 0 \end{cases}$$

1. *Chứng minh rằng phương trình $u_{2018} \cdot x^4 + 2019 = u_{2018} \cdot x^2 + 4u_{2019} \cdot x$ (ẩn x) có hai nghiệm thực phân biệt thuộc miền $(0; 2\sqrt{2})$.*
2. *Tìm tất cả các số thực α sao cho dãy số (v_n) xác định bởi*

$$v_n = C_n^0 u_n + \alpha C_n^1 u_{n-1} + \alpha^2 C_n^2 u_{n-2} + \cdots + \alpha^n C_n^n u_0, \forall n \geq 0$$

có giới hạn hữu hạn.

Bài toán 2. *Cho một mảnh giấy hình đa giác đều (H) có 12 cạnh. Người ta cắt (H) thành các mảnh giấy nhỏ hơn sao cho tất cả các mảnh thu được đều là hình bình hành.*

1. *Chứng minh rằng trong các mảnh giấy đó, luôn tìm được 3 mảnh giấy có hình chữ nhật.*

2. *Hỏi số lượng mảnh giấy cắt ra được ít nhất là bao nhiêu?*

Bài toán 3. *Với các số thực m, n, giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x+m \cdot f(xy)) = f(x) + n \cdot xf(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.*

1. *Chứng minh rằng nếu f là hàm toàn ánh và $f(1) = 1$ thì phải có $m = n$.*

2. *Ứng với $m = n = 2018$, tìm tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài.*

Bài toán 4. *Trên đường tròn (O), cho hai điểm B, C cố định và A thay đổi sao cho tam giác ABC không cân. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và AI cắt BC ở D. Đường tròn (BID) cắt AB ở $E \neq B$ và đường tròn (CID) cắt AC ở $F \neq C$. Gọi M, N là giao điểm của BI, DE và CI, DF. Gọi J là giao điểm của BF, CE và T là trung điểm AJ.*

1. *Chứng minh rằng đường trung tuyến và đường cao đỉnh I của tam giác IMN luôn đi qua các điểm cố định khi A thay đổi.*

2. *Đường tròn qua E, J và tiếp xúc với AJ cắt ET ở P, đường tròn qua F, J và tiếp xúc với AJ cắt FT ở Q. Phân giác góc APJ, AQJ cắt AJ ở R, S và RB cắt SC ở X, RC cắt SB ở Y. Chứng minh rằng tâm các đường tròn $(AXY), (AMN), (APQ)$ thẳng hàng.*

Bài toán 5. *Cho n là số nguyên dương. Một con ếch nhảy theo chiều dương trên trục số, qua các điểm có tọa độ $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, bắt đầu ở 0, kết thúc ở n sao cho mỗi bước nhảy có độ dài là 1 hoặc 2. Hai đường đi của ếch được gọi là khác nhau nếu chúng có một vị trí nào đó khác nhau.*

1. *Chứng minh rằng ếch có đúng F_n đường đi khác nhau nếu ở bước đầu tiên, nó nhảy đến 1 (trong đó (F_n) là dãy Fibonacci).*

2. *Một đàn ếch gồm m con có đặc điểm là 2 con bất kỳ thì có các đường đi khác nhau nhưng trên các đường đi đó, luôn có 2 vị trí liên tiếp giống nhau. Tìm giá trị lớn nhất của m.*

Bài toán 6. *Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi A_1 là trung điểm cung BAC của (O) và IA_1 cắt BC ở A_2, cắt (O) ở A'.*

1. *Chứng minh rằng AA' đi qua một giao điểm của (I) với đường tròn đường kính IA_2.*

2. *Định nghĩa tương tự với các điểm B_2, C_2. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại một điểm nằm trên OI.*

Bài toán 7. *Cho các số nguyên dương a, b nguyên tố cùng nhau. Số nguyên dương n được gọi là "liên kết" với cặp số (a, b) nếu phương trình $ax+by = n$ có nghiệm nguyên không âm (x, y).Số nghiệm của phương trình đó được gọi là "hệ số liên kết".*

1. *Chứng minh rằng nếu số nguyên dương n thỏa mãn $6n < ab$ và n không liên kết với (a, b) thì $2n$ hoặc $3n$ liên kết với (a, b).*

2. *Giả sử $2018ab < n < 2019ab$ và n liên kết với (a, b). Chứng minh rằng hệ số liên kết của n với (a, b) chỉ có thể nhận các giá trị là2018 hoặc 2019.*

2.2.2. Lời giải chi tiết và nhận xét

Bài toán 1. *Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức*

$$\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 4\sqrt{2}, \\ u_{n+2} = 4\sqrt{2}u_{n+1} - 7u_n, n \geq 0 \end{cases}$$

1. *Chứng minh rằng phương trình $u_{2018} \cdot x^4 + 2019 = u_{2018} \cdot x^2 + 4u_{2019} \cdot x$ (ẩn x) có hai nghiệm thực phân biệt thuộc miền $(0; 2\sqrt{2})$.*

2. *Tìm tất cả các số thực α sao cho dãy số (v_n) xác định bởi*

$$v_n = C_n^0 u_n + \alpha C_n^1 u_{n-1} + \alpha^2 C_n^2 u_{n-2} + \cdots + \alpha^n C_n^n u_0, \forall n \geq 0$$

có giới hạn hữu hạn.

Lời giải. 1) Đặt $c_1 = 1 + 2\sqrt{2}, c_2 = -1 + 2\sqrt{2}$ thì dễ dàng có được $u_n = c_1^n + c_2^n$. Từ đó, ta chứng minh được rằng dãy $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ đồng biến. Suy ra

$$\frac{u_1}{u_0} < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} \Rightarrow 2\sqrt{2} < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 + 2\sqrt{2}$$

với mọi $n \geq 1$. Xét hàm số $f(x) = u_{2018} \cdot x^4 + 2019 - u_{2018} \cdot x^2 - 4u_{2019} \cdot x$ thì $f(0) > 0, f(\sqrt{2}) < 0, f(2\sqrt{2}) > 0$ nên theo tính chất của hàm liên tục, ta có $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt. 2) Dùng nhị thức Newton, thay công thức tổng quát của (u_n) vào (v_n) thì

$$\begin{aligned} v_n &= C_n^0(c_1^n + c_2^n) + \alpha C_n^1(c_1^{n-1} + c_2^{n-1}) + \alpha^2 C_n^2(c_1^{n-2} + c_2^{n-2}) + \cdots + \alpha^n C_n^n(c_1^0 + c_2^0) \\ &= (c_1 + \alpha)^n + (c_2 + \alpha)^n \end{aligned}$$

Nếu $|c_1 + \alpha| > 1, |c_2 + \alpha| > 1$ thì dễ thấy $\lim v_n = +\infty$. Do đó, ta cần có

$$|c_1 + \alpha| \leq 1, |c_2 + \alpha| \leq 1$$

và tìm được $\alpha = -2\sqrt{2}$. Thử lại ta thấy dãy số sẽ có dạng $a_n = 1 + (-1)^n$, không hội tụ.

Vậy không tồn tại số α thỏa mãn đề bài. □

Nhận xét. *Ta có thể phát biểu tổng quát thành: nếu $a, b \in \mathbb{R}$ và $0 < a^2 + 4b \leq 4$, xét dãy số (u_n) với công thức $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ thì luôn tồn tại số α để (v_n) xác định như trên hội tụ. Ngoài ra, $f''(x) = 12u_{2018}x^2 - 2u_{2018}$ và $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{6}}$, thay vào khảo sát hàm thì thấy $f'(x) = 0$ chỉ có đúng một nghiệm trên$(0; 2\sqrt{2})$ và kéo theo $f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm.*

Bài toán 2. *Cho một mảnh giấy hình đa giác đều (H) có 12 cạnh. Người ta cắt (H) thành các mảnh giấy nhỏ hơn sao cho tất cả các mảnh thu được đều là hình bình hành.*

1. *Chứng minh rằng trong các mảnh giấy đó, luôn tìm được 3 mảnh giấy có hình chữ nhật.*

2. *Hỏi số lượng mảnh giấy cắt ra được ít nhất là bao nhiêu?*

Lời giải. Nhận xét: Hai hình bình hành được xếp kề nhau khi và chỉ khi chúng có một cặp cặp song song. Ngoài ra, từ một cạnh bất kỳ trong 12 cạnh của đa giác, ta có thể đi đến các cạnh còn lại thông qua một dãy các hình bình hành liên tiếp kề nhau.

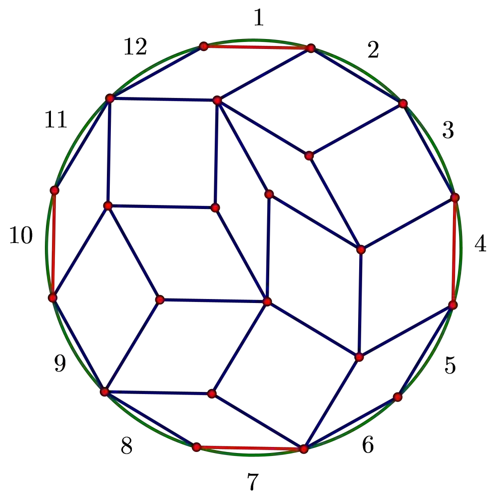
1) Từ nhận xét trên, suy ra rằng từ cạnh $1 \to 7$, có một dãy các hình bình hành được xếp liền nhau và mỗi hình đều có một cặp cạnh song song với $1, 7$. Tương tự cũng có một dãy các hình bình hành ứng với cặp cạnh $4 \to 10$.

Tuy nhiên, ta thấy rằng cặp cạnh $(1, 7)$ và $(4, 10)$ của (H) là vuông góc nhau; và hai dãy hình bình hành ở trên phải giao nhau. Do đó, hình bình hành "giao điểm" đó chính là hình chữ nhật. Tương tự với các hướng

$$(2, 8), (5, 11) \text{ và } (3, 9), (6, 12).$$

Do đó, có ít nhất 3 hình chữ nhật trong mọi cách phân hoạch.

2) Cũng theo nhận xét, mỗi cặp hướng sinh ra bởi hai cạnh không song song (i, j) với $i, j \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ và $i < j$ đều ứng với một hình bình hành nào đó trong cách phân hoạch. Do đó, số miền ít nhất cần dùng là $C_6^2 = 15$. Vậy số mảnh giấy ít nhất là 15 (như hình minh họa bên dưới).



□

Nhận xét. *Bài toán hoàn toàn có thể tổng quát $12 \to 4n$. Ngoài ra, bằng việc đếm bằng hai cách tổng các góc trong của miền, hoặc dùng công thức Euler cho đồ thị phẳng (planar graph), ta có thể chỉ ra số điểm bên trong đa giác khi cực trị xảy ra là 10.*

Bài toán 3. *Với các số thực m, n, giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x+m \cdot f(xy)) = f(x) + n \cdot xf(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.*

1. *Chứng minh rằng nếu f là hàm toàn ánh và $f(1) = 1$ thì phải có $m = n$.*
2. *Ứng với $m = n = 2018$, tìm tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài.*

Lời giải. 1) Trước hết, ta thấy nếu $m = 0$ thì $n \cdot xf(y) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$, kéo theo $n = 0$. Còn nếu $n = 0$ thì $f(x + m \cdot f(x)f(y)) = f(x)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Nếu $m \neq 0$ thì xét x_0 sao cho $f(x_0) \neq 0$, chọn y để $f(y) = -\frac{x_0}{f(x_0)m}$ thay vào, ta có $f(0) = f(x_0)$, kéo theo $f(x)$ là hàm hằng, không thỏa mãn tính chất toàn ánh. Điều này cho thấy $m = 0$.

Cuối cùng, xét $mn \neq 0$. Gọi x_0 là số thực thỏa mãn $f(x_0) = 0$ thì cho $x = x_0$, ta có $f(x_0 + m \cdot f(x_0)) = f(x_0) + n \cdot x_0 f(1) \Rightarrow x_0 = 0$ hay $f(0) = 0$. Thay $x = 1$ vào đề bài, ta có $f(1 + mf(y)) = 1 + nf(y)$ nên f tuyến tính, mà $f(0) = 0, f(1) = 1$ kéo theo $f(x) = x$, thay vào thì có ngay $m = n$.

2) Để dễ biến đổi, thay vì viết $m = n = 2018$, ta viết

$$f(x + m \cdot f(xy)) = f(x) + m \cdot xf(y).$$

Cho $x = y = -\frac{1}{m}$, ta có $f\left(-\frac{1}{m} + m \cdot f\left(\frac{1}{m^2}\right)\right) = 0$ nên tồn tại u để $f(u) = 0$. $(*)$

Thay $x = u, y = 1$, ta có $0 = muf(1) \Rightarrow uf(1) = 0$. Ta xét hai trường hợp:

1. Nếu $f(1) = 0$ thì thay $x = \frac{1}{y}, y \neq 0$, ta có $f(y) = 0, \forall y \neq 0$. Tiếp tục thay $y = 0$ thì $f(x + mf(0)) = f(x) + m \cdot xf(0)$. Chọn $x \neq 0, x \neq -mf(0)$ thì dễ dàng có được $f(0) = 0$ nên ta có $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Nếu $f(1) \neq 0$ thì $u = 0$ hay $f(0) = 0$. Thay vào $(*)$, ta có $f\left(\frac{1}{m^2}\right) = \frac{1}{m^2}$.

   Với $x, y \neq 0$, đặt $z = x + myf\left(\frac{x}{m^2 y}\right)$ thì trong đề bài, thay $x \to \frac{x}{y}, y \to \frac{1}{m^2}$, ta có

   $$f\left(\frac{x}{y} + mf\left(\frac{x}{m^2 y}\right)\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{2y} \text{ hay } f\left(\frac{z}{y}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{2y}.$$

   Thay $x \to y, y \to \frac{x}{y}$, ta có

   $$f(y + mf(x)) = f(y) + myf\left(\frac{x}{y}\right).$$

   Cuối cùng, thay $x \to y, y \to \frac{z}{y}$ ta có

   $$f(y + mf(z)) = f(y) + myf\left(\frac{z}{y}\right) = f(y) + myf\left(\frac{x}{y}\right) + x.$$

   Do đó $f(y + mf(z)) = f(y + mf(x)) + x$. Thay $y = -mf(x)$ thì

   $$f(-mf(x) + mf(z)) = x$$

   nên f toàn ánh. Thay $x \to 1, y \to x$ thì

   $$f(1 + m \cdot f(x)) = f(1) + m \cdot f(x).$$

   Vì f toàn ánh nên đặt $t = mf(x) + 1$, ta có $f(t) = t + f(1) - 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Thay vào đề bài, ta có $f(1) = 1$ nên $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tất cả các hàm cần tìm là $f(x) = 0, f(x) = x$. □

Nhận xét. *Bài toán gốc được lấy từ tạp chí AMM của Mỹ, năm 2003, gồm hai bài toán PTH của tác giả người Trung Quốc đề nghị: Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn một trong hai điều kiện sau:*

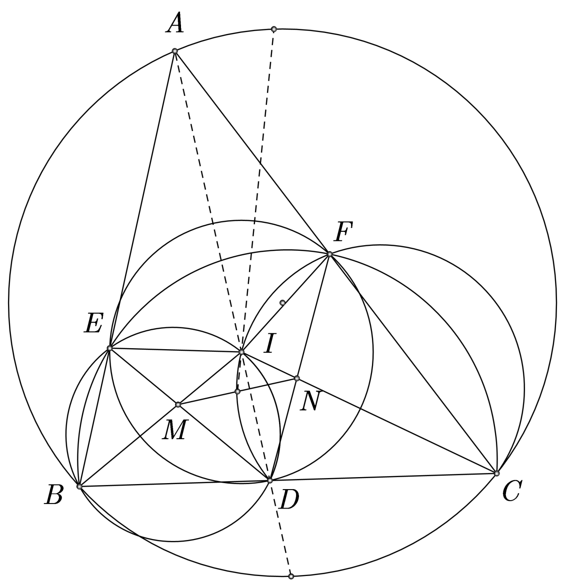
1. $f(x + f(x)f(y)) = f(x) + xf(y)$ *với* $x, y \in \mathbb{R}$.
2. $f(x + f(xy)) = f(x) + xf(y)$ *với* $x, y \in \mathbb{R}$.

Đây là hai bài toán hay và khó, cần vận dụng khéo léo các kỹ thuật "thế liên tiếp". Câu a đã được đề cập trước đó dưới hình thức $f(x + 2f(x)f(y)) = f(x) + 2xf(y)$ và có thể giải tương tự đáp án. Tuy nhiên, câu b khó hơn hẳn khi thay $1 \to 2018$ (giải theo cách dùng điểm bất động của đáp án trên AMM cũng không thực hiện được). Kỹ thuật biến đổi ở trên khá ấn tượng, mới lạ và đã xử lý được triệt để bài toán này.

Bài toán 4. *Trên đường tròn (O), cho hai điểm B, C cố định và A thay đổi sao cho tam giác ABC không cân. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và AI cắt BC ở D. Đường tròn (BID) cắt AB ở $E \neq B$ và đường tròn (CID) cắt AC ở $F \neq C$. Gọi M, N là giao điểm của BI, DE và CI, DF. Gọi J là giao điểm của BF, CE và T là trung điểm AJ.*

1. *Chứng minh rằng đường trung tuyến và đường cao đỉnh I của tam giác IMN luôn đi qua các điểm cố định khi A thay đổi.*
2. *Đường tròn qua E, J và tiếp xúc với AJ cắt ET ở P, đường tròn qua F, J và tiếp xúc với AJ cắt FT ở Q. Phân giác góc APJ, AQJ cắt AJ ở R, S và RB cắt SC ở X, RC cắt SB ở Y. Chứng minh rằng tâm các đường tròn $(AXY), (AMN), (APQ)$ thẳng hàng.*

Lời giải. 1) Do tứ giác $BDIE$ nội tiếp và có BI là phân giác góc DBE nên $ID = IE$, tương tự thì $ID = IF$. Suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp DEF.



Bằng tam giác đồng dạng, dễ dàng có

$$ID^2 = IM \cdot IB = IN \cdot IC$$

nên tứ giác $BMNC$ nội tiếp. Khi đó, MN là đối song của IBC nên trung tuyến của IMN là đối trung của IBC và sẽ đi qua giao điểm hai tiếp tuyến của (IBC) ở B, C; cũng chính là trung điểm cung lớn BAC của (O). Mặt khác, đường cao đỉnh I của IMN sẽ đi qua tâm của IMN (theo tính chất đẳng giác), chính là trung điểm cung nhỏ BC của (O).

2) Trước hết ta thấy rằng $TA^2 = TJ^2 = TE \cdot TP$ nên theo tính chất quen thuộc về điểm Humpty trong tam giác APJ thì

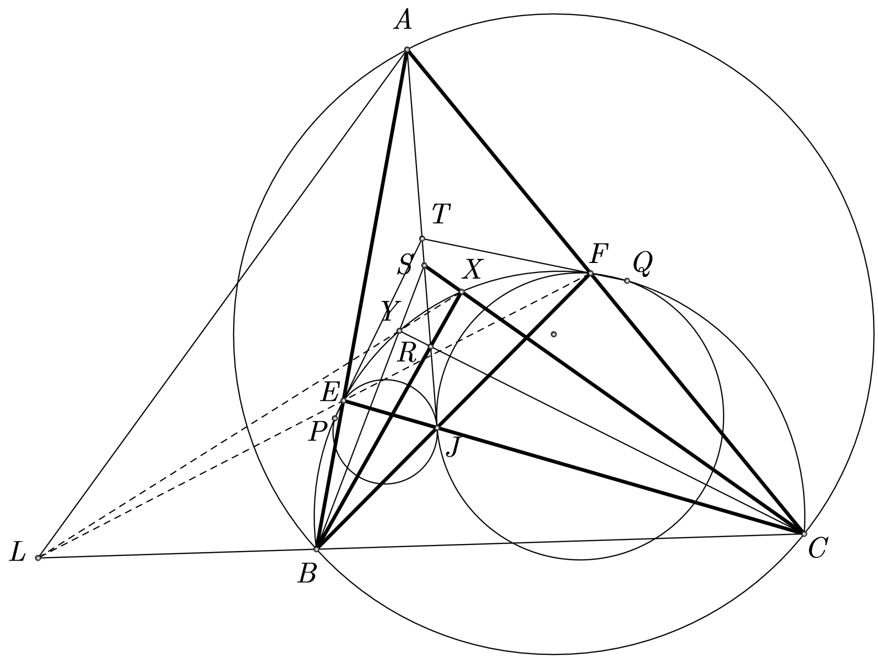
$$\frac{EA}{EJ} = \frac{PA}{PJ} = \frac{RA}{RJ}$$

nên ER là phân giác $\angle AEJ$. Tương tự thì FS là phân giác $\angle AFJ$. Theo câu a thì dễ thấy $AE \cdot AB = AI \cdot AD = AF \cdot AC$ nên tứ giác $BEFC$ nội tiếp trong đường tròn (O'). Ta sẽ chứng minh rằng $X, Y \in (O')$.

Để ý rằng $\angle ABJ = \angle ACJ$, mà muốn $X \in (O')$ thì cần có $\angle RBJ = \angle SCA, \angle RBA = \angle SCJ$. Bổ đề: cho góc $x + y = x' + y' \leq 90^\circ$ và $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin x'}{\sin y'}$ thì $x = x', y = y'$ (chứng minh bằng cách dựng cặp tam giác đồng dạng c-g-c).

Theo bổ đề, ta chỉ cần chỉ ra rằng

$$\frac{\sin \angle RBJ}{\sin \angle RBA} = \frac{\sin \angle SCA}{\sin \angle SCJ}.$$



Ta có

$$\frac{EJ}{EA} = \frac{RJ}{RA} = \frac{S_{BRJ}}{S_{BRA}} = \frac{BJ \cdot \sin \angle RBJ}{BA \cdot \sin \angle RBA} \Rightarrow \frac{\sin \angle RBJ}{\sin \angle RBA} = \frac{EJ}{EA} \cdot \frac{BA}{BJ}.$$

Tương tự thì
$$\frac{\sin \angle SCA}{\sin \angle SCJ} = \frac{FA}{FJ} \cdot \frac{CJ}{CA}$$
và ta cần có $\frac{EJ}{EA} \cdot \frac{BA}{BJ} = \frac{FA}{FJ} \cdot \frac{CJ}{CA} \Leftrightarrow \frac{AB \cdot AC}{AE \cdot AF} = \frac{BJ}{FJ} \cdot \frac{CJ}{EJ}$. Tuy nhiên, vì hai cặp tam giác ABF, ACE và BJC, EJF đồng dạng nên đẳng thức cuối đúng. Từ tính chất của tỷ số kép dễ thấy rằng XY, EF, BC đồng quy. Theo tính chất phương tích thì MN, EF, BC đồng quy. Ngoài ra, cũng theo tính chất Humpty thì

$$\angle APJ = 180^\circ - \angle AEJ = \angle 180^\circ - \angle AFJ$$

nên $APJF$ nội tiếp. Tương tự thì $AQJE$ cũng nội tiếp, khi đó xét trục đẳng phương của $(APJF), (AQJE)$ và (O') thì AJ, PF, QE đồng quy.

Lại dùng tỷ số kép thì suy ra EF, PQ, BC đồng quy. Do đó, BC, EF, PQ, XY, MN đồng quy. Lấy giao điểm của $(AEF), (O)$ là G là cả ba đường tròn $(APQ), (AMN), (AXY)$ đều đi qua cả A lẫn G; đồng nghĩa với việc tâm của chúng thẳng hàng. Ta có đpcm. □

Nhận xét. *Bài toán vẫn đúng nếu thay EF là đối song bất kỳ của ABC. Ở đoạn chứng minh $X, Y \in (O)$, ta có thể dùng phép biến hình như sau: Lấy U là giao điểm của phân giác góc BPC với (O) thì P là tâm vị tự quay biến $B \to R, U \to A$ nên bằng biến đổi góc suy ra BR, UA cắt nhau trên (O'); tương tự thì CS, UA cũng cắt nhau trên (O') nên $X \in (O')$.*

Hãy thử giải lại câu a khi thay I, D bởi trực tâm và chân đường cao. Đây lại là bài toán hay và khó, không tương tự như bài đã giải!

Bài toán 5. *Cho n là số nguyên dương. Một con ếch nhảy theo chiều dương trên trục số, qua các điểm có tọa độ $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, bắt đầu ở 0, kết thúc ở n sao cho mỗi bước nhảy có độ dài là 1 hoặc 2. Hai đường đi của ếch được gọi là khác nhau nếu chúng có một vị trí nào đó khác nhau.*

1. *Chứng minh rằng ếch có đúng F_n đường đi khác nhau nếu ở bước đầu tiên, nó nhảy đến 1 (trong đó (F_n) là dãy Fibonacci).*
2. *Một đàn ếch gồm m con có đặc điểm là 2 con bất kỳ thì có các đường đi khác nhau nhưng trên các đường đi đó, luôn có 2 vị trí liên tiếp giống nhau. Tìm giá trị lớn nhất của m.*

Lời giải. 1) Gọi a_n là số cách nhảy của ếch thì rõ ràng $a_1 = a_2 = 1$.

Nếu ở bước cuối cùng, ếch nhảy bước độ dài 1 thì trước đó, nó đã ở vị trí $n-1$ với số cách nhảy là a_{n-1}. Tương tự nếu ếch nhảy bước độ dài 2 thì trước đó, nó có a_{n-2} cách nhảy. Suy ra $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ và dễ thấy $a_n = F_n$ là số hạng thứ n của dãy Fibonacci.

2) Gọi Ω là tập hợp các cách nhảy của đàn ếch, Ω_0 là tập hợp cách nhảy của đàn ếch theo kiểu của câu a. Tiếp tục gọi $S_1 = \Omega \cap \Omega_0$ và $S_2 = \Omega \backslash S_1$. Xét một cách nhảy $s \in S_2$ thì rõ ràng ở bước đầu tiên, ếch nhảy đến số 2. Ta chia các số thuộc s thành các nhóm có dạng như bên dưới (chú ý rằng số cuối của nhóm trước vẫn dùng cho số đầu của nhóm sau):

(I) gồm các bộ số $(m, m+2, m+3, \ldots, m+2k)$: trừ số đầu thì các số sau liên tiếp và kết thúc bởi số cùng tính chẵn lẻ với số đầu.

(II) gồm các bộ số $(m, m+2, m+3, \ldots, m+2k+1)$: tương tự trên nhưng số cuối lại khác tính chẵn lẻ với số đầu.

Ta xét quy tắc biến đổi f như sau:

(I') thu được từ (I) với dạng $(m, m+1, m+2, m+4, m+6, \ldots, m+2k)$.

(II') thu được từ (II) với dạng $(m, m+1, m+3, m+5, \ldots, m+2k+1)$.

Sau đó, nối các nhóm vừa biến đổi để thu được $f(s)$. Rõ ràng với mọi $s \in S_2$ thì $f(s) \in \Omega_0$. Chẳng hạn

$$\begin{aligned}(0,2,3,5,6,7,9,10,11,12) &\xrightarrow{(I),(II)} [0,2,3],[3,5,6,7],[7,9,10,11,12]\\ &\xrightarrow{(I'),(II')} [0,1,3],[3,4,5,7],[7,8,10,12]\\ &\xrightarrow{f(s)} (0,1,3,4,5,7,8,10,12)\end{aligned}$$

Ta thấy rằng như cách biến đổi này thì $s, f(s)$ sẽ không có hai vị trí liên tiếp nào giống nhau, do đó $f(s) \notin \Omega$. Suy ra $f(S_2) \cap S_1 = \varnothing$.

Ngoài ra, nếu $s_1 \neq s_2$ thì rõ ràng $f(s_1) \neq f(s_2)$ nên f là một đơn ánh. Do đó $|\Omega| = |S_1| + |S_2| \leq |S_1| + |f(S_2)| \leq |\Omega_0|$. Ta có đpcm. $\square$

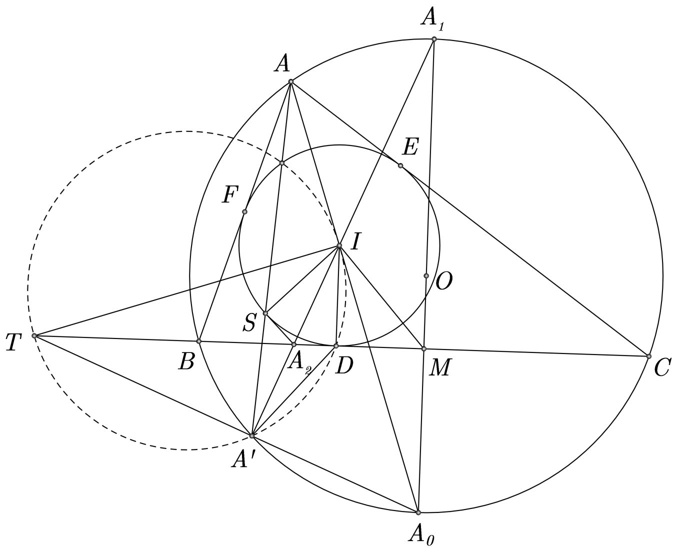
Nhận xét. *Câu a nhẹ nhàng và mang tính định hướng cho câu b (vì rõ ràng các cách nhảy như thế thỏa mãn ràng buộc là có hai bước liên tiếp giống nhau).*

Ở phần chứng minh cực trị, ta đã khéo léo tận dụng được đặc điểm của bước nhảy độ dài $1, 2$ để thiết lập được ánh xạ, từ đó ước lượng được số phần tử của các tập hợp. Bài toán cũng có thể dùng quy nạp kết hợp với phản chứng nhưng xử lý dài dòng hơn và không dễ để lập luận triệt để được. Đây là ý khó nhất của đề thi này.

Bài toán 6. *Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi A_1 là trung điểm cung BAC của (O) và IA_1 cắt BC ở A_2, cắt (O) ở A'.*

1. *Chứng minh rằng AA' đi qua một giao điểm của (I) với đường tròn đường kính IA_2.*
2. *Định nghĩa tương tự với các điểm B_2, C_2. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại một điểm nằm trên OI.*

Lời giải. 1) Gọi A_0 là trung điểm cung nhỏ BC của (O) và $A_0A' \cap BC = T$. Bằng tam giác đồng dạng, ta có $A_0A' \cdot A_0T = A_0I^2$ nên $\angle TIA_0 = 90^\circ$. Gọi M là trung điểm BC thì $TIMA_0$ nội tiếp. Ta cũng có $\angle A_0A'I = 90^\circ$ nên $TIDA'$ nội tiếp.



Gọi D, E, F là tiếp điểm của (I) lên BC, CA, AB và S là giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính IA_2 với (I) thì A_2S tiếp xúc (I). Do đó $IS = ID, A_2S = A_2D$ và

$$\angle SA'A_2 = \angle DA'A_2 = \angle DA'I = \angle DTI = \angle MTI = \angle MA_0I = \angle AA_0A_1 = \angle AA'A_2.$$

Do đó, A, S, A' thẳng hàng.

2) Ta sẽ chứng minh rằng AA_2 đi qua chân đường cao D' của D lên EF. Thật vậy,

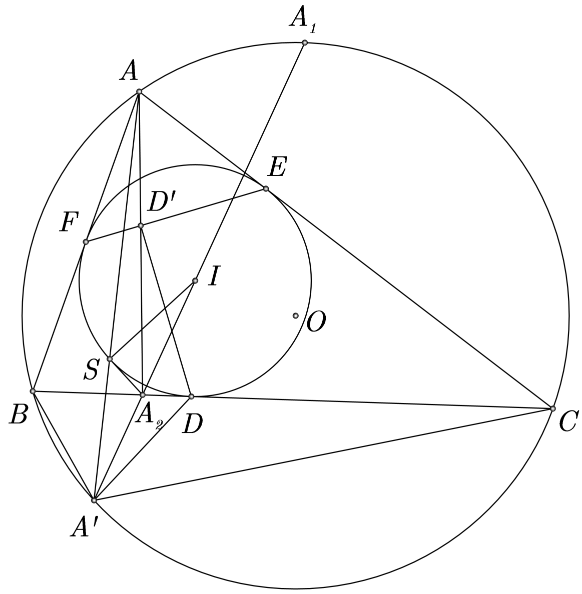
Ta có $\frac{A_2B}{A_2C} = \frac{A'B}{A'C} = \frac{TB}{TC} = \frac{IB^2}{IC^2}$ (do TI tiếp xúc (BIC)). Ngoài ra, theo kết quả quen thuộc về hàng điểm điều hòa thì $D'D$ là phân giác của $\angle BD'C$ nên dễ dàng biến đổi góc thu được hai tam giác BFD', CED' đồng dạng. Do đó $\frac{D'F}{D'E} = \frac{BF}{CE} = \frac{BD}{CD}$. Ta có tỷ số

$$\frac{S_{ABD'}}{S_{ACD'}} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle BAD'}{\sin \angle CAD'} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{D'F}{D'E} = \frac{AB \cdot BD}{AC \cdot CD} = \frac{\sin C}{\sin B} \cdot \frac{\tan \frac{C}{2}}{\tan \frac{B}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{C}{2}}{\sin^2 \frac{B}{2}} = \frac{IB^2}{IC^2}$$

nên AD' đi qua A_2. Nhận xét được chứng minh.

Gọi E', F' lần lượt là chân đường cao kẻ từ E, F trong tam giác ABC thì tương tự, ta cũng có $E' \in BB_2, F' \in CC_2$. Ta có $E'F' \perp ID$, mà $BC \perp ID$ nên $E'F' \parallel BC$.

Tương tự ta có $F'D' \perp CA, D'E' \perp AB$ nên hai tam giác $ABC, D'E'F'$ có các cạnh đôi một song song nên tồn tại một phép vị tự Ω tâm J biến $ABC \to D'E'F'$; kéo theo AD', BE', CF' đồng quy ở J.



Ngoài ra, $\Omega : O \to O'$ là tâm ngoại tiếp tam giác $D'E'F'$, cũng là tâm Euler DEF nên $J \in OO'$. Hơn nữa, ta có kết quả quen thuộc: OI là đường thẳng Euler của tam giác DEF nên $O' \in OI$. Kết hợp lại, ta có $J \in OI$. Mà $AD' \equiv AA_2, BB' \equiv BB_2, CC' \equiv CC_2$ nên AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại một điểm trên OI. □

Nhận xét. *Ở câu a, ta có thể sử dụng bổ đề sau: Cho hai điểm M, N thay đổi trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC sao cho $(MN, BC) = -1$. Kẻ tiếp tuyến MM', NN' đến đường tròn nội tiếp (I) của ABC thì $M'N'$ đi qua A.*

Chứng minh: Gọi D, E, F là tiếp điểm của (I) lên BC, CA, AB. Chiếu vuông góc D vào chùm $I(MN, BC)$, ta được $D(M'N', FE) = -1$ nên tứ giác $M'EN'F$ điều hòa nên $M'N'$ qua A. Ở câu b, ta kết hợp nhiều phép biến hình và vài kết quả lại với nhau mới xử lý trọn vẹn được.

Bài toán 7. *Cho các số nguyên dương a, b nguyên tố cùng nhau. Số nguyên dương n được gọi là "liên kết" với cặp số (a, b) nếu phương trình $ax+by = n$ có nghiệm nguyên không âm (x, y).Số nghiệm của phương trình đó được gọi là "hệ số liên kết".*

1. *Chứng minh rằng nếu số nguyên dương n thỏa mãn $6n < ab$ và n không liên kết với (a, b) thì $2n$ hoặc $3n$ liên kết với (a, b).*

2. *Giả sử $2018ab < n < 2019ab$ và n liên kết với (a, b). Chứng minh rằng hệ số liên kết của n với (a, b) chỉ có thể nhận các giá trị là 2018 hoặc 2019.*

Lời giải. 1) Ta sẽ chứng minh bổ đề: Nếu n không liên kết với (a, b) thì $ab - n$ liên kết với (a, b). Thật vậy,

Ta biết rằng phương trình $ax + by = n$ có họ nghiệm là $(x, y) = (x_0 + bt, y_0 - at)$ với $t \in \mathbb{Z}$ và (x_0, y_0) là nghiệm cơ sở. Khi đó $-b < x_0 \le b, \ -a \le y_0 < a$ và x_0, y_0 không thể cùng âm. Giả sử rằng $x_0 \ge 0$ thì $y_0 < 0$ do $ax + by = n$ không có nghiệm tự nhiên.

Khi đó $ab - n = a(b - x_0) + b(-y_0)$ với $b - x_0 > 0, -y_0 > 0$ nên $(b - x_0, -y_0)$ thỏa mãn; điều này chứng tỏ $ab - n$ liên kết với (a, b). Nhận xét được chứng minh.

Từ nhận xét trên, ta thấy số nguyên dương n không liên kết với (a, b) có thể viết dưới dạng $n = ab - pa - qb$ với $p, q \in \mathbb{Z}^+$. Vì $n < \frac{ab}{6}$ nên $\frac{p}{b} + \frac{q}{a} > \frac{5}{6}$.Giả sử rằng $\frac{p}{b} \geq \frac{q}{a}$ thì $\frac{p}{b} \geq \frac{5}{12} > \frac{1}{3}$. Ta xét hai trường hợp:

- Nếu $\frac{p}{b} > \frac{1}{2}$ thì $2p - b > 0$ nên $ab - 2(ab - pa - qb) = a(2p - b) + 2qb$.
- Ngược lại nếu $\frac{p}{b} \leq \frac{1}{2}$ thì $\frac{q}{a} > \frac{1}{3}$, suy ra $ab - 3(ab - pa - qb) = a(3p - b) + b(3q - a)$.

Do đó, $2n$ hoặc $3n$ liên kết với (a, b).

2) Ta chứng minh bài toán tổng quát để chỉ ra số nghiệm của phương trình $ax + by = n$ với $mab < n < (m + 1)ab$, trong đó $m \in \mathbb{N}$ bằng m hoặc $m + 1$. $(*)$

Ta lại tiếp tục chứng minh hai bổ đề quen thuộc khác:

1. Mọi số $n > ab - a - b$ đều liên kết với (a, b).

   Thật vậy, vì $(a, b) = 1$ nên$\{n, n - b, n - 2b, \dots, n - (a - 1)b\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ modulo a. Do đó, tồn tại y để $a|n - yb$ và đặt $ax = n - yb$. Nếu $x \geq 0$ thì cặp số (x, y) thỏa mãn. Ngược lại, $x < 0$ thì $n - (a - 1)b \leq n - yb \leq ax \leq -a$ nên $n \leq ab - a - b$, mâu thuẫn. Bổ đề được chứng minh.

2. Nếu $(a, b) = 1$ thì tồn tại duy nhất một cách viết $n = ax + by$ với $0 \leq x < b$.

   Thật vậy, theo định lý Bezout thì tồn tại $x, y \in \mathbb{Z}$ để $n = ax + by$, viết $x = bq + x'$ với $0 \leq x' < b$. Khi đó, $n = a(bq + x') + by = ax' + b(aq + y)$. Ngoài ra, nếu có hai cách viết $n = ax_1 + by_1 = ax_2 + by_2$ thì $a(x_1 - x_2) = b(y_2 - y_1)$ chia hết cho b, kéo theo $x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

Trở lại bài toán, ta sẽ chứng minh $(*)$ bằng quy nạp.

Với $m = 0$, ta có $0 < n < ab$ nên hiển nhiên số cách biểu diễn là 0 hoặc 1; tùy thuộc vào n có liên kết với (a, b) hay không. Giả sử $(*)$ đúng với $m = k \geq 0$, xét số $k + 1$ với điều kiện $(k + 1)ab < n < (k + 2)ab$. Theo bổ đề (1) thì tồn tại cách biểu diễn $n = ax + by$ với $x, y \geq 0$.

- Nếu $x < b$ thì chỉ có 1 cách biểu diễn theo bổ đề (2).
- Nếu $x > b$ thì đặt $x = x' + b$ và đưa về $ax' + by = n - ab$. Vì $kab < n - ab < (k + 1)ab$ nên áp dụng giả thiết quy nạp, ta thấy số cách biểu diễn ở trên là k hoặc $k + 1$.

Tóm lại, số nghiệm sẽ là $k + 1$ hoặc $k + 2$, khẳng định $(*)$ đúng với $k + 1$ nên theo nguyên lý quy nạp, $(*)$ được chứng minh. Thay $k = 2018$, ta có hệ số liên kết bằng 2018 hoặc 2019. $\square$

Nhận xét. *Lớp bài toán về biểu diễn số này còn có tên gọi là bài toán chia đồng xu Frobenius hay bài toán Sylvester; ở đây, ta có các kết quả đẹp về việc ước lượng số cách biểu diễn đó. Các bổ đề dùng trong bài tuy được chứng minh nhẹ nhàng nhưng xử lý dạng toán này rất hiệu quả.*

TRƯỜNG ĐÔNG TOÁN HỌC MIỀN NAM NĂM 2018 VÀ NHỮNG BÀI TOÁN HAY

Nguyễn Trần Hữu Thịnh, Phạm Quốc Thắng
Nguyễn Trường Hải, Võ Thành Đạt
(Trường Đại học Khoa học tự nhiên, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)
Trần Bá Đạt
(Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh)

GIỚI THIỆU

Trường Đông Toán học miền Nam năm 2018 được tổ chức tại Trường Phổ thông năng khiếu, ĐHQG TP.HCM. Đây là hoạt động được tổ chức nhằm tạo điều kiện cho các đội tuyển Toán học của các tỉnh Miền Nam Trung Bộ, Nam Bộ và Thành phố Hồ Chí Minh được học tập, giao lưu và chuẩn bị tốt nhất cho kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia năm học 2018 - 2019. Bài viết sẽ xoay quanh một số bài toán hay tại Trường Đông cũng như mở rộng và các ứng dụng của nó.

1. Giải tích

Trong bài kiểm tra số 1 của Trường Đông Toán học miền Nam năm 2018 có bài toán Giải tích như sau.

Bài toán 1.0.1. *Cho dãy số (a_n) được xác định bởi*

$$\begin{cases} a_0 = a > 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - 1}{n+1}, \forall n \geq 0 \end{cases}.$$

a) Cho $a = \frac{3}{2}$. Chứng minh dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn.

b) Tìm tất cả các số thực dương a để (a_n) có giới hạn hữu hạn.

Chứng minh.

a) Khi $a = \frac{3}{2}$, dãy số đã cho được xác định bởi

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{3}{2} \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - 1}{n+1}, \forall n \geq 0 \end{cases}.$$

Khi đó $a_1 = \frac{5}{4}$, $a_2 = \frac{9}{32}$. Khi đó, ta dễ chứng minh rằng

$$-\frac{1}{n+1} < a_n < 0, \forall n \geq 3.$$

Kẹp giới hạn hai vế, ta được $\lim a_n = 0$.

b) Ta sẽ chứng minh rằng $a < 2$ thỏa yêu cầu bài toán. Thật vậy, nếu $a_0 = 2$ thì $a_i = i + 2$, $\forall i \geq 0$. Do đó $\lim a_n = +\infty$. Nếu $a_0 > 2$ thì dãy lúc sau luôn lớn hơn dãy với $a_0 = 2$. Do đó $\lim a_n = +\infty$. Nhận xét rằng nếu tồn $i \in \mathbb{N}$ sao cho $a_i \leq 1$. Khi đó, ta dễ chứng minh được

$$-\frac{1}{n+1} < a_n < 0, \forall n \geq i + 2.$$

Do đó $\lim a_n = 0$. Do đó ta chỉ cần xét sao cho $a_i > 1$, $\forall i \geq 0$. Giả sử $a_n > 1$, khi đó $a_{n-1} > \sqrt{n+1}$ và

$$a_{n-2} > \sqrt{1 + (1-n)\sqrt{1+n}}.$$

Làm điều này liên tục, ta sẽ có được

$$a_0 > \sqrt{1 + 1\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \cdots + (n-1)\sqrt{1+n}}}}} = c_n.$$

Để ý rằng ta có đẳng thức quen thuộc sau:

$$2 = \sqrt{1 + 1\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \cdots + (n-1)\sqrt{1 + n(n+2)}}}}}.$$

Khi đó, bằng cách nhân liên hợp và đánh giá, ta sẽ được

$$0 < 2 - c_n < \frac{1}{n+2}.$$

Do đó $\lim c_n = 2$. Vậy nếu $a_0 < 2$ thì sẽ tồn tại chỉ số i sao cho $a_i \leq 1$. Khi đó $\lim a_n = 0$. Nếu $a_0 \geq 2$ thì $\lim a_n = +\infty$. Vậy a_n có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi $0 < a < 2$.

Tóm lại, bài toán đã được giải xong. □

Tác giả xin đề xuất một lời giải khác của thầy **Lê Phúc Lữ**.

Chứng minh. Ta vẫn sẽ sử dụng một vài nhận xét như lời giải 1. Nếu $a \leq 1$ thì quay lại nhận xét ở lời giải trên. Khi $2 > a > 1$ thì ta đặt $q = \frac{1}{a-1} > 1$. Các bạn dễ chứng minh bằng quy nạp được rằng

$$a_n \leq \frac{n+2}{q^{2^{n+1}}}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$\lim \frac{n+2}{q^{2^{n+1}}} = 0$$

Điều này tương đương với

$$\lim \frac{1}{q^{2^{n+1}} \cdot \ln q \cdot 2^{n+1} \cdot \ln 2} = 0$$

Vậy ta có được $\lim a_n = 0$. $\square$

Bằng cách tính toán một số giá trị, ta nhận ra điểm nhạy cảm $a = 2$, từ đó xét các trường hợp để chia nhỏ điểm nhạy cảm này. Trường hợp $1 < a < 2$ là kết quả chính của bài toán; việc kẹp cũng như khử căn và đẩy ra giới hạn sẽ có hiệu quả. Chú ý rằng, chúng ta khó mà sử dụng bổ đề sau để giải bài toán.

Bổ đề 1.0.1. *Cho 2 dãy số thực dương (a_n), (b_n) và số thực $q \in (0, 1)$ sao cho*

$$a_{n+1} \leq q a_n + b_n.$$

Khi đó $\lim a_n = 0$.

Việc sử dụng bổ đề này để giải bài toán khá cồng kềnh và phức tạp, các bạn có thể giải thử. Sau đây là cách phân tích hai hướng giải của bài toán. Ở lời giải đầu tiên, nhận thấy rằng chúng ta có thể khử căn từ các đẳng thức đề bài, từ đó suy ra nó là một dãy tiệm cận với dãy **Riemann**, ngoài ra, bạn **Nguyễn Nguyễn**, học sinh trường Phổ thông năng khiếu, ĐHQG TP.HCM còn có cách đặt dãy khá hay để rút gọn căn và xét trường hợp cho bài toán. Ở lời giải thứ hai, việc tính toán một số giá trị ban đầu cho ta cảm nhận về việc chứng minh quy nạp cho bài toán.

2. Đại số

2.1. Hệ phương trình

Trong bài kiểm tra số 2 của Trường Đông Toán học miền Nam năm 2018 có bài toán Đại Số như sau.

Bài toán 2.1.1. *Tìm tất cả các bộ gồm 10 số thực a_1, a_2, a_3, …, a_{10} thỏa mãn điều kiện*

$$a_i = 1 + \frac{6a_i^2}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2}$$

với mọi $i = 1, 2, \ldots, 10$.

Sau đây là lời giải của bạn Lê Văn Mạnh lớp 11 Toán đến từ Trường THPT Chuyên Nguyễn Chí Thanh Đắk Nông.

Chứng minh. Ta nhận xét rằng $a_i > 1, \forall i$. Thật vậy nếu $a_i = 1$ thì

$$\frac{6a_i^2}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2} = 0$$

Điều này vô lí. Đặt $d = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2$. Khi đó

$$X = 1 + \frac{6X^2}{d}$$

tương đương với

$$6X^2 - dX + d = 0.$$

Đây là phương trình bậc 2 theo ẩn X, do đó x_i chỉ nhận một trong 2 giá trị, gọi 2 giá trị đó là a, b và giả sử rằng có x số giá trị bằng a và $10 - x$ số giá trị bằng b. Trong đó

$$a = \frac{d + \sqrt{d^2 - 24d}}{12}$$

và

$$b = \frac{d - \sqrt{d^2 - 24d}}{12}.$$

Ta có thể thấy $a_i = \frac{8}{5}$ là một bộ nghiệm của hệ. Do đó phương trình bậc 2 trên luôn có nghiệm. Vì vậy mà $d \geq 24$. Mặt khác, cộng tất cả các phương trình lại, ta có

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 10 + 6 = 16.$$

Xét

$$d = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2 = x \cdot \left(\frac{d + \sqrt{d^2 - 24d}}{12}\right)^2 + (10 - x) \cdot \left(\frac{d - \sqrt{d^2 - 24d}}{12}\right)^2,$$

hay

$$36d = 5(d^2 - 12d) + (x - 5) \cdot d \cdot \sqrt{d^2 - 24d}.$$

Điều này tương đương với

$$\frac{36}{d} = 5 \cdot \left(1 - \frac{12}{d}\right) + (x - 5) \cdot \sqrt{1 - \frac{24}{d}}. \tag{1}$$

Điều này dẫn đến

$$\left(\frac{x-5}{4} + \sqrt{4 - \frac{96}{d}}\right)^2 + 1 - \left(\frac{x-5}{4}\right)^2 = 0. \tag{2}$$

Nếu $x \geq 5$ thì do $d \geq 24$ nên vế trái của (1) luôn dương (Vô lý). Nếu $1 < x < 5$ thì thay $x = 2$, 3, 4 ta thấy vế trái của (2) luôn âm (vô lý). Nếu $x = 0$ thì ta có được hệ có nghiệm

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{10}) = \left(\frac{8}{5}, \frac{8}{5}, \ldots, \frac{8}{5}\right).$$

Nếu $x = 1$ thì $d = 32$. Từ đó ta thu được nghiệm là

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{10}) = \left(4, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{4}{3}\right)$$

và các hoán vị. □

Lời giải này khá cồng kềnh và phức tạp. Sau đây là một cách giải khác cũng cùng ý tưởng nhưng được thực hiện đơn giản hơn.

Chứng minh. Đặt $T = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2$. Khi đó, ta có

$$X = 1 + \frac{6X^2}{T}.$$

Điều này tương đương với

$$\frac{6X^2}{T} - X + 1 = 0.$$

Đây là phương trình bậc 2 theo ẩn X, do đó x_i chỉ nhận một trong 2 giá trị, gọi 2 giá trị đó là a, b và giả sử rằng có u số giá trị bằng a và v số giá trị bằng b. Mặt khác, cộng tất cả các phương trình lại, ta có

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 10 + 6 = 16.$$

Hơn thế nữa, từ phương trình bậc 2 ban đầu, ta suy ra được

$$a + b = ab = \frac{T}{6} = \frac{ua^2 + vb^2}{6}.$$

Từ những lẽ đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u + v = 10 \\ ua + vb = 16 \\ a + b = ab = \dfrac{ua^2 + bv^2}{6} \end{cases}.$$

Thay $v = 10 - u$ và $b = \frac{a}{a-1}$, ta được

$$ua + (10 - u) \cdot \frac{a}{a - 1} = 16.$$

Đây là phương trình bậc 2 theo a, ta tính Δ thì điều kiện có nghiệm của phương trình là

$$u^2 - 10u + 9 \geq 0,$$

tức là $u \leq 1, u \geq 9$. Không mất tính tổng quát, ta xét $u \geq 9$ (vì ta có đổi vị trí của m và n).

i. $u = 9$. Ta có nghiệm $\left(4, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{4}{3}\right)$ và các hoán vị.

ii. $u = 10$. Ta có nghiệm $\left(\frac{8}{5}, \frac{8}{5}, \ldots, \frac{8}{5}\right)$.

Vậy tóm lại các bộ nghiệm trên chính là nghiệm của phương trình. $\square$

Sau đây là lời giải của bạn Phan Quí Lộc học lớp 12T1 Trường THPT Chuyên Long An.

Chứng minh. Cộng tất cả phương trình lại ta được

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 10 + 6 = 16.$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz cho 9 số $a_2, a_3, \ldots, a_{10}$ ta được

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2 \geq a_1^2 + \frac{(a_2 + a_3 + \ldots + a_{10})^2}{9} = a_1^2 + \frac{(16 - a_1)^2}{9}.$$

Kết hợp với phương trình đầu tiên ta thu được

$$a_1 \leq 1 + \frac{6a_1^2}{a_1^2 + \frac{(16-a_1)^2}{9}}.$$

Điều này tương đương với

$$(5a_1 - 8)(a_1 - 4)^2 \leq 0.$$

Do đó $a_1 = 4$ hoặc $a_1 \leq \frac{8}{5}$. Nếu $a_1 = 4$ thì

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_{10} = 16 - 4 = 12.$$

Mặt khác

$$a_2^2 + \ldots + a_{10}^2 \geq \frac{(a_2 + a_3 + \ldots + a_{10})^2}{9} = \frac{12^2}{9} = 16.$$

Khi đó ta thu được kết quả từ phương trình đầu tiên như sau:

$$a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{10}^2 = \frac{6a_1^2}{a_1 - 1} - a_1^2 = 16.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{10}) = \left(4, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{4}{3}\right).$$

Do đó nghiệm của hệ là

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{10}) = \left(4, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{4}{3}\right)$$

và các hoán vị. Xét $a_1 \leq \frac{8}{5}$. Nếu tồn tại $j \neq 1$ sao cho $a_j = 4$ thì ta làm tương tự như trên sẽ thu được bộ nghiệm

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{10}) = \left(4, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{4}{3}\right)$$

và các hoán vị. Nếu $a_j \neq 4, \forall j$, làm tương tự trên ta thu được

$$a_j \leq \frac{8}{5}, \forall j.$$

Do đó
$$a_1 + a_2 + ... + a_{10} \leq 16.$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$(a_1, a_2, \ldots, a_{10}) = \left(\frac{8}{5}, \frac{8}{5}, \ldots, \frac{8}{5}\right).$$
Vậy tóm lại các nghiệm đã tìm được như trên là nghiệm của hệ phương trình. $\square$

Lời giải sau là của bạn Nguyễn Thành Lộc thuộc lớp 12T Trường THPT Chuyên Bến Tre.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{10}$. Ta có
$$a_1 - a_{10} = \frac{6\left(a_1^2 - a_{10}^2\right)}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2},$$
hay
$$(a_1 - a_{10})\left(1 - \frac{6(a_1 + a_{10})}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2}\right) = 0.$$
Nếu $a_1 = a_{10}$ thì
$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{10} = \frac{8}{5}.$$
Nếu $6(a_1 + a_{10}) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2$ thì thay vào phương trình ban đầu ta được
$$a_1 = 1 + \frac{6a_1^2}{6(a_1 + a_{10})}$$
Điều này tương đương với
$$a_1 a_{10} = a_1 + a_{10}.$$
Do đó
$$6a_1 a_{10} = 6(a_1 + a_{10}) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2 \geq a_1^2 + 9a_{10}^2.$$
Ta thu được
$$(a_1 - 3a_2)^2 \leq 0.$$
Điều này dẫn tới
$$a_1 = 4, a_2 = a_3 = \ldots = a_{10} = \frac{4}{3}.$$
Do đó hệ có nghiệm
$$(a_1, a_2, \ldots, a_{10}) = \left(\frac{8}{5}, \frac{8}{5}, \ldots, \frac{8}{5}\right)$$
cùng với
$$(a_1, a_2, \ldots, a_{10}) = \left(4, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{4}{3}\right)$$
và các hoán vị. $\square$

2.2. Số phức

Tác giả xin nhắc lại một số định nghĩa và tính chất cơ bản của số phức được dùng trong bài.

i. Tập hợp các số phức được ký hiệu là $\mathbb{C}$.

ii. Với $z = a + bi$ thì $\overline{z} = a - bi$ được gọi là số phức liên hợp z.

iii. Với $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ thì $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

iv. Với $z_1 = a_1 + b_1 i$ và $z_2 = a_2 + b_2 i$ thì $\operatorname{Im}\left(\overline{z_1} z_2 + \overline{z_2} z_1\right) = \operatorname{Im}\left(2a_1a_2 + 2b_1b_2\right) = 0$.

Ta xét một bài toán sau trong buổi tiêu thụ bài giảng ở trường Đông 2018

Bài toán 2.2.1. *Cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$ $(n \geq 5)$. Gọi B_k là trung điểm của cạnh $A_kA_{k+1}, k = 1, 2, \ldots, n$, trong đó $A_{n+1} = A_1$. Chứng minh rằng*

$$[B_1B_2\ldots B_n] \geq \frac{1}{2}\left[A_1A_2\ldots A_n\right],$$

trong đó $[S]$ là diện tích của hình S.

Trước hết, ta phát biểu và chứng minh một bổ đề sau:

Bổ đề 2.2.1. *Cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$. Gọi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lần lượt là tọa độ của các đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$ trên mặt phẳng phức. Khi đó ta có*

$$[A_1A_2\ldots A_n] = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \ldots + \overline{a_{n-1}}a_n + \overline{a_n}a_1\right).$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n. Với $n = 3$, tác giả xin để lại cho bạn đọc. Giả sử mệnh đề trên đúng tới $n = k$, ta chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
[A_1A_2\ldots A_{k+1}] &= [A_1A_2\ldots A_k] + [A_kA_{k+1}A_1] \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \ldots + \overline{a_{k-1}}a_k + \overline{a_k}a_1\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overline{a_k}a_{k+1} + \overline{a_{k+1}}a_1 + \overline{a_1}a_k\right) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \ldots + \overline{a_{n-1}}a_k + \overline{a_k}a_{k+1} + \overline{a_{k+1}}a_1\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overline{a_k}a_1 + \overline{a_1}a_k\right) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \ldots + \overline{a_{k-1}}a_k + \overline{a_k}a_{k+1} + \overline{a_{k+1}}a_1\right)
\end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp, ta có điều cần chứng minh. □

Quay lại bài toán,

Chứng minh. Với $i = 1, 2, \ldots, n$, ta gọi a_i là tọa độ của A_i trên mặt phẳng phức, khi đó tọa độ của B_i sẽ là $\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\mathrm{a_i} + \mathrm{a_{i+1}}\right)$. Áp dụng **Bổ đề 2.2.1**, ta được

$$\begin{aligned}
[B_1B_2\ldots B_n] &= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\overline{b_1}b_2 + \overline{b_2}b_3 + \ldots + \overline{b_n}b_1\right)\\
&= \frac{1}{8}\mathrm{Im}\left[\overline{a_1 + a_2}\left(a_2 + a_3\right) + \overline{a_2 + a_3}\left(a_3 + a_4\right) + \ldots + \overline{a_n + a_1}\left(a_1 + a_2\right)\right]\\
&= \frac{1}{8}\mathrm{Im}\left[\left(\overline{a_1} + \overline{a_2}\right)\left(a_2 + a_3\right) + \left(\overline{a_2} + \overline{a_3}\right)\left(a_3 + a_4\right) + \ldots + \left(\overline{a_n} + \overline{a_1}\right)\left(a_1 + a_2\right)\right]\\
&= \frac{1}{8}\mathrm{Im}\left(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \ldots + \overline{a_n}a_1\right) + \frac{1}{8}\mathrm{Im}\left(\overline{a_2}a_3 + \overline{a_3}a_4 + \ldots + \overline{a_1}a_2\right)\\
&+ \frac{1}{8}\mathrm{Im}\left(\overline{a_1}a_3 + \overline{a_2}a_4 + \ldots + \overline{a_n}a_2\right)\\
&= \frac{1}{4}\mathrm{Im}\left(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \ldots + \overline{a_n}a_1\right) + \frac{1}{8}\mathrm{Im}\left(\overline{a_1}a_3 + \overline{a_2}a_4 + \ldots + \overline{a_n}a_2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[A_1A_2\ldots A_n\right] + \frac{1}{8}\mathrm{Im}\left(\overline{a_1}a_3 + \overline{a_2}a_4 + \ldots + \overline{a_n}a_2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[A_1A_2\ldots A_n\right] + \frac{1}{8}\left(\left[OA_1A_3\right] + \left[OA_2A_4\right] + \ldots + \left[OA_nA_2\right]\right)\\
&\geq \frac{1}{2}\left[A_1A_2\ldots A_n\right].
\end{aligned}$$

Vậy ta được điều phải chứng minh. □

Như vậy, bằng công cụ số phức, ta đã đưa bài toán hình học trở thành bài toán đại số. Từ bổ đề trong chứng minh của bài toán trên, ta thu được một hệ quả quan trọng sau:
Trên mặt phẳng phức, các điểm $A_1\left(a_1\right), A_2\left(a_2\right), \ldots, A_n\left(a_n\right)$ thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\mathrm{Im}\left(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \ldots + \overline{a_n}a_1\right) = 0.$$

Liệu có một lời giải thuần túy hình học cho **Bài toán 2.2.1**? Tác giả xin đưa ra bài tập sau để các bạn rèn luyện thêm.

Bài toán 2.2.2. *Trên mặt phẳng phức, cho đa giác lồi $P_0P_1\ldots P_n$ có tọa độ các đỉnh theo thứ tự là*

$$1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^n$$

và đa giác lồi $Q_0Q_1\ldots Q_n$ có tọa độ các đỉnh theo thứ tự là

$$1, 1+\varepsilon, \ldots, 1+\varepsilon+\ldots+\varepsilon^{n-1},$$

trong đó $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}i$. Tìm tỉ số diện tích của hai đa giác trên.

3. Hình học

3.1. Mở đầu

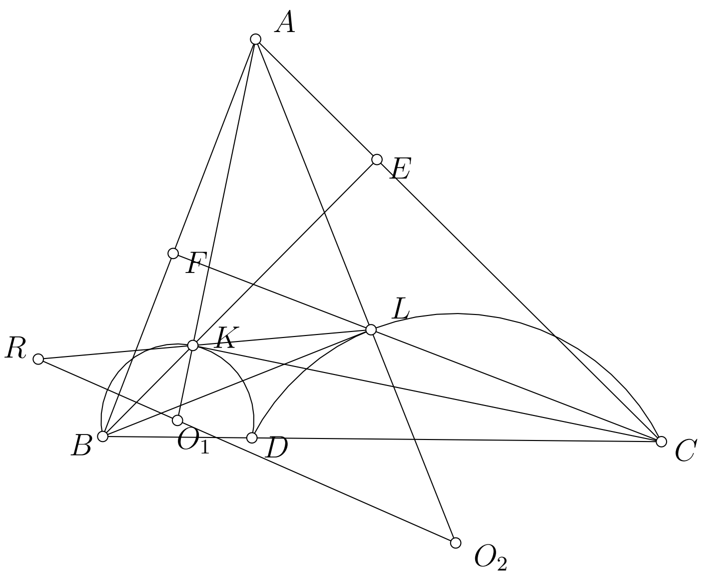
Trong bài kiểm tra số 2 của Trường Đông Toán học miền Nam năm 2018, thầy Lê Viết Ân đã đề xuất một bài toán hình học thú vị như sau.

Bài toán 3.1.1. *Cho $\triangle ABC$ nhọn với $AB < AC$ và các đường cao AD, BE, CF. Trên các đoạn thẳng BE, CF lần lượt lấy các điểm K, L sao cho $\angle ALB = \angle AKC = 90°$.*

a) Chứng minh rằng các tiếp tuyến chung ngoài của đường tròn ngoại tiếp hai tam giác DBK và DCL cắt nhau trên KL.

b) Các đường thẳng DK, DL lần lượt cắt EF tại M, N. Gọi P là giao điểm của BL và CK. Chứng minh rằng AP, BN, CM đồng quy.

Tác giả xin đề xuất lời giải thông qua việc biến đổi các tỉ số cạnh.



Chứng minh.

a) Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của (BKD) và (CLD). Áp dụng hệ thức lượng trong $\triangle AKC$, ta có $AK^2 = AE \cdot AC$. Tương tự $AL^2 = AF \cdot AB$. Mặt khác do $BFEC$ nội tiếp nên $AF \cdot AB = AE \cdot AC$. Như vậy $AK^2 = AL^2$ hay $AK = AL$. Ta có $\angle AKC = 90°$ nên K nằm trên $(AFDC)$. Do đó

$$\angle DKC = \angle DAC = \angle KBD,$$

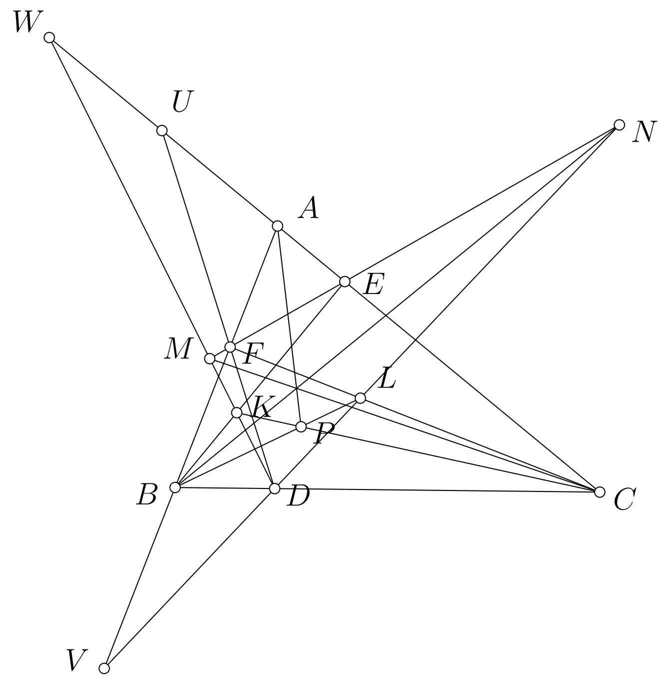
tức là KC là tiếp tuyến của (BKD). Từ đó ta được A, K, O_1 thẳng hàng. Tương tự A, L, O_2 thẳng hàng. Gọi R là giao điểm của KL và O_1O_2. Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle AO_1O_2$ với bộ ba điểm thẳng hàng R, K, L, ta có

$$\frac{RO_1}{RO_2} \cdot \frac{LO_2}{LA} \cdot \frac{KA}{KO_1} = 1,$$

tức là

$$\frac{RO_1}{RO_2} = \frac{KO_1}{LO_2} = \frac{R_{(BKD)}}{R_{(CLD)}}.$$

Chứng tỏ R là tâm vị tự ngoài của (BKD) và (CLD). Vậy ta có điều cần chứng minh.



b) Gọi U là giao điểm của AC và DF. Gọi W, V lần lượt là giao điểm của DM và AC, DN và AB. Vì $DFAC$ nội tiếp nên Ta có

$$(VLDN) = F(VLDN) = F(ACUE) = (ACUE) = -1.$$

Tương tự $(WKMD) = -1$. Như vậy

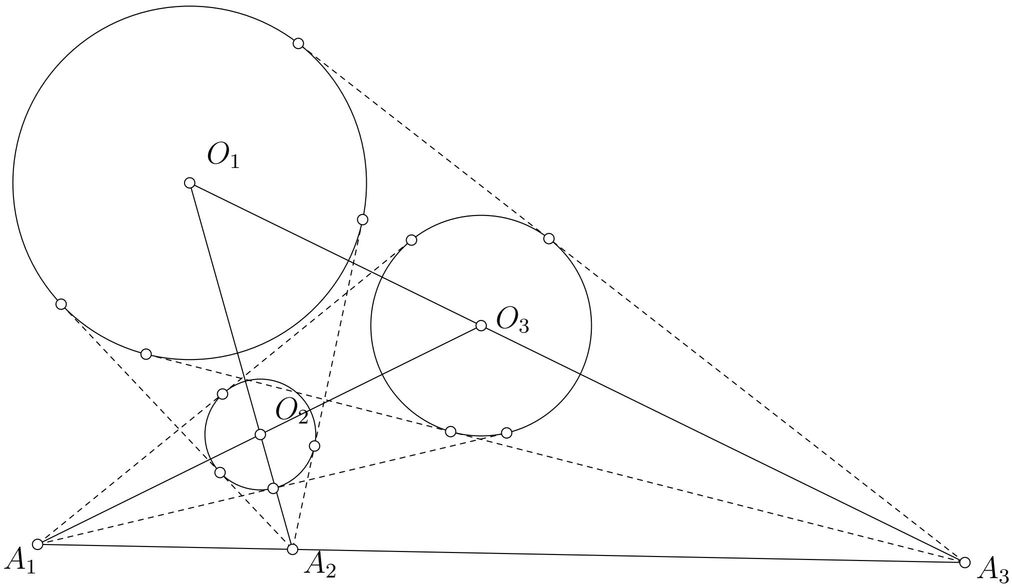
$$B(VLDN) = (VLDN) = -1 = (WKMD) = C(WKMD).$$

Do đó giao điểm của BV và CW, BN và CM, BL và CK thẳng hàng. Điều đó có nghĩa AP, BN, CM đồng quy.

Tóm lại, bài toán đã được giải xong. □

Lời giải trên khéo léo ở chỗ chúng ta nhận ra được A, K, O_1 và A, L, O_2 là các bộ điểm thẳng hàng và áp dụng định lý Menelaus. Song, nếu ta nhìn ở một góc khác, bằng việc suy ra K, L lần lượt là tâm vị tự trong của (AKL) và (BKD), (AKL) và (CLD), ta sẽ dùng định lý Monge D'alembert để kết thúc bài toán.

Bổ đề 3.1.1 (Định lý Monge D'alembert)**.** *Cho ba đường tròn $(O_1, R1)$, (O_2, R_2), $(O3, R3)$ phân biệt trên mặt phẳng. Khi đó tâm vị tự ngoài của các cặp đường tròn (O_1, O_2), (O_2, O_3), (O_3, O_1) cùng thuộc một đường thẳng. Hai tâm vị tự trong của hai trong ba cặp đường tròn trên và tâm vị tự ngoài của cặp đường tròn còn lại cùng thuộc một đường thẳng.*



Chứng minh. Ta chứng minh định lý trong trường hợp ba tâm vị tự ngoài, trường hợp còn lại chứng minh tương tự. Gọi tâm vị tự ngoài của các cặp đường tròn (O_1, O_2), (O_2, O_3), (O_3, O_1) lần lượt là A_3, A_1, A_2. Khi đó

$$\frac{\overline{A_1O_2}}{\overline{A_1O_3}} \cdot \frac{\overline{A_2O_3}}{\overline{A_2O_1}} \cdot \frac{\overline{A_3O_1}}{\overline{A_3O_2}} = \frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{R_3}{R_1} \cdot \frac{R_1}{R_2} = 1.$$

Theo định lý Menelaus đảo cho $\triangle O_1O_2O_3$ và bộ ba điểm A_1, A_2, A_3 thì ta thu được A_1, A_2, A_3 thẳng hàng. □

Quay lại câu (a) bài toán,

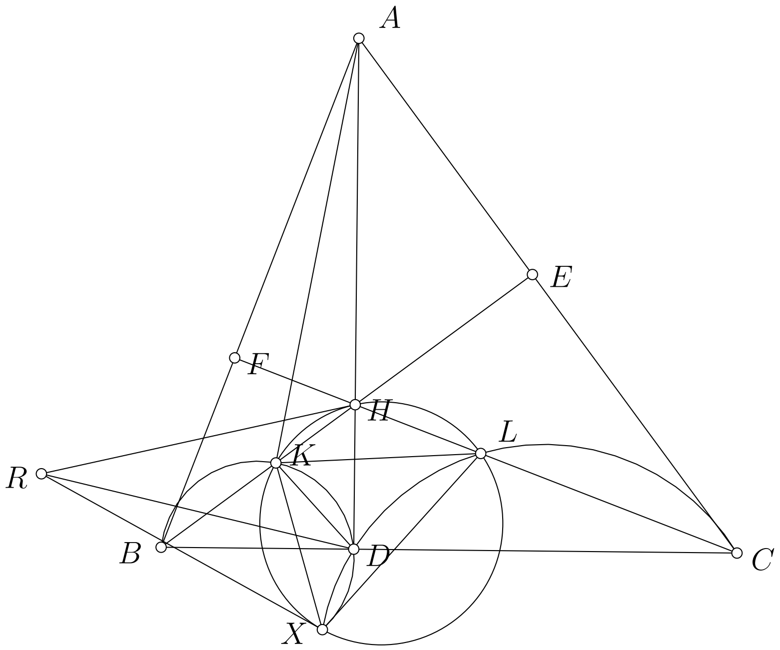
Chứng minh. Ta có $AO_1 \perp KC$ nên (AKL) tiếp xúc (BKD) tại K hay K là tâm vị tự trong của hai đường tròn này. Tương tự L là tâm vị tự trong của (AKL) và (CLD). Áp dụng định lý Monge D'alembert cho ba đường tròn (AKL), (BKD), (CLD), ta có K, L và tâm vị tự ngoài của (BKD), (CLD) thẳng hàng. □

Ở bài toán trên, ta thấy tính chất $AK = AL$ tuy dễ chứng minh nhưng lại là một trong các mấu chốt của bài toán. Ngoài ra, cấu hình trên còn nhiều điều cần bàn luận hơn. Phần sau tác giả xin giới thiệu một vài hướng khai thác từ bài toán.

3.2. Khai thác bài toán

Bài toán gốc là một cấu hình đẹp, trong cấu hình đó ta sẽ còn thấy rất nhiều bài toán thú vị khác. Bài toán đầu tiên này được tác giả tìm ra trong việc cố gắng giải quyết bài toán theo hướng biến đổi góc.

Bài toán 3.2.1. *Cho $\triangle ABC$ có đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Trên các đoạn thẳng BE, CF lần lượt lấy các điểm K, L sao cho $\angle ALB = \angle AKC = 90°$. Giả sử (BKD) cắt (CLD) tại điểm thứ hai X. Chứng minh rằng $HLXK$ là tứ giác điều hoà.*



Chứng minh. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của (BKD) và (CLD). Áp dụng hệ thức lượng trong $\triangle AKC$, ta có $AK^2 = AE \cdot AC$. Tương tự $AL^2 = AF \cdot AB$. Mặt khác do $BFEC$ nội tiếp nên $AF \cdot AB = AE \cdot AC$. Như vậy $AK^2 = AL^2$ hay $AK = AL$. Ta có $\angle AKC = 90°$ nên K nằm trên $(AFDC)$. Do đó

$$\angle DKC = \angle DAC = \angle KBD,$$

tức là KC là tiếp tuyến của (BKD). Từ đó ta được A, K, O_1 thẳng hàng. Tương tự A, L, O_2 thẳng hàng. Gọi R là giao điểm của KL và O_1O_2. Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle AO_1O_2$ với bộ ba điểm thẳng hàng R, K, L, ta có

$$\frac{RO_1}{RO_2} \cdot \frac{LO_2}{LA} \cdot \frac{KA}{KO_1} = 1,$$

tức là

$$\frac{RO_1}{RO_2} = \frac{KO_1}{LO_2} = \frac{R_{(BKD)}}{R_{(CLD)}}.$$

Chứng tỏ R là tâm vị tự ngoài của (BKD) và (CLD). Thông qua biến đổi góc, ta có

$$\angle KXL = \angle KXD + \angle LXD = \angle KBC + \angle LCB = 180° - \angle KHL.$$

Do đó tứ giác $KHLX$ nội tiếp. Ta có $AK^2 = AF \cdot AB = AH \cdot AD$ nên $\triangle AKH \sim \triangle ADK$. Như thế

$$\frac{KH}{KD} = \frac{AH}{AK}.$$

Tương tự,

$$\frac{LH}{LD} = \frac{AH}{AL}.$$

Do đó

$$\frac{KH}{LH} = \frac{KD}{LD}.$$

Mặc khác

$$\frac{KD}{LD} = \frac{KX}{LX}$$

do KL đi qua tiếp tuyến chung ngoài của $(BKDX)$ và $(CLDX)$. Như vậy

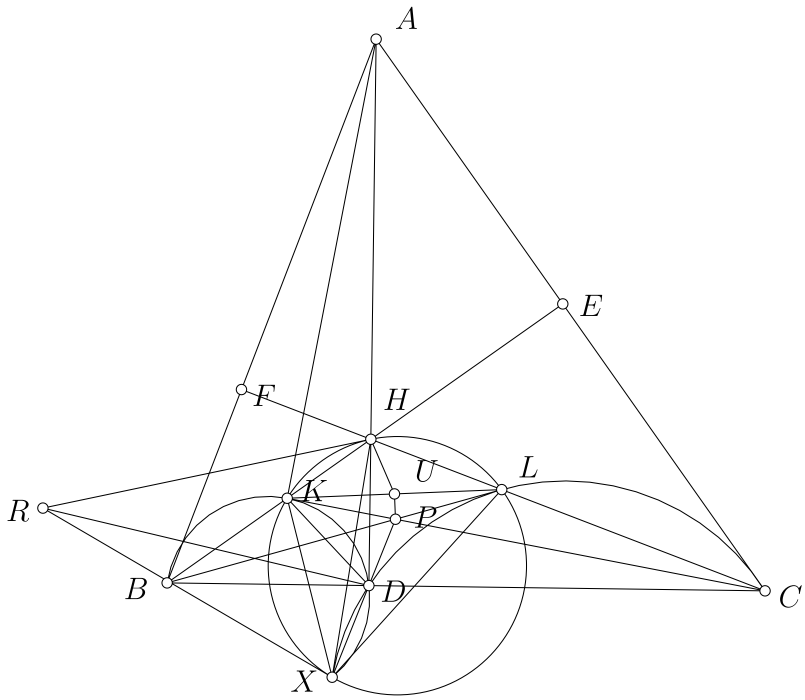
$$\frac{KH}{LH} = \frac{KX}{LX}$$

hay $HLXK$ là tứ giác điều hòa. □

Từ kết quả trên, chúng ta có một bài toán đẹp do thầy **Lê Viết Ân** đề xuất như sau.

Bài toán 3.2.2. *Cho $\triangle ABC$ có đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Trên các đoạn thẳng BE, CF lần lượt lấy các điểm K, L sao cho $\angle ALB = \angle AKC = 90^\circ$. Gọi U là trung điểm của KL. Gọi P là giao điểm của BL và CK. Chứng minh rằng tứ giác $HUPD$ nội tiếp.*

Lời giải bên dưới sẽ được tiếp tục bằng những kết quả của **Bài toán 3.2.1**.



Chứng minh. Gọi X là giao điểm thứ hai của (BKD) và (CLD). Do P là giao điểm của tiếp tuyến KC của (BKD) và tiếp tuyến LB của (CLD) nên P nằm trên trục đẳng phương của

(BKD) và (CLD) hay P, D, X thẳng hàng. Do $KHLX$ là tứ giác điều hòa nên HX, HU là hai đường đẳng giác trong $\triangle KHL$. Ta cần chứng minh

$$\angle HDP + \angle HUP = 180^\circ$$

hay

$$\angle HDP + \angle HUK = 90^\circ.$$

Ta có

$$\angle HUK = \angle UHL + \angle HLK = \angle KHX + \angle KXH.$$

Mặt khác,

$$\angle HDP = \angle XHD + \angle HXD.$$

Do đó

$$\angle HDP + \angle HUP = \angle KXD + \angle KHD = \angle KBD + \angle KHD = 90^\circ.$$

Vậy tứ giác $HUPD$ nội tiếp. □

Cuối cùng, tác giả sẽ đưa ra một số mở rộng cũng như bài tập để bạn đọc rèn luyện thêm về các tính chất thú vị này.

Ở bài toán gốc, ta thấy tính chất vuông góc không được ứng dụng nhiều mà chỉ dùng tính chất của tứ giác nội tiếp, như thế ta có thể phát triển và mở rộng bài toán này.

3.3. Bài tập và mở rộng

Trong bài toán gốc, hai điểm E, F chính là giao điểm của đường tròn đường kính BC với các cạnh CA, AB. Vậy ta có thể thay đường tròn đường kính BC thành một đường tròn bất kì. Từ đó, ta đi đến kết quả sau.

Bài toán 3.3.1. *Cho $\triangle ABC$ nhọn. Một đường tròn đi qua B, C cắt các cạnh CA, AB lần lượt tại E, F. (AEB) và (AFC) cắt nhau tại D. (AEB) cắt đoạn thẳng CF tại L. (AFC) cắt đoạn thẳng BE tại K.*

a) *Chứng minh rằng các tiếp tuyến chung ngoài của đường tròn ngoại tiếp hai tam giác DBK và DCL cắt nhau trên KL.*

b) *Các đường thẳng DK, DL lần lượt cắt EF tại M, N. Gọi P là giao điểm của BL và CK. Chứng minh rằng AP, BN, CM đồng quy.*

Bài toán 3.3.2. *Cho $\triangle ABC$ nhọn. Một đường tròn đi qua B, C cắt các cạnh CA, AB lần lượt tại E, F. (AEB) và (AFC) cắt nhau tại D. (AEB) cắt đoạn thẳng CF tại L. (AFC) cắt đoạn thẳng BE tại K. Gọi X là giao điểm thứ hai của (BKD) và (CLD). Gọi tâm vị tự ngoài của (BKD) và (CLD) là R.*

a) *Chứng minh rằng RX tiếp xúc (KLX).*

b) Tiếp tuyến qua R khác RX của (KLX) tiếp xúc (KLX) tại H. Gọi U là trung điểm của KL. Gọi P là giao điểm của BL và CK. Chứng minh rằng $HUPD$ nội tiếp.

Tác giả xin đề xuất thêm một số bài toán liên quan đến định lý Monge D'alembert để bạn đọc rèn luyện thêm.

Bài toán 3.3.3 (IMO Shortlist 2007)**.** *Cho tứ giác lồi $ABCD$. P là một điểm trên cạnh AB. Gọi (I), (I_1), (I_2) lần lượt là là đường tròn nội tiếp tam giác DPC, APD, BPC. Giả sử (I) tiếp xúc với (I_1), (I_2) lần lượt tại K, L. AC giao BD tại E, AK giao BL tại F. Chứng minh rằng E, I, F thẳng hàng.*

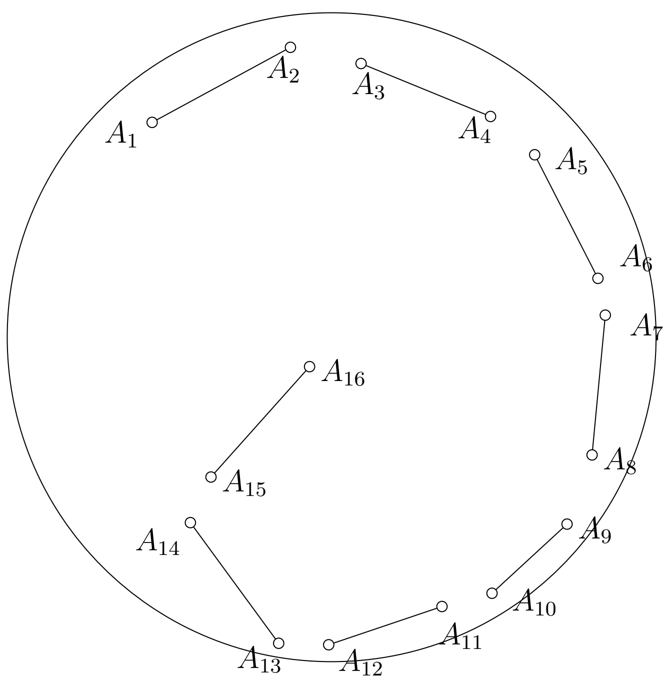
Bài toán 3.3.4. *Cho $\triangle ABC$, P là điểm nằm trong tam giác sao cho $AB + BP = AC + CP$. BP, CP giao AC, AB lần lượt tại Y, Z. Chứng minh rằng tâm vị tự ngoài của đường tròn nội tiếp các tam giác APY và APZ nằm trên BC.*

4. Tổ hợp

Đầu tiên, ta sẽ đến với một câu tổ hợp được ra trong đề tiêu thụ của Trường Đông Toán học miền Nam năm 2018.

Bài toán 4.0.1. *Trong đường tròn tâm O bán kính bằng 2, cho 52 điểm A_1, A_2, ..., A_{52} thỏa mãn với mọi $q = \overline{1, \ldots 26}$ thì $A_{2q-1}A_{2q} > 1$. Chứng minh rằng luôn tồn tại ba số tự nhiên i, j, k thỏa $i < j < k$ để $A_iA_k > A_jA_k$.*

Dưới đây là một hình minh họa cho bài toán trên.



Cảm giác rằng khi có nhiều điểm hơn thì các điểm sẽ gần nhau hơn. Khi đó, bộ 3 số tự nhiên i, j, k sẽ được sinh ra. Để tìm được 3 số i, j, k như vậy, ta sẽ dựa vào tính chất với mọi $q = \overline{1, 26}$ thì $A_{2q-1}A_{2q} > 1$. Ta sẽ coi j là $2q-1$, k là $2q$. Lúc này, công việc của chúng ta là tìm i sao cho $A_iA_k \le 1$. Ý tưởng đơn giản là xét i cũng có dạng $2q$. Ta có lời giải như sau.

Chứng minh. Xét các điểm A_{2k} với $k = \overline{1, 26}$. Ta chứng minh rằng tồn tại hai điểm trong số 26 điểm đó có khoảng cách nhỏ hơn hoặc bằng 1. Giả sử phản chứng hai điểm bất kì trong số chúng đều có khoảng cách lớn hơn 1. Khi đó các hình tròn có tâm là các điểm A_{2k} với $k = \overline{1, 26}$, bán kính bằng $\frac{1}{2}$ luôn rời nhau và chứa trong hình tròn $\left(O, \frac{5}{2}\right)$. So sánh tổng diện tích của 26 hình tròn nhỏ và hình tròn lớn tâm O, ta có

$$26\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 \le \pi\left(\frac{5}{2}\right)^2.$$

Bất đẳng thức trên sai vì $26 > 25$. Do đó, tồn tại hai điểm trong số các điểm A_{2k} với $k = \overline{1, 26}$ có khoảng cách nhỏ hơn hoặc bằng 1, giả sử là A_{2m}, A_{2n}, $m < n$. Đặt $i = 2m$, $j = 2n-1$, $k = 2n$, ta có điều cần chứng minh. □

Bài toán này xuất phát từ một tính chất khá đẹp của một loại hàm số, được gọi tên là hàm số tự co rút (self-contracted). Một hàm số $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ được gọi là tự co rút nếu với mọi a, b, $c \in I \subset (0, +\infty)$, $a < b < c$ thì $d(f(a), f(c)) \ge d(f(b), f(c))$. Mọi hàm số tự co rút, bị chặn đều hội tụ, tức $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}^n$. Lợi dụng tính chất này, tác giả đã đưa ra một bài toán trong trường hợp đơn giản hơn. Bài toán được phát biểu là tính chất tự co rút đối với dãy số thực, được đề nghị cho câu dãy số ngày thi thứ nhất.

Bài toán 4.0.2. *Cho dãy số $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Dãy $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ được gọi là đẹp nếu nó bị chặn và tồn tại số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi $i, j, k \in \mathbb{N}^*, n_0 \le i \le j \le k$ thì ta luôn có*

$$|a_i - a_k| \ge |a_j - a_k|. \tag{3}$$

a) Cho một ví dụ về một dãy số hội tụ nhưng không đẹp.

b) Chứng minh mọi dãy số đẹp đều hội tụ.

Chứng minh.

a) Xét dãy số $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ cho bởi $a_n = -\frac{(-1)^n}{n}$. Dãy số trên hiển nhiên hội tụ về 0. Ta chứng minh $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ không đẹp. Giả sử $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ đẹp. Khi đó, tồn tại số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi i, j, $k \in \mathbb{N}^*$, $n_0 \le i \le j \le k$ thì ta luôn có

$$|a_i - a_k| \ge |a_j - a_k|.$$

Tuy nhiên, xét $i = 2n_0$, $j = 2n_0 + 1$, $k = 2n_0 + 2$, ta có

$$|a_i - a_k| = \frac{1}{2n_0} - \frac{1}{2n_0+2} < \frac{1}{2n_0+1} + \frac{1}{2n_0+2} = |a_j - a_k|.$$

Do đó, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ không đẹp.

b) Ta chứng minh mọi dãy số đẹp đều hội tụ. Giả sử tồn tại $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ là dãy số đẹp và không hội tụ. Khi đó, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ bị chặn và không phải dãy Cauchy. Do $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ bị chặn nên tồn tại $M > 0$ sao cho $|a_n| \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ không phải dãy Cauchy nên tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tồn tại $m, n \geq n_0$ thỏa
$$|a_m - a_n| \geq \varepsilon.$$
Chọn $n_0 = 1$, ta tìm được $m_1 > n_1 \geq 1$ thỏa
$$|a_{m_1} - a_{n_1}| \geq \varepsilon.$$
Chọn $n_0 = m_1 + 1$, ta tìm được $m_2, n_2 \geq m_1 + 1$ thỏa
$$|a_{m_2} - a_{n_2}| \geq \varepsilon.$$
Xây dựng với cách tương tự, ta thu được một dãy $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ là dãy con của $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ thỏa mãn với mọi $n \geq 1$, ta luôn có
$$|b_{2k-1} - b_{2k}| \geq \varepsilon.$$
Do $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ là dãy con của $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ nên $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ cũng đẹp. Xét các số b_{2k}, $k \in \mathbb{N}^*$. Nếu tồn tại hai số b_{2i}, b_{2k}, $i < k$ thỏa mãn $|b_{2i} - b_{2k}| < 1$ thì bộ ba số $2i, 2k-1, 2k$ không thỏa mãn (3). Ngược lại, nếu không tồn tại hai số như vậy thì các tập $\left(b_{2m} - \frac{1}{2}, b_{2m} + \frac{1}{2}\right)$ không giao nhau. Điều này là vô lí vì có vô hạn tập như thế chứa trong tập $(-M, M)$. Do đó, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ hội tụ.

Tóm lại, bài toán đã được giải xong. $\square$

Ngoài cách chứng minh này, bạn **Đoàn Cao Khả**, một thành viên của đội huấn luyện viên cũng có một lời giải khác, sử dụng định lí Bolzano-Weierstrass. Bạn đọc có thể thử sử dụng gợi ý này để có cách giải khác cho bài toán. Tuy nhiên, do lời giải là thuần lí thuyết (sử dụng dãy Cauchy hoặc định lí Bolzano-Weierstrass) nên có phần không phù hợp với một bài dãy số ngày thi thứ nhất. Về định lí tổng quát về tính chất tự co rút trong không gian nhiều chiều, đây là một kết quả trong toán cao cấp, bạn đọc thực sự cảm thấy yêu thích chủ đề này có thể tìm đọc ở tài liệu [2]. Trở lại với bài toán đầu tiên, ta thấy ý tưởng để có được **Bài toán 4.0.1** chính là quá trình chứng minh dãy điểm tự co rút hội tụ. Xét dãy điểm bị chặn, không hội tụ, ta cần chứng minh dãy không tự co rút. Do dãy điểm không hội tụ, tương tự bài toán 2, ta sẽ xây dựng được dãy vô số điểm $A_1, A_2, \ldots$ thỏa mãn với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ thì $A_{2k-1}A_{2k} > \varepsilon$. Để tiện cho việc trình bày toán, tác giả đã cho $\varepsilon = 1$ và dãy bị chặn trong hình tròn bán kính bằng 2. Thực tế là với cách chứng minh như **Bài toán 4.0.2** (xét các đường tròn có tâm là các điểm chẵn), ta không cần đến vô số điểm mà chỉ cần 52 điểm để chứng minh bài toán 1. Câu hỏi đặt ra là liệu 52 có phải là con số tối ưu cho bài toán này hay chưa? Câu hỏi này xin dành cho bạn đọc trả lời.

Bài toán 4.0.3. *Trong đường tròn bán kính bằng 2, cho $2n$ điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ thỏa mãn với mọi $k = \overline{1, n}$ thì $A_{2k-1}A_{2k} > 1$. Tìm số n nhỏ nhất sao cho trong mọi tập hợp điểm như trên, luôn tồn tại ba số tự nhiên i, j, k, $i < j < k \leq 2n$ để $A_iA_k > A_jA_k$.*

Ngoài ra, ta cũng có thể có được thêm một bài toán trong không gian ba chiều, với cách ra đề tương tự **Bài toán 4.0.1**.

Bài toán 4.0.4. *Trong khối cầu tâm O bán kính bằng 2, cho 452 điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{452}$ thỏa mãn với mọi $q = \overline{1, 226}$ thì $A_{2q-1}A_{2q} > 1$. Chứng minh rằng luôn tồn tại ba số tự nhiên i, j, k, $i < j < k$ để $A_iA_k > A_jA_k$.*

Tài liệu

[1] Titu Andreescu, Dorin Andrica, *Complex Numbers From A To ...Z, 2006.*

[2] A. Daniilidis, G. David, E. Durand-Cartagena, A. Bdenant, *Rectifiability of Self-Contracted Curvesin the Euclidean Space and Applications: J. Geom. Anal* ***25****, 1211–1239 (2015).*

[3] *D'alembert Theorem*, Wolfram Mathworld.
http://mathworld.wolfram.com/dAlembertsTheorem.html

[4] Nguyễn Văn Linh, *Monge D'alembert theorem*.
https://nguyenvanlinh.files.wordpress.com/2013/04/monge-dalemberts-theorem.pdf

[5] Nguyễn Trần Hữu Thịnh, *Harmonic quadrilateral problem*.
https://artofproblemsolving.com/community/q1h1751478p11418640

NHỮNG CƠ HỘI MỞ RA SAU NGÀY HỘI TOÁN HỌC MỞ

Bài: Phạm Hy Hưng, ảnh: Mạnh Tùng

Sáng 9.12, gần 1.000 sinh viên, học sinh thuộc nhiều trường đại học và trung học phổ thông ở TP.HCM và một số địa phương khác ở Nam bộ đã tham dự Ngày hội Toán học mở (MOD) tại Trường Đại học Sài Gòn. MOD 2018 tại TP.HCM là chuỗi các hoạt động bao gồm triển lãm "Những ô cửa toán học" với các mô hình toán được in bằng máy in 3D, vừa trực quan toán học, vừa như tác phẩm nghệ thuật và nhiều gian hàng của các đơn vị về giáo dục toán (Toán IQ, toán cho trẻ em, toán tiếng Anh, toán cho học sinh, sinh viên) và STEM (Robotics, American Stem, mô hình câu lạc bộ STEM) cùng một số đơn vị xuất bản sách... Trọng tâm của ngày hội là hoạt động chuyên môn có chủ đề "Toán học không xa cách" với bài giảng "Toán học trong trí tuệ nhân tạo" và tọa đàm "Học toán để làm gì?".

Hình 1: Tọa đàm "Học Toán để làm gì" tại MOD 2018.

Sự kiện đã thu hút sự tham dự của nhiều tên tuổi trong ngành toán như GS.TSKH Hà Huy Khoái, nguyên Viện trưởng Viện toán học, PGS TS Lê Minh Hà - giám đốc điều hành Viện Nghiên cứu

Hình 2: GS Hà Huy Khoái phát biểu tại MOD 2018.

Cao cấp về Toán (VIASM); GS Hồ Tú Bảo từng làm tại Viện Khoa học và Công nghệ Tiên tiến Nhật Bản (JAIST), giám đốc phòng thí nghiệm khoa học dữ liệu tại Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán và hiện là giám đốc Viện John von Neumann (Đại học Quốc gia TP.HCM); GS Nguyễn Hùng Sơn (ĐH Warsaw, Ba Lan); Nhà giáo Nguyễn Khắc Minh, Phó tổng biên tập Tạp chí Pi; TS Nguyễn Thành Nam - Phó Chủ tịch HĐQT trường Đại học FPT, Chủ tịch Đại học trực tuyến FUNiX; TS Trần Nam Dũng - Phó hiệu trưởng trường Phổ thông Năng khiếu (Đại học quốc gia TP.HCM), PGS TS Phạm Hoàng Quân - Hiệu trưởng trường Đại học Sài Gòn...

MOD đã gây một hiệu ứng truyền thông tốt khi có khoảng hơn 30 bản tin, bài báo đã xuất hiện trước và sau khi sự kiện này được diễn ra. Nội dung bài giảng, các ý kiến phát biểu tại tọa đàm đã được nhiều tin, bài phản ánh.

Bài viết trên Epsilon muốn nhấn mạnh đến một câu chuyện khác được trao đổi tại MOD bên cạnh các hoạt động kể trên.

Gặp gỡ các nhà tóan học, ban tổ chức sau khi kết thúc các hoạt động chính của ngày hội, ông Hoàng Nam Tiến, Chủ tịch Công ty phần mềm FPT nêu lên một nhu cầu thực tế FPT đang rất cần những nhân sự được đào tạo chuyên sâu về toán và toán ứng dụng ở các ngành học mũi nhọn hiên nay đang phát triển rất nhanh là Trí tuệ nhân tạo (AI) và học máy (machine learning). Ông Hoàng Nam Tiến mong rằng trong tương lai gần, các trường đại học sẽ chú trọng hơn đến việc đào tạo để đáp ứng nhu cầu này. Ông Hoàng Nam Tiến khẳng định, sắp tới FPT sẽ ưu tiên nhận người tốt nghiệp đại học về AI hoặc machine learning với mức lương và chế độ đãi ngộ có thể cạnh tranh được với các công ty nước ngoài.

Hình 3: Học sinh và sinh viên tham gia các hoạt động tại MOD 2018.

Hình 4: Học sinh và sinh viên tham gia các hoạt động tại MOD 2018.

Hình 5: TS Trần Nam Dũng trả lời phỏng vấn về MOD

Theo TS Trần Nam Dũng, trong hai năm liên tiếp, miền đông và miền tậy nam bộ đều có học sinh đạt huy chương toán quốc tế (IMO). Thành tích huy chương vàng IMO 2017 của Hoàng Hữu Quốc Huy (Bà Rịa- Vũng Tàu) và huy chương đồng IMO 2018 của Đỗ Hoàng Việt (Đồng Tháp) là niềm khích lệ mang đến nhiều cảm hứng cho học sinh ở các tỉnh miền tây và miền đông Nam bộ.

TS. Huỳnh Quang Vũ, Trưởng Khoa Toán – Tin, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học quốc gia TP.HCM và TS. Phan Hoàng Chơn, Trưởng Khoa Toán – Ứng dụng, Trường Đại học Sài Gòn cùng bày tỏ mong muốn làm sao nắm được nhu cầu của các doanh nghiệp để có thể "đón đầu" việc đào tạo.

PGS TS Lê Minh Hà - giám đốc điều hành Viện Nghiên cứu Cao cấp về Toán (VIASM) cũng cho rằng chúng ta có thể đã sai lầm khi đã có thời cứ nói làm toán cơ bản là… nghèo và việc đó khiến x nhiều người e ngại học toán. Thực tế hiện nay đã thay đổi, rất nhiều cơ hội mới đã được mở ra.

Về điều này, TS. Huỳnh Quang Vũ và TS Phan Hoàng Chơn đều đồng ý và giải thích thêm, nếu cứ nói đến học toán chỉ để nghiên cứu, giảng dạy hoặc làm lý thuyết như từ trước tới nay thì vẫn khó thu hút sinh viên theo toán. Nhưng nếu theo những chuyên ngành toán ứng dụng đang có nhu cầu cao của xã hội thì ngành toán cũng sẽ thêm sức hấp dẫn đối với sinh viên. Học toán và toán ứng dụng ra trường có việc làm ổn định, lương cao thì chắc chắn toán sẽ hấp dân sinh viên.

Với bề dày gần 40 năm nghiên cứu về trí tuệ nhân tạo (AI) và học máy (machine learning), GS

Hình 6: GS Hồ Tú Bảo phát biểu tại MOD 2018.

Hồ Tú Bảo cho rằng học toán sẽ có nhiều cơ hội việc làm, nhất là trong bối cảnh chuyển đổi công nghệ số đang diễn ra rầm rộ hiện nay. "Muốn làm cách mạng phải có lực lượng. Muốn làm cách mạng công nghiệp lần thứ tư phải có nguồn nhân lực số", GS Hồ Tú Bảo đã viết như vậy trên tạp chí Tia Sáng. Khi được yêu cầu nói thêm về nhân lực số trong cuộc tọa đàm tại MOD 2018, ông nhận định: “Chúng ta đang sống trong thời đại số. Khái niệm AI bây giờ người ta nhìn rộng hơn, nhưng cốt lõi là chỗ nào dùng dữ liệu một cách khôn ngoan thì đó là trí tuệ nhân tạo. Mà dữ liệu là những con số. Khối lượng công việc hiện nay liên quan đến toán rất lớn. Nếu vừa có khả năng dùng toán vừa biết công nghệ thông tin, tức có khả năng phân tích dữ liệu thì đó chính là công việc của tương lai”.

GS Nguyễn Hùng Sơn cũng nhấn mạnh đến vai trò của toán đối với nhân lực số: “Làm trí tuệ nhân tạo, làm khoa học dữ liệu hiện nay là những người phải có đầy đủ các kiến thức không chỉ một ngành mà đa ngành. Những người làm khoa học dữ liệu tốt thì cần phải có kiến thức về tin học, đó là hiển nhiên. Phải có kiến thức tốt về toán học, phải có kỹ năng mềm để nói chuyện với khách hàng. Phải có những khả năng biểu diễn kết quả...”.

Ông Hoàng Minh Châu, cựu học sinh chuyên Toán A0- Đại học Tổng hợp Hà Nội, một trong những thành viên sáng lập FPT, nguyên Phó Chủ tịch Hội đồng Quản trị FPT cho rằng Việt Nam có thế mạnh về toán. Thế mạnh đó thể hiện ở đội ngũ giảng dạy toán hiện nay ở các trường đại học cả trong và ngoài nước, ở các thế hệ học sinh đam mê và theo học toán và cả ở các phong trào hoạt động về toán. Cũng giống nhu GS Hồ Tú Bảo, ông Hoàng Minh Châu cho rằng trong thời đại công nghệ 4.0 hiện nay, toán học đang mở ra những cơ hội mới cho bạn trẻ.

Hình 7: Học sinh và sinh viên tham gia các hoạt động tại MOD 2018.

Hình 8: Thầy giáo Nguyễn Khắc Minh phát biểu tại MOD 2018.

EPSILON, MOD, BM2E VÀ TINH THẦN TÌNH NGUYỆN

Trần Nam Dũng

MOD 2018 tại Tp HCM đã được tổ chức thành công. Bài viết của anh Phạm Hy Hưng sẽ mang lại một bức tranh toàn cảnh khá đầy đủ về Ngày hội toán học mở này. Ở đây tôi muốn viết về động lực đứng đằng sau các hoạt động thành công thời gian vừa qua: tinh thần tình nguyện.

Cách đây 10 năm, vào dịp cuối năm 2008, tôi đã chính thức rời FPT sau 13 năm cộng tác để dành thời gian cho một ấp ủ: xây dựng phong trào chuyên toán cho các tỉnh phía Nam. Với vai trò chỉ là một giảng viên của một trường Đại học, tôi chọn cách tiếp cận xã hội hóa, tình nguyện và tranh thủ sự ủng hộ của cá nhân và tập thể.

Thế rồi các Seminar toán sơ cấp, CLB toán học Lê Hồng Phong, Lời giải và bình luận đề thi các tỉnh và các thành phố, Lời giải và bình luận VMO, Trại hè toán học 2009, Gặp gỡ toán học, trường đông toán học, tạp chí Epsilon đã ra đời. Đa số các hoạt động vẫn tiếp tục đến ngày hôm nay.

Một đặc điểm chung của các hoạt động này là có chất lượng chuyên môn tốt nhưng lại ít tốn kém, đa số là miễn phí, còn nếu có phí cũng rất nhỏ. Chẳng hạn khi tôi làm CLB toán học Lê Hồng Phong, tôi xin anh Trần Đức Huyên (lúc đó là hiệu phó nhà trường) 1.000.000/tháng cho 20 học sinh LHP, các em ở trường khác như PTNK, Trần Đại Nghĩa, Nguyễn Thượng Hiền … muốn tham gia thì đóng 50.000/tháng (và thường thì quên đóng cũng … không sao).

Xuất bản Epsilon, một tạp chí có chất lượng tốt (về cả nội dung và hình thức), có chi phí rất thấp, gần như tối thiểu.

Khi tổ chức những sự kiện lớn như Trại hè toán học 2009, MODs 2017, MOD 2018 thì cần nguồn tài trợ. Rất may mắn là luôn có đủ những nguồi tài trợ như vậy. Tại MOD 2018, ngoài sự đóng góp về tài lực, vật lự và nhân lực của 3 đơn vị tổ chức chính là VIASM, SGU và HCMUS cùng 17 đơn vị tham gia gian hàng thì BM2E cũng có những đóng góp đáng kể nhưng thầm lặng: chi phí mời khách mời, chi phí cho đội STEM Nam Trực dự MOD, chi phí truyền thông, chi phí thiết kế, in ấn và đồng phục, chi phí phủ wifi, chi phí Gala-dinner dành cho các VIP, quà tặng cho các VIP, một phần chi phí văn nghệ, chi phí quay phim và chụp ảnh … tất cả đều được lấy từ các nguồn tài trợ của BM2E. Đa số các nhà tài trợ cá nhân đều không muốn nêu tên, nên ở đây tôi chỉ muốn nhắc đến sự trợ giúp của một số đơn vị : Titan Education, FPT Software, Funix, NXB Kim Đồng, CNC BROS. CO. LTD. Không có sự đóng góp của các nhà hảo tâm, chắc chắn là BTC sẽ rất khó khăn và khó lòng có thể tổ chức được một MOD hoành tráng và hiệu quả như đã diễn ra.

Thành công của MOD 2018 và của các hoạt động đã, đang và sẽ diễn ra của BM2E gửi đến cho chúng ta một thông điệp ngầm: tinh thần tình nguyện có một sức mạnh khủng khiếp. Chỉ cần làm việc tốt, chúng ta sẽ được ủng hộ. Và có thể làm được những việc lớn lao. Vì thế, hãy làm việc tốt. Chung tay làm việc tốt.

Cuối cùng, xin gửi đến bạn đọc nội dung một lá thư mà tôi đã gửi đến vợ chồng của một nhà tài trợ, qua đó tôi giải thích các nguyên tắc vận hành, động cơ bên trong của BM2E.

Kính gửi anh chị

Em giải thích kỹ một chút về tinh thần và cơ chế của BM2E

BM2E là một phong trào tình nguyện, không có yếu tố kinh doanh. BM2E cần một số nguồn tài trợ để làm tốt hơn, nhưng sức sống của nó không phụ thuộc quá nhiều vào nguồn tài trợ. Bởi vì.

Một là: Các hoạt động mà BM2E là hoạt động xã hội hóa, không đem cái gì đi cho không. Người thụ hưởng cũng phải mất tiền, chỉ là ít hơn đáng kể so với bình thường. Ví dụ thay vì phải có 10M mới mời được 1 thầy giáo về dạy trong 1 ngày thì nay chỉ cần 3M. Sách mua từ nước ngoài về trước đây thường gấp đôi giá bìa (do phí ship và trung gian) thì nay thấp hơn giá bìa. Quyển sách giá 50 USD chỉ mất 1triệu VND.

Làm sao mình làm được? Đó là giá trị của BM2E. Mình làm được nhờ mình tổ chức tốt, có sự ủng hộ và có tinh thần tình nguyện ở mỗi người tham gia

Hai là: BM2E có những hoạt động có thu như tổ chức thi, xuất bản sách, làm đề thi theo đơn đặt hàng. Trên tinh thần BM2E thì lệ phí thi rất nhỏ, nhưng do mình tổ chức tốt và có sự ủng hộ của các tình nguyện viên nên chi phí cũng là tối thiểu, từ đó mà có số dư. Phần làm đề thi theo đơn đặt hàng cũng rất triển vọng, vì mình làm tốt thì tiếp tục có đơn hàng (hiện nay đã có Singapore, Myanmar, Philippines đặt hàng).

Ba là: BM2E nếu đem ra nước ngoài thì rất hiệu quả. Ngược với VN, nơi có nhiều người giỏi nhưng thiếu tiền thì ở nhiều nước, họ có tiền nhưng không có người giỏi, nếu có thì phí rất đắt. Cho nên mình có thể đào tạo GV để cung cấp cho các nước trong những đợt dạy ngắn. Em đã từng sang Myanmar dạy 5 ngày (thực dạy chỉ 2 ngày) mà thu nhập lên đến 3.000 USD. Chính từ nguồn tiền này mà năm ngoái em ứng trước mua sách từ Mỹ về bán cho bạn đọc cả nước với giá rẻ (đã thu hồi vốn). Sau này mình cử người đi, lúc về mọi người có thể trích

Bốn là: Ở phần đào tạo GV, ban đầu cần một ít tiền để khởi động, tạo cú hích. Nhưng sau này, khi bản thân GV họ ý thức được đi học là cần thiết để tăng năng suất lao động (một giờ dạy toán tiếng Anh hay toán IQ được trả gấp đôi, thậm chí gấp 3 giờ bình thường) thì họ sẽ không ngại bỏ tiền đi học. Đương nhiên trên tinh thần không lấy kinh doanh là mục đích, học phí vẫn luôn vừa sức. Dù chất lượng luôn đặt lên hàng đầu. Tinh thần của bọn em là dù làm tình nguyện, lấy ít tiền nhưng chất lượng và thái độ phục vụ vẫn phải tốt nhất.

Đương nhiên, nếu có nguồn tài trợ tốt thì bọn em sẽ làm tốt hơn, tổ chức được những hoạt động cộng đồng chất lượng (như Ngày hội toán học mở, Bài giảng đại chúng, Tạp chí Online, trao các giải thưởng cho các cá nhân và tổ chức có đóng góp hiệu quả cho phong trào . . .)

Kính thư

Em Nam Dũng