PHÂN TÍCH BÌNH PHƯƠNG BẰNG TAM THỨC BẬC HAI - Nguyễn Văn Huyện

QUAN ĐIỂM CỦA KANT VỀ KHÔNG GIAN VÀ THỜI GIAN - Nguyễn Ái Việt

SỐ HOÀN HẢO VÀ NHỮNG SỐ BẠN BÈ - Nguyễn Duy Liên

SỬ DỤNG GIỚI HẠN TRONG GIẢI TOÁN - Lê Phúc Lữ

NHỮNG BÍ ẨN CỦA SỐ NGUYÊN TỐ - Ian Stewart

VƯỢT ĐỊNH KIẾN BẰNG LĂNG BA VI BỘ - Ngô Quang Hưng

VÀ CÁC CHUYÊN MỤC KHÁC

THÁNG 2 \ 2017
NO 13

Epsilon
Tạp chí online của cộng đồng
những người yêu toán

Epsilon - Một chặng đường

Ban Biên tập Epsilon

LỜI NGỎ TỪ TỔNG BIÊN TẬP

Vậy là chúng ta đã đi qua một chặng đường của 13 số Epsilon, tương đương với gần 800 ngày, 26 tháng và nhiều đêm thức trắng của các tác giả và các thành viên ban biên tập.

Cuộc tổng diễn tập đã thành công. Và hơn thế một tinh thần vì cộng đồng đã được lan tỏa. Các tác giả đã đóng góp những bài viết tâm huyết của mình. Và các biên tập viên đã tốn nhiều thời gian, công sức để sắp xếp, trình bày các bài viết đó trong một hình thức đẹp nhất, khoa học nhất. Tất cả đã cùng tạo ra những số Epsilon đáng đọc và đáng lưu giữ.

Epsilon không phải là tờ báo để đọc trong một ngày hay một vài ngày. Hôm nay bạn đọc có thể đọc (và hiểu được) một vài bài trong đó. Nhưng sau vài năm, nếu đọc lại, bạn đọc có thể sẽ tìm được nhiều điều thú vị hơn thế (và hiểu được nhiều hơn). Vì thế tuy Epsilon sẽ tạm dừng lại ở con số 13, những số báo của Epsilon chắc chắn vẫn sẽ còn hiện diện và lan tỏa.

Và hơn cả 13 số báo Epsilon, tinh thần của Epsilon chắc chắn sẽ được tiếp nối qua những con người đã làm nên nó. Đó là các tác giả, các biên tập viên và các bạn đọc thân thiết. Tinh thần đó là sẵn sàng đóng góp vì cộng đồng với tất cả nhiệt huyết, trí tuệ và sự chuyên nghiệp.

Trong lời ngỏ lần này, tôi với tư cách tổng biên tập, muốn gửi lời cảm ơn chân thành đến các tác giả, những người đã đóng góp các bài viết tuyệt vời của mình cho Epsilon, các cộng tác viên, những người đã giúp chúng tôi dịch các bài viết hay từ nhiều thứ tiếng, các bạn đọc, những người đã động viên và truyền cảm hứng cho công việc của chúng tôi. Và tất nhiên là tôi muốn cảm ơn các cộng sự trẻ tuổi của tôi, những thành viên ban biên tập, những người đã làm việc rất chuyên nghiệp và hoàn toàn bất vụ lợi. (Nhưng tôi cũng tin rằng, tất cả mọi người đều đã thu được rất nhiều qua 13 số báo Epsilon).

Trong số các tác giả của Epsilon, tôi muốn đặc biệt nhắc đến các tác giả Ngô Quang Hưng, Lý Ngọc Tuệ, Trần Quang Hùng, Nguyễn Duy Liên những người xứng đáng có những tuyển tập riêng các bài viết dành cho Epsilon. Không dành được nhiều thời gian cho Epsilon nhưng các GS Hà Huy Khoái, Đàm Thanh Sơn, Ngô Bảo Châu luôn có những quan tâm đặc biệt dành cho chúng tôi, gợi ý đề tài và tạo cảm hứng cho chúng tôi tiếp tục những khởi đầu của mình. Epsilon cũng đã chắp cánh cho những bài viết hay của các bạn học sinh, trong đó đặc biệt là mảng hình học. Nổi bật trong số các tác giả trẻ tuổi có thể nhắc đến bạn Nguyễn Trần Hữu Thịnh, học sinh lớp 12 chuyên toán trường THPT chuyên Lý Tự Trọng Cần Thơ. Và các bà đỡ cho các bài viết hình học là hai biên tập viên Trần Quang Hùng và Ngô Quang Dương.

Epsilon đã hoàn thành nhiệm vụ giai đoạn thứ nhất của mình. Nói như thế nghĩa là chặng đường thứ nhất đã được đi qua. Nhưng cũng có nghĩa là sẽ còn chặng đường thứ hai. Trong thời gian tới, chúng tôi sẽ không ra các số định kỳ vào ngày 13 của các tháng chẵn nữa. Thay vào đó sẽ là các tuyển tập theo các tác giả, theo các chủ đề, theo các chuyên mục. Và những sản phẩm mới này sẽ bắt đầu xuất hiện ngay trong năm 2017.

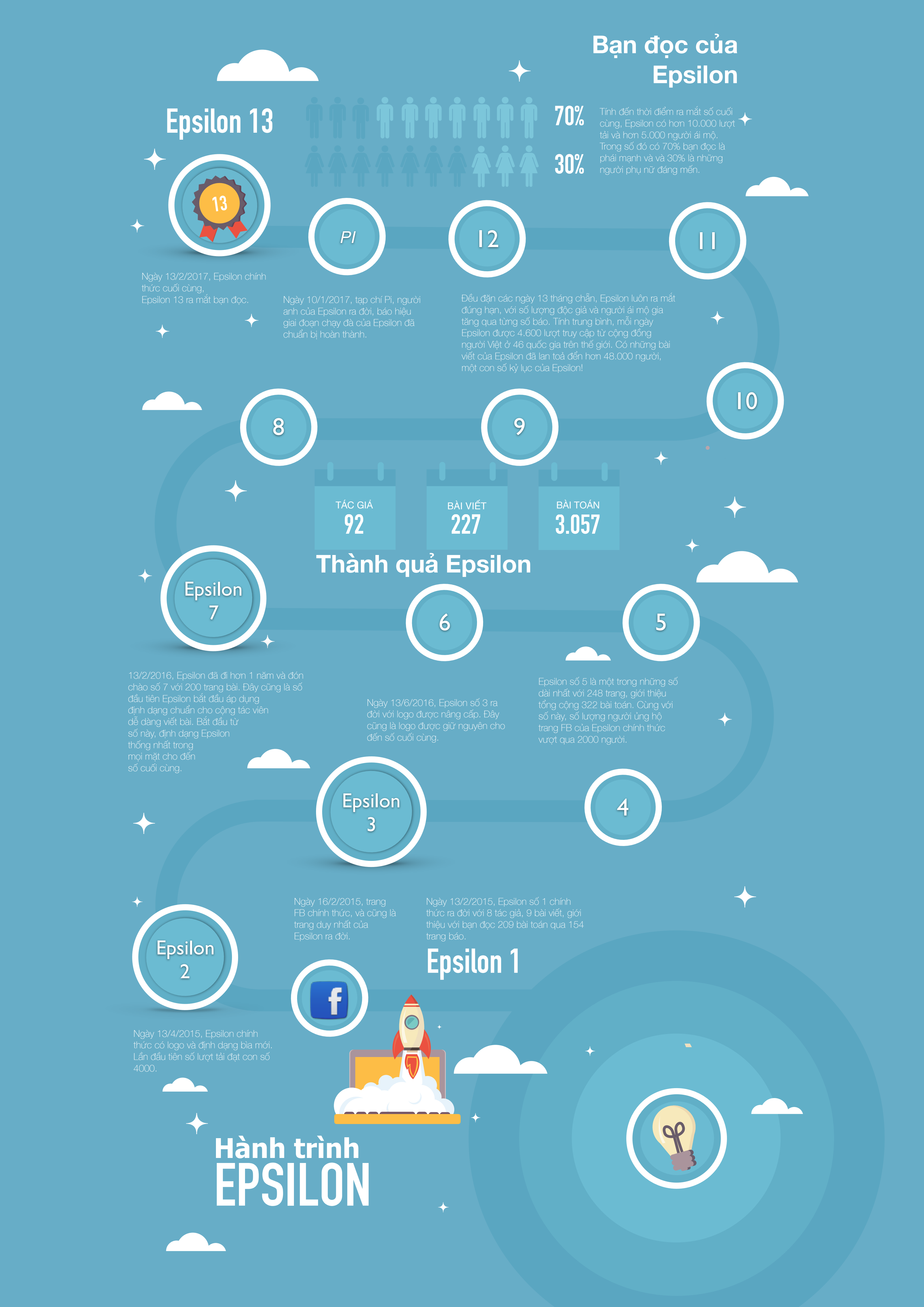
Có nghĩa là Epsilon vẫn còn tiếp tục.

Và giờ đây, hãy cùng chúng tôi điểm lại những thăng trầm của Epsilon trong suốt 800 ngày qua.

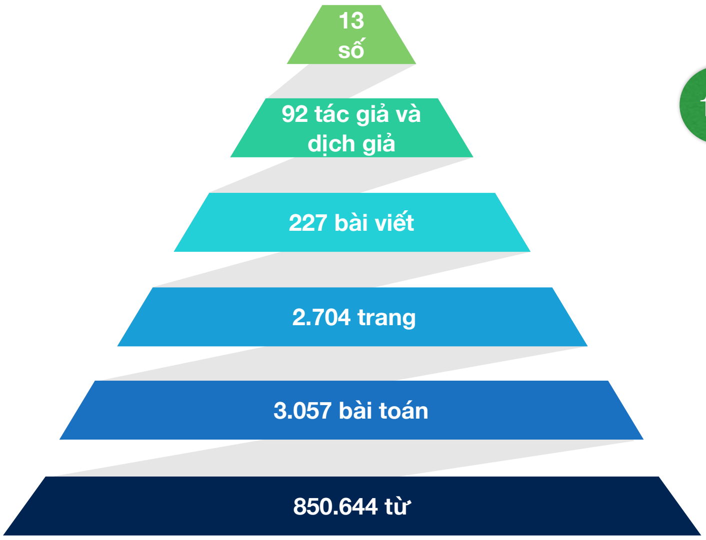
Epsilon - Một chặng đường và Những cột mốc

Ý tưởng về Epsilon được hình thành từ khoảng cuối năm 2014, và hiện thực hoá vào tháng 2 năm 2015, với số Epsilon đầu tiên. Trong phần này, chúng tôi tạm điểm qua những cột mốc quan trọng trong suốt chặng đường phát triển của Epsilon.

- **13/2/2015:** Epsilon số 1 ra đời với 8 tác giả, 9 bài viết qua 154 trang.
- **16/2/2015:** Trang FB chính thức ra đời.
- **13/4/2015:** Epsilon chính thức có logo và định dạng bìa mới. Tạp chí bắt đầu nhận được những bài viết của những "cây đa cây đề" trong giới. Ban Biên tập tăng lên 5 thành viên. Lần đầu tiên số lượt tải đạt con số 4000.
- **13/6/2015:** Epsilon số 3 ra đời với logo được nâng cấp. Đây cũng là logo được giữ nguyên cho đến số cuối cùng. Tạp chí tiếp tục phát triển cùng với số thành viên Ban Biên tập tăng lên thành 6 người.
- **13/8/2015:** Epsilon số 4 phiên bản beta ra đời. Đây cũng là số Epsilon duy nhất không có phiên bản chính thức.
- **13/10/2015:** Epsilon số 5 ra đời, đây cũng là một trong những số dài nhất với 245 trang (đứng thứ 2 sau số cuối cùng bạn đọc đang xem). Số lượng thành viên của ban biên tập cũng gia tăng thành 7 người. Định dạng trang của Epsilon cũng được cập nhật.
- **29/10/2015:** Số lượng người ủng hộ trang FB của Epsilon chính thức vượt qua 2.000 người.
- **13/12/2015:** Epsilon số 6 với 18 bài viết trong 177 trang ra đời. Thành viên ban biên tập tiếp tục tăng thêm và bắt đầu cố định ở con số 8 – 9 thành viên. Số người quan tâm lên đến hơn 20.000 và số lượt tải đã vượt quá 2.000.
- **13/2/2016:** Epsilon đã đi hơn 1 năm và đón chào số 7 với 200 trang bài. Đây cũng là số đầu tiên Epsilon bắt đầu áp dụng định dạng chuẩn cho cộng tác viên dễ dàng viết bài. Bắt đầu từ số này, định dạng Epsilon thống nhất trong mọi mặt cho đến số cuối cùng.
- **13/4/2016:** Epsilon số 8 ra đời với phong độ ổn định qua gần 15.000 người quan tâm.
- **13/6/2016:** Epsilon số 9 ra mắt với 205 trang viết. Đây là số đầu tiên nhận được hơn 200 yêu thích từ bạn đọc.
- **13/8/2016:** Epsilon số 10 ra đời, lần đầu tiên số lượt tải vượt 10.000 lượt và từ đó giữ vững cho đến các số cuối cùng.
- **13/10/2016:** Epsilon số 11 ra mắt, với hơn 48.000 người quan tâm và đây vẫn là một kỷ lục của báo, một thành công ngoài dự đoán của ban biên tập.
- **13/12/2016:** Epsilon số 12 ra mắt với hơn 12.000 lượt tải từ bạn đọc.
- **10/1/2017:** Tạp chí Pi, người anh của Epsilon ra đời, báo hiệu giai đoạn chạy đà của Epsilon đã chuẩn bị hoàn thành.
- **13/2/2017:** Epsilon cuối cùng, Epsilon số 13 ra mắt, lập kỷ lục là số dài nhất (327 trang), giới thiệu nhiều bài toán nhất (390 bài), từ sự đóng góp của 30 tác giả và dịch giả.



Bạn đọc của Epsilon
Epsilon 13
70%
30%
Tính đến thời điểm ra mắt số cuối cùng, Epsilon có hơn 10.000 lượt tải và hơn 5.000 người ái mộ. Trong số đó có 70% bạn đọc là phái mạnh và và 30% là những người phụ nữ đáng mến.
13
PI
12
11
Ngày 13/2/2017, Epsilon chính thức cuối cùng, Epsilon 13 ra mắt bạn đọc.
Ngày 10/1/2017, tạp chí Pi, người anh của Epsilon ra đời, báo hiệu giai đoạn chạy đà của Epsilon đã chuẩn bị hoàn thành.
Đều đặn các ngày 13 tháng chẵn, Epsilon luôn ra mắt đúng hạn, với số lượng độc giả và người ái mộ gia tăng qua từng số báo. Tính trung bình, mỗi ngày Epsilon được 4.600 lượt truy cập từ cộng đồng người Việt ở 46 quốc gia trên thế giới. Có những bài viết của Epsilon đã lan toả đển hơn 48.000 người, một con số kỷ lục của Epsilon!
8
9
10
TÁC GIẢ 92
BÀI VIẾT 227
BÀI TOÁN 3.057
Thành quả Epsilon
Epsilon 7
6
5
13/2/2016, Epsilon đã đi hơn 1 năm và đón chào số 7 với 200 trang bài. Đây cũng là số đầu tiên Epsilon bắt đầu áp dụng định dạng chuẩn cho cộng tác viên dễ dàng viết bài. Bắt đầu từ số này, định dạng Epsilon thống nhất trong mọi mặt cho đến số cuối cùng.
Ngày 13/6/2016, Epsilon số 3 ra đời với logo được nâng cấp. Đây cũng là logo được giữ nguyên cho đến số cuối cùng.
Epsilon số 5 là một trong những số dài nhất với 248 trang, giới thiệu tổng cộng 322 bài toán. Cùng với số này, số lượng người ủng hộ trang FB của Epsilon chính thức vượt qua 2000 người.
Epsilon 3
4
Ngày 16/2/2015, trang FB chính thức, và cũng là trang duy nhất của Epsilon ra đời.
Ngày 13/2/2015, Epsilon số 1 chính thức ra đời với 8 tác giả, 9 bài viết, giới thiệu với bạn đọc 209 bài toán qua 154 trang báo.
Epsilon 1
Epsilon 2
Ngày 13/4/2015, Epsilon chính thức có logo và định dạng bìa mới. Lần đầu tiên số lượt tải đạt con số 4000.
Hành trình EPSILON

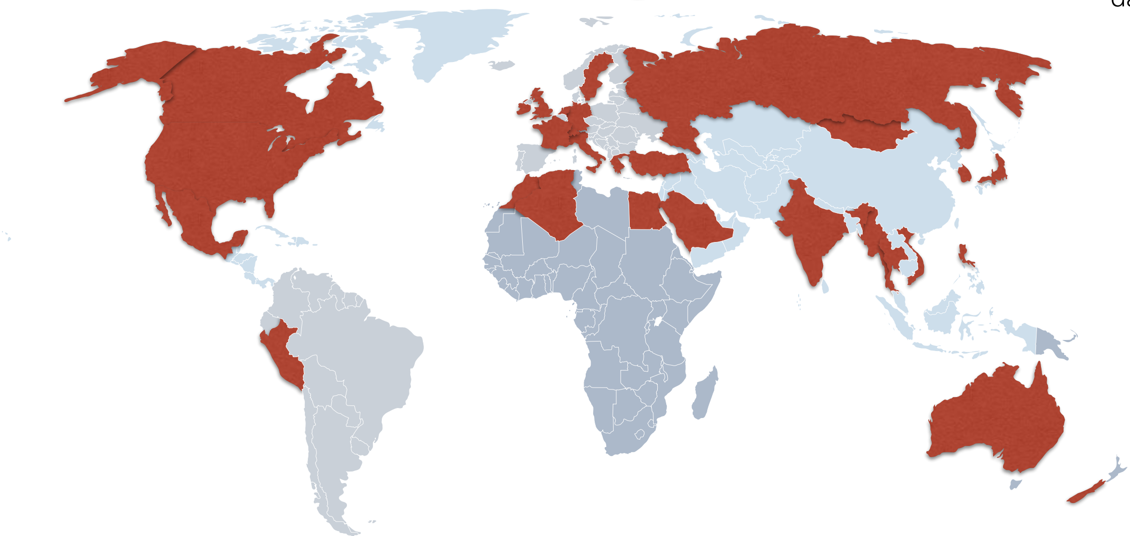


180 Bài viết giới thiệu nhiều bài toán nhất: 180 bài.
"Giới thiệu về kỳ thi học bổng du học Nga"
Epsilon 11 - Lê Phúc Lữ
Đứng thứ nhì là "Về bài bất đẳng thức trong đề thi VMO 2015" với 84 bài.

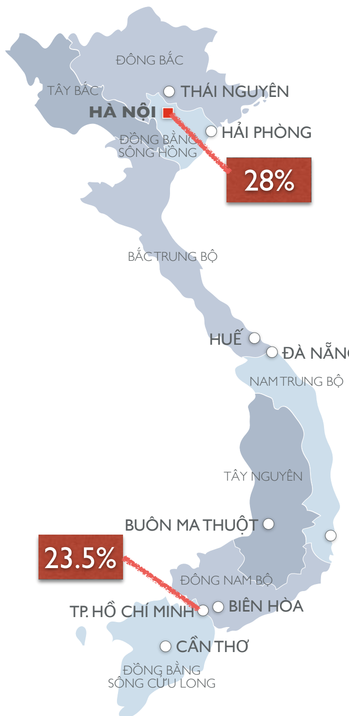
54 Bài viết nhiều trang nhất: 54 trang.
"Về bài bất đẳng thức trong đề thi VMO 2015"
Epsilon 1 - Võ Quốc Bá Cẩn.
Đứng thứ nhì là "Cực trị tập hợp" với 52 trang, Epsilon 3 - Trần Minh Hiền.

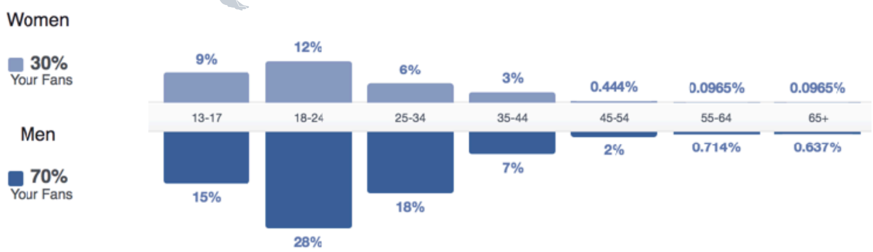
11 Chuyên đề thường xuyên nhất: 11 số
"Cổ điển - hiện đại" và **"Toán học giải trí"**

Bạn đọc và người ái mộ Epsilon ở 46 quốc gia trên thế giới



Người ái mộ Epsilon ở Việt Nam đa số đến từ Hà Nội và Sài Gòn.





48.200 Số lần quan tâm kỷ lục với một tin bài.

33 Tác giả đóng góp nhiều bài nhất:
Chủ biên **Trần Nam Dũng** với 33 bài viết.

12.000 Số lượt tải cho một số báo.

7 Số bài viết nhiều nhất của một tác giả không phải từ ban biên tập: 7 bài.
Đến từ hai cây bút quen thuộc: **Nguyễn Tiến Dũng** và **Lý Ngọc Tuệ**.
Đây cũng là số lượng bài nhiều nhất từ 1 tác giả trong một số Epsilon:
Chủ biên **Trần Nam Dũng** với Epsilon - 5.

4.600 Số lượt truy cập trung bình mỗi ngày.

2 Có 2 tác giả cùng có mặt trong đủ 13 số Epsilon:
Trần Nam Dũng và **Trần Quang Hùng**.

Kết thúc cũng chính là khởi đầu

Năm mới Đinh Dậu là thời điểm Epsilon trọn vẹn với 13 kỳ.

Chúng tôi tin rằng mọi kết thúc của hành trình tri thức đều chỉ là trạm dừng chuẩn bị cho những khám phá sâu sắc hơn. Ý nghĩa đó được gửi gắm trong thiết kế bìa của số 13: những vòng tuần hoàn có thủy có chung.

"Thư bất tận ngôn", lời đã tận, tâm ý còn chưa dứt. Lời kết của hôm nay của Epsilon, cũng là lời chúc đầu năm ban biên tập dành cho quý độc giả và kỳ vọng của chính chúng tôi: một khởi đầu mới, một hành trình mới chuẩn bị mở ra...

MỤC LỤC

VƯỢT ĐỊNH KIẾN BẰNG LĂNG BA VI BỘ

Ngô Quang Hưng (LogicBlox)

1. Hội xu ngửa

Tương truyền rằng, nhà vua ở một vương quốc vĩ đại nọ rất yêu khoa học. Tên miền của vương quốc này là NN. Ông ta muốn tìm hiểu cơ động học của tiền xu vào những đêm nguyệt thực, vì đây là những đêm thiên địa dung hòa, vũ trụ tiết lộ bí mật của nó. Cứ mỗi lần nguyệt thực, ông yêu cầu mỗi người dân thảy một đồng xu xem nó sấp hay ngửa. Sau một thời gian, dân chúng cũng nhiễm tinh thần yêu chân lý của nhà vua, và họ đưa ra những mô hình dự đoán sấp ngửa. Ngưu tầm ngưu, mã tầm mã, mô hình tầm mô hình.

Hiệp hội mười đồng xu ngửa ra đời trong hoàn cảnh ấy. Mô hình dự đoán của hiệp hội này rất đơn giản: các đồng xu thảy trong một đêm nguyệt thực luôn ra mặt ngửa. Vương quốc nọ có khoảng 100 triệu dân. Hiệp hội mười đồng xu ngửa có trên dưới 100 nghìn thành viên. Họ có cả một website tên là "xungửa.còm" rất đông khách vãng lai. Tất cả các đồng xu thảy bởi 100 nghìn thành viên này trong 10 lần nguyệt thực gần đây nhất đều cho ra mặt ngửa, vị chi là 1 triệu đồng xu ngửa. Các trải nghiệm của họ hoàn toàn nhất quán với mô hình. Họ lý luận rằng xác suất mà cả một triệu đồng xu đều ngửa là một phần 2 lũy thừa một triệu. Mà 2 mũ 130 thôi đã nhiều hơn tổng số nguyên tử trên toàn vũ trụ rồi. Do đó lý thuyết của họ được minh chứng bằng khoa học, xác suất mà họ sai gần như bằng 0.

Trời sinh cả Du lẫn Lượng. Song song với họ, còn có hiệp hội mười đồng xu úp, rồi điều tra dân số thường niên của nhà vua cho thấy còn có cả hiệp hội hiệp hội năm ngửa, năm sấp, hiệp hội sấp ngửa năm lần, hiệp hội sấp sấp ngửa ngửa sấp hai lần, và cỡ chừng 1019 hiệp hội khác. Các hiệp hội này tranh cãi nhau chí tử, sắp sửa bạo loạn đến nơi.

Ông vua nọ rất buồn, cố gắng đứng ra hòa giải. Phụng thiên thừa mệnh, hoàng đế chiếu rằng: đến 7 đêm nguyệt thực kế tiếp, tự thân vua sẽ thảy đồng xu, và hiệp hội nào đoán đúng cả 7 đồng xu sẽ là kẻ chiến thắng, hội trưởng sẽ được phong chức quốc sư, tiền tài quyền lực không bút nào tả xiết. Nguyệt thực thì mỗi năm có từ 0 đến 3 lần, phải chờ đến 5 năm sau kết quả mới được công bố. Kết quả là: còn đến cả chục hiệp hội đoán đúng cả 7 đồng xu! Ông vua thấy thế buồn quá ngã vật ra chết lăn quay cù quày, ôm xuống tuyền tài cái mộng giải thích cơ động học đồng xu. Mặc dù chẳng hội nào chiếm được chức thái sư, kể từ ngày đó, các hiệp hội này danh tiếng nổi như cồn, trở thành các trường phái nghiên cứu môn cơ động học đồng xu đêm nguyệt thực mà hiện nay có rất nhiều môn đệ tử trên toàn thế giới.

2. Từ ngữ dùng để phỉ báng, xưa và nay

Đó là chuyện xưa. Ngày nay, ở một quốc gia khác với tên miền VN, cũng có nhiều môn phái lớn. Chỉ hơi khác là các mặt đồng xu ở quốc gia này được in nhiều thứ hơn là sấp/ngửa:

Đồng xu	Ngửa	Sấp
1	Mũi tẹt	Mũi tẹt hơn
2	Làm cho Tuổi Trẻ	Làm cho Thanh Niên
3	Thi Đại Học được $\geq$ 13.5 điểm (vừa đậu!)	Thi Đại Học được < 13.5 điểm
4	Sinh ra trong gia đình khá giả	Sinh ra trong gia đình nghèo
5	Bố mẹ cho genes tốt	Bố mẹ không cho genes tốt
6	Sinh bên này vĩ tuyến 17	Sinh bên kia vĩ tuyến 17
7	Cao trên 1 mét 45	Cao dưới 1 mét 45
8	Vòng ngực trên 72cm	Vòng ngực dưới 72cm
9	Cha mẹ đặt tên là Lê Văn Kiểm	Cha mẹ đặt tên là Tăng Minh Phụng
10	...	...

Và hiệp hội mười xu ngửa trong quốc gia này có tên rất lạ là hiệp hội *èo lít*. Những người còn nhớ văn hóa vương quốc NN cổ xưa không thể hiểu được tại sao mười xu ngửa trong quốc gia VN lại được gọi là èo lít, chắc là cần thương hiệu mới vì sợ vi phạm tác quyền. Nhưng khác nhau chỉ về tên gọi, còn hiện tượng thì vẫn như ở NN: các hiệp hội vào In Tờ Lét phỉ nhau chí tử. Thậm chí thành viên các hiệp hội còn dùng những từ như "ngu", "dốt", "cộng sản", "chống cộng Bolsa", "hèn", "đểu", vân vân, để gọi nhau.

Hồi xưa ở vương quốc NN người ta hay chửi nhau rằng: "*mày là cái đồ sấp ngửa ngửa sấp*".

3. Dập đầu vào tường mãi, một trong hai thứ sẽ vỡ

Trong vương quốc với tên miền VH, xu ngửa = nhà xuất bản nhận in bản thảo, xu sấp = nhà xuất bản từ chối in bản thảo.

Năm 1995, một phụ nữ người Anh nộp bản thảo của mình và nhận được 12 đồng xu sấp liên tục. Thay vì gia nhập hội một tá xu sấp, bà ta thử thêm xu mười ba và lần này là xu ngửa từ nhà xuất bản Bloomsbury. Đồng xu ngửa này cũng xém nữa là sấp nếu không nhờ một cô bé 8 tuổi tên Alice Newton, con gái của giám đốc Bloomsbury, đã đọc chương một và đòi bố cho xem chương hai. Tuy nhận in, một biên tập viên của Bloomsbury gợi ý rằng phụ nữ nọ nên đi tìm việc khác vì viết sách trẻ em rất ít tiền. Người phụ nữ đó tên là Joanne Rowling. Bản thảo đánh trên máy đánh chữ có tựa đề "*Harry Potter và hòn đá của Triết Gia*". Đồng xu ngửa số 13 biến Rowling thành người đầu tiên trong lịch sử thế giới trở thành tỉ phú tiền đô nhờ viết sách, và là người giàu thứ 1140 trên thế giới, theo tạp chí Forbes năm 2011.[1]

Chỉ trong phạm vi sách trẻ em, bản thảo quyển "*And To Think That I Saw It On Mulberry Street*" nhận được khoảng 27, 28 đồng xu sấp. Đó là bản thảo đầu tay của *Theodor Seuss Geisel*, được

[1]Năm 2016 bà không còn trong danh sách tỉ phú, mặc dù kiếm được rất nhiều tiền từ cả sách lẫn phim. Vì, bà làm từ thiện rất nhiều!

biết nhiều hơn qua cái tên *Dr. Seuss*. Phần còn lại là lịch sử. Trong top 100 các sách thiếu nhi bán chạy nhất mọi thời đại, 16 quyển là của Dr. Seuss. Ông viết khoảng 60 sách thiếu nhi, bán được cỡ 220 triệu bản.

Thế nhỡ những người như Rowling và Dr. Seuss gia nhập hội mười xu sấp hơi sớm một chút thì sao?

Một tác giả Mỹ đã nhận toàn xu sấp, và tự tử chết. Mẹ ông ta đem một bản thảo đến nhà văn Walker Percy và Percy giúp đem in. Bản thảo nọ là quyển *A Confederacy of Dunces*. Tác giả đã chết tên là *John Kennedy Toole*. Năm 1981, tiểu thuyết này được có mỗi … giải Pulitzer.

Trong thế giới điện ảnh (ĐA), xu ngửa = phim có lời nhiều, xu sấp = phim lời ít. Các hội sấp ngửa tương tự như thế giới VH nhiều không kể xiết (xem thêm [6] có nhiều ví dụ).

4. Các bệnh viện phụ sản có đồng hồ nguyên tử

Chiêm tinh học là một giáo phái xu ngửa có truyền thống vài nghìn năm. Các tín đồ tin rằng giờ/ngày/tháng/năm sinh và vị trí trăng sao có thể dùng để đoán vận mệnh, tính cách cá nhân và các sự kiện xã hội. Không ít nghiên cứu khoa học đã cho thấy chiêm tinh học đoán chính xác bằng với ... đoán bừa [1, 5].

Gần đây hơn, các nhà khoa học đã ghi lại hành trình cá nhân của 2000 người sinh trong khoảng vài phút của nhau, hồi đầu tháng 3 năm 1958, mà theo chiêm tinh học thì họ sẽ có "số phận" tương tự. Họ đánh giá khoảng 100 đặc điểm, bao gồm chỉ số IQ, nghề nghiệp, sức khỏe tinh thần, khả năng nghệ thuật, toán học, khoa học, thể thao, khả năng đọc, viết, vân vân. Đây là tất cả các đặc điểm mà chiêm tinh học khẳng định có thể "đoán" dùng hồ sơ khai sinh. Kết quả là Chiêm Tinh Học hoàn toàn sai [2].

Tín đồ chiêm tinh học cãi: "*cách nhau vài phút là làm số phận khác nhau lắm rồi*". Thế nhưng nếu bạn đi xem chiêm tinh gia đoán số phận thì họ sẽ vui lòng lấy dữ liệu ngày giờ sinh rất không chính xác mà bạn đưa ra. Bạn có bao giờ đi một cái bệnh viện phụ sản mà ở đó có đồng hồ nguyên tử, hay đồng hồ caesium chưa? Mà đồng hồ nguyên tử cũng chỉ đúng đến 1 phần 10 mũ 10 giây thôi.

Vả lại, kể cả khi có đồng hồ nguyên tử thì tính giờ sinh từ lúc nào nhỉ? Ông bố đứng bên cạnh cầm đồng hồ (nguyên tử) quả lắc, nhăm nhăm thấy bà mụ vừa lấy con mình ra là .. bấm ngay à? Nếu thò cái đầu ra thì có gọi là "ra đời" chưa? Nếu phải ra ngoài hẳn thì mới tính vào giờ sinh thì những đứa bé chết trong các ca sinh khó khăn là không có "số mệnh" à? Còn những đứa bé phải mổ thì tính giờ sinh thế nào?

Lý luận như trên của tín đồ chiêm tinh thuộc về vương quốc tất cả các đồng xu hai mặt đều ngửa. Đoán kiểu nào cũng đúng, bằng chứng ngược kiểu gì cũng sai. Trong vương quốc này, *hiệu ứng Forer* được thấy ở khắp nơi. Năm 1948, nhà tâm lý học Bertram R. Forer đưa cho sinh viên của ông một bộ câu hỏi xác định cá tính[2]. Sau khi các sinh viên trả lời bộ câu hỏi xong, thì mỗi sinh viên nhận được một bản "đánh giá cá tính" dựa trên các câu trả lời của bản thân sinh viên họ.

[2] Personality test

Mỗi sinh viên sẽ chấm điểm bản đánh giá cá tính của bản thân mình xem đúng hay sai, điểm từ 0 (hoàn toàn sai) đến 5 (hoàn toàn đúng). Các bản đánh giá cá tính này được các sinh viên cho điểm trung bình 4.26: rất ấn tượng!

Chỉ có một vấn đề nhỏ: Ferer đã phát cho tất cả các sinh viên *cùng một* bản đánh giá cá tính mà ông chép lại từ các *horoscopes* nhan nhản trên các tạp chí. Bản đánh giá cá tính này có nội dung như sau:

> Bạn có nhu cầu là người khác ngưỡng mộ bạn, tuy nhiên bạn khá nghiêm khắc với bản thân. Mặc dù bạn có một vài nhược điểm trong tích cách, con người bạn có cách khác để khắc phục các nhược điểm này. Bạn có nhiều khả năng tiềm tàng mà bạn chưa chuyển chúng thành lợi thế được. Nhìn bên ngoài thì bạn có kỷ luật, tự kiểm được bản thân, nhưng bên trong thì bạn không tự tin lắm. Thỉnh thoảng bạn rất nghi ngờ rằng bạn đã có các quyết định đúng đắn hay chưa, hoặc có làm việc đúng đạo lý hay không. Bạn thích có một chút thay đổi và sự đa dạng, và cảm thấy không thoả mãn khi bị gò bó, giới hạn. Bạn tự hào là con người suy nghĩ độc lập; và không chấp nhận dễ dàng các ý kiến của người khác mà không có bằng chứng. Bạn đã nhận ra rằng quá thành tâm bộc lộ mình không phải là điều khôn ngoan. Đôi lúc bạn không sống quá nội tâm, giao thiệp rộng, nhưng lại cũng có những lúc sống tâm trạng, cố thủ. Một vài mơ ước của bạn không thực tế lắm.

Các chiêm tinh gia là các nhà tâm lý đại tài, nhưng khả năng dự đoán tương lai của họ thì bằng với khả năng bệnh viên phụ sản Từ Dũ có đồng hồ nguyên tử trên từng giường đẻ.

Vài chục năm trước, một người Tây Ban Nha trúng sổ số độc đắc. Chuỗi số độc đắc kết thúc bằng con số 48. Rất tự hào về "thành tựu" của mình, ông ta tiết lộ bí mật: "tôi nằm mơ thấy số 7 trong 7 đêm liền, mà 7 lần 7 là 48, do đó tôi tìm mua các số kết thúc bằng 48, nhờ đó trúng độc đắc". Ông này có thể bầu làm vua của vương quốc các đồng xu 2 mặt ngửa.[3]

5. Bọn cướp biển và hiện tượng ấm toàn cầu

Năm 2005, ban giáo dục tiểu ban Kansas đòi dạy "*Intelligent Design*" — một thông điệp tôn giáo giả danh khoa học — trong các trường phổ thông. Để minh họa cho tính nhố nhăng của lý luận của ban giáo dục, Bobby Henderson đã làm một cái sơ đồ (Hình 1) so sánh tổng số cướp biển và nhiệt độ toàn cầu (xem ảnh), và sau đó thành lập đại giáo phái *Quỷ Mì Ý Bay*[4] có đến vài chục triệu tín đồ (để chế diễu ban giáo dục nọ). Chúng ta sẽ bàn về giáo phái Quỷ Mì Ý Bay trong một dịp khác, điều ta cần là cái sơ đồ giảm cướp biển thì tăng nhiệt độ toàn cầu ở trên.

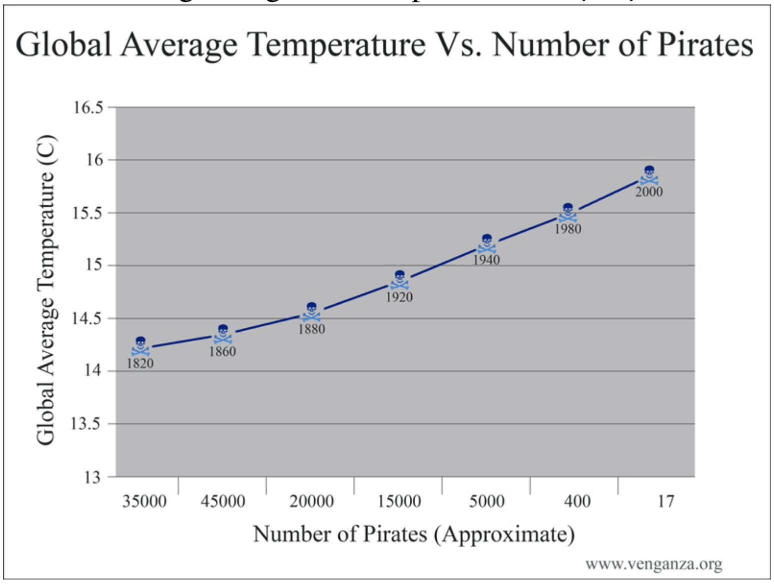
Một giáo phái xu ngửa có rất nhiều tín đồ có tên là *Objectivism*. Giáo chủ là Ayn Rand, với Alan Greenspan là một (cựu) giáo dân. Sau vụ khủng hoảng tài chính năm 2008, Greenspan thừa nhận[5]:

[3] Xem Stanley Meisler, Spain lottery — *Not even war stops it*. Los Angeles Times, Dec 30, 1977.

[4] Church of Flying Spaghetti Monster

[5] http://www.nytimes.com/2008/10/23/business/worldbusiness/23iht-gspan.4.17206624.html

Hình 1: Đồng biến giữa số cướp biển và nhiệt độ toàn cầu



> "Tôi đã sai lầm khi tin rằng vì lợi ích bản thân, các tổ chức – đặc biệt là là các ngân hàng – sẽ cố bảo vệ cổ đông và tiền mặt của chính họ."

Khoan xét đến việc Objectivism là đúng hay sai (tín đồ của họ bảo vệ tới cùng, cho rằng Greeenspan không phải là free marketeer thật sự), trong riêng thế giới của Greenspan thì năm 2008 cướp biển không giảm mà quả đất vẫn ấm lên.

6. Shakespeare và một triệu con khỉ

Định lý vô hạn các con khỉ[6] đại khái nói rằng, cho thật nhiều các con khỉ gõ lung tung vào các bàn phím, thì với xác suất cực gần với 1, chúng sẽ gõ được Hamlet của Shakespeare. Ta có thể chứng minh điều này bằng lý thuyết xác suất không khó khăn gì (xem Mục 10).

Trong một hội nghị năm 1996, Robert Wilensky nói:

> Chúng ta từng nghe bảo rằng một triệu con khỉ ngồi ở một triệu bàn phím có thể gõ toàn bộ các tuyệt tác của Shakespeare. Bây giờ, may nhờ có Internet, ta biết rằng điều này không đúng sự thật.

Con khỉ đang gõ bài này thấy rất nhột.

Các nhà nghiên cứu tại trường đại học Plymouth ở Anh đã thí nghiệm hồi năm 2003: bỏ một máy tính vào chuồng khỉ ở vườn thú Paignton ở Tây Nam nước Anh. Bọn khỉ lấy đá đập tán loạn vào máy tính; sau đó thì tiểu tiện, đại tiện vào bàn phím, cuối cùng mới gõ một đống chữ S, và

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Infinite_monkey_theorem

vài chữ A, J, L, M, cho ra 5 trang sản phẩm. Mike Phillips, một trong số các nhà nghiên cứu này, nói: "rõ ràng tiếng Anh không phải tiếng mẹ đẻ của khỉ".

Gạt đùa bỡn sang một bên. Định lý khỉ thật sự nói rằng, bất kỳ cái gì — nếu tồn tại — thì dù hiếm hoi đến mấy mà có đủ người tìm thì tìm vẫn ra. Thậm chí không cần một "chiến lược" tìm kiếm gì cả. Các con khỉ chỉ gõ loạn cào cào lên thôi. Bỏ một cây kim lên bãi cát. Một người vốc 10 nắm cát bất kỳ thì khả năng tìm ra kim trong đó là không tưởng. Nhưng nếu có một triệu người, mỗi người vốc 10 nắm cát bất kỳ, thì nhiều khả năng là tìm được kim. Khi độ hiếm hoi giảm xuống (đến không hiếm hoi) thì tổng số khỉ cần thiết sẽ giảm xuống. Nếu một nửa bãi cát có kim thì chỉ cần một gã vốc một nắm cát là đủ.

Nếu một gã nào đó trong một triệu gã tìm kim bãi cát ở trên mà tìm được kim thì không phải hắn có công năng đặc dị gì. Con khỉ gõ được Hamlet thì vẫn là con khỉ. Điểm này được Taleb lập đi lập lại trong hai quyển Fooled by Randomness [8] và The Black Swan [9]. Chỉ cần sự ngẫu nhiên, một vài mutual funds sẽ có những thời điểm lời khủng khiếp, một vài cá nhân sẽ có những thành công vượt bực (Bill Miller của Legg Mason Capital Management chẳng hạn).

Những hội sấp ngửa "sống sót" trong vương quốc NN là hoàn toàn ngẫu nhiên, có thể chứng minh được bằng lý thuyết xác suất (xem Mục 10).

7. Từ công ty đoán giá chứng khoán đến hợp tác xã đánh đề

Mỗi sáng chủ nhật, bạn nhận được một email từ công ty *Đoán Giá Xì Tốc Inc.* dự đoán giá chứng khoán của AT&T tuần tới sẽ tăng hay giảm. Email này để minh chứng là họ nói đúng, và nói với bạn rằng nếu bạn trả cho họ 100USD, họ sẽ gửi dự đoán tuần kế tiếp cho. Hơn thế nữa, công ty Đoán Giá Xì Tốc Inc. sẽ bồi hoàn toàn bộ 100USD nếu họ đoán sai. Hấp dẫn chưa?

Bạn chưa tin tưởng lắm, vì sợ họ lừa đảo gì đó. Tuần sau, bạn thấy họ đã đoán đúng tuần trước, và lại nhận được một email y chang như thế. Họ đoán đúng liên tục 7 tuần liền! À ha. Chắc công ty này (CEO tên là NQH) phải sở hữu thiên tài đoán giá xì tốc. Đến đây thì bạn tin sái cổ. Xác suất đoán ngẫu nhiên mà trúng 7 lần liên tục là 1/128, rất thấp!

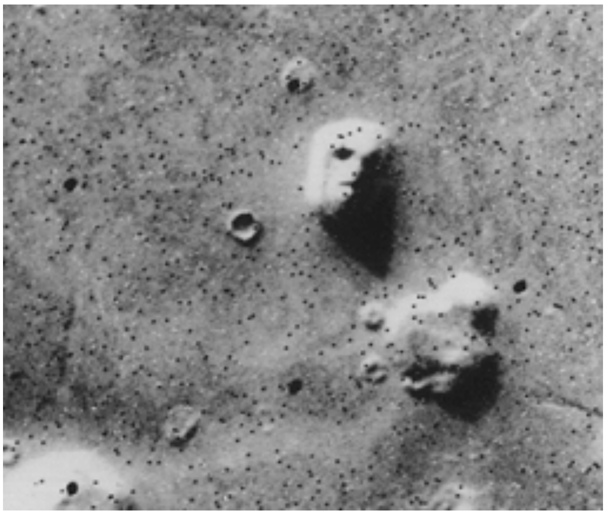
Công ty đó có "thiên tài" thế này. Tuần đầu tiên họ gửi email đến 128 người, một nửa số đó đoán stock tăng, một nửa đoán stock giảm. Tuần sau họ chỉ gửi email đến 64 người mà lượt email đầu đã đoán trúng! Cứ thế 7 tuần liền. Dĩ nhiên, họ không chỉ gửi ra 128 emails mà sẽ gửi 128 triệu email. Nếu chỉ 1/100 số người nhận "7 lần đoán trúng" này bị lừa, cho họ 100USD, thì họ đã kiếm được 10 triệu USD trong 7 tuần. Chẳng qua, bạn tin "thiên tài" của họ vì bạn chỉ có bằng chứng "khẳng định" cái thiên tài đó mà không biết về các bằng chứng phủ định. Tất cả các thành viên hội xu ngửa trong vương quốc NN đều mắc phải lỗi này, gọi là lỗi "thiên kiến khẳng định" (confirmation bias).

Báo Tuổi Trẻ ngày 30/8/2008 đưa tin sau đây:

> TT (TP.HCM) – Chiều 30-8, Cục Cảnh sát điều tra tội phạm về trật tự xã hội (C14) – Bộ Công an đã tống đạt quyết định khởi tố bị can và đồng loạt thực hiện lệnh

khám xét nhà riêng, bắt tạm giam sáu người về hành vi lừa đảo chiếm đoạt tài sản. Các đối tượng này là những mắt xích quan trọng trong đường dây lừa đảo kết quả xổ số kiến thiết (XSKT) có qui mô trên toàn quốc vừa bị lực lượng C14 phối hợp với Công an tỉnh Quảng Bình triệt phá vào tháng tám vừa qua. Trước đó đã có bốn người khác liên quan trong đường dây này bị khởi tố, bắt tạm giam cùng hành vi lừa đảo. Theo điều tra, những người trong đường dây này đã mạo danh người của công ty XSKT các địa phương, khu vực trên toàn quốc, hằng ngày gọi điện thoại cho hàng ngàn người ở khắp các tỉnh thành và cho mỗi người một con số. Chúng quả quyết đó là số "trúng" do công ty XSKT "làm" và yêu cầu người được cho nên mua (vé số) hoặc đánh đề lô số đó. Cứ mỗi tên trong đường dây có nhiệm vụ điện thoại hơn 100 người/ngày và cho mỗi người một số theo thứ tự từ số 00 đến số 99.

8. Khi những con giun đất hiển linh



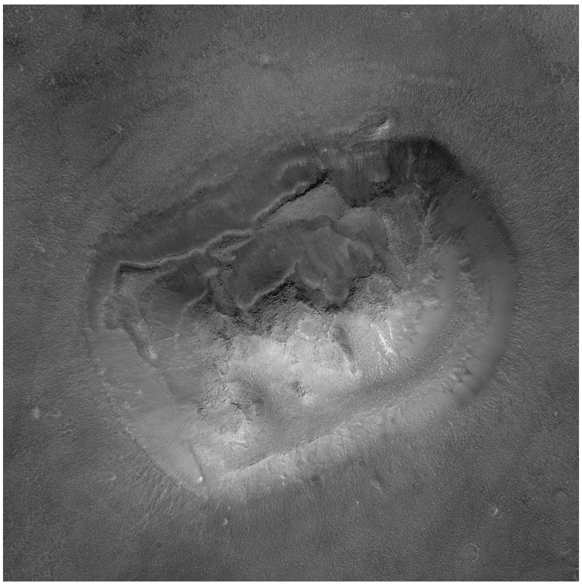
Hình 2: Bộ mặt trên sao Hỏa, 1976

Năm 1986, phi thuyền Viking I bay quanh sao Hỏa chụp ảnh. Qua vùng Cydonia phi thuyền này đã chụp được một vùng đồi núi mà dưới bóng sáng tối trong giống mặt người (giống một Pharaoh Ai Cập). Ảnh này (Hình 2) lại được các "lý thuyết gia" conspiracy theorists vẽ ra đủ thứ lý thuyết lăng nhăng cộng với cả phim ảnh và talk shows. Hình 3 là ảnh chụp hồi 2001:

Các nhà khoa học ở NASA thấy thích thú về bức ảnh … rồi thôi, vì họ có nhiều việc quan trọng để làm. Trong một mớ hỗn mang rộng lớn, bao giờ cũng có các góc nhỏ có một trật tự nào đó. Hiện tượng này xuất hiện rất nhiều trong phương pháp xác suất, theo nghĩa của Paul Erdos, khi ta chứng minh rằng trong một không gian mẫu đủ lớn thì các trật tự cục bộ[7] sẽ tồn tại. Nhìn mãi lên mây sẽ thấy một số đám mây trông giống con rồng, con chó, con ... giun đất. Không hiểu tại sao đến bây giờ người ta không viết truyền thuyết về con giun đất hiển linh.

Trong mớ hỗn mang nhân quả của hiện tượng ấm toàn cầu, cái "trật tự" cướp biển giảm làm tăng nhiệt độ quả đất không dùng để kết luận ra cái gì được hết!

[7]Local pattern



Hình 3: Bộ mặt trên sao Hỏa, 2001

9. Vượt định kiến bằng Lăng Ba Vi Bộ

Hội viên hội xu ngửa đã có mô hình sai vì họ khái quát hóa từ một vài "mẫu" địa phương. Nhiều định kiến xuất phát từ cùng một lỗi như thế. Ai đó gặp vài anh Việt Kiều rồi kết luận Việt Kiều ở Mỹ làm nails đánh bài. Người khác gặp vài anh du học sinh rồi kết luận du học sinh Việt Nam ở bẩn và không biết xem bóng bầu dục. Thử tưởng tượng Rowling kết luận, sau 12 lần bị từ chối, rằng Harry Potter sẽ không bao giờ được nhận xuất bản.

Những đồng xu trong vương quốc NN được ném độc lập với nhau. Trong cuộc sống chúng ta thường gặp các đồng xu xâu lại với nhau thành chuỗi bằng một sợi dây vô hình nào đó. Người Bắc có nhiều bạn bè người Bắc, Người Nam có nhiều bạn bè người Nam, họ giúp nhau thắt chặt những định kiến vùng miền. Kết quả của đồng xu kế tiếp "đồng biến"[8] chặt chẽ với đồng xu trước. Gia đình ba mẹ tin vào chiêm tinh học sẽ tiêm nhiễm cho con niềm tin này. Đồng xu của em bé vừa ra đời đã có mặt nặng mặt nhẹ.

Giả sử ta có một ly nước chanh, có đường ở dưới nhưng chưa khuấy lên, thì không thể nếm nước trên bề mặt (cho dù nếm cả ngụm) để kết luận là ly nước không có đường. Đầu tiên phải khuấy nó lên. Tiếc rằng, trên thực tế thì không thể "khuấy" Việt Kiều không làm móng tay và Việt Kiều làm móng tay rồi mới làm bạn ngẫu nhiên với họ. Nhưng điều có thể làm là nếm ly nước ở nhiều chỗ: bên phải một cái, dưới đáy một cái, bên trái một cái, v.v. Phương pháp này trong lý thuyết xác suất gọi là phương pháp Monte Carlo. Nhưng làm bạn với Việt Kiều Cali, New York, Chicago, Ithaca, v.v. một cách ngẫu nhiên như thế cũng rất khó vì giới hạn Vật Lý. Có thể phần nào giải quyết tình trạng này bằng Markov Chain Monte Carlo, gọi nôm na là *Lăng Ba Vi Bộ*.

[8] Correlate

Một phần không nhỏ những gì diễn ra trong cuộc sống và xã hội là kết quả của sự ngẫu nhiên (NN). Trong một miền hỗn mang to lớn, nếu nhìn vào một góc nhỏ nào đó ta có thể tìm được một trật tự nhất định. Trật tự đó chẳng có ý nghĩa gì ghê gớm.

Không thể đánh giá con người hay sự vật/việc chỉ dùng kết quả thành bại được. Sẽ là một lỗi logic cơ bản nếu bài này kết luận rằng tất cả thành bại đều do ngẫu nhiên (vì các loại ví dụ kể trên chỉ là một số đồng tiền ngửa ủng hộ luận điểm này!). Dĩ nhiên tài năng có ảnh hưởng đến kết quả, nhưng con người có xu hướng đánh giá thấp vai trò của sự ngẫu nhiên.

Sẽ có ít định kiến hơn nếu chúng ta hiểu ý nghĩa của xác suất, không bước trên lối mòn định sẵn mà cần "Lăng Ba Vi Bộ" tìm Thiên Nga Đen.

Nếu thi thoảng có gặp nhiều xu sấp, thì không nên gia nhập hội xu sấp ngay. Đây là lý do tại sao những người kiên trì thường thành công, thiên tài có thể "tu luyện" được. Ngược lại, Einstein cảnh báo rằng: "định nghĩa của sự điên rồ là làm một thứ lập đi lập lại mà mong đợi kết quả khác nhau".

Cuối cùng: thế nhỡ đâu tất cả những gì nhân loại chứng kiến/đo đạc được cho đến nay đều là xu ngửa thì sao? Nhỡ đâu ba định luật Newton và sự tiến hóa sinh vật cũng là xu ngửa. Nhỡ đâu mai mặt trời không mọc nữa và quả đất xoay chiều? Đây là *vấn đề qui nạp*[9] của David Hume, vượt quá khuôn khổ bài viết. Rất hy vọng có thể quay lại đề tài này trong một bài viết tới.

10. Một ít tính toán

Đã đến lúc chúng ta trả lại một ít chặt chẽ Toán học cho bài viết.

10.1. Mười xu ngửa và định lý khỉ vô hạn

Giả sử anh Tám Tàng ở vương quốc NN thảy n đồng xu với xác suất xấp ngửa là $1/2$. Thì xác suất có n mặt ngửa là $1/2^n$. Xác suất mà n đồng xu cho ra một pattern xấp ngửa tuỳ ý cũng là $1/2^n$; bộ pattern "tất cả đều ngửa" chẳng có ý nghĩa đặc biệt gì. Nếu vương quốc NN có N anh Tám Tàng, thì tính trung bình sẽ có $N/2^n$ công dân đều thảy được n xu ngửa. Do đó, với $N = 10^8$, $n = 10$, ta biết là tính trung bình có khoảng $10^8/2^{10} \approx 100,000$ (trăm nghìn) công dân thảy được 10 đồng tiền ngửa liên tục. Điều này đúng với tất cả $2^{10} = 1024$ patterns xấp ngửa. Còn nếu $n = 17$ thì vẫn sẽ có cỡ $10^8/2^{17} \approx 750$ người có cùng pattern sấp ngửa.

Nguyên tắc này có thể áp dụng ở chỗ khác với xác suất khác. Giả sử Tám Tàng chọn mua chứng khoán ngẫu nhiên, với xác suất "đầu tư" có lời là 1/2 mỗi năm. (Khi kinh tế đang phát triển thì mua bừa mấy cái chứng khoán Blue Chip có lời còn chắc hơn $1/2$.) Vậy thì xác suất mà Tám Tàng có lời 15 năm liên tục là $1/2^{15}$. Trong 100 triệu nhà đầu tư ngẫu nhiên như vậy, sẽ có khoảng $10^8/2^{15} \approx 3000$ nhà đầu tư có lời liên tục 15 năm liền.

Về định lý vô hạn khỉ, ta biết rằng Hamlet có 30,557 từ, mỗi từ cùng lắm là 20 ký tự, và do đó Hamlet có ít hơn 10^5 ký tự. Một con khỉ gõ ngẫu nhiên một chuỗi 10^5 ký tự, trong bộ ký tự 26

[9] https://plato.stanford.edu/entries/induction-problem/

ký tự, thì xác suất mà nó gõ được Hamlet là $p = 26^{-10^5}$. Tất nhiên là xác suất này rất nhỏ. Giả sử ta có N con khỉ, mỗi con gõ độc lập 10^5 ký tự. Gọi X là số khỉ số khỉ gõ được Hamlet, thì $E[X] = Np$ (trị kỳ vọng của X). Gõ được Hamlet = xu ngửa, gõ linh tinh = xu xấp. Chọn N sao cho $Np \geq 8$, dùng bất đẳng thức Chernoff [10], ta có

$$\text{Prob}[X < Np/2] < \frac{1}{e^{Np/8}}$$

và do đó khi N lớn, không những là có một con khỉ gõ được Hamlet, mà có ít nhất $Np/2$ khỉ gõ được, với xác suất tiến đến 1.

10.2. Trật tự cục bộ và số Ramsey

Một party ở vương quốc NN có 6 người tham dự. Bạn có thể chứng minh rằng trong 6 người đó luôn tồn tại 3 người từng cặp quen nhau, hoặc 3 người từng cặp không quen nhau (bài tập!). Tổng quát hơn một chút, giả sử ta muốn chứng minh một khẳng định sau: "*trong một party N người tham dự, luôn có m người từng cặp quen nhau hoặc n người từng cặp không quen nhau*". Ta chọn (N, m, n) như thế nào để chứng minh khẳng định này?

Ta sẽ chứng minh rằng, với N đủ lớn (so với m, n), thì khẳng định trên luôn đúng. Khẳng định này là một ví dụ của phát biểu ở trên, rằng "trong một mớ hỗn mang đủ lớn, luôn tồn tại một trật tự cục bộ". Trong một party lớn, tìm thấy một nhóm người quen lẫn nhau thì không có gì đáng ngạc nhiên cả.

Ramsey [7] trả lời câu hỏi trên bằng cách gọi $R(m, n)$ là số nguyên N nhỏ nhất sao cho khẳng định trên là đúng, và chứng minh một chặn trên cho $R(m, n)$. Ta theo Erdős và Szekeres [3] chứng minh một chặn trên đẹp: $R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$. Xét một party có $N = R(m-1, n) + R(m, n-1)$ người. Chọn một anh Tám Tàng bất kỳ và phân hoạch những người còn lại tại hai tập: tập X người quen Tám Tàng, và Y người không quen tám tàng. Như vậy $N = 1 + |X| + |Y|$, và do đó hoặc $|X| \geq R(m-1, n)$ hoặc $|Y| \geq R(m, n-1)$. Giả sử $|X| \geq R(m-1, n)$ thì ta tìm được $m-1$ người quen lẫn nhau trong tập X hoặc n người từng cặp không quen trong tập X. Nếu có n người từng cặp không quen thì ta xong. Nếu có $m-1$ người quen lẫn nhau, thì họ cùng với Tám Tàng tạo thành m người quen lẫn nhau. Từ bất đẳng thức $R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$, bằng quy nạp ta chứng minh được $R(m+1, n+1) \leq \binom{m+n}{n}$ (bài tập!). Tìm chặn trên cho các số Ramsey $R(m, n)$ và tổng quát hoá của chúng là một nhánh nghiên cứu thú vị và rất khó của toán tổ hợp hiện đại [4].

Paul Erdős chứng minh chặn dưới cho $R(n, n)$, dùng lý luận sau đây. Có tất cả $2^{\binom{N}{2}}$ cách để cấu thành một tổ hợp quen/không quen của tất cả những người tham dự party. Gọi S là một tập n người nào đó; gọi S là tập "đơn sắc" nếu những người trong S quen nhau từng cặp hoặc không quen nhau từng cặp. Trong số $2^{\binom{N}{2}}$ tổ hợp trên, có đúng $2 \times 2^{\binom{N}{2}-\binom{n}{2}}$ tổ hợp mà S là tập đơn sắc. Để dễ hình dung, tưởng tượng một đồ thị hai phần, bên trái là $2^{\binom{N}{2}}$ tổ hợp, bên phải là $\binom{N}{n}$ cách chọn tập S. Ta nối S với một tổ hợp bên trái nếu S là tập đơn sắc cho tổ hợp đó. Thì, các đỉnh bên phải có bậc là $2^{1+\binom{N}{2}-\binom{n}{2}}$. (Theo nguyên tắc Dirichlet, ta có thể nghĩ về S như một chuồng

[10] http://www.cse.buffalo.edu/~hungngo/classes/2011/Fall-694/lectures/tail.pdf

bồ câu, và mỗi tổ hợp là một con bồ câu.) Nếu $2^{\binom{N}{2}} > \binom{N}{n} 2^{1+\binom{N}{2}-\binom{n}{2}}$, thì tồn tại một tổ hợp không "nối" với tập đơn sắc nào, và do đó $R(n,n) > N$. Giả sử $n \geq 3$, ta chọn $N = \lfloor 2^{n/2} \rfloor$. Thì,

$$\binom{N}{n} 2^{1+\binom{N}{2}-\binom{n}{2}} < \frac{N^n}{n!} \frac{2^{1+n/2}}{2^{n^2/2}} 2^{\binom{N}{2}} < \frac{2^{1+n/2}}{n!} \cdot \frac{N^n}{2^{n^2/2}} \cdot 2^{\binom{N}{2}} < 2^{\binom{N}{2}}.$$

Đó là cách Erdős chứng minh rằng $R(n,n) > \lfloor 2^{n/2} \rfloor$.

Tài liệu

[1] CARLSON, S. A double-blind test of astrology. *Nature 318* (1985), 419–425.

[2] DEAN, G., MATHER, A., NIAS, D., AND SMIT, R. Tests of astrology: A critical review of hundreds of studies, 2016.

[3] ERDÖS, P., AND SZEKERES, G. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math. 2* (1935), 463–470.

[4] GRAHAM, R. L., ROTHSCHILD, B. L., AND SPENCER, J. H. *Ramsey theory*, second ed. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990. A Wiley-Interscience Publication.

[5] MADDOX, J. Defending science against anti-science. *Nature: International weekly journal of science 368*, 6468 (1994), 185.

[6] MLODINOW, L. *The Drunkard's Walk: How Randomness Rules Our Lives*. Pantheon, May 2008.

[7] RAMSEY, F. P. On a Problem of Formal Logic. *Proc. London Math. Soc. S2-30*, 1, 264.

[8] TALEB, N. *Fooled by randomness: The hidden role of chance in life and in the markets*, vol. 1. Random House Incorporated, 2005.

[9] TALEB, N. N. *The black swan: The impact of the highly improbable*, vol. 2. Random house, 2007.

QUAN NIỆM CỦA KANT VỀ KHÔNG GIAN VÀ THỜI GIAN

Nguyễn Ái Việt
(Viện Công Nghệ Thông Tin, Đại Học Quốc gia Hà Nội)

TÓM TẮT

Chúng ta đều nhận thức không gian mà chúng ta đang sống gắn liền với một khái niệm toán học, đó là không gian Euclide 3 chiều. Chúng ta coi điều đó là hiển nhiên từ giáo trình hình học không gian ở trường trung học. Những người chịu khó tìm hiểu hơn một chút, sẽ biết thêm không thời gian là không gian Euclide 4 chiều, thêm một chiều thời gian. Tuy nhiên, giữa khái niệm toán học và không gian, thời gian là một khoảng cách, có thể dẫn tới việc xem xét lại việc sử dụng khái niệm toán học có phù hợp hay không. Việc gán ghép không gian và thời gian với các không gian Euclide không hoàn toàn hiển nhiên. Chúng ta hãy xem nhà triết học Imannuel Kant quan niệm thế nào về không thời gian. Từ những quan niệm đó chúng ta có thể đặt những câu hỏi gì và có thể tìm những khái niệm toán học mới phù hợp hơn ra sao. Có thể trong tương lai, chúng ta sẽ phát hiện ra rằng không thời gian mà chúng ta đang sống sẽ có những cấu trúc toán học khác xa với những gì chúng ta đang sử dụng hôm nay.

Quan niệm về không thời gian

Trước Kant, Newton đã đưa ra khái niệm không gian và thời gian tuyệt đối [1]. Leibnitz ngược lại, cho rằng không gian và thời gian là tương đối, phụ thuộc vào vật chất, vì vậy con người nhận thức được không gian và thời gian nhờ quan sát vật chất vận động [1]. Không có vật chất, không gian và thời gian không tồn tại. Kant đưa ra quan niệm phức tạp hơn: không gian và thời gian là trực giác tiên nghiệm (à priori). Mặc dù quan niệm của Kant về không thời gian phủ định quan niệm về không gian và thời gian tuyệt đối tồn tại khách quan ngoài ý thức của Newton, quan niệm của ông cũng phủ nhận quan niệm của Leibnitz, khi cho rằng không gian và thời gian tồn tại trong ý thức trước khi có quan sát về nó. Quan niệm của Kant dựa trên phương pháp luận rất tinh tế về nhận thức.

1. Phương pháp luận của Kant về "cảm giác" và "trực giác"

Theo Kant [2], ý thức được chia thành "ý thức chủ quan", gồm các "cảm giác" (sensation) và "ý thức khách quan", gồm "trực giác"(intuition) và "khái niệm"(concept). Việc phân chia này rất tinh tế, cần phải nhận chân thật kỹ để tránh hiểu sai.

Với cách phân tích này, chúng ta sẽ lần lượt xét các câu hỏi sau. Câu hỏi thứ nhất, "cảm giác" có hoàn toàn chủ quan hay không? Nếu chúng ta thừa nhận việc có cảm giác là nhờ tiếp xúc với thực tế khách quan. Câu hỏi thứ hai cũng có liên quan tới câu hỏi thứ nhất, liệu "trực giác" là hình dung về sự vật cụ thể có hoàn toàn khách quan hay không? Xét đồng thời cả hai câu hỏi này, chúng ta có thể thấy Kant đã tách nhận biết của chúng ta thành hai phần riêng biệt, phần khách quan được định nghĩa là trực giác, phần chủ quan được định nghĩa là cảm giác.

Tuy vậy, ở đây có vấn đề việc tách nhận biết như vậy có khả thi hay không? Vẫn có thể có khả năng trong cảm giác có thể có một phần khách quan, trong trực giác cũng có thể có một chút chủ quan. Cũng tương tự với việc cái lỗ trong cục pho mát không thể nào cắt được ra khỏi miếng pho mát mà không có một chút pho mát nào còn lại.

"Cảm giác" hoàn toàn chủ quan, chỉ phụ thuộc vào chủ thể cảm nhận và "trực giác" hoàn toàn khách quan không chắc luôn luôn tồn tại. Kant không chỉ được ra một quy trình tách bạch cụ thể mà chỉ giả định có một quy trình như thế để tách cảm giác khỏi trực giác. Vì thế đây là một giả thuyết rất mạnh của Kant.

Phương pháp luận của Kant về "trực giác" và "khái niệm"

Việc phân biệt "trực giác" và "khái niệm" của Kant cũng đem lại nhiều câu hỏi. Cho đến tận gần đây, người ta vẫn còn cố gắng tìm hiểu sự khác biệt giữa hai loại nhận thức này. Nếu đọc thật kỹ các tác phẩm của Kant, có thể thấy ông cho "trực giác" là các nhận thức đơn thể, trong khi "khái niệm" là khái quát hóa của các trực giác, không có tính đơn thể. Ví dụ "con bò nhà tôi" hay "con bò đen của nhà hàng xóm" là hai trực giác, có thể không liên quan đến nhau cho đến khi có khái niệm con bò có thể dùng để gợi ra hình dung có thể liên hệ với bất cứ con bò nào. Một cách toán học, khái niệm là bất biến với một số phép biến đổi giữa các trực giác, chẳng hạn đổi chỗ "con bò của tôi" với "con bò của nhà hàng xóm" có thể ảnh hưởng tới các khái niệm khác, nhưng không hề ảnh hưởng tới khái niệm con bò.

Ngược với trực giác là nhận thức đơn thể, khái niệm có thể chia cắt được thành các khái niệm thành phần có thể định nghĩa độc lập với nhận thức về khái niệm ban đầu. Chính vì thế khái niệm có thể định nghĩa qua các khái niệm thành phần. Chẳng hạn tam giác có thể định nghĩa qua các đỉnh, các cạnh hoặc các góc. Các cạnh có thể định nghĩa từ các điểm. Vì khái niệm luôn có thể chia cắt thành các khái niệm, việc chia cắt này có thể thực hiện vô hạn. Tôi nghi ngờ ở quan niệm này của Kant. Hoặc có thể tôi bỏ sót ở một khâu nào đó chưa hiểu hết về việc chia cắt này, tôi vẫn nghĩ rằng quá trình chia cắt này phải dừng lại sau hữu hạn bước. Trong thực tế, không ai có thể nhận thức được vô hạn khái niệm. Mặt khác, trong vật lý ngày nay, các hạt cơ bản như quark, lepton và photon không thể chia cắt. Cũng có một cách phân tích khác về nguyên tắc có thể vô hạn, đó là khái niệm tam giác có thể tách ra thành tam giác cân và tam giác không cân. Tập tam giác cân lại tách ra thành tam giác đều và không đều,... Cứ mỗi lần thêm thuộc tính chúng ta có thể hạn chế khái niệm về một tập các khái niệm nhỏ hơn. Về nguyên tắc, chúng ta có thể thêm vô hạn thuộc tính. Tuy nhiên, trong thực tiễn, chỉ sau một vài bước phân tích người ta sẽ quay trở lại khái niệm ban đầu. Sau khi nhận thức được khái niệm ban đầu, người ta sẽ liên hệ được với mọi trường hợp riêng.

Phương pháp luận của Kant về "thực nghiệm" và "tiên nghiệm"

Kant lại tiếp tục chia các "khái niệm" và "trực giác" thành hai loại "thực nghiệm" (empirical) và "tiên nghiệm" (a priori). Ông gọi các "khái niệm" và "trực giác" tiên nghiệm (phi thực nghiệm) là "thuần túy". Ở đây cũng nảy sinh ra câu hỏi thứ tư, theo tôi là trầm trọng nhất. Làm thế nào có một ý thức khách quan đơn thể mà không cần đến thực nghiệm? Nói một cách khác, "trực giác" tiên nghiệm hình thành trong ý thức của chúng ta thế nào? Theo Kant [2], không gian và thời gian là "trực giác thuần túy". Ông lập luận rằng không gian và thời gian là các đối tượng cá thể, chỉ có duy nhất nên không thể khái quát hóa. Mặt khác, chúng cũng không thể chia tách thành các thành phần nhỏ, có thể xác định trước khi có hình dung về không gian và thời gian. Chẳng hạn, thời gian gồm các khoảnh khắc, quãng thời gian, không gian bao gồm các địa điểm, vị trí. Chúng ta không thể hình dung ra được thế nào khoảnh khắc, địa điểm mà không biết trước về thời gian và không gian. Kant nhấn mạnh rằng không gian và thời gian không dựa trên quan sát thực nghiệm. Khi chúng ta nói rằng không có gì, chúng ta đã có sẵn hình dung về một không gian trống rỗng và khi nói về một đối tượng, nó đã phải ở trong không gian. Như vậy, không gian là trực giác tiên nghiệm làm điểm tựa cho thể hiện bên ngoài. Tương tự, thời gian là trực giác tiên nghiệm bên trong. Tôi có một số nghi vấn về phương pháp ở đây. Thứ nhất, làm thế nào để liên kết "khái niệm" được định nghĩa là khái quát hóa của nhiều trực giác với quan hệ phần tử-toàn thể sử dụng trong lập luận trên. Có vẻ như định nghĩa khái niệm và tính chất chia cắt vô hạn của nó chẳng dính dáng gì đến nhau hoặc dẫm chân lên nhau.

Nghi vấn thứ hai, cho dù không gian là một hình dung khách quan không chia cắt được và vì thế không phải là khái niệm (thông thường). Điều gì sẽ đảm bảo nó phải là "trực giác"? Lập luận của Kant cho thấy hình dung khách quan nếu không phải là khái niệm ẮT phải là trực giác. Điều đó đòi hỏi là việc phân chia ý thức khách quan của Kant phải thành hai phần đối lập. Tuy nhiên, có thể định nghĩa trực giác như là ý thức khách quan không (chưa) phải là khái niệm lại dẫm lên định nghĩa về ý thức đơn thể và ý thức khái quát. Có thể ý thức khách quan sẽ bao gồm ít nhất "khái niệm" "trực giác" và "khái niệm đặc biệt" (không gian và thời gian)? Như vậy, tôi không hoàn toàn bị thuyết phục không gian và thời gian là các trực giác.

Vì vậy chúng ta sẽ tiếp tục xem xét các hệ luận để khẳng định các nghi vấn đó là có lý hay không có lý.

Phủ nhận quan niệm không gian và thời gian của Newton và Leibnitz

Trước hết, quan niệm của Kant phủ nhận quan niệm của Leibnitz về không gian và thời gian phụ thuộc vào vật chất, như vậy phải được nhận thức thông qua quan sát vật chất, vì vậy có tính thực nghiệm. Theo Kant, không gian và thời gian có sẵn trong ý thức trước mọi quan sát về vật chất. Điều đó có nghĩa là Kant khẳng định lập trường duy tâm. Ngày nay chúng ta hiểu rằng điều đó gián tiếp công nhận có ý thức thuần túy có sẵn (một định nghĩa tương tự như tâm linh). Ở đây cần nói thêm, tuy không gian và thời gian là tiên nghiệm, nhưng lại khách quan. Có nghĩa là mọi hình dung về không gian và thời gian phải là như nhau. Quan niệm của Kant cũng phủ định quan niệm của Newton về không gian và thời gian tuyệt đối, là thực tế khách quan, do không gian và thời gian của Kant tồn tại tiên nghiệm ngay trong ý thức. Quan niệm không gian và thời gian trong lý thuyết tương đối rộng Không thời gian trong thuyết tương đối rộng thường được xem là thống nhất với tương tác hấp dẫn. Năng xung lượng của vật chất sẽ sinh ra hấp dẫn, hấp dẫn sẽ làm cong không thời gian. Tuy nhiên, đây chưa hẳn là minh chứng cho quan niệm của Leibnitz. Trong thuyết tương đối, vật chất có ảnh hưởng tới metric của không thời gian, tức là ảnh hưởng tới đo đạc, quan sát của chúng ta về không thời gian chứ chưa phải là xác định không thời gian. Xuất phát điểm của lý thuyết tương đối rộng là đa tạp không thời gian 4 chiều, hấp dẫn chỉ là thuộc tính của đa tạp này và bị ảnh hưởng bởi vật chất tồn tại trên đa tạp này. Mặt khác, trong lý thuyết tương đối rộng, người ta vẫn nghiên cứu trường hợp không có vật chất, vẫn có tương tác hấp dẫn. Tương tác hấp dẫn phải dựa trên khái niệm không thời gian. Trong lý thuyết dây, không thời gian 4 chiều, hấp dẫn và vật chất đều được suy ra từ các sợi dây trong không gian nhiều chiều hơn. Câu hỏi là vì sao các sợi dây trong không gian nhiều chiều lại không tồn tại tiên nghiệm trong ý thức của chúng ta. Khái niệm về không thời gian của lý thuyết dây có vẻ không phù hợp với quan niệm của Kant.

Các khái niệm toán học khác về không thời gian

Chúng ta hãy thử áp dụng một vài quan niệm của Kant về không thời gian kết hợp với một số giả thuyết xem có những mô hình toán học nào phù hợp.

Trước hết, chúng ta sẽ không nhất thiết phải cho rằng không gian Euclide là tiên nghiệm. Chúng ta sẽ giả thiết yếu hơn: đa tạp 4 chiều sẽ là thành phần tiên nghiệm của không thời gian.

Cơ sở để cho thành phần 4 chiều là tiên nghiệm có thêm lý lẽ nếu chúng ta xét từ các quan điểm khác nhau. Về mặt toán học, các đa tạp và không gian topo 4 chiều có một vị trí đặc biệt và là bí ẩn nhất. Trong vật lý, các tích phân Feynman sẽ phân kỳ chỉ nếu như không thời gian là 4 chiều. Trong lý thuyết truyền tin, không thời gian 4 chiều thông tin sẽ được truyền với độ tin cậy cao nhất.

Chúng ta sẽ giả thiết thêm là mọi hiện tượng vật lý (ít nhất là các tương tác) đều quy giản được về không thời gian. Nói một cách khác, không thời gian sẽ giải thích được các tương tác và một số quy luật như vi phạm chẵn lẻ, vi phạm đối xứng tự phát.

Bên cạnh đó, chúng ta sẽ giả thiết thêm không thời gian phải là tối thiểu và tiết kiệm nhất. Như vậy chúng ta có thể xuất phát từ hình học Cartan-Einstein [3] được khẳng định nhờ thành công của lý thuyết tương đối rộng.

Với các giả thiết như vậy, chúng ta thấy lý thuyết dây trong không gian nhiều chiều không đảm bảo "tiết kiệm" do có quá nhiều (vô hạn) đối tượng không quan sát được trong thực nghiệm, mặc dù mọi tương tác, hạt cơ bản chúng ta biết đều có thể quy giản.

Các lý thuyết 5,6 và nhiều chiều liên tục không đáp ứng quan niệm về không thời gian 4 chiều tiên nghiệm của Kant, các chiều không gian trong các lý thuyết này đều bình đẳng, không gian 4 chiều không có vai trò gì.

Trước hết, với không gian M^4, E.Wigner [4] đã chứng tỏ rằng mọi hạt cơ bản đều có thể đặc trưng bằng khối lượng và spin. Nói một cách khác các thuộc tính đặc trưng cho hạt cơ bản là khối lượng và spin có thể quy giản về không gian Euclide 4 chiều.

Các nghiên cứu gần đây [5] chứng tỏ rằng không thời gian không nhất thiết có cấu trúc Euclide M^4 mà có thể có cấu trúc dS^4,AdS^4 hoặc mở rộng của chúng với các chiều gián đoạn Z_2, Khi đó hình học Cartan-Einstein cần mở rộng sử dụng các công cụ của hình học không giao hoán[6].

Chẳng hạn lý thuyết Cartan-Einstein mở rộng cho không thời gian $M^4 \times Z_2 \times Z_2$ có thể giải thích được mọi tương tác, vi phạm chẵn lẻ của tương tác điện yếu và giải thích tại sao các lepton quark tay phải lại không tham gia tương tác yếu.

Lý thuyết Cartan-Einstein cho không thời gian dS^4 là một siêu cầu 4 chiều, có thể giải thích cấu trúc $SU(2) \times U(1)$ của tương tác yếu.

Như vậy không thời gian Euclide không phải là cấu trúc toán duy nhất cho không thời gian, cho dù đa tạp 4 chiều là tiên nghiệm có sẵn trong ý thức của chúng ta theo quan niệm của Kant.

Qua đây chúng ta cũng có thể thấy những ý tưởng triết học có thể ảnh hưởng tới khoa học tới hàng trăm năm sau./.

Tài liệu tham chiếu

[1] A.Grünbaum, Philosophical Problems of Space and Time, 2nd ed. Boston Studies in the Philosophy of Science. Vol XII. D. Reidel Publishing(1974)

[2] I.Kant, Critique of Pure Reason, translated by Paul Guyer and Allen Wood. Cambridge: Cambridge University Press, 1998; Kant, Immanuel, Metaphysical Foundations of Natural Science, in Theoretical Philosophy after 1781, edited by Henry Allison and Peter Heath, translated by Michael Friedman, Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[3] Cartan, E. (1922). Comptes Rendus 174, 437-439, 593-595, 734-737, 857-860, 1104-1107.

[4] Wigner, E. P. (1939), "On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group", Annals of Mathematics, 40 (1): 149–204,

[5] Nguyen Ai Viet and K.C.Wali, Int.J.Mod.Phys. **11**(3), (1996), 533; Nguyen Ai Viet and K.C.Wali, Int.J.Mod.Phys. **11**(13), (1996), 2403.

[6] A.Connes, Publ.Math. IHES **62** (1986), 41; A.Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press, San Diego, CA, (1994), 661 p.,ISBN 0-12-185860-X;A.Connes J. Math. Phys. **36** (ii),(1995), 6194.

TOÁN HỌC VÀ PHÁT HIỆN ẢNH GIẢ MẠO - PHẦN KẾT

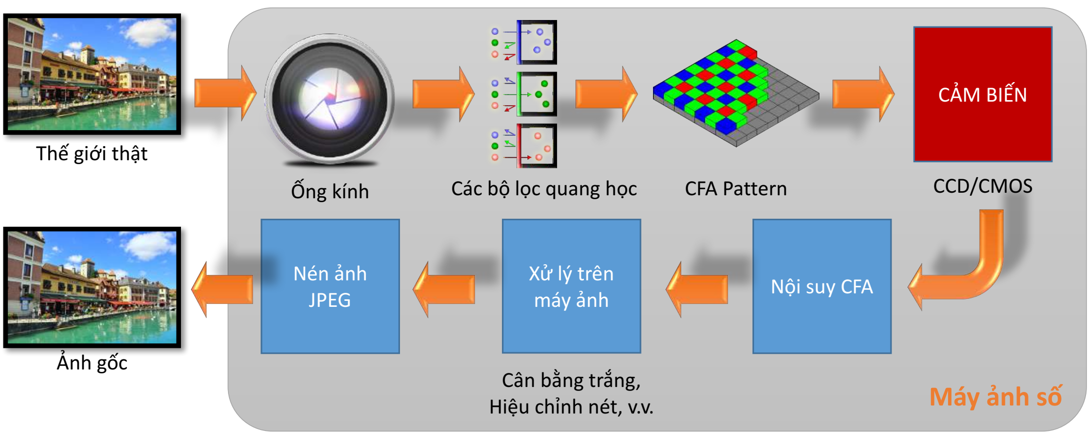
Đặng Nguyễn Đức Tiến
(DCU, Ireland)

GIỚI THIỆU

Ở Epsilon 12, chúng tôi đã giới thiệu với bạn đọc phần đầu của bài viết về toán học và phát hiện ảnh giả mạo thông qua một phóng sự ảo. Trong phần tiếp theo này, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc ba kỹ thuật dựa trên toán học để phát hiện ảnh chỉnh sửa.

Vân tay của ảnh

Kỹ thuật đầu tiên mà chúng tôi giới thiệu với bạn đọc ở đây, gọi là kỹ thuật lấy vân tay của ảnh. Như chúng ta vẫn biết đối với con người thì xác suất để hai người có dấu vân tay giống hệt nhau là cực thấp, gần như không xảy ra. Và đối với máy ảnh cũng vậy, máy ảnh cũng có ... vân tay! Hình 1 mô tả lại một quá trình tạo ra một bức ảnh số từ máy ảnh hay điện thoại và tất cả các bước trong quá trình này như chúng tôi đã nói ở bài trước, đều để lại những dấu vết nhất định trên ảnh. Trong số đó, cảm biến của ảnh để lại dấu vết rõ rệt và dễ khai thác nhất. Toàn bộ quá trình làm ra cảm biến, dù là bởi nhà sản xuất tốt nhất, đều để lại những "tì vết" nhất định ở sản phẩm, và những lỗi cực nhỏ này tạo ra nhiễu khi máy cảm ứng và ghi nhận ánh sáng. Chính những mẫu nhiễu này, tạo nên "vân tay" của một máy ảnh!



Hình 1: Quá trình tạo ra một bức ảnh bởi một máy ảnh kỹ thuật số.

Nhiễu cảm biến đặc sắc ở chỗ, nó khác nhau không chỉ từ hãng này với hãng khác (ví dụ Canon với Nikon) hay dòng máy này với dòng máy khác (ví dụ iPhone 6 với iPhone 7), mà còn khác nhau từ máy ảnh này với máy ảnh khác (ví dụ hai máy Nikon D700 sẽ có nhiễu khác nhau). Chính điều này đã làm cho nhiễu được xem như là vân tay của một máy ảnh. Và như vậy, khi xác định được mẫu nhiễu của một máy ảnh, đem ra so khớp với mẫu nhiễu từ một bức ảnh, ta có thể xác định được bức ảnh này có phải được chụp từ máy ảnh đang xem xét hay không mà không cần bất cứ một thông tin nào khác từ Exif (để biết Exif là gì, có thể xem lại ở bài trước). Điều này rất quan trọng, để có thể giúp nhiếp ảnh gia giữ được bản quyền của mình, và cũng giúp cho điều tra viên xác định nguồn gốc của máy ảnh.

Để xác định được mẫu nhiễu của máy ảnh, trước tiên ta cùng xem xét lại quá trình tạo ảnh ở Hình 1. Quá trình này được xấp xỉ (và đơn giản hoá) lại một cách toán học như sau:

$$I(x,y) = I^0(x,y) + I^0(x,y)K(x,y) + N(x,y) \tag{1}$$

Trong đó I là ảnh gốc mà chúng ta nhận được, I^0 là ảnh lý tưởng mà nếu như không có nhiễu, chúng ta giả định sẽ nhận được ảnh đúng như vậy, K là nhiễu của cảm biến, N là nhiễu do các yếu tố khác, và (x,y) là vị trí của điểm ảnh.

Trong (1), chúng ta có N khác nhau từ ảnh này sang ảnh khác, còn K giống nhau (chỉ khác nhau giữa các máy ảnh) và đó chính là giá trị mà chúng ta cần tìm. I^0K được gọi là PRNU, viết tắt của photo-response non-uniformity noise.

Câu hỏi đặt ra là chúng ta chỉ có thông tin duy nhất là các ảnh I có được từ máy ảnh, làm sao để tìm ra K?

Để làm được việc này, Jessica Fridrich, trong [1], đã đề xuất một phương pháp rất đơn giản nhưng hiệu quả với hai bước như sau:

Bước 1. Khử nhiễu cho ảnh, tức là với một ảnh I_k, tìm cách tính $\hat{I}_k$ với mục đích là $\hat{I}_k$ gần I_k^0 nhất. Khử nhiễu có thể áp dụng lọc tần số, hoặc các biến đổi khác, trong đó biến đổi Wiener là phương pháp được tác giả đề xuất. Sau đó tính sai biệt giữa I và $\hat{I}_k$.

$$\begin{aligned} W_k(x,y) &= I_k(x,y) - \hat{I}_k(x,y) \\ &\approx I_k(x,y)K(x,y) + N_k(x,y) \end{aligned} \tag{2}$$

Bước 2. Xấp xỉ K từ các W_k đơn giản hơn từ I_K do trong (2) không còn chứa nội dung của I_k nữa. Từ (2), ta có thể viết lại:

$$\frac{W_k(x,y))}{I_K(x,y))} = K(x,y) + \frac{N_k(x,y)}{I_k(x,y)} \tag{3}$$

Và từ n ảnh có được từ cùng máy ảnh ta có thể xấp xỉ K bởi công thức sau:

$$K(x,y) \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} W_k(x,y)I_k(x,y)}{\sum_{k=1}^{n} I_k(x,y)^2} \tag{4}$$

Sau khi tính được K từ một máy ảnh, từ một ảnh I_t bất kỳ, ta có thể xác định liệu I_t có phải được chụp bởi máy ảnh có nhiễu K hay không nếu độ tương quan của ảnh này và K đủ lớn. Độ tương quan ρ_t giữa một ảnh I_t và K được tính như sau:

$$\rho_t = IK \otimes W_t \tag{5}$$

với $\otimes$ là độ tương quan giữa 2 ma trận 2 chiều và được tính bởi công thức:

$$A \otimes B = \frac{\sum_m \sum_n (A_{mn} - \bar{A})(B_{mn} - \bar{B})}{\sqrt{\left(\sum_m \sum_n (A_{mn} - \bar{A})^2\right)\left(\sum_m \sum_n (B_{mn} - \bar{B})^2\right)}} \tag{6}$$

với $\bar{A}$ và $\bar{B}$ là giá trị trung bình của A và B tương ứng.

Và như vậy, chỉ bằng toán học, ta có thể xác định liệu một bức ảnh bất kỳ có phải chụp từ một máy ảnh xác định hay không mà không cần thông tin Exif!

Kỹ thuật này tuy rất đơn giản, nhưng lại hiệu quả bất ngờ, có thể áp dụng được với cả ảnh nén. Bằng kỹ thuật này, vào năm 2009, toà án Scotland đã chứng minh được tội trạng của một kẻ quấy rối tình dục trẻ em. Một trong những bài tập rất quen thuộc của người viết bài này là chúng tôi yêu cầu các sinh viên sau giờ giảng hãy chụp mỗi người khoảng 10 tấm ảnh khác nhau bởi máy ảnh hoặc điện thoại của mình. Sau đó, các ảnh này được tính PRNU và so sánh độ tương quan của các ảnh giữa các máy khác nhau với nhiễu của chúng. Kết quả luôn đạt được là ảnh bởi máy nào thì luôn có độ tương quan với nhiễu cao hơn các máy khác, kể cả những điện thoại cùng hãng, cùng dòng.

Phương pháp này cũng được áp dụng để phát hiện ảnh cắt ghép từ 2 nguồn ảnh khác nhau (xem ví dụ ở Hình 2).

Hình 2: Ví dụ về sử dụng nhiễu của máy ảnh để xác định ảnh ghép. Ảnh bên trái là ảnh gốc, bị sửa chữa xoá đi người phụ nữ để được ảnh ở giữa. Sau khi phân tích bức ảnh có nhiễu khác nhau, vùng ảnh bị chỉnh sửa đã bị phát hiện và thể hiện ở ảnh bên phải. Nguồn ảnh: [1]

Với những độc giả muốn có ý định thử nghiệm, chúng tôi cũng cung cấp đoạn mã đơn giản sau đây viết bằng Matlab để tính PRNU cho một máy ảnh.

```
function[PRNU] = calculatePRNU(path)
dim = 512; // chỉ lấy nhiễu ở 512x512 đầu ảnh.

imageList = dir([path filesep '*.jpg']);
```

```
noOfImages = size(imageList, 1);

I = zeros(dim, dim, noOfImages);
W = zeros(dim, dim, noOfImages);

for i = 1:noOfImages
    tempImage = imread([path filesep imageList(i).name]);
    I(:, :, i) = tempImage(1:dim, 1:dim, 1); % kênh đỏ
    denoisedImage = wiener2(I(:, :, i), [5 5]);
    W(:, :, i) = I(:, :, i) - denoisedImage;
end

PRNU = sum(W .* I, 3) ./ sum(I .* I, 3);
end
```

Sau khi tính xong PRNU, bạn đọc có thể tính độ tương quan của một ảnh bất kỳ với PRNU vừa tính được như sau:

```
W  = testImage - wiener2(testImage);
correlation = corr2(testImage .* PRNU, W);
```

Histogram của ảnh nén nhiều lần

Như chúng tôi đã nhiều lần đề cập, ảnh nén luôn luôn để lại những dấu vết quan trọng trong việc xác định mức độ chỉnh sửa của một bức ảnh. Trong phần này, chúng ta hãy cùng xem xét một hiện tượng rất thú vị của một bức ảnh được nén 2 lần.

Trước khi bắt đầu, chúng tôi nhắc lại cơ bản nguyên lý của việc nén ảnh Jpeg:

1. Đầu tiên ảnh từ không gian màu RGB được đổi sang YCbCr.
2. Tiếp theo từng kênh ảnh sẽ được nén riêng lẻ (mức độ lấy mẫu theo kênh Y có khác so với 2 kênh còn lại, nhưng không quan trọng đối với nội dung sắp đề cập).
3. Mỗi kênh màu tiếp theo được chia thành từng khối 8×8, và giá trị của các điểm ảnh được đổi sang phạm vi [-128, 127].
4. Các điểm ảnh được chuyển sang không gian tần số bởi biến đổi cô-sin rời rạc (DCT).

$$F_c(w_k, w_l) = \sum_{m=0}^{7} \sum_{n=0}^{7} f_c(w_k, w_l) cos(w_k m) cos(w_l n)$$

   với f_c là giá trị điểm ảnh ở không gian thường.

5. Tiếp theo, các tần số sẽ được lượng hoá để giảm thông tin. Đây là mấu chốt của việc nén ảnh. Mỗi tần số sẽ được lượng hoá bởi một lượng q được chọn trước:

$$\hat{F}_c(w_k, w_l) = \left\lfloor \frac{F_c(w_k, w_l)}{q(w_k, w_l)} \right\rfloor \tag{7}$$

   Bảng giá trị q được chọn trước với tiêu chí các tần số càng quan trọng thì q càng nhỏ (bằng 1 đối với tần số ở $(0, 0)$) và ngược lại. Thông thường, để tăng hiệu quả tính toán thì các giá trị của F_c sẽ được xếp dạng zig-zag, nhưng chúng tôi tạm lược bỏ ở đây. Công thức (7) đôi khi được áp dụng bởi hàm làm tròn (round) thay vì hàm phần nguyên (floor).

6. $\hat{F}_c$ sau đó được nén bởi các thuật toán nén không mất mát, phổ biến nhất là dùng Huffman.

Để giải nén ảnh Jpeg, quá trình nén được thực hiện ngược lại, với các hàm ngược (ví dụ như biến đổi cô-sin rời rạc ngược).

Như vậy, dấu vết của việc nén ảnh Jpeg có thể tìm thấy ở đâu? Chính là ở bước lượng hoá theo công thức (7). Hãy cùng xét một giá trị u, được lượng hoá bởi giá trị a, ta sẽ có kết quả là:

$$q_a(u) = \left\lfloor \frac{u}{a} \right\rfloor$$

Để lấy lại giá trị gốc u từ $q_a(u)$, ta áp dụng biến đổi nghịch đảo: $q_a^{-1}(u) = au$. Tuy nhiên, biến đổi này không phải là hàm nghịch đảo của $q_a(u)$ vì bản chất của hàm phần nguyên hay làm tròn là bất khả nghịch!

Hãy xét tiếp: nếu như u được lượng hoá lần 1 bởi 1 lượng bằng b, sau đó nghịch đảo và lượng hoá lần 2 bởi một lượng bằng a thì ta có:

$$q_{ab}(u) = \left\lfloor \left\lfloor \frac{u}{b} \right\rfloor \frac{b}{a} \right\rfloor$$

Điều gì sẽ xảy ra ở đây? Histogram của các giá trị sau lượng hoá sẽ để lại dấu vết của lần nén trước. Hay nói cách khác, khi ảnh được nén 2 lần, khi xem xét các giá trị sau lượng hoá ở lần thứ 2, thì các giá trị lượng hoá ở lần thứ 1 sẽ xuất hiện trong histogram.

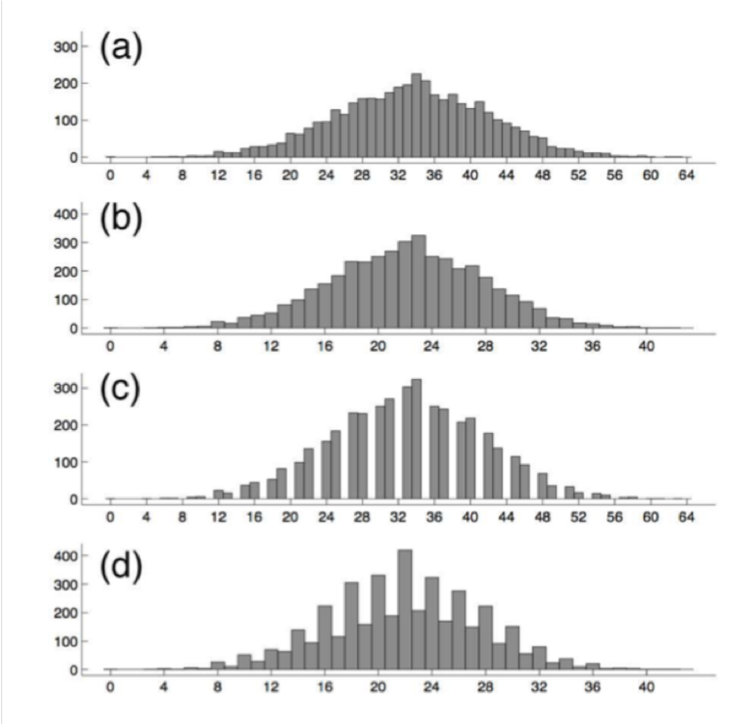
Hãy xem ví dụ ở Hình 3, bắt đầu từ một dãy ngẫu nhiên U các số trong phạm vi từ 0 đến 128, ở hình (a) là historam của hãy này sau biến đổi $q_2(U)$ và hình (b) là kết quả histogram sau biến đổi $q_3(U)$ (lượng hoá với 2 và 3). Ta thấy dáng dấp của histogram giữa 2 hình rất giống nhau, và gần với phân phối chuẩn do hàm sinh ngẫu nhiên dựa trên phân phối Gauss. Ở hình (c) và (d) là kết quả của việc lượng hoá 2 lần: ở (c), ta thấy histogram sau biến đổi $q_{23}(U)$ thì dấu vết của lần lượng hoá 1 ($q_3(U)$) thể hiện rất rõ ở việc mỗi 3 cột (bin) thì lại có 1 cột trống; đối với (d), ta thấy dấu vết ở lần lượng hoá đầu ($q_2(U)$) thông qua việc cứ mỗi 2 cột thì có 1 cột giá trị thấp hơn, hay nói cách khác, ta thấy dáng dấp của 2 phân bố trong một phân bố cuối cùng.

Vì sao lại có hiện tượng này? Chúng ta hãy cùng xem xét chi tiết hơn hiện tượng này:

- Đối với lượng hoá 1 lần, chúng ta có: $f(x) \to f_a(x) = q_a(f(x))$.

  Với phép biến đổi này, toàn bộ các giá trị trong đoạn $[av, av + (a - 1)] \to v$.

  Và do vậy, histogram kết quả sẽ là: $\sum_{k=0}^{a-1} H(av + k) = H_a(v)$. Nghĩa là có đúng a cột từ histogram gốc đóng góp vào mỗi cột của histogram sau biến đổi.



Hình 3: Lượng hoá 2 lần, dấu vết của lần lượng hoá thứ 1 sẽ xuất hiện ở histogram cuối cùng.

- Với lượng hoá 2 lần, ta có: $f(x) \to f_{ab}(x) = q_{ab}(f(x))$.

  Với $\left\lfloor \left\lfloor \frac{u}{b} \right\rfloor \frac{b}{a} \right\rfloor = v$, histogram sẽ là:

$$\sum_{u=u_{min}}^{u_{max}} H(u) = H_{ab}(v)$$

  với $u_{min} = \left\lceil \frac{a}{b} v \right\rceil b$ và $u_{max} = \left\lceil \frac{a}{b}(v+1) \right\rceil b - 1$

  Số lượng cột của histogram gốc đóng góp vào cột v của histogram kết quả (sau 2 lần lượng hoá) do vậy là:

$$n(v) = u_{max} - u_{min} + 1 = b\left(\left\lceil \frac{a}{b} v \right\rceil - \left\lceil \frac{a}{b}(v+1) \right\rceil\right)$$

$$n(v) = n(v+b)$$

  Do vậy, tính chu kỳ sẽ xuất hiện ở histogram kết quả!

- Cụ thể trong ví dụ ở Hình (3), ta có với $b = 3, a = 2$ thì $n(3k+2) = 0$ và với $b = 2, a = 3$ thì $n(2k+1) = 2$ và $n(2k) = 4$.

Vấn đề cuối cùng là với một histogram kết quả, làm thế nào để tính chu kỳ của histogram, nếu có? Câu trả lời là ta có thể áp dụng biến đổi Fourier!

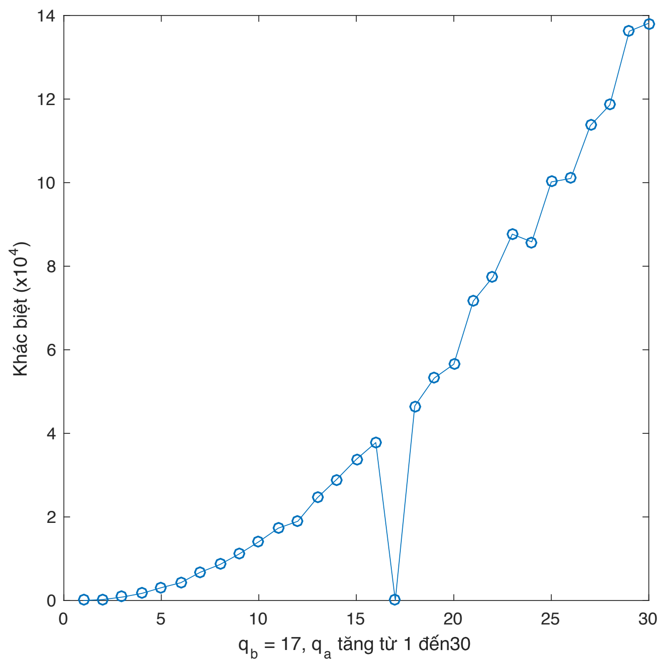
Một lần nữa, để phục vụ cho bạn đọc muốn thử nghiệm, chúng tôi cung cấp đoạn mã sau sẽ minh hoạ toàn bộ quá trình thí nghiệm đã nêu trong phần này.

```
q1 = 3;
q2 = 2;

data = randn(1, 20000);
data = data - min(data);
data = round(255 * data/max(data));

histogram = hist(data, max(data));
subplot(411);
bar(histogram);
xlim([min(data) max(data)]);
title('Dữ hiệu gốc');

c1 = floor(data/q1);
histogram = hist(c1, max(c1));
subplot(412);
bar(histogram);
xlim([min(c1) max(c1)]);
title(['Lượng hoá bởi ' num2str(q1)]);

c2 = floor(c1 * q1 / q2);

histogram = hist(c2, max(c2));
subplot(413);
bar(histogram);
xlim([min(c2) max(c2)]);
title(['Lượng hoá lần 1 bởi ' num2str(q1) ...
       ', lần 2 bởi ' num2str(q2)]);

subplot(414);
f = abs(fftshift(fft(histogram)));
plot(f);
xlabel('Quantization');
```

Bóng ma Jpeg

Trong phần cuối của bài này, chúng tôi giới thiệu một kỹ thuật rất thú vị mà Hany Farid trong [2] gọi là hiện tượng Bóng ma Jpeg.

Xét một dãy giá trị c_b có được sau khi lượng hoá bởi b, và c_{ab} có được sau khi lượng hoá bởi b rồi lượng hoá lần 2 bởi a thì khác biệt giữa c_b và c_{ab} (sau khi biến đổi nghịch đảo) khi a thay đổi sẽ như thế nào? Hay cụ thể hơn, $d(a, ab)$ sẽ biến đổi như thế nào?



Hình 4: Lượng hoá 2 lần, $d(a, ab)$ cực tiểu khi $a = 1$ và $a = b$.

$$d(a, ab) = |c_b b - c_{ab} a| = \left| \left\lfloor \frac{u}{b} \right\rfloor b - \left\lfloor \left\lfloor \frac{u}{b} \right\rfloor \frac{b}{a} \right\rfloor a \right|$$

Ta thấy rằng, khác biệt này sẽ cực tiểu khi $a = 1$, nghĩa là lần 2 không nén/lượng hoá gì cả, và khi $a = b$, nghĩa là lần 2 lượng hoá với cùng giá trị lần 1. Ta cũng thấy giá trị khác biệt d sẽ tăng dần khi a tăng dần (xem minh hoạ ở Hình 4).

Và như vậy, với một ảnh nén một lần mà ta không biết bất kỳ tham số gì của bảng lượng hoá, thì bằng phương pháp này, ta có thể tìm ra giá trị lượng hoá bằng cách khảo sát các giá trị có thể có và chọn giá trị mà khoảng cách là cực tiểu!

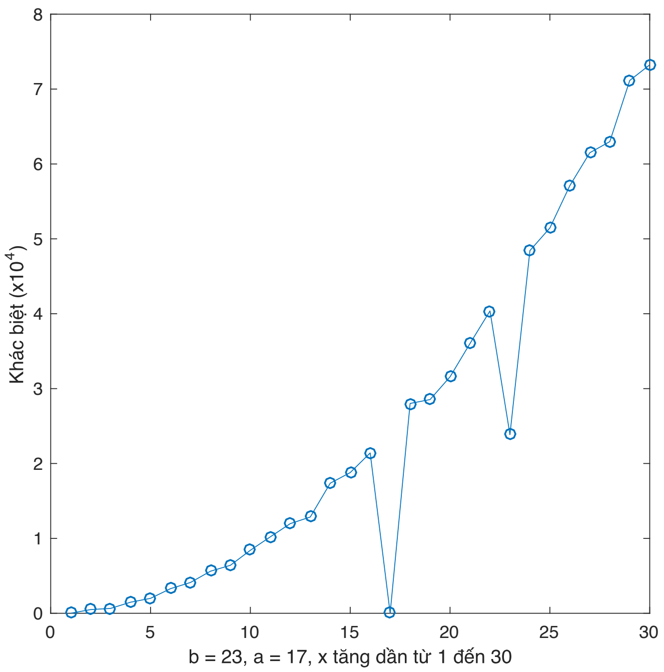
Một lần nữa, chúng tôi cung cấp mã nguồn matlab để bạn đọc có thể thử nghiệm hiện tượng thú vị này:

```
c0 = randn(1, 500);
c0 = c0 - min(c0);
c0 = round(10000 * c0/max(c0));

N = 30;
q1 = 17;

c1 = floor(c0/q1);

d = zeros(1, N);
for q2 = 1:N
c2 = floor(c1 * q1 / q2);
```

```
diff = c1 * q1 - c2 * q2;
d(q2) = sum(diff .* diff);
end

plot(d/10000, 'x-', 'marker', 'o');
xlabel(['q_b = ' num2str(q1) ', q_a tăng từ 1 đến ' ...
      num2str(N)]);
ylabel('Khác biệt (x10^4)');
axis square;
```

Chúng ta tiếp tục đi đến một hiện tượng thú vị hơn. Giả sử chúng ta có c_{ab} rồi, và chúng ta tiếp tục lượng hoá lần thứ 3 bởi 1 lượng x thì khoảng cách $d(ab, xab)$ sẽ như thế nào?

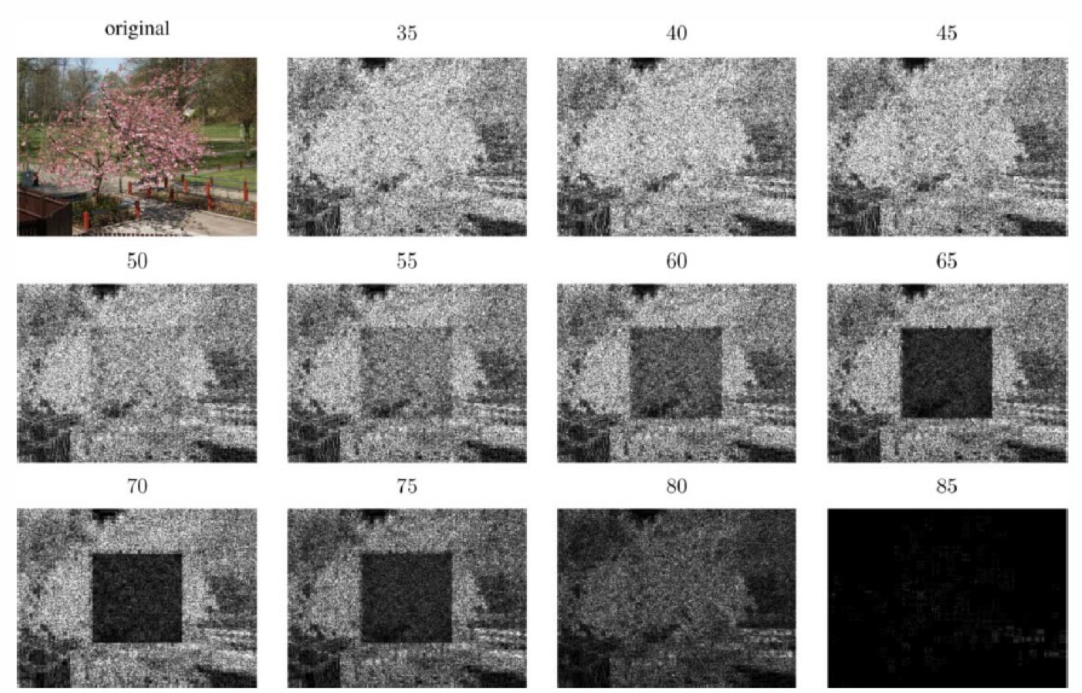
Không khó đoán ra, chúng ta sẽ có $d(ab, xab)$ sẽ đạt cực tiểu khi $x = 1$ hoặc $x = a$ và sẽ tăng dần khi x tăng dần. Tuy nhiên, vâng, tuy nhiên, khi khảo sát ta sẽ thấy rằng, $d(ab, xab)$ sẽ đạt cực trị địa phương khi $x = b$, và hiện tượng này gọi là bóng ma Jpeg, vì vùng ảnh này sẽ "lờ mờ" xuất hiện trong cách tính khoảng cách d (xem minh hoạ ở Hình 5).



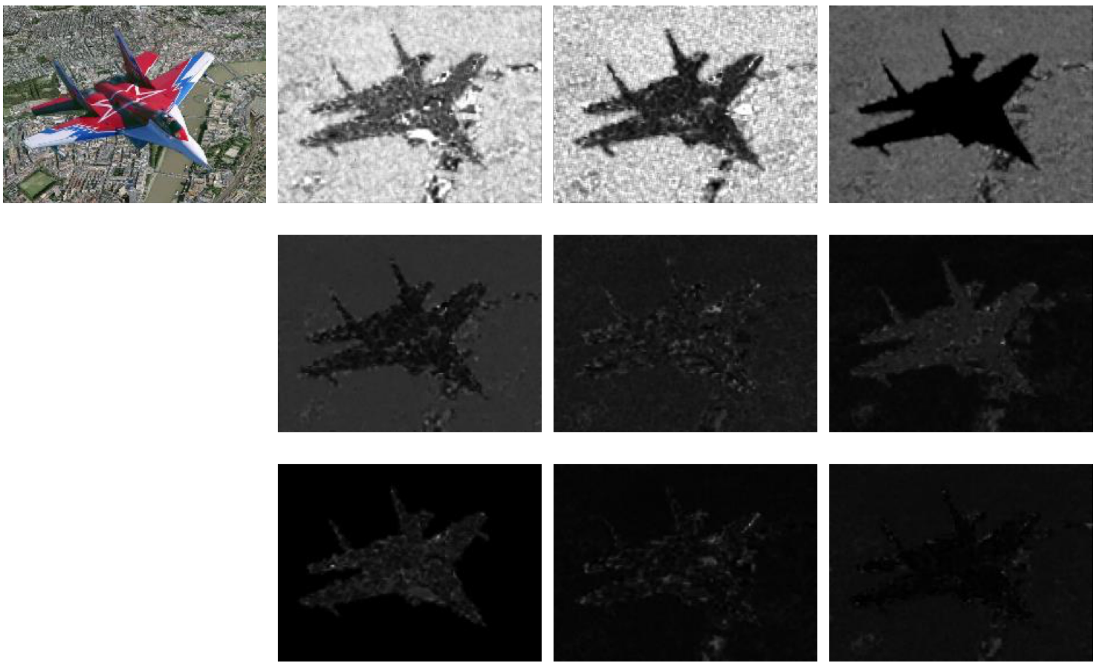
Hình 5: Lượng hoá 3 lần, $d(ab, xab)$ cực tiểu khi $x = 1$ và $x = a$ và đạt cực trị địa phương khi $x = b$. Cụ thể ta thấy d bằng 0 khi $x = 1$ và $x = a = 17$ và d đạt cực tiểu địa phương khi $x = b = 23$.

Với hiện tượng này, chỉ bằng việc nén ảnh với nhiều mức độ khác nhau và tính toán khác biệt, chúng ta có thể không chỉ tìm ra giá trị dùng để nén ảnh mà còn chỉ rõ ảnh được nén bao nhiêu lần cũng như phát hiện ra ảnh ghép!

Chúng tôi kết thúc bài viết ở đây với 2 ví dụ minh hoạ (lời giải thích được đặt ở chú thích). Hi vọng qua bài viết này, bạn đọc tỉnh táo hơn khi xem xét một bức ảnh số cũng như có thể tự mình thử nghiệm cũng như tạo ra vài công cụ để có thể phát hiện ảnh chỉnh sửa.



Hình 6: Ảnh gốc chưa nén (góc trên trái), được trích ra vùng trung tâm, nén với mức nén 65, sau đó toàn bộ ảnh được nén với mức nén 85. Qua khảo sát các mức nén khác nhau, ta thấy ảnh đạt cực tiểu (đen toàn bộ) khi nén ở mức 85) và xuất hiện bóng ma ở mức nén 65. Nguồn ảnh: [2].



Hình 7: Một bức ảnh ghép (trên trái), qua phân tích sự khác biệt của chính ảnh này với các mức nén khác nhau (50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, và 90, theo thứ tự từ trái sang phải, từ trên xuống dưới) cho thấy vùng ghép (bóng ma - máy bay chiến đấu) được nén 2 lần với lần 1 nén ở mức 60 và sau đó toàn bộ ảnh kết quả được nén ở mức 90.

Tài liệu

[1] Fridrich, Jessica *Digital Image Forensic Using Sensor Noise*, IEEE Signal Processing Magazine, vol. 26, no. 2, pp. 26-37, 2009.

[2] Hany, Farid, *Exposing Digital Forgeries from JPEG Ghosts*, IEEE Transactions on Information Forensics and Security, vol. 1, no. 4, pp. 154-160, 2009.

KIỂM CHỨNG LÀ MÔ HÌNH

Trần Thanh Hải (Vienna, Áo)

GIỚI THIỆU

Kiểm chứng là mô hình (model checking) là một trong những phương pháp phổ biến nhất để xác định tính đúng đắn của hệ thống. Ý tưởng của phương pháp này rất dễ hiểu và hiện thực hóa: hệ thống được biểu diễn bằng máy chuyển trạng thái, các trạng thái có thể tồn tại được sinh ra và kiểm tra. Sự bùng nổ tổ hợp các trạng thái là khuyết điểm lớn nhất của phương pháp này. Trong bài báo này, chúng tôi trình bày hướng tiếp cận trừu tượng hóa (abstraction) để vượt qua trở ngại này.

1. Chứng minh tính đúng đắn của hệ thống

Lỗi là một phần không thể tránh khỏi trong quá trình phát triển các hệ thống máy tính. Tổ chức NIST (viết tắt của US National Institute of Standards and Technology) ước tính các lỗi lập trình và thuật toán gây ra thiệt hại 60 tỉ đô là mỗi năm cho nên kinh tế Mỹ [7]. Ngoài ra, các kỹ sư phần mềm có thể dành tới một nửa quãng thời gian làm việc để sửa lỗi. Thực ra, ngay từ thuở ban đầu của máy tính, cộng đồng nghiên cứu đã phát triển nhiều phương pháp để đánh tính đúng đắn của chương trình. Hai phương pháp phổ biến để đảm bảo rằng chương trình không có lỗi là viết một chứng minh thông thường dựa trên các định lý và viết một chứng minh bằng cách liệt kê. Dưới đây, chúng ta sẽ cùng nhìn lại ưu khuyết điểm của hai phương pháp này.

Viết một chứng minh toán học là cách thức tin cậy nhất để đảm bảo tính đúng đắn của một hệ thống (bao gồm thuật toán, phần cứng và phần mềm). Tuy nhiên, viết một chứng minh hoàn chỉnh là một việc không thể dễ dàng vì nó đòi hỏi rất nhiều công sức và kiến thức. Khó khăn đầu tiên là làm cách nào để biểu diễn hệ thống một cách đơn giản. Nếu phải xem xét toàn bộ các yếu tố như sự giới hạn về tài nguyên, sự tương tác giữa các hệ thống với con người, các tính chất mà hệ thống nên có . . . thì hiện tại chúng ta vẫn chưa có một cách biểu diễn tiện lợi và chính xác. Do đó, ở đây chúng ta chỉ bàn về các cách tiếp cận dựa trên ngôn ngữ tự nhiên, mã giả và luận lý.

Mã giả (pseudocode) và ngôn ngữ tự nhiên hiện được sử dụng rộng rãi để mô tả và chứng minh tính đúng đắn (một lớp) hành vi của hệ thống. Tuy nhiên, kiểm tra các lập luận được trình bày bằng mã giả và ngôn ngữ tự nhiên không hề dễ dàng. Ngay cả ở những công bố khoa học có ảnh hưởng lớn trong lĩnh vực khoa học máy tính, vẫn có những sai sót trong chứng minh chỉ được phát hiện sau nhiều năm. Các yếu tố như bất đồng bộ (asynchrony), tổ hợp các kịch bản hoạt động. . . gây ra nhiều khó khăn trong việc kiểm tra các lập luận chứng minh, ngay cả đối với các chuyên gia [5].

Để việc kiểm tra chứng minh trở nên dễ dàng hơn, các hệ thống chứng minh với sự hỗ trợ của máy tính (hoàn toàn tự động hoặc cần tương tác với người) đã được phát triển. Các sản phẩm tiêu biểu như Coq, Isabelle, SMT solvers (CVC4, Z3, . . .) đã được áp dụng thành công trong nhiều dự án của giới khoa học lẫn giới công nghiệp. Các công cụ này cho phép người dùng biểu diễn hệ thống dưới dạng các công thực luận lý (logical formulas) và hỗ trợ các phép suy diễn (inference rules) để kiểm tra tính đúng đắn của các bước chứng minh (hay định lý). Tuy nhiên, vì mới chỉ được phát triển khoảng vài chục năm gần đây nên các công cụ chứng minh chỉ hỗ trợ một số tiên đề trong vài lĩnh vực hẹp của toán học. Một khó khăn khác là không tồn tại một thuật toán (undecidable problem) để tự động tìm ra chứng minh cho một công thức toán học bất kỳ. Do vậy, viết một chứng minh hoàn chỉnh với sự hỗ trợ của máy tính vẫn đòi hỏi rất nhiều công sức, trí tuệ và đặc biệt là thời gian [8].

Trong nhiều, viết một chứng minh hoàn chỉnh là điều gần như không thể, ví dụ như cho các thuật toán phân tán (distributed algorithms). Các kỹ sư tại Amazon đã thử sử dụng một công cụ hỗ trợ chứng minh là TLAPS trong các dự án của họ. Tuy nhiên, sau cùng họ đành phải bỏ cuộc và nghi ngờ tính khả thi của việc viết một chứng minh đầy đủ trong các dự án tiếp theo của họ [6].

Do những khó khăn trên, việc tồn tại một hướng tiếp cận đơn giản trở nên rất quan trọng. Qua quan sát, các nhà khoa học máy tính nhận ra nếu khi biểu diễn hệ thống bằng một máy trạng thái thì số trạng thái có thể tồn tại cũng không phải quá nhiều, từ vài ngàn trở lên. Kiểm tra hết toàn bộ những trường hợp là không khả thi với con người; tuy nhiên với sự phát triển mạnh mẽ của máy tính thì ý tưởng này dần trở thành hiện thực. Đầu những năm 1980, Edmund M. Clarke, E. Allen Emerson và Joseph Sifakis đã lần đầu thành công trong việc hoàn thiện hệ thống lý thuyết và phát triển các công cụ dưa trên ý tưởng liệt kê [4] [1]. Đối với người sử dụng, ngoài việc mô hình hệ thống và các tính chất mong đợi thành những công thức luận lý (như khi viết chứng minh với sự hỗ trợ của máy tính) thì gần như tất cả những gì họ cần làm là nhấp vài nút đơn giản để chương trình và đợi kết quả máy tính trả về. Hướng tiếp cận dựa trên liệt được đặt tên là kiểm chứng là mô hình (model checking). Ý nghĩa của tên gọi này là kiểm chứng xem một hệ thống có phải là một mô hình (model - thuật ngữ trong ngành luận lý) của một công thức luận lý (dùng để biểu diễn các tính chất của hệ thống). Dĩ nhiên, khuyết điểm lớn nhất của phương pháp này là sự bùng nổ không gian trạng thái. Để vượt qua trở ngại này, nhiều hướng giải quyết đã được đề xuất: trừu tượng hóa (abstraction), biểu diễn với biểu tượng (symbolic representation), ... Nhờ các cải tiến trên, kiểm chứng là mô hình đã được sử dụng rộng rãi để chứng minh tính đúng đắn của các hệ thống phần cứng lẫn phần mềm.

Trong những phần tiếp theo, chúng ta sẽ lần lượt tìm hiểu kỹ hơn về kiểm chứng là mô hình và trừu tượng hóa.

[1] Vào năm 2007, cả 3 nhà khoa học Edmund M. Clarke, E. Allen Emerson và Joseph Sifakis đã đều được trao tặng giải thưởng Alan Turing cho những đóng góp của họ trong việc phát triển phương pháp kiểm chứng là hệ thống.

2. Kiểm chứng là mô hình

Từ những năm 1980, các thuật toán kiểm chứng là mô hình đã lần lượt được giới thiệu. Các thuật toán này thường dựa trên cách biểu diễn hệ thống bằng những công thức trong luận lý với thì. Để áp dụng các thuật toán này, chúng ta cần trải qua 3 bước [4]:

- Mô hình hóa: Người dùng biểu diễn hệ thống theo chuẩn đầu vào của thuật toán. Hệ thống có thể biểu diễn bằng máy automata hoặc một công thức luận lý với thì. Đôi khi, chúng ta cần phải loại bỏ các thông tin không cần thiết trong quá trình mô hình hóa.
- Đặc tả: Người dùng mô tả các tính chất về hành vi của hệ thống. Thông thường, các tính chất được biểu diễn bằng một loại ngôn ngữ với thì như CTL, LTL hay TLA+.

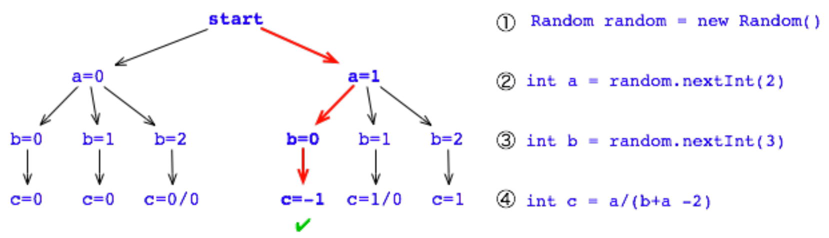
```
import java.util.Random;

public class Rand {
    public static void main (String[] args) {
        Random random = new Random(42);        // (1)
        int a = random.nextInt(2);             // (2)
        System.out.println("a=" + a);
        //... lots of code here
        int b = random.nextInt(3);             // (3)
        System.out.println("  b=" + b);
        int c = a/(b+a -2);                    // (4)
        System.out.println("    c=" + c);
    }
}
```

Hình 1: Chương trình Java minh họa [2]

- Kiểm chứng: Các phần mềm kiểm chứng sẽ tự động sản sinh và kiểm tra các trạng thái có thể tồn tại. Tuy nhiên, đôi khi người dùng cần phải tham gia vào để lựa chọn loại trừu tượng hóa, phân tích kết quả trả về...

Chúng ta hãy cùng xem xét đoạn mã nguồn như trong Hình 1. Công cụ kiểm chứng Java PathFinder sẽ sản sinh ra các trường hợp thực thi như trong Hình 2. Dựa vào đó, chúng ta dễ dàng kiểm tra rằng có một trường hợp $c < 0$ và có lỗi xảy ra do thực hiện phép chia bằng 0 [2]. Dễ thấy rằng, nếu hai biến a, b chỉ là hai số ngẫu nhiên kiểu `Int` thì chúng ta sẽ có 2^{64} trường hợp cần xem xét.

[2] Ở đây, chúng ta chỉ tập trung minh họa ý tưởng của kiểm chứng với mô hình nên không bàn tới việc mô hình hóa hệ thống và đặc tả tính chất như thế nào với Java PathFinder.



Hình 2: Các trạng thái được sản sinh bởi chương trình Java PathFinder [2]

Một ưu điểm khác của phương pháp này là cho phép chúng ta giải thích nguyên nhân lỗi một cách trực quan và sinh động. Ví dụ như khi giải thích lỗi chia cho 0 của chương trình Java trên, công cụ kiểm chứng hoàn toàn có thể đưa ra một trường hợp cụ thể là $a = b = 1$.

Mặc dù ý tưởng của phương pháp kiểm chứng là mô hình rất đơn giản và gặp khó khăn về số trạng thái cần kiểm tra, hướng tiếp cận này đã giải quyết thành công nhiều vấn đề trong các dự án của giới khoa hoa và giới công nghiệp. Các ví dụ tiêu biểu như [1]

- Sự cố gián đoạn mạng viễn thông AT&T: lỗi biên dịch câu lệnh `brean` trong ngôn ngữ C.
- Vỡ phi thuyền Ariane 5: lỗi ép kiểu `float` sang kiểu `int`.
- Bộ vi điều khiển Pentium FDIV: lỗi liên quan tới phép chia số thực.

3. Trừu tượng hóa

Trừu tượng hóa là một phương pháp phổ biến để vượt qua những khó khăn do sự bùng nổ tổ hợp các trạng thái gây nên [4]. Ý tưởng cơ bản của trừu tượng hóa là thay vì xem xét không gian trạng thái hiện có, chúng ta sẽ tìm và xem xét một không gian trạng thái nhỏ hơn. Ta sử dụng các ký hiệu S để chỉ không gian hiện tại và $\hat{S}$ để chỉ không gian nhỏ hơn. S và $\hat{S}$ còn thường được gọi là không gian cụ thể (concrete) và không gian trừu tượng (abstract). Ta ký hiệu $s, \hat{s}$ lần lượt là một trạng thái trong $S, \hat{S}$. Việc chuyển đổi giữa hai không gian S và $\hat{S}$ được xác định dựa trên hai hàm $f : S \to \hat{S}$ và $g : \hat{S} \to S$. Do $\hat{S}$ là không gian nhỏ hơn nên nhiều hai trạng thái cụ thể s_1, s_2 hoàn toàn có thể được ánh xạ vào một trạng thái trừu tượng $\hat{s}$. Có nhiều cách khác nhau để xác định $\hat{S}, f, g$ nhưng tất cả đều phải đảm bảo yếu tố vững chắc (soundness):

- Nếu tồn tại lỗi trên không gian S thì phải tồn tại một lỗi tương ứng trên không gian $\hat{S}$.

Điều ngược lại hay tính toàn bộ (completeness) không quá quan trọng. Thực ra, trong rất nhiều trường hợp, chúng ta hoàn toàn không thể tìm được $\hat{S}, f, g$ đảm bảo cả hai tính chất vững chắc và toàn bộ.

Mỗi loại trừu tượng hóa thường chỉ phù hợp với một số hệ thống và tính chất nhất định. Hiện tại, nhiều phương pháp trừu tượng hóa đã được đề xuất. Dưới đây chúng ta sẽ xem xét phương pháp trừu tượng hóa với vị từ.

3.1. Trừu tượng hóa với vị từ

Trừu tượng hóa với vị từ (predicate) là một trong những hướng tiếp cận mạnh nhất hiện nay để vượt qua sự bùng nổ không gian trạng thái [3]. Các vị từ được dùng để trừu tượng hóa các biến dữ liệu của chương trình ban đầu và được xem như một biến bool của chương trình trừu tượng. Tập các vị từ sẽ thể hiện mối quan hệ giữa các biến dữ liệu trong chương trình ban đầu. Như vậy, ta có $\hat{S} = \{p_1, \ldots, p_k\}$ với p_i là các vị từ được chọn. Hai hàm f và g sẽ được xây dựng giữa trên mối quan hệ tồn tại như sau:

- Nếu s là một trạng thái bắt đầu trong S thì $f(s)$ phải là một trạng thái bắt đầu trong $\hat{s}$.
- Nếu tồn tại một phép chuyển trạng thái từ s_1 tới s_2 trong S thì tồn tại một phép chuyển trạng thái từ $f(s_1)$ tới $f(s_2)$ trong $\hat{S}$.

Ví dụ với chương trình Java trong Hình 1, chúng ta có thể sử dụng vị từ ($p_0 \triangleq a = b$) để kiểm tra lỗi chia cho 0. Nếu $p_0 = \texttt{TRUE}$, chúng ta biết rằng trường hợp chia cho 0 sẽ xảy ra. Để giới hạn các giá trị mà a, b, c có thể nhận, chúng ta có thể sử dụng các vị từ sau

$$\begin{array}{ll} p_1 \triangleq a \geq 0 & p_2 \triangleq a < 2 \\ p_3 \triangleq b \geq 0 & p_4 \triangleq b < 2 \\ p_5 \triangleq c \geq -2^{32} + 1 & p_6 \triangleq c < 2^{32} \end{array}$$

Điều đáng quan tâm là khi chúng ta thay đổi giá trị mà a, b có thể nhận thành toàn bộ các số có kiểu `Int`, để kiểm chứng trường hợp có trường hợp $c = 0$ hay không, ta chỉ cần thay đổi các vị từ p_1, p_2, p_3, p_4 thành

$$\begin{array}{ll} p'_1 \triangleq a \geq -2^{32} + 1 & p'_2 \triangleq a < 2^{32} \\ p'_3 \triangleq c \geq -2^{32} + 1 & p'_4 \triangleq b < 2^{32} \end{array}$$

và như thế không gian trạng thái trừu tượng của chúng ta vẫn chỉ có 2^7 trạng thái dù không gian trạng thái ban đầu đã tăng thành $(2^{32})^3$.

Dễ thấy rằng, việc chọn lựa vị từ đóng yếu tố rất quan trọng vì chúng sẽ được dùng để chứng minh tính chất của hệ thống và chúng cũng quyết định số lượng trạng thái. Trước đây, người dùng sẽ phải tự cung cấp các vị từ phù hợp cho các chương trình kiểm chứng. Hiện nay, trong nhiều trường hợp, các chương trình đã có thể tự động tìm kiếm các vị từ phù hợp để chứng minh tính chất mong muốn [3].

4. Tổng kết

Kiểm chứng là mô hình là một phương pháp tự động để chứng minh tính đúng đắn của chương trình. Liệt kê và kiểm tra tất cả các trạng thái có thể xảy ra là ý tưởng chính của phương pháp này. Tuy nhiên, khuyết điểm của nó la không phù hợp với các hệ thống có quá nhiều hoặc vô hạn trạng thái. Trừu tượng hóa là một phương pháp phổ biến để vượt qua khuyết điểm trên. Tuy nhiên, mỗi phương pháp trừu tượng hóa chỉ phù hợp với một lớp hệ thống và tính chất nhất định. Việc phát triển thêm nhiều hướng tiếp cận để giảm thiểu sự bùng nổ không gian trạng thái là một trong những hướng nghiên cứu quan trọng của lĩnh vực kiểm chứng là hệ thống.

Tài liệu

[1] Introduction to model checking. `https://moves.rwth-aachen.de/teaching/ss-15/introduction-to-model-checking`. Accessed: 2017-01-30.

[2] Java pathfinder. `http://babelfish.arc.nasa.gov/trac/jpf`. Accessed: 2017-01-30.

[3] Edmund Clarke, Orna Grumberg, Somesh Jha, Yuan Lu, and Helmut Veith. Counterexample-guided abstraction refinement. In *International Conference on Computer Aided Verification*, pages 154–169. Springer, 2000.

[4] Edmund M Clarke, Orna Grumberg, and Doron Peled. *Model checking*. MIT press, 1999.

[5] Leslie Lamport. *Specifying systems: the TLA+ language and tools for hardware and software engineers*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 2002.

[6] Chris Newcombe, Tim Rath, Fan Zhang, Bogdan Munteanu, Marc Brooker, and Michael Deardeuff. How amazon web services uses formal methods. *Communications of the ACM*, 58(4):66–73, 2015.

[7] Michael Newman. Software errors cost us economy $59.5 billion annually. *NIST Assesses Technical Needs of Industry to Improve Software-Testing*, 2002.

[8] Natarajan Shankar. Automated deduction for verification. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 41(4):20, 2009.

CÁC PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN HỮU HẠN CHO PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG (TIẾP THEO)

Henry Tran
Wayne State University, Michigan, USA

LỜI BAN BIÊN TẬP

Bài viết của tác giả Henry Tran có nguyên bản là tiếng Anh, có ba phần chính gồm:

- Lý thuyết và ứng dụng lập trình MATLAB trong phương trình Parabolic.
- Lý thuyết và ứng dụng lập trình MATLAB trong phương trình Hyperbolic.
- Lý thuyết và ứng dụng lập trình MATLAB trong phương trình Elliptic.

Chúng tôi đã đăng phần đầu ở Epsilon số 11. Ở số báo này, chúng tôi sẽ đăng tiếp hai phần còn lại, về Hyperbolic và Elliptic.

1. Các dạng toán Hyperbolic

1.1. Phương trình đạo hàm riêng dạng Hyperbolic

Một phương trình đạo hàm riêng bậc hai có dạng

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial xy} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + f = 0$$

được gọi là bài toán hyperbolic nếu ma trận

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

thỏa mãn điều kiện $\det(M) = ac - b^2 < 0$.

Phương trình sóng là một dạng cơ bản của PDEs trong bài toán hyperbolic của không gian một chiều với $a = 1$.

1.2. Bài toán mô hình phương trình sóng

Phương trình sóng được viết dưới dạng

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$$

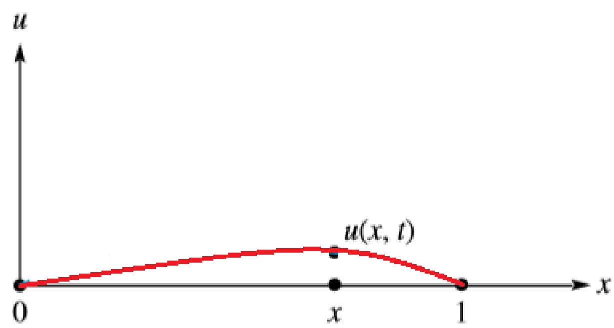
Chúng ta có thể viết lại thành

$$\frac{1}{h^2}\left[u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)\right]=\frac{1}{k^2}\left[u(x,t+k)-2u(x,t)+u(x,t-k)\right]$$

Ta cũng có công thức

$$u(x,t+k)=\rho u(x+h,t)+2(1-\rho)u(x,t)+\rho u(x-h,t)-u(x,t-k)\quad(*)\,.$$

Điều kiện ổn định ở đây là $\rho=\frac{k^2}{h^2}\leq 1$.



Phương trình sóng và các điều kiện ban đầu là

$$\begin{cases}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\\ u(x,0)=f(x)\\ u_t(x,0)=0\\ u(0,t)=u(1,t)=0\end{cases}$$

trong đó $0\leq x\leq 1\ \ and\ \ 0\leq t$.

Nhắc lại rằng $u_t(x,t)=\frac{1}{k}\left[u(x,t+k)-u(x,t)\right]$.

Từ $t=0$, ta có

$$u_t(x,0)=\frac{1}{k}\left[u(x,k)-u(x,0)\right].$$

Do đó, ta cũng có hệ phương trình tương tự

$$\begin{cases}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\\ u(x,0)=f(x)\\ \frac{1}{k}\left[u(x,k)-u(x,0)\right]=0\\ u(0,t)=u(1,t)=0\end{cases}$$

với $0 \leq x \leq 1 \ \ and \ \ 0 \leq t$.

Từ phương trình của điều kiện ban đầu với điều kiện đầu tiên của $u_t(x, 0) = 0$ là

$$\frac{1}{k}\left[u(x, k) - u(x, 0)\right] = 0,$$

chúng ta có thể kết luận điều kiện đầu tiên của $u(x, k) = u(x, 0) = f(x)$. Thay $t = 0$ trong $(*)$, ta được

$$u(x, k) = \rho u(x + h, 0) + 2(1 - \rho) u(x, 0) + \rho u(x - h, 0) - u(x, -k).$$

Sử dụng xấp xỉ sai số trung tâm, ta có

$$\frac{1}{2k}\left[u(x, k) - u(x, -k)\right] = 0.$$

Do đó, ta có điều kiện thứ hai của hệ điều kiện biên của (x, k) là

$$u(x, k) = \frac{1}{2}\rho\left[f(x + h) + f(x - h)\right] + (1 - \rho) f(x).$$

1.3. Công thức tường minh

1.3.1. Phương pháp tường minh sử dụng công thức

Từ phương trình ban đầu, bằng việc dùng biến h, k lần lượt ký hiệu cho số gia của các biến x, t, chúng ta có

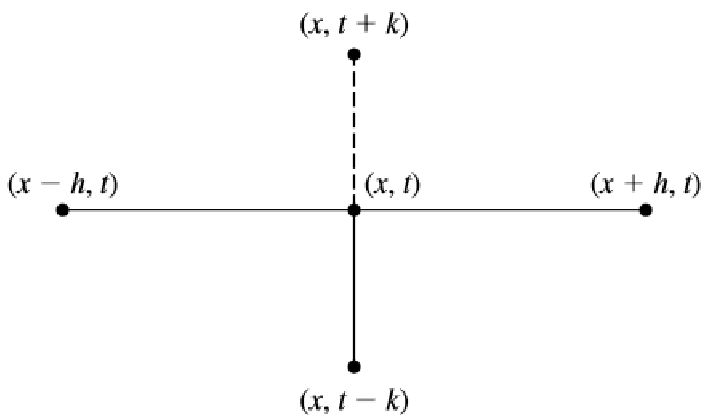
$$\frac{1}{h^2}\left[u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)\right] = \frac{1}{k^2}\left[u(x, t + k) - 2u(x, t) + u(x, t - k)\right].$$

Nó cũng có thể viết thành dạng

$$u(x, t + k) = \rho u(x + h, t) + 2(1 - \rho) u(x, t) + \rho u(x - h, t) - u(x, t - k).$$

Ở đây, điều kiện ổn định là $\rho = \frac{k^2}{h^2} \leq 1$.

Chúng ta có năm điểm được biểu diễn ở lược đồ sau



1.3.2. Giải phương trình sóng và lập trình tính toán

a) Ví dụ

Chúng ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u\left(x,t\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u\left(x,t\right) \\ u\left(x,0\right) = f\left(x\right) \\ \frac{1}{k}\left[u\left(x,k\right) - u\left(x,0\right)\right] = 0 \\ u\left(0,t\right) = u\left(1,t\right) = 0 \end{cases}$$

Sử dụng phần mềm MATLAB để giải với

$$f\left(x\right) = sin2\pi x, T = 1, L = 1, , n_t = 200, n_x = 32.$$

Điều kiện ban đầu là $u\left(0,t\right) = u\left(1,t\right) = 0$ và

$$\frac{1}{k}\left[u\left(x,k\right) - u\left(x,0\right)\right] = 0$$

hay

$$u\left(x,k\right) = \frac{1}{2}\rho\left[f\left(x+h\right) + f\left(x-h\right)\right] + \left(1-\rho\right) f\left(x\right)$$

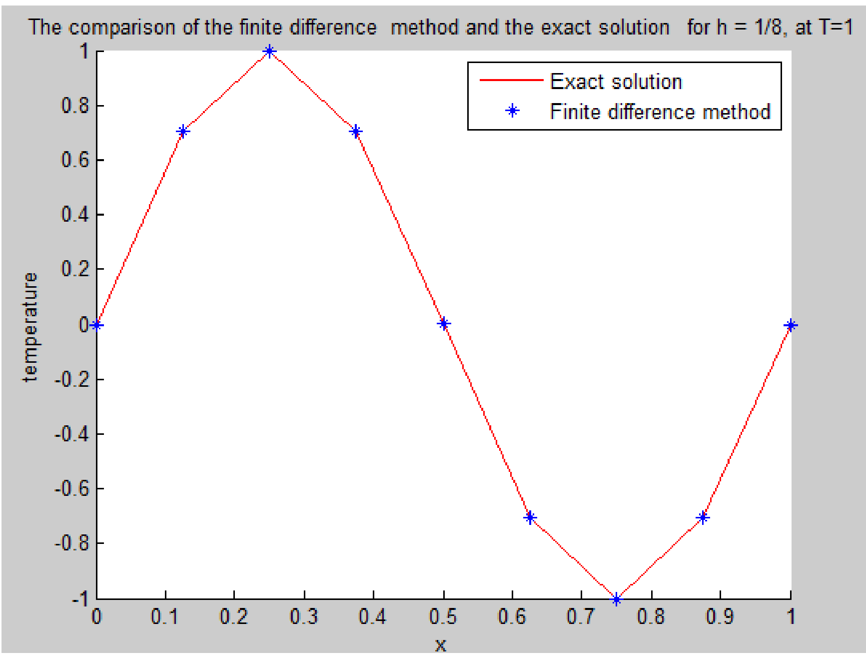
b) Lập trình tính toán (xem thêm phần Phụ lục bên dưới)

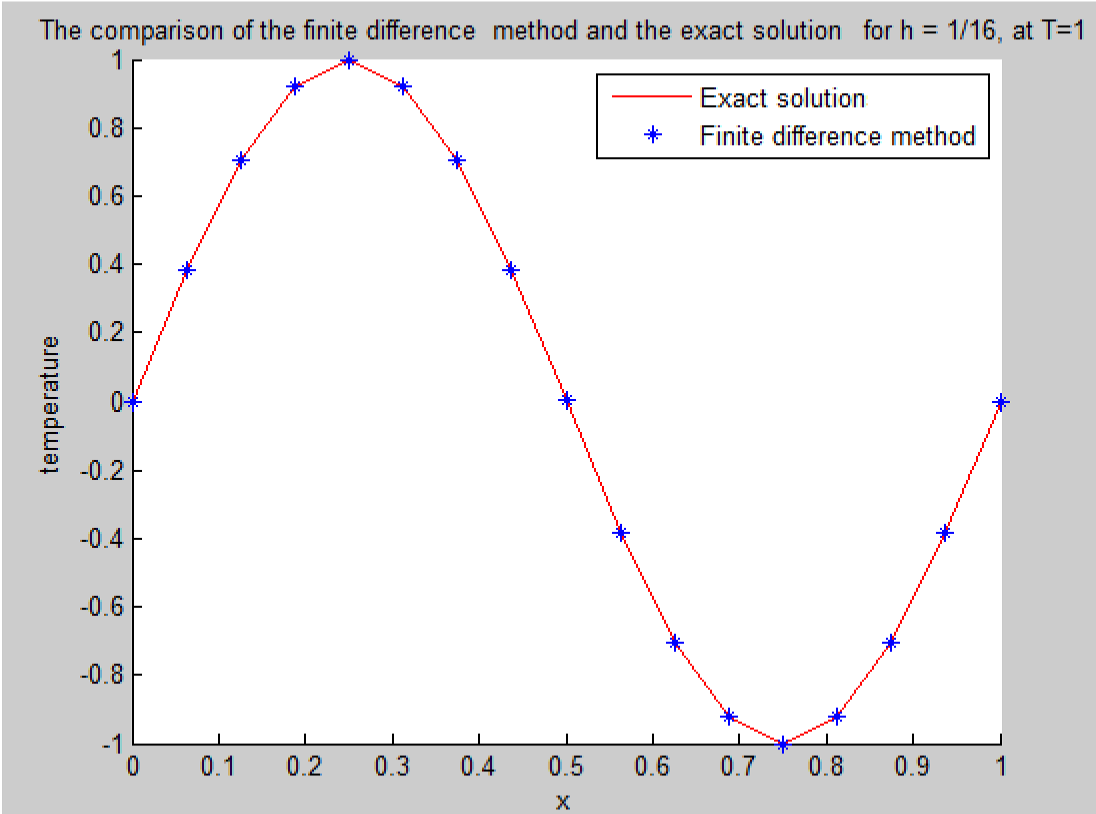
Nghiệm chính xác là

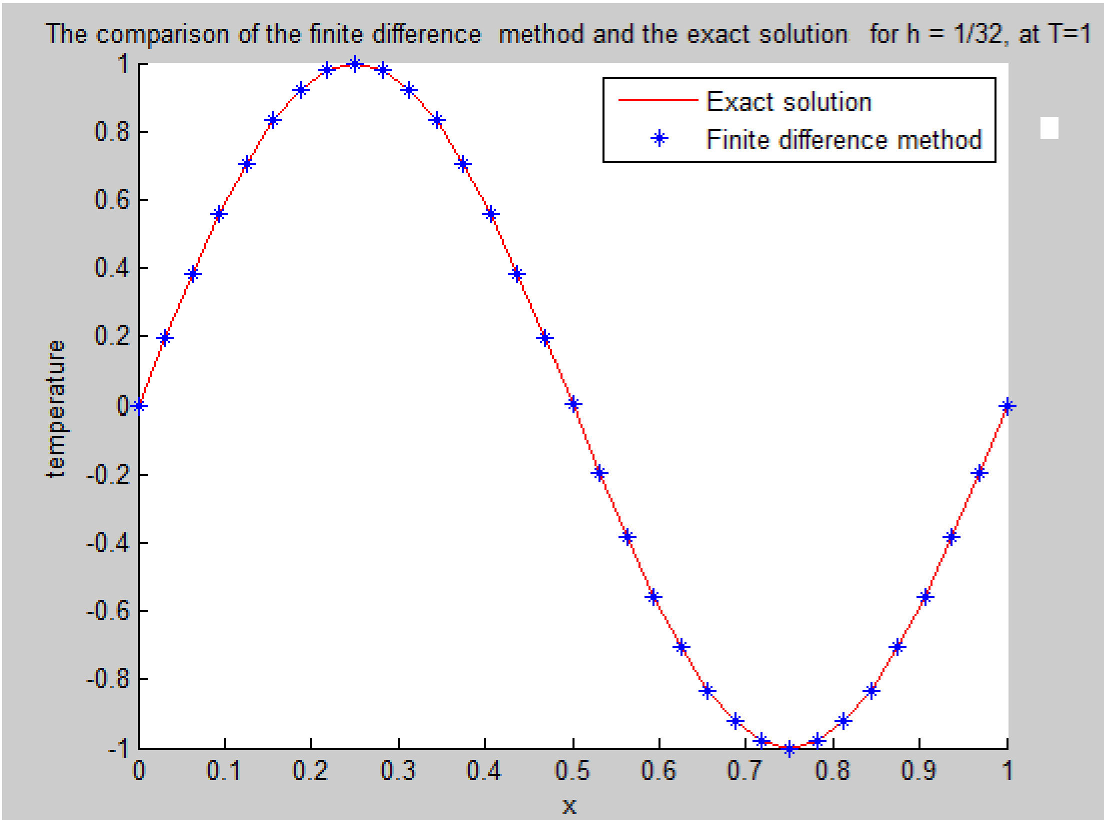
$$u_{exact}\left(x,t\right) = \frac{1}{2}\left[sin2\pi\left(x+t\right) + sin2\pi\left(x-t\right)\right] \text{ tại } T = 1.$$

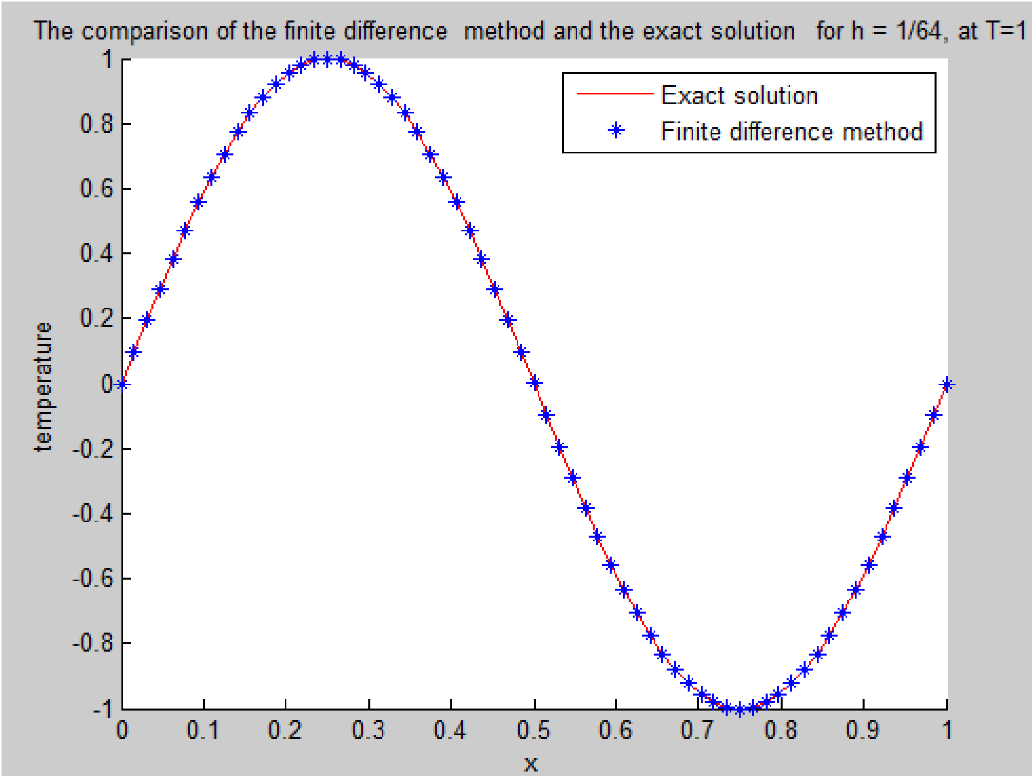
Chúng ta có các kết quả về nghiệm xấp xỉ bởi phương pháp sai phân hữu hạn và nghiệm chính xác với $T = 1$ trong các hình minh họa.

Trong 2D: với $T = 1, L = 1, n_t = 200, n_x = 8, 16, 32, 64.$

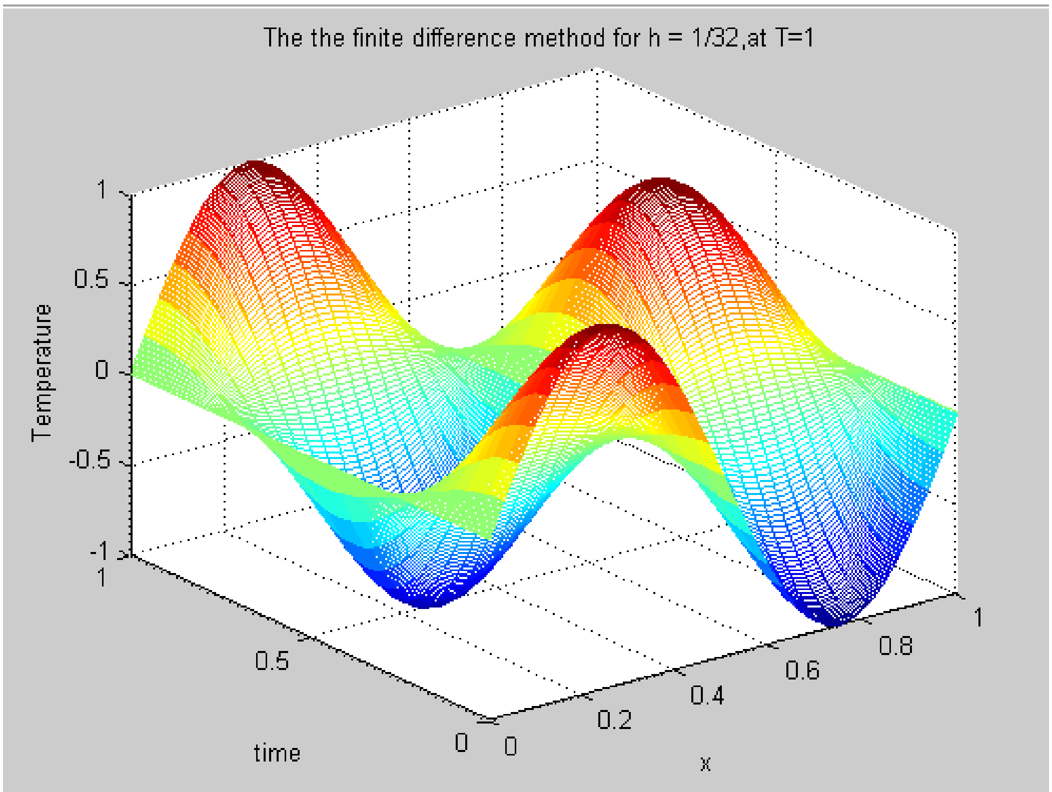



The comparison of the finite difference method and the exact solution for h = 1/16, at T=1
Exact solution
Finite difference method
temperature
x
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

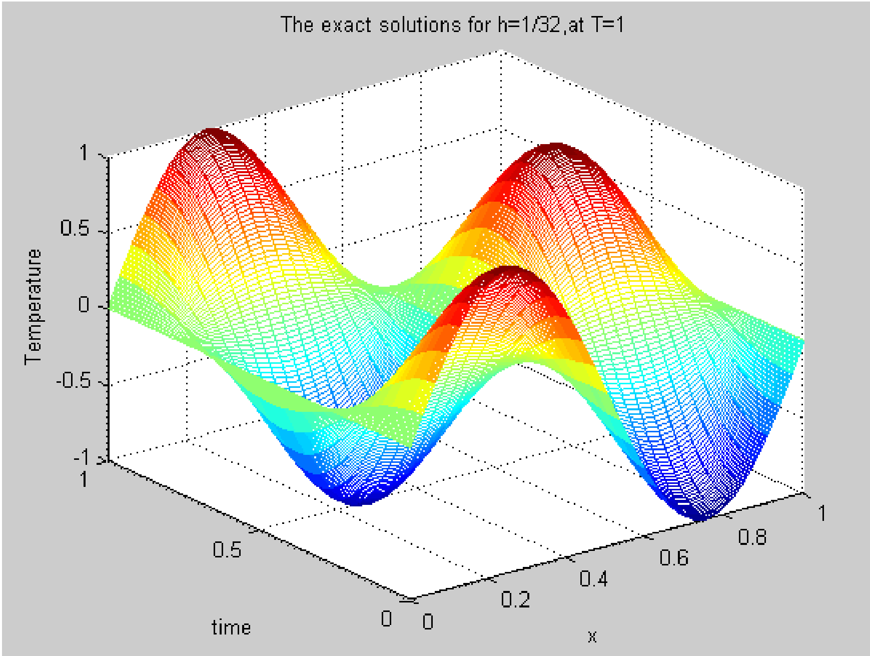

The comparison of the finite difference method and the exact solution for h = 1/32, at T=1
Exact solution
Finite difference method
temperature
x
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1



So sánh giữa phương pháp sai phân hữu hạn và nghiệm chính xác



Minh họa của nghiệm gần đúng bởi phương pháp tường minh với $T = 1$



Minh họa của nghiệm chính xác với $T = 1$

Bằng cách tính các sai số giữa nghiệm gần đúng và nghiệm chính xác, ta có bảng sau

N	The errors of the explicit method and the exact solution	The orders of convergence the explicit method and exact solution
4	1.5594e-01	0
8	4.0052e-02	$\alpha_4 = 1.9611$
16	1.0073e-02	$\alpha_8 = 1.9913$
32	2.5219e-03	$\alpha_{16} = 1.9980$
64	6.3059e-04	$\alpha_{32} = 1.9997$

2. Các dạng toán Elliptic

Phương trình đạo hàm riêng dạng Elliptic Một phương trình đạo hàm riêng bậc hai có dạng

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial xy} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + f = 0.$$

được gọi là bài toán hyperbolic nếu ma trận

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

thỏa mãn điều kiện $\det(M) = ac - b^2 > 0$.

Phương trình Helmholtz là dạng đơn giản của PDEs trong bài toán elliptic của không gian một chiều với $a = 1$.

2.1. Bài toán mô hình phương trình Helmholtz

Giả sử hàm số $u = u(x, y)$ có hai biến là x và y, hàm này không xác định được cụ thể nhưng là duy nhất. Ta giả sử vùng R được cho trước là mặt phẳng hai chiều xy

$$\begin{cases} \nabla^2 u + fu = g \\ (x, y) \text{ là biết trước trên } R \end{cases} \quad (**)\,,$$

với $\nabla^2 u\,(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $f = f\,(x, y)$ và$g = g\,(x, y)$ là các hàm được định nghĩa trong R.

Nếu f là hàm hằng thì $(**)$ được gọi là phương trình Helmholtz.

Nếu thay$f = g = 0$ vào $(**)$, ta có phương trình Laplace:

$$\nabla^2 u\,(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Nếu thay $f = 0, g \neq 0$ vào $(**)$, ta có phương trình Poisson

$$\nabla^2 u\,(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g\,(x, y)\,.$$

2.2. Công thức tường minh

Xét bài toán elliptic:

$$\begin{cases} \nabla^2 u + fu = g \text{ nằm trong } \Omega = [0, 1] \\ \qquad u \ = 0 \text{ trên } \partial\,\Omega = [0, 1] \end{cases}$$

Tương tự các phần trước, ta sẽ tìm nghiệm gần đúng của bài toán trên bằng phương pháp sai phân hữu hạn.

Chúng ta bắt đầu bởi công thức đơn giản

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}\left[f\,(x + h, y) - 2f\,(x, y) + f\,(x - h, y)\right]$$

và

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2}\left[f\,(x, y + h) - 2f\,(x, y) + f\,(x, y - h)\right]$$

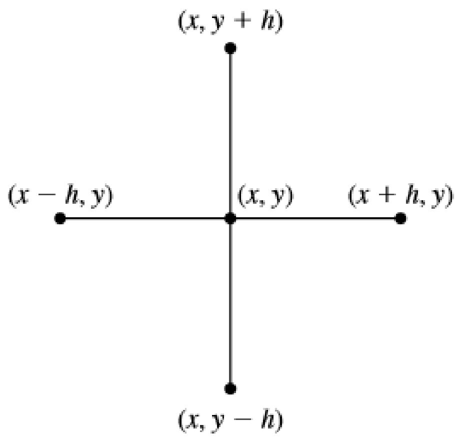
Sử dụng $(**)$, ta có 5 điểm trong phương trình Laplace

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

gần bằng

$$\frac{1}{h^2}\left[u\left(x+h,y\right)+u\left(x-h,y\right)+u\left(x,y+h\right)+u\left(x,y-h\right)-4u\left(x,y\right)\right]$$

Phương trình này được minh họa trong hình bên dưới



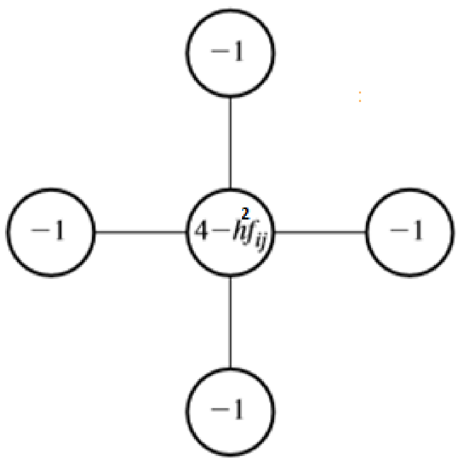
Trở lại bài toán ban đầu, ta định nghĩa $x_i = ih,\ y_j = jh\ \ where\ i, j\ \ \geq 0$. Ta sẽ viết các hàm như sau $u_{ij} = u\left(x_i, y_j\right),\ \ f_{ij} = f\left(x_i, y_j\right),\ \ g_{ij} = g\left(x_i, y_j\right)$ và 5 điểm sẽ bao gồm

$$\left(\nabla^2 u\right)_{ij} \approx \frac{1}{h^2}\left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4 + u_{i,j}\right]$$

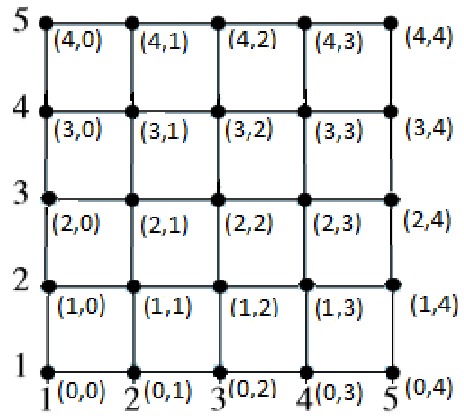
Các điểm này cần thể hiện bởi mô hình với 5 hệ số. Phương trình $(**)$ được viết dưới dạng

$$-u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + \left(4 - h^2 f_{i,j}\right) u_{ij} = h^2 g_{i,j}$$

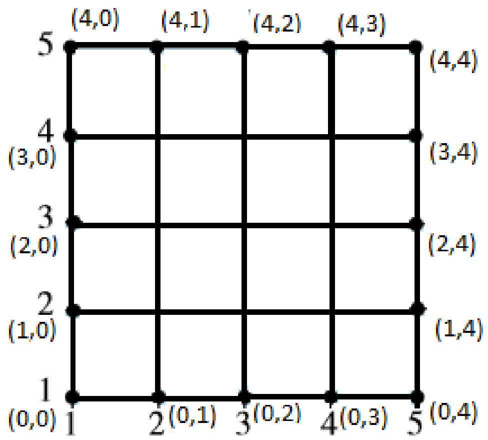
Dạng của phương trình được mô tả trong hình bên dưới



Xét bài toán của elliptic trong trường hợp $n = 3$. Ta sẽ dùng đồ thị trong hệ trục tọa độ cho bài toán này như hình bên dưới



Ta có các điểm trên biên là



Các điểm này đều thuộc biên nên chúng phải bằng 0. Dù vậy, trong một số trường hợp khác, có những điểm thuộc biên khác 0. Bằng cách phân tích độc lập, chúng ta có 9 điểm trên lưới như bên dưới.

Mô hình này bao gồm 9 điểm lưới ở trong. Để xem xét các điểm trên biên, ta có 9 phương trình của hệ như sau

$$\begin{cases} -u_{21}-u_{01}-u_{12}-u_{10}+(4-h^2f_{11})u_{11}=-h^2g_{11}\\ -u_{31}-u_{11}-u_{22}-u_{20}+(4-h^2f_{21})u_{21}=-h^2g_{21}\\ -u_{41}-u_{21}-u_{32}-u_{30}+(4-h^2f_{31})u_{31}=-h^2g_{31}\\ -u_{22}-u_{02}-u_{13}-u_{11}+(4-h^2f_{12})u_{12}=-h^2g_{12}\\ -u_{32}-u_{12}-u_{23}-u_{21}+(4-h^2f_{22})u_{22}=-h^2g_{22}\\ -u_{42}-u_{22}-u_{33}-u_{31}+(4-h^2f_{32})u_{32}=-h^2g_{32}\\ -u_{23}-u_{03}-u_{14}-u_{12}+(4-h^2f_{13})u_{13}=-h^2g_{13}\\ -u_{33}-u_{13}-u_{24}-u_{22}+(4-h^2f_{23})u_{23}=-h^2g_{23}\\ -u_{43}-u_{23}-u_{34}-u_{32}+(4-h^2f_{33})u_{33}=-h^2g_{33} \end{cases}$$

Tiếp theo, chúng ta sẽ xây dựng hệ phương trình bởi công thức $Au = b$, trong đó A là ma trận của hệ tuyến tuyến với kích thước $3^2 \times 3^2$. Ta có

$$u = [u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{12}, u_{22}, u_{32}, u_{13}, u_{23}, u_{33}].$$

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x_{22} & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x_{33} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x_{44} & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & x_{55} & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & x_{66} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & x_{77} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & x_{88} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & x_{99} \end{bmatrix}$$

trong đó

$$x_{11} = 4 - h^2 f_{11}, x_{22} = 4 - h^2 f_{21}, x_{33} = 4 - h^2 f_{31}, x_{44} = 4 - h^2 f_{12},$$
$$x_{55} = 4 - h^2 f_{22}, x_{66} = 4 - h^2 f_{32}, x_{77} = 4 - h^2 f_{13}, x_{88} = 4 - h^2 f_{23}, x_{99} = 4 - h^2 f_{33}$$

$$b = \begin{bmatrix} -h^2 g_{11} + u_{10} + u_{01} \\ -h^2 g_{21} + u_{20} \\ -h^2 g_{31} + u_{30} + u_{41} \\ -h^2 g_{12} + u_{02} \\ -h^2 g_{22} \\ -h^2 g_{32} + u_{42} \\ -h^2 g_{13} + u_{14} + u_{03} \\ -h^2 g_{23} + u_{24} \\ -h^2 g_{33} + u_{34} + u_{43} \end{bmatrix}$$

trong đó $u_{10}, u_{01}, u_{20}, u_{30}, u_{41}, u_{02}, u_{42}, u_{14}, u_{03}, u_{24}, u_{34}, u_{43}$ là các điểm trên biên nên chúng đều phải bằng 0.

Nếu $f(x, y) < 0$ thì A là ma trận chéo hóa.

Tổng quát, ta có hệ phương trình $Mu = b$, trong đó M là ma trận của hệ phương trình tuyến tính với kích thước $n^2 \times n^2$.

Ta có

$$u = [u_{11}, u_{21}, \ldots, u_{n1}, u_{12}, u_{22}, \ldots, u_{n2}, , \ldots, u_{1n}, u_{2n}, \ldots, u_{nn}].$$

Ma trận tổng quát M là

$$M = \begin{bmatrix} x_{11} & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & . & 0 \\ -1 & x_{22} & -1 & 0 & -1 & & & \\ 0 & -1 & . & -1 & 0 & & & \\ -1 & 0 & -1 & . & -1 & 0 & & \\ 0 & & 0 & -1 & x_{nn} & -1 & 0 & \\ 0 & & & 0 & -1 & x_{(n+1)(n+1)} & -1 & 0 \\ . & & & & 0 & -1 & . & -1 \\ 0 & & & & & 0 & -1 & x_{n^2n^2} \end{bmatrix}$$

trong đó $x_{11} = 4 - h^2 f_{11}, x_{22} = 4 - h^2 f_{21}, x_{nn} = 4 - h^2 f_{n1}, x_{(n+1)(n+1)} = 4 - h^2 f_{12}, x_{n^2n^2} = 4 - h^2 f_{nn}$ và hai đường chéo chứa các số -1 nằm bên cạnh đường chéo chính.

Nếu $mod\,(i, n) \neq 0,\ i = 1, \ldots, n^2$ sẽ dẫn đến $M\,(i, i+1) = -1$ và $M\,(i+1, i) = -1$. Ngược lại, nếu $mod\,(i, n) = 0$ thì $M\,(i, i+1) = M\,(i+1, i) = 0$. Trong hai đường chéo còn lại, số thuộc dòng thứ i và cột thứ $i+n$ thuộc vào phần trên đường chéo chính hoặc số thuộc dòng thứ $i+n$ và cột thứ i nằm dưới đường chéo chính là -1. Cụ thể là

$$M\,(i, i+n) = -1,\ i = 1, \ldots, n^2 \text{ và } M\,(i+n, i) = -1,\ i = n+1, \ldots, n^2.$$

Tổng quát, ta sẽ viết ma trận b như bên dưới

$$b = \begin{bmatrix} -h^2 g_{11} + u_{10} + u_{01} \\ -h^2 g_{21} + u_{20} \\ . \\ . \\ -h^2 g_{n1} + u_{(n+1)\,1} + u_{(n-1)\,1} + u_{n\,0} \\ -h^2 g_{12} + u_{02} \\ -h^2 g_{22} \\ . \\ . \\ -h^2 g_{n2} + u_{(n+1)2} + u_{(n-1)\,2} \\ . \\ . \\ -h^2 g_{1n} + u_{0n} + u_{1(n+1)} \\ -h^2 g_{2n} + u_{2(n+1)} \\ . \\ . \\ -h^2 g_{n\,n} + u_{(n+1)n} + u_{n(n+1)} + u_{n(n-1)} \end{bmatrix}$$

Nếu $f\,(x, y) < 0$ thì A là ma trận chéo hóa.

2.3. Ví dụ và lập trình tính toán.

2.3.1. Ví dụ.

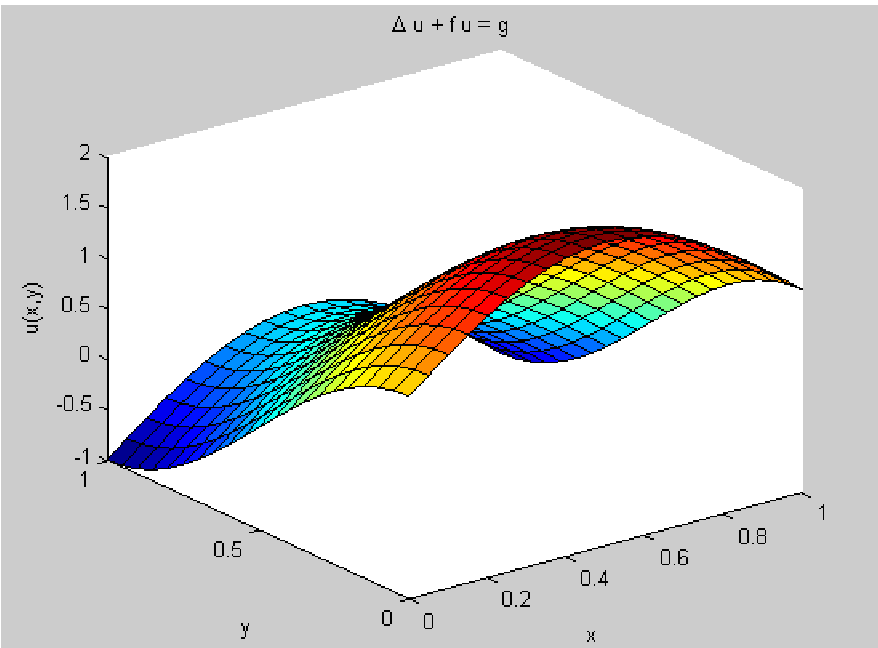
Xét bài toán elliptic $\begin{cases} \nabla^2 u + fu = g \text{ nằm trong } \Omega = [0,1] \\ \quad u \ = q \text{ trên } \partial\, \Omega = [0,1] \end{cases}$ và q là $u_{exact} = q = sin\pi x + cos\pi y$ hoặc $u_{exact} = q = sin\pi\,(x+y)$, trong đó $f = 1$, hoặc $f = xy$.

2.3.2. Lập trình tính toán (xem thêm phần Phụ lục)

Chúng ta sẽ dùng các hàm sau đây trong chương trình MATLAB:

```
case 1: u = sin(pi*x)*sin(pi*y);
case 2: u = x*y*(x-1)*(y-1);
case 3: u = x^2 + y^2;
case 4: u = x^3 + y^3;
case 5: u = sin(pi*x)*cos(pi*y);
case 6: u = sin(pi*x) + cos(pi*y);
case 7: u = sin(pi*(x+y));
case 8: u = sin(pi*(x^2+y^2));
case 9: u = x^2;
case 10:u = x;
```

Ta sẽ vẽ đồ thị của nghiệm gần đúng với $f = 1$ và $u_{exact} = q = sin\pi x + cos\pi y$; $g = \nabla^2 u_{exact} + f u_{exact}$

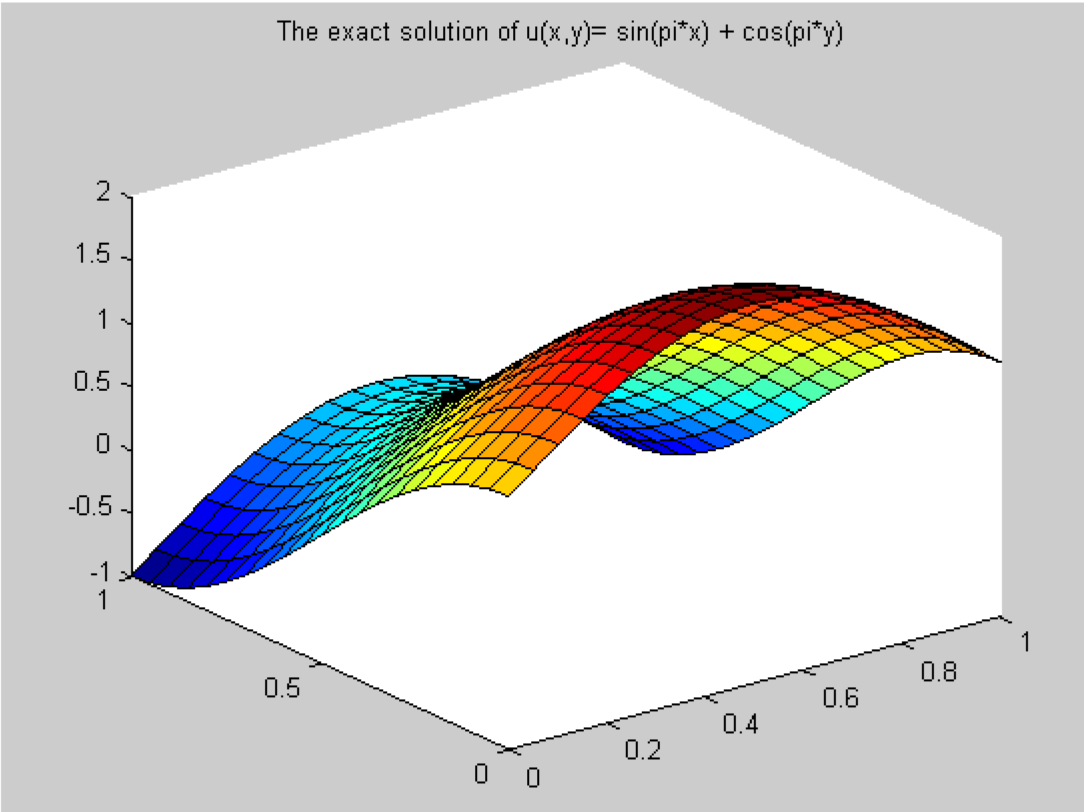


Đồ thị của nghiệm gần đúng với phương pháp sai phân hữu hạn với $n = 20$

Trong đồ thị, các biên đều bằng 0. Bằng cách phân tích thêm, ta có thể thấy rằng

- Với $x = 0$ thì $u(1, y(j)) = \cos(\pi y(j))$
- Với $x = 1$ thì $u(N+1, y(j)) = \cos(\pi y(j))$
- Với $y = 0$ thì $u(x(i), 1) = \sin(\pi x(i)) + 1$
- Với $y = 1$ thì $u(x(i), N+1) = \sin(\pi x(i)) - 1$

Ta sẽ vẽ đồ thị của nghiệm chính xác với hàm cụ thể cần xét là $u_{exact} = sin\pi x + cos\pi y$, nghiệm chính xác của nó được vẽ trong hình bên dưới

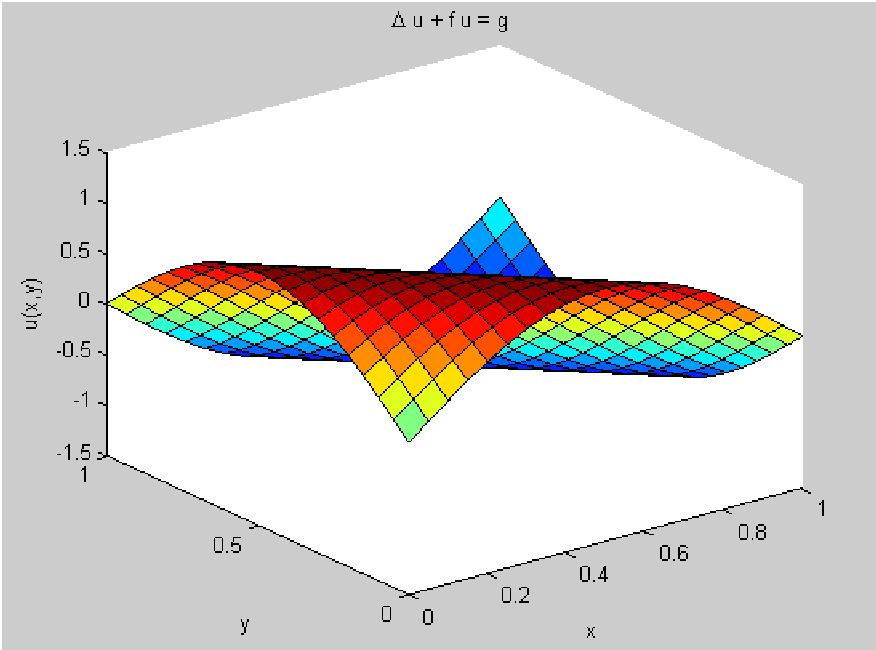


Đồ thị của nghiệm chính xác với $n = 20$

Ta sẽ vẽ đồ thị của nghiệm gần đúng với $f = 1$ thì

$$u_{exact} = q = sin\pi\,(x + y)\,;$$
$$g = \nabla^2 u + f u_{exact}.$$

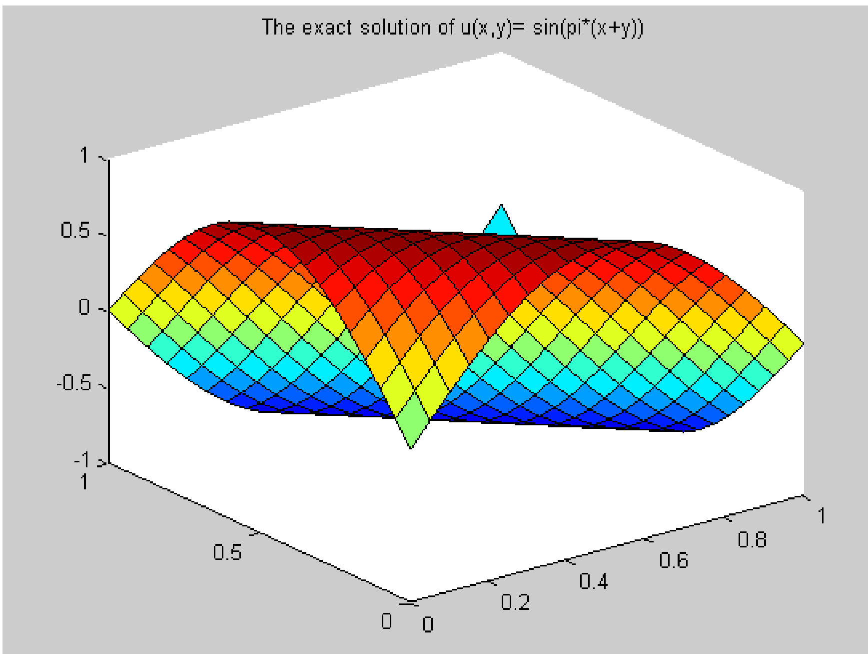
Dưới đây là đồ thị của nghiệm cần đúng tìm được bằng phương pháp sai phân hữu hạn với $n = 20$



Các giải thích bổ sung thêm cho điều kiện ban đầu:

- Với $x = 0$ thì $u(1, y(j)) = \sin \pi y(j)$
- Với $x = 1$ thì $u(N+1, y(j)) = \sin \pi \left(1 + y\left(j\right)\right)$
- Với $y = 0$ thì $u(x(i), 1) = \sin \pi x\left(i\right)$
- Với $y = 1$ thì $u(x(i), N+1) = \sin \pi \left(x\left(i\right) + 1\right)$

Tiếp theo, ta sẽ vẽ đồ thị của nghiệm chính xác với $u_{exact} = sin\pi\left(x + y\right), n = 20$



Ta có bảng hội tụ của nghiệm trong các trường hợp sau

N	The errors of the approximate solutions and the exact solutions	The orders of convergence of the approximate solutions and exact solutions
2	0.0347	0
4	0.0093	1.9061
8	0.0023	1.9913
16	0.0006	1.9919
32	0.0001	1.9997

Với $f = 1; u_{exact} = sin\pi\,(x + y)$

N	The errors of the approximate solutions and the exact solutions	The orders of convergence of the approximate solutions and exact solutions
2	0.0246	0
4	0.0061	2.0071
8	0.0016	1.9727
16	0.0004	1.9802
32	0.0001	2.000

3. Kết luận

3.1. Các bài toán Hyperbolic

Phương pháp sai phân hữu hạn cho PDEs của bài toán hyperbolic với dạng đơn giản nhất là phương trình sóng của một chiều. Giá trị của h và k thỏa mãn điều kiện ổn định là $\rho = \frac{k^2}{h^2} \leq 1$. Điều này có nghĩa là $nx \geq nT$ và ta cần chọn giá trị thích hợp cho nT và nx trong chương trình MATLAB.

Nghiệm hội tụ khi ta cố định giá trị của nT nhưng thay đổi giá trị của nx. Chúng ta cũng thấy rằng nếu chọn $nx \geq nT$ thì đồ thị sẽ không còn đúng dạng nữa.

Chúng ta đã tính được sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm gần đúng bởi các giá trị khác nhau của nx. Điều này chứng tỏ rằng bậc hội tụ là 1. Thông qua bảng hội tụ, ta đã vẽ được đồ thị để so sánh các giá trị của nghiệm chính xác và nghiệm gần đúng trên cùng một hệ trục tọa độ. Cuối cùng, ta cũng đã thể hiện được đồ thị của hàm số đã chọn trong không gian ba chiều.

Lý thuyết về bài toán dạng hyperbolic có nhiều mô hình từ đơn giản đến phức tạp trong Toán học, chẳng hạn như phương trình đối lưu, Lax, Upwind, Lax-Wendroff, phương trình Navier-Stokes. Thêm nữa, bài toán này trong những năm gần đây cũng được nghiên cứu và phát triển phục vụ cho khoa học và kỹ thuật.

Phương trình sóng có nhiều ứng dụng trong vật lý như các sóng của chuỗi, sóng giật trong không khí, sóng cơ học lượng tử, các mô hình âm thanh của sóng địa chấn, sóng âm trong chất lỏng và gas, v.v.

3.2. Các bài toán Elliptic

Phương pháp sai phân hữu hạn cho PDEs của bài toán elliptic phức tạp hơn hai dạng toán trước. Ở đây, chúng ta đã dùng phương trình Helmholtz để xét bài toán này. Phương trình đó bao gồm các phương trình Laplace và Poisson, phụ thuộc vào giá trị khác nhau của các hàm f và g. Chúng ta cần ký hiệu các điểm trên lưới ở trong và ở trên biên, sau đó xây dựng ma trận của hệ phương trình tuyến tính tổng quát rồi tìm các giá trị của b. Sự hội tụ của nghiệm xảy ra khi ta chọn giá trị đủ lớn nào đó của N.

Với các giá trị khác nhau của N, ta có thể thấy rằng độ hội tụ của nghiệm xấp xỉ và kết luận được điểm tương quan giữa các mô hình tương tự nhau trong nghiệm gần đúng và nghiệm chính xác trên cùng một hệ trục tọa độ. Hơn nữa, từ các đồ thị của không gian ba chiều, ta cũng đã vẽ được các điểm trên biên và bên trong một cách rất rõ ràng. Mặt khác, ta cũng có thể thay đổi các hàm f và g trong MATLAB để vẽ các đồ thị khác.

Các bài toán elliptic của PDEs có nhiều ứng dụng trong vật lý tĩnh điện, kỹ thuật cơ khí và vật lý lý thuyết.

4. Phụ lục

4.1. Các bài toán hyperbolic

MATLAB program 3: Bài toán mô hình phương trình sóng

```
function hyperfdm_sol(L,T,nT,nx)
% Matlab Program : Hyperbolic problems:
%Wave equation: u_xx=u_tt
%where u(x,0)=sin(pi*x). Use the explicit method.
%The exact solution: u_exact=(1/2)*(sin(2*pi*(x+t))+sin(2*pi*(x-t)))
```

```
%L = 1.; % Length of the wire
%T = 1;   % Final time
% Choose nT= 200. Number of time steps
dt = T/nT;
% Choose nx= 4,8,... Number of space steps
dx = L/nx;
rho = dt^2/(dx^2); % Stability parameter rho <= 1 when nx <= nT.
% Initial temperature of the wire
% initilalize u
u = zeros(nx+1,nT+1);
u3 = zeros(nx+1,nT+1);
x = zeros(nx+1,1);
time = zeros(nT+1,1);
for i = 1:nx+1
   x(i) = (i-1)*dx;
   u(i,1) = f0(x(i));
end
%Temperature at the boundary (t=0)
for k =1:nT+1
   u(1,k) = 0.;
   u(nx+1,k) = 0.;
   time(k) = (k-1)*dt;
end
%Implementation of the exact solution
for k=1:nT+1
   for i = 1:nx+1
   u3(i,k) = u_exact(x(i),time(k));
   end
end
%Implementation of the explicit method

for i = 2:nx %k=2, the first time step
   u(i,2) = (1/2)*rho*(f0(x(i+1))+f0(x(i-1)))+(1-rho)*f0(x(i));
end
% The second time step
for k = 3:nT+1 % Time Loop
   for i = 2:nx % Space Loop
      u(i,k) = rho*u(i+1,k-1)+2*(1-rho)*u(i,k-1)+
         rho*u(i-1,k-1)-u(i,k-2);
   end
end
disp(error2);

% Graphical representation of the temperature at different selected
   times
figure
hold on

%The graphic of the exact solution in 2D
plot(x,u3(:,1),'-r','MarkerFaceColor','r')
```

```
%The graphic of the explicit method in 2D
plot(x,u(:,1),'*b','MarkerFaceColor','b')
xlabel('x')
ylabel('temperature')
legend({'Exact solutions' 'Finite difference
   method'},'location','NE');
title('The comparison of the finite difference method and the exact
   solutions for h = 1/64, at T=1')
hold off
%The graphic of the explicit method in 3D
figure
mesh(x,time,u')
 title('The the finite difference method for h = 1/32,at T=1')
xlabel('x')
ylabel('time')
zlabel('Temperature')

%The graphic of the exact solution in 3D

figure
mesh(x,time,u3')
 title('The exact solutions for h=1/32,at T=1')
xlabel('x')
ylabel('time')
zlabel('Temperature')
```

Trong đó, ta dùng chương trình con để tính $u0$:

```
function u = u_exact(x)
% Initial Condition
u =sin(2*pi*x);
```

Tính nghiệm chính xác $u_e xact(x)$

```
function u3 = u_exact(x,t)
% The exact solution
u3 =(1/2)*(sin(2*pi*(x+t))+sin(2*pi*(x-t)));
```

4.2. Các bài toán của Elliptic

MATLAB program 4: Bài toán mô hình phương trình Helmholtz

```
function FDM_singlerun(N)

% Solves the following elliptic PDE using a finite difference method
% u_xx + u_yy + f u = g in [0,1]
% u = exact_u on the boundary of [0,1]
```

```
h = 1/N;

global x y P
x = zeros(N+1,1);
y = zeros(N+1,1);
P = zeros(N+1,N+1);

global u_type f_type

%u_type = 1; %u = sin(pi*x)*sin(pi*y)
%u_type = 2; %u = x*y*(x-1)*(y-1)
%u_type = 3; %u = x^2 + y^2
%u_type = 4; %u = x^3 + y^3
%u_type = 5; %u = sin(pi*x)*cos(pi*y)
u_type = 6; %u = sin(pi*x) + cos(pi*y)
%u_type = 7; %u = sin(pi(x+y))
%u_type = 8; %u = sin(pi(x^2+y^2))
%u_type = 9; %u = x^2
%u_type = 10; %u = x

%f_type = 1; %f = 0
f_type = 2; %f = 1
%f_type = 3; %f = x*y
%f_type = 4; %f = x^2+y^2

% Define the grid
for i = 1:N+1; x(i) = (i-1)*h; end
for j = 1:N+1; y(j) = (j-1)*h; end

% Enforcing boundary conditions:
% For x=0 and x=1
for j = 1:N+1
   P(1, j) = exact_u(0,y(j));
   P(N+1,j) = exact_u(1,y(j));
end
% For y=0 and y=1
for i = 1:N+1
   P(i,1) = exact_u(x(i),0);
   P(i,N+1) = exact_u(x(i),1);
end

% Generate the LHS matrix A
A = zeros((N-1)^2,(N-1)^2);
for i = 1:(N-1)^2
   A(i,i) = 4;
end

% Add contributions from the f u term
for j = 1:N-1
```

```
    %disp(['j = ',num2str(j)])
    for i = 1:N-1
        %disp(['i = ',num2str(i)])
        A((j-1)*(N-1)+i,(j-1)*(N-1)+i) =
            A((j-1)*(N-1)+i,(j-1)*(N-1)+i) - h^2*f(x(i+1),y(j+1));
    end
end

for i = 1:(N-1)^2-1
    if mod(i,N-1) ~= 0
       A(i,i+1) = -1;
    end
end
for i = 1:(N-1)^2-3
    A(i,i+(N-1)) = -1;
end
for i = 2:(N-1)^2
    if mod(i,N-1) ~= 1
       A(i,i-1) = -1;
    end
end
for i = N:(N-1)^2
    A(i,i-(N-1)) = -1;
end
%disp(A)

% Generate the RHS vector b.
b = zeros((N-1)^2,1);

for j = 1:N-1
    for i = 1:N-1
        b((j-1)*(N-1)+i) = b((j-1)*(N-1)+i) - h^2*g(x(i+1),y(j+1));
    end
end

% Add contributions to b from the BC
% Contributions corresponding to y = 0
for i = 1:N-1
    b(i) = b(i) + P(i+1,1);
    %b(i) = b(i) + P(1,i+1);
end
% Contributions corresponding to y = 1
for i = 1:N-1
    b((N-1)^2-(N-1)+i) = b((N-1)^2-(N-1)+i) + P(i+1,N+1);
    %b((N-1)^2-(N-1)+i) = b((N-1)^2-(N-1)+i) + P(N+1,i+1);
end
% Contributions corresponding to x = 0
for i = 1:N-1
    b((i-1)*(N-1)+1) = b((i-1)*(N-1)+1) + P(1,i+1);
    %b((i-1)*(N-1)+1) = b((i-1)*(N-1)+1) + P(i+1,1);
```

```
end
% Contributions corresponding to x = 1
for i = 1:N-1
   b(i*(N-1)) = b(i*(N-1)) + P(N+1,i+1);
   %b(i*(N-1)) = b(i*(N-1)) + P(i+1,N+1);
end

u = A\b;
u_temp = zeros(N-1,N-1);
for j = 1:N-1
   u_temp(:,j) = u((j-1)*(N-1)+1:j*(N-1));
end
for j = 2:N
   P(2:N,j) = u_temp(:,j-1);
end

% Plot the approximate solution of u(x,y) in 3D

figure; surface(x,y,P'); view(3)
title('\Delta u + f u = g')
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('u(x,y)')

% Plot the exact solution of u(x,y) in 3D

[X,Y] = meshgrid(0:1/N:1,0:1/N:1);

%Z = sin(pi*X)*sin(pi*Y); %case 1;
%Z = X*Y*(X-1)*(Y-1);  %case 2;
%Z = X^2 + Y^2;        %case 3;
%Z = X^3 + Y^3;        %case 4;
%Z = sin(pi*X)*cos(pi*Y); %case 5;
%Z = sin(pi*X) + cos(pi*Y); %case 6;
 Z = sin(pi*(X+Y));     %case 7;
%Z = sin(pi*(X^2+Y^2)); %case 8;
%Z = X^2;              %case 9;
%Z = X;                %case 10;
figure
title('The exact solution of u(x,y)= sin(pi*(x+y))')
surface(X,Y,Z);
view(3)


get_error()
```

Trong đó hàm Laplace là

```
function Laplace_u = Laplace_u(x,y)

global u_type
```

```
switch u_type
   case 1; Laplace_u = -2*pi^2*sin(pi*x)*sin(pi*y); % u =
      sin(pi*x)*sin(pi*y)
   case 2; Laplace_u = 2*(x^2+y^2-x-y); %u = xy(x-1)(y-1)
   case 3; Laplace_u = 4; %u = x^2 + y^2
   case 4; Laplace_u = 6*(x+y); %u = x^3 + y^3
   case 5; Laplace_u = -2*pi^2*sin(pi*x)*cos(pi*y); % u =
      sin(pi*x)*cos(pi*y)
   case 6; Laplace_u = -pi^2*(sin(pi*x)+cos(pi*y)); % u = sin(pi*x)
      + cos(pi*y)
   case 7; Laplace_u = -2*pi^2*sin(pi*(x+y)); % u = sin(pi(x+y))
   case 8; Laplace_u = 4*pi*cos(pi*(x^2+y^2)) -
      4*pi^2*y^2*sin(pi*(x^2+y^2)); % u = sin(pi(x^2+y^2))
   case 9; Laplace_u = 2; % u = x^2
   case 10;Laplace_u = 0; % u = x
   otherwise; disp('Missing u_type!')
end
```

Hàm g là:

```
function g = g(x,y)

% \Delta u + f u = g

g = Laplace_u(x,y) + f(x,y)*exact_u(x,y);
```

Hàm f là:

```
function f = f(x,y)

global f_type

switch f_type
   case 1; f = 0;
   case 2; f = 1;
   case 3; f = x*y;
   case 4; f = x^2 + y^2;
   otherwise; disp('Missing f_type!')
end
```

Tính toán sai số:

```
function get_error()

global x y P error
N = length(x)-1;
error_mat = zeros(N+1,N+1);

for i = 1:N+1
```

```
    for j = 1:N+1
        error_mat(i,j) = abs(P(i,j)-exact_u(x(i),y(j)));
    end
end
error = max(max(error_mat));
```

Các hàm u chính xác:

```
function u = exact_u(x,y)

global u_type

switch u_type
    case 1; u = sin(pi*x)*sin(pi*y);
    case 2; u = x*y*(x-1)*(y-1);
    case 3; u = x^2 + y^2;
    case 4; u = x^3 + y^3;
    case 5; u = sin(pi*x)*cos(pi*y);
    case 6; u = sin(pi*x) + cos(pi*y);
    case 7; u = sin(pi*(x+y));
    case 8; u = sin(pi*(x^2+y^2));
    case 9; u = x^2;
    case 10;u = x;
    otherwise; disp('Missing u_type!')
end
```

Tài liệu

Xem trong bài viết Epsilon số 11.

SO SÁNH TOÁN IMO VÀ TOÁN NGHIÊN CỨU? TRƯỜNG HỢP LÝ THUYẾT RAMSEY

W.Timothy Gowers
Người dịch: Nguyễn Vũ Duy Linh

TÓM TẮT

Mặc dù các thí sinh IMO và các nhà nghiên cứu toán học đều cố gắng giải những bài toán khó nhưng có những sự khác biệt quan trọng giữa hai hoạt động này. Một phần là vì các bài toán nghiên cứu sử dụng các khái niệm và kiến thức của chương trình đại học được loại bỏ khỏi các bài toán IMO. Tuy nhiên có những khác biệt căn bản hơn. Để minh họa điều này, ta sẽ xem xét một số kết quả và câu hỏi trong lý thuyết Ramsey, lĩnh vực vừa là nguồn đề tài cho các bài toán IMO và các bài toán nghiên cứu.

1. Mở đầu

Nhiều người đặt câu hỏi ở mức độ nào những thành tích ở cuộc thi toán quốc tế (IMO) sẽ dự báo cho những thành công trong nghiên cứu toán học. Đây là một câu hỏi thú vị: Nhiều ngôi sao IMO sau đó đã có một sự nghiệp nghiên cứu rất thành công, trong khi những người khác sau đó bỏ toán hoàn toàn (và thường cũng có những thành công nổi bật ở các lĩnh vực khác). Có lẽ điều đúng nhất mà ta có thể nói là khả năng làm bài tốt ở cuộc thi IMO tương thích với khả năng làm nghiên cứu tốt, nhưng không hoàn toàn. Điều này không có gì ngạc nhiên, bởi vì hai hoạt động này có những điều tương đồng và những sự khác biệt quan trọng. Điểm tương đồng chính là rất rõ ràng: Trong cả hai trường hợp người ta đều cố gắng giải các vấn đề toán học. Trong bài viết này, tôi muốn đặt trọng tâm vào những sự khác biệt bằng cách xem xét một lĩnh vực của toán học, lý thuyết Ramsey vốn là nguồn đề tài của cả các bài toán Olympiad và các bài toán nghiên cứu quan trọng.

Tôi hy vọng chỉ ra rằng có một con đường khá liên tục từ vấn đề này sang vấn đề khác, nhưng hai điểm kết thúc của con đường này lại hoàn toàn khác nhau.

Các tài liệu trình bày về lý thuyết Ramsey thường mở đầu bằng bài toán sau đây.

Bài toán 1. *Có sáu người trong phòng, hai người bất kỳ trong số họ hoặc là bạn của nhau hoặc là kẻ thù của nhau. Chứng minh rằng hoặc là có ba người sao cho hai người bất kỳ trong số họ là bạn của nhau, hoặc là có ba người sao cho hai người bất kỳ trong số họ là kẻ thù của nhau.*

Nếu bạn chưa gặp bài toán này (tôi vẫn nghĩ rằng hầu hết thí sinh IMO đều gặp phải), bạn nên giải nó trước khi đọc tiếp. Nó không khó, nhưng người ta học hỏi được nhiều khi tự giải nó.

Để cho tiện, chúng ta phát biểu lại bài toán trước khi giải nó bằng cách lược bỏ đi những yếu tố không liên quan tới toán học (đó là người, tình bạn và tính thù) và chỉ xem xét đến yếu tố trừu tượng mấu chốt của bài toán. Một cách làm là biểu diễn mỗi người bằng một điểm trong đồ thị và nối mỗi cặp điểm bởi một đường (không nhất thiết phải là đường thẳng). Chúng ta được một đối tượng gọi là đồ thị đầy đủ bậc 6. Để biểu diễn tình bạn và tính thù, chúng ta nối hai người bạn bằng một đường màu đỏ và nối hai kẻ thù bằng một đường màu xanh. Như vậy chúng ta có 6 điểm mà mỗi cặp điểm được nối bằng một đường màu đỏ hay màu xanh. Thuật ngữ chuẩn của lý thuyết đồ thị gọi các điểm là đỉnh và các đường là cạnh. (Chúng ta chọn các từ này vì có một lớp đồ thị quan trọng sinh ra từ các đỉnh và cạnh của một đa diện. Trong ví dụ như vậy sẽ có các cặp điểm không nối với nhau bằng các cạnh trừ khi đa giác là một tứ diện: Do vậy chúng là những đồ thị không đầy đủ).

Công việc của chúng ta giờ là chứng minh rằng phải có một tam giác màu đỏ hay một tam giác màu xanh trong đó tam giác trong ngữ cảnh này là một tập hợp của ba cạnh nối liền ba đỉnh.

Để chứng minh điều này, hãy lấy một đỉnh bất kỳ. Đỉnh này được nối với năm đỉnh khác bằng các cạnh, như vậy theo nguyên lý chuồng bồ câu có ít nhất ba trong các cạnh này có cùng màu. Không làm mất tính tổng quát, giả sử đó là màu đỏ. Như vậy có ba đỉnh nối với đỉnh đầu tiên bằng cạnh đỏ. Nếu hai trong số ba đỉnh này nối với nhau bằng cạnh đỏ, chúng ta sẽ có một tam giác đỏ. Nếu không, cả ba cặp điểm tạo thành một nhóm nối với nhau bằng cạnh xanh và cho ta một tam giác xanh từ đó thu được điều phải chứng minh.

Chúng ta hãy định nghĩa $R(k,l)$ là số nhỏ nhất n thỏa mãn nếu bạn tô xanh hay đỏ mỗi cạnh của một đồ thị đầy đủ bậc n thì bạn có thể tìm thấy k đỉnh trong đó hai đỉnh bất kỳ trong chúng nối với nhau bằng cạnh đỏ hay l đỉnh trong đó hai đỉnh bất kỳ trong chúng nối với nhau bằng cạnh xanh. Chúng ta vừa mới chứng minh xong $R(3,3) \leqslant 6$. (Nếu bạn chưa thử, bạn có thể tìm được một cách tô xanh hay đỏ các cạnh một đồ thị đầy đủ có năm đỉnh thế nào cho không tồn tại một tam giác xanh hay đỏ).

Điều này chưa cho chúng ta thấy rõ ngay định nghĩa trên là hợp lý: Định lý Ramsey khẳng định rằng $R(k,l)$ tồn tại và hữu hạn cho mỗi k và l.

Một tổng quát hoá đơn giản của lý luận mà chúng ta dùng để chứng minh $R(3,3) \leqslant 6$ có thể được dùng để chứng minh kết quả sau của Erdos và Szekeres, kết quả này chứng minh định lý Ramsey và cho chúng ta thông tin về độ lớn của $R(k,l)$.

Định lý 1. *Với mỗi k và l, chúng ta có bất đẳng thức $R(k,l) \leqslant R(k-1,l) + R(k,l-1)$.*

Một lần nữa, nếu như bạn chưa thấy kết quả này bao giờ, bạn cần tự mình chứng minh nó (bài toán này dễ hơn một bài toán IMO điển hình). Và bạn có thể dùng lý luận quy nạp chứng minh rằng bất đẳng thức trên suy ra $R(k,l) \leqslant \binom{k+l-2}{k-1}$ (chủ yếu để ý rằng $R(k,1) = 1$, hay an toàn hơn một chút $R(k,2) = k$, và từ đó bắt đầu phép quy nạp).

Điều này cho chúng ta biết $R(3,4) \leqslant 10$. Dầu vậy, trên thực tế câu trả lời chính xác là 9. Chứng minh nó là một bài toán thú vị hơn – không khó lắm, nhưng cần thêm ý tưởng.

Từ điều này và bất đẳng thức của Erdos và Szekeres, chúng ta có thể suy ra $R(4,4) \leqslant R(3,4) + R(4,3) = 18$, đây là câu trả lời chính xác: Để thấy rõ bạn cần xem xét một đồ thị đầy đủ bậc 17 có các cạnh được tô xanh hay đỏ sao cho không có bốn đỉnh nào nối lại với nhau bằng cạnh đỏ và cũng không có bốn đỉnh nào nối với nhau bằng cạnh xanh. Một đồ thị như vậy là tồn tại và hơn thế khá đẹp: Như mọi khi, tôi sẽ không làm hỏng cuộc vui bằng cách nói ra đó là cái gì.

Chúng ta sẽ không phải đi xa hơn thế trước khi chúng ta bước vào vương quốc của những điều chưa biết. Áp dụng bất đẳng thức Erdos–Szekeres một lần nữa, ta có

$$R(3,5) \leqslant R(2,5) + R(3,4) = 5 + 9 = 14.$$

Giá trị này là chính xác. Và ngoài ra

$$R(4,5) \leqslant R(4,4) + R(3,5) = 32.$$

Năm 1995, McKay và Radziszowski, với sự giúp đỡ của máy tính, chứng minh rằng, trên thực tế $R(4,5) = 25$. Cho đến nay, người ta vẫn chưa tìm ra giá trị chính xác của $R(5,5)$. Điều mà ta biết tốt nhất về $R(5,5)$ là nó nằm trong khoảng 43 và 49. Ngay cả khi giá trị này là 43, phép tìm kiếm thô trên máy tính duyệt qua $2^{\binom{43}{2}}$ phép tô màu xanh đỏ đồ thị đầy đủ bậc 43 là quá lâu để khả thi. Tất nhiên là có những cách giảm nhẹ phép tìm kiếm nhưng cho tới nay vẫn chưa khả thi trên máy tính. Kể cả khi có ai đó tính được $R(5,5)$, chúng ta cũng khó biết được $R(6,6)$ là bao nhiêu (chúng ta biết nó nằm trong khoảng 102 và 165).

Các bạn có thể hỏi tại sao chúng ta không đề ra một lý thuyết chứ không phải là kiểu suy luận xấu xí kiểm tra một lượng lớn các đồ thị trên máy tính?

Lý do là những đồ thị lớn nhất không có k đỉnh nối với nhau bằng cạnh đỏ hay l đỉnh nối với nhau bằng cạnh xanh thường không có tính cấu trúc.

Do đó những đồ thị cho thấy $R(3,3) > 5$, $R(3,4) > 8$ và $R(4,4) > 17$ thường làm lệch hướng suy luận vì chúng rất có cấu trúc. Đây có vẻ là ví dụ của cái gọi là "*luật của những số nhỏ*" (ví dụ đơn giản hơn là ba số nguyên tố đầu tiên 2, 3 và 5 là ba số Fibonacci liên tiếp. Sự kiện này không có gì đáng kể khi nhiều số nhỏ trùng khớp ngẫu nhiên).

Do vậy chúng ta cảm thấy không thỏa mãn khi không có một lý thuyết nào đưa ra công thức chính xác cho $R(k,l)$, và điều tốt nhất mà người ta có thể làm là đưa ra một phương pháp tìm kiếm thông minh trên máy tính cho k và l nhỏ. Điều này có vẻ như là một thất bại, nhưng Godel đã dạy chúng ta rằng chúng ta không thể giả sử mọi thứ mà chúng ta muốn biết đều có chứng minh. Trong trường hợp của những số Ramsey nhỏ, chúng ta không học được gì trực tiếp từ định lý Godel, vì về nguyên tắc chúng ta có thể tính ra chúng bằng các phương pháp tìm kiếm thô mặc dầu chúng không thực tế lắm.

Mặc dầu vậy thông điệp tổng quát bảo rằng những sự kiện đẹp đẽ không nhất thiết phải có những chứng minh đẹp đẽ vẫn được áp dụng và có một tác động đến cuộc sống của những nhà nghiên cứu toán học, nó có thể được tóm tắt trong chiến lược giải quyết vấn đề tổng quát sau (tôi không đề nghị chiến lược này cho những thí sinh thi olympic toán).

Chiến lược 1. *Khi một vấn đề làm bạn bế tắc, đôi khi điều tốt nhất là đầu hàng*

Trên thực tế, tôi cũng không hoàn toàn đề nghị chiến lược này cho những nhà nghiên cứu toán học trừ khi nó đi cặp với nguyên tắc lạc quan hơn sau đây (một lần nữa tôi không đề nghị chiến lược này cho những thí sinh thi olympic toán).

Chiến lược 2. *Nếu bạn không thể trả lời câu hỏi thì hãy thay đổi nó.*

2. Tiệm cận của số Ramsey

Một trong những đường lối chung nhất để thay đổi một câu hỏi toán học khi chúng ta rơi vào một tình huống như trên, như khi chúng ta không thể tính một đại lượng một cách chính xác, là tìm xấp xỉ tốt nhất cho nó, hay là ít nhất chứng minh rằng đại lượng đó phải nằm giữa L và U, trong đó chúng ta cố gắng làm cho L (gọi là chặn dưới) và U (gọi là chặn trên) càng gần nhau càng tốt.

Chúng ta vừa mới tìm được chặn trên cho $R(k,l)$ đó chính là $\binom{k+l-2}{k-1}$.

Để cho đơn giản, chúng ta xét trường hợp $k = l$. Khi đó chúng ta thu nhận được chặn trên $\binom{2k-2}{k-1}$. Liệu chúng ta có thể tìm được một chặn dưới so sánh được với nó?

Trước khi trả lời câu hỏi này, chúng ta thử nghĩ xem $\binom{2k-2}{k-1}$ lớn cỡ bao nhiêu. Một xấp xỉ khá tốt (nhưng không phải bằng những phương tiện tốt nhất được biết) được cho bởi công thức $(k\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4^{k-1}$ có tốc độ tăng tương đương với 4^k (vì tỷ số các giá trị liên tiếp của hàm số này ngày càng gần 4).

Đó là một hàm khá lớn theo k. Liệu có hy vọng gì tìm được một chặn dưới của một cái gì đó cỡ như vậy?

Nếu thuật ngữ "*tìm kiếm*" có nghĩa là viết xuống một qui tắc khi nào tô một cạnh đỏ và khi nào tô cạnh ấy xanh thì câu trả lời sẽ là tìm kiếm chặn dưới lớn cỡ hàm mũ là một bài toán vô cùng khó không giải được (mặc dầu ta cũng có vài kết quả thú vị nếu đi theo hướng này). Tuy vậy vào năm 1947, Erdos đã tìm ra một phương pháp đơn giản mà hiệu quả cho phép tìm ra chặn dưới có độ lớn hàm mũ mà không đi theo hướng trên. Thay vì trình bày chứng minh của Erdos, tôi sẽ cho các bạn biết ý tưởng của chứng minh đó.

Để thuận tiện chúng ta đưa vào thuật ngữ sau. Nếu chúng ta có một đồ thị đầy đủ bậc n có các cạnh được tô màu xanh đỏ thì chúng ta sẽ gọi tập hợp các đỉnh là *đơn sắc* nếu hai đỉnh bất kỳ của tập hợp đó được nối bằng các cạnh cùng màu.

Ý tưởng chứng minh. *Đừng cố gắng tìm một cách tô màu thoả mãn bài toán. Vì vậy, chọn các màu một cách tuỳ ý và chứng minh rằng số trung bình của các tập hợp đơn sắc cỡ k nhỏ hơn* 1.

Nếu chúng ta có thể làm được điều này thì phải có một đồ thị không có tập hợp đơn sắc cỡ k vì ngược lại số trung bình sẽ ít nhất bằng 1. Lý luận này cần một lượng tính toán đơn giản đến ngạc nhiên, và chúng cho thấy $R(k,k)$ tối thiểu phải bằng $\sqrt{2^k}$ (trên thực tế, người ta đạt được một ước lượng lớn hơn một chút, nhưng không đủ lớn để ảnh hưởng đến vấn đề đang bàn cãi). Tin tốt là chặn dưới có độ lớn hàm mũ. Tin xấu là $\sqrt{2^k}$ nhỏ hơn 4^k rất nhiều. Liệu có ai đó có thể cải thiện chặn trên hay chặn dưới không? Đây là một trong những vấn đề mở trung tâm của lý thuyết tổ hợp.

Bài toán 2. *Liệu có tồn tại hằng số* $\alpha > \sqrt{2}$ *thế nào cho với mọi* k *đủ lớn chúng ta có chặn dưới* $R(k,k) \geqslant \infty^k$*, hay là hằng số* $\beta < 4$ *thế nào cho với mọi* k *đủ lớn chúng ta có chặn trên* $R(k,k) \leqslant \beta^k$*?*

Sau đây là một câu hỏi tham vọng hơn.

Bài toán 3. *Liệu đại lượng* $R(k,k)^{\frac{1}{k}}$ *có hội tụ về một giới hạn và nếu có thì giới hạn đó bằng bao nhiêu.*

Có khả năng $R(k,k)^{\frac{1}{k}}$ dần về một giới hạn. Ba khả năng có thể xảy ra là giới hạn đó bằng $\sqrt{2}$, 2 hay 4. Tôi không có một lý lẽ thuyết phục nào cho thấy số nào có khả năng hơn hai số còn lại. Trong vài chục năm người ta chỉ đạt được một chút tiến bộ đối với những vấn đề này. Như vậy chúng ta đầu hàng sao? Chắc chắn không. Có một sự khác biệt rất lớn giữa những vấn đề rất khó khăn này và vấn đề rất khó là tính toán $R(6,6)$ mà người ta mong đợi một lý thuyết đẹp đẽ: Chỉ là quá khó khăn để tìm ra nó. Đầu hàng với các phương pháp tìm kiếm chẳng qua chỉ vì nó quá khó đối với tinh thần nghiên cứu toán học. (Đôi khi một nhà toán học đơn lẻ được khuyên nên đầu hàng một vấn đề sau khi phí một thời gian dài cho nó mà không đi đến đâu. Nhưng ở đây tôi nói đến nỗ lực tập thể: Tất cả các nhà tổ hợp lúc này hay lúc khác cố gắng cải thiện chặn trên chặn dưới của $R(k,k)$ và tôi nói rằng điều này nên tiếp tục cho đến khi thực hiện xong).

3. Lý thuyết Ramsey nói chung là gì?

Một định lý điển hình của lý thuyết Ramsey liên quan đến một cấu trúc có nhiều cấu trúc con tương tự như cấu trúc ban đầu. Nó nói rằng nếu bạn tô màu các phần tử của cấu trúc chính bằng hai màu (hay tổng quát hơn bằng r màu với r là một số nguyên dương nào đó), thì bạn ắt phải tìm thấy một cấu trúc con có tất cả các phần tử được tô bằng cùng một màu. Chẳng hạn, định lý Ramsey khẳng định trong trường hợp $k = 1$, cấu trúc chính là đồ thị đầy đủ bậc $R(k,k)$ (hay nói một cách chính xác hơn, các cạnh của đồ thị đầy đủ) và các cấu trúc con là tất cả đồ thị con đầy đủ bậc k. Vài định lý Ramsey còn cho biết kích thước của cấu trúc con phụ thuộc như thế nào vào kích thước của cấu trúc chính và số lượng các màu.

Đây là một ví dụ khác, định lý nổi tiếng của Van der Waerden.

Định lý 2. *Cho* r *và* k *là hai số nguyên dương. Tồn tại số tự nhiên* n *sao cho nếu bạn tô màu các số của một cấp số cộng* X *có chiều dài* n *bằng* r *màu thì bạn ắt phải tìm thấy một cấp số cộng* Y *bên trong* X *có chiều* k *sao cho mọi số của* Y *được tô bằng cùng một màu.*

Tôi có thể nói nhiều về định lý Van der Waerden và các nhánh rẽ của nó, nhưng điều đó sẽ làm mờ nhạt các bài toán IMO và các bài toán nghiên cứu mà tôi quan tâm. Thay vào đó, tôi muốn đi theo một hướng khác.

4. Một cấu trúc vô hạn và một định lý Ramsey tương ứng

Cho đến giờ, các cấu trúc mà chúng ta tô màu – các đồ thị đầy đủ và các cấp số cộng – đều là hữu hạn. Có một phiên bản của định lý Ramsey đúng cho các đồ thị đầy đủ vô hạn (phát biểu và chứng minh định lý này là một bài tập thú vị dành cho các bạn), nhưng tôi muốn quan tâm tới một cấu trúc phức tạp hơn: Không gian của mọi dãy nhị phân vô hạn tận cùng bằng không. Ví dụ về một dãy như vậy là

$$0010011101100000000000000000000000000000000000000000000\ldots$$

Nếu s và t là hai dãy như vậy, và nếu chữ số 1 cuối cùng trong s đứng trước chữ số 1 đầu tiên trong t thì chúng ta viết $s < t$. (Một cách hình dung cho dễ là mọi hành động trong s đều đã chấm dứt khi hành động trong t bắt đầu.) Trong trường hợp đó, $s + t$ sẽ là một dãy nhị phân vô hạn khác tận cùng bằng các chữ số 0. Chẳng hạn bạn có thể cộng

$$0010011101100000000000000000000000000000000000000000000\ldots$$

vào

$$0000000000000001100011000110000000000000000000000000000\ldots$$

Và bạn sẽ nhận được dãy

$$0010011101100001100011000110000000000000000000000000000\ldots$$

Bây giờ giả sử rằng chúng ta có các dãy $s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < \cdots$ Điều này có nghĩa là mỗi s_i là một dãy các chữ số 0 và 1, và tất cả những chữ số 1 trong s_{i+1} đi sau tất cả những chữ số 1 trong s_i. (Để ý rằng $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$ là một dãy của các dãy). Do vậy nếu chúng ta lấy tổng của hữu hạn các dãy s_i phân biệt, chúng ta sẽ nhận được một dãy khác nằm trong không gian của chúng ta. Chẳng hạn chúng ta có thể lấy tổng $s_1 + s_2$, hay là $s_3 + s_5 + s_6 + s_{201}$. Tập hợp của mọi tổng có thể có kiểu như vậy gọi là không gian con sinh bởi $s_1, s_2, s_3, \ldots$

Giờ đây toàn bộ không gian của những dãy mà chúng ta nói đến có thể xem như không gian con sinh bởi các dãy $1000000\ldots$, $0100000\ldots$, $0010000\ldots$, $0001000\ldots$, và cứ thế tiếp tục. Vậy cấu trúc của toàn bộ không gian đằng nào đi nữa cũng đồng nhất với một không gian con bất kỳ của nó. Đây là ứng cử viên lý tưởng cho định lý kiểu Ramsey. Chúng ta thậm chí còn đoán được định lý này nói gì.

Định lý 3. *Giả sử các dãy nhị phân tận cùng bằng không được tô bằng hai màu. Thế thì ắt phải có một tập hợp vô hạn các dãy $s_1 < s_2 < s_3 < \cdots$ sao cho tất cả mọi dãy trong không gian con sinh bởi s_i được tô bằng cùng một màu.*

Đó là cho dù bạn tô màu các dãy bằng cách nào đi chăng nữa, bạn có thể tìm được một dãy các dãy s_i sao cho $s_1, s_2, s_1 + s_2, s_3, s_1 + s_3, s_2 + s_3, s_1 + s_2 + s_3, s_4, \ldots$ có cùng một màu.

Đây là định lý do Hindman tìm ra, nó quá khó để có thể xem như một bài tập. Dầu vậy, có một bài tập đơn giản là một khi bạn đã có định lý Hindman cho hai màu, bạn có thể suy ra định lý tương tự như vậy cho hữu hạn màu.

Định lý Hindman thường được phát biểu dưới dạng tương đương dễ hiểu hơn nhưng ít liên quan đến điều tôi đề cập lúc này. Chứng minh sự tương đương giữa hai định lý này là một bài tập khác không khó lắm.

Định lý 4. *Giả sử những số nguyên dương được tô bởi hai màu. Thế thì có thể tìm được những số nguyên dương* $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ *sao cho tổng hữu hạn các* n_i *có cùng màu.*

Phiên bản này của định lý liên quan đến phép cộng. Điều gì xảy ra nếu chúng ta quan tâm đến phép nhân? Chúng ta hầu như không biết chắc, vì câu hỏi có vẻ ngây thơ sau đây là một bài toán không giải được.

Bài toán 4. *Giả sử các số nguyên dương được tô bằng hữu hạn màu. Phải chăng luôn luôn có thể tìm được các số nguyên n và m sao cho* n, m, $n + m$ *và* nm *có cùng một màu? Liệu ít nhất có thể bảo đảm rằng* $m + n$ *và* mn *có cùng một màu (ngoại trừ trường hợp tầm thường* $m = n = 2$*)?*

Bài toán này có vẻ giống như một bài toán IMO. Điểm khác nhau là ở chỗ nó khó hơn rất nhiều (và người ta không biết đã có ai đó giải nó chưa và nghĩ rằng nó phù hợp với một cuộc tranh tài toán học).

5. Từ lý thuyết tổ hợp đến hình học vô hạn chiều

Chúng ta trình bày không gian ba chiều nhờ toạ độ. Một khi đã làm xong điều đó, chúng ta dễ dàng định nghĩa không gian d chiều với d là một số nguyên dương bất kỳ.

Tất cả những điều mà chúng ta phải làm là trình bày các khái niệm bằng thuật ngữ toạ độ và kế đó tăng số lượng các toạ độ. Chẳng hạn một hình lập phương bốn chiều có thể được định nghĩa như tập hợp các điểm (x, y, z, w) trong đó mỗi số x, y, z và w nằm trong khoảng 0 và 1.

Nếu chúng ta muốn (như chúng ta thường làm với các bài toán trình độ đại học), chúng ta còn có thể mở rộng các khái niệm của chúng ta ra không gian vô hạn chiều. Chẳng hạn, một hình cầu vô hạn chiều bán kính 1 có thể được định nghĩa là tập hợp của mọi dãy $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ số thực thoả mãn

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots = 1.$$

(Ở đây tôi dùng chữ "*hình cầu*" theo nghĩa là mặt ngoài của quả cầu chứ không phải là một khối cầu đặc).

Trong thế giới vô hạn chiều của chúng ta, chúng ta cũng muốn nói đến đường thẳng, mặt phẳng và những "*siêu phẳng*" đa chiều. Nói riêng, chúng ta quan tâm đến những siêu phẳng vô hạn chiều. Làm thế nào để chúng ta định nghĩa chúng? Vâng, một mặt phẳng đi qua gốc toạ độ trong không gian ba chiều có thể được định nghĩa bằng cách lấy hai điểm $x = (x_1, x_2, x_3)$ và $y = (y_1, y_2, y_3)$ và thành lập mọi tổ hợp $\lambda x + \mu y$ của hai điểm này. (Ở đây, $\lambda x + \mu y$, khi viết dưới dạng toạ độ sẽ là $(\lambda x_1 + \mu y_1,\ \lambda x_2 + \lambda y_2,\ \lambda x_3 + \lambda y_3)$). Chúng ta có thể tiến hành tương tự trong không gian vô hạn chiều. Chúng ta lấy dãy các điểm p_1, p_2, $p_3, \ldots$ (ở đây mỗi p_i sẽ là một dãy vô hạn các số thực) và chúng ta lấy tất cả các tổ hợp (trong một số điều kiện nào đó có tính kỹ thuật) có dạng

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 + \cdots$$

Giao của một mặt cầu vô hạn chiều với một siêu phẳng vô hạn chiều hoá ra là một mặt cầu vô hạn chiều khác. (Tạm gác yếu tố vô hạn chiều, điều này cũng giống như khi chúng ta cắt một mặt cầu bằng một mặt phẳng, chúng ta sẽ được một đường tròn). Chúng ta hãy gọi đây là mặt cầu con của mặt cầu nguyên thuỷ. Một lần nữa chúng ta cảm thấy rằng đây là điều kiện lý tưởng cho một định lý kiểu Ramsey vì chúng ta có một cấu trúc (một mặt cầu) với nhiều cấu trúc con (các mặt cầu con) giống với cấu trúc ban đầu một cách chính xác. Giả sử rằng chúng ta tô một mặt cầu vô hạn chiều với hai màu. Liệu chúng ta có thể tìm được một mặt cầu con được tô bởi một màu?

Có một vài lý do để mong đợi một kết quả như vậy là đúng. Sau hết, nó khá tương tự với định lý Hindman ở chỗ cả hai phát biểu đều liên quan đến việc tô màu một đối tượng vô hạn chiều nào đó, định nghĩa bởi toạ độ, và tìm kiếm một đối tượng con vô hạn chiều cùng loại đơn sắc. Nó giống như trong định lý Hindman khi mọi toạ độ đều là 0 hay 1.

Mặc dầu vậy, không may câu trả lời là không. Nếu p thuộc về một mặt cầu con thì $-p$ phải thuộc về chính mặt cầu con đó. Như vậy chúng ta có thể tô màu p đỏ nếu toạ độ đầu tiên khác không là dương và tô p xanh nếu toạ độ đầu tiên khác không là âm. Bằng cách này p và $-p$ luôn luôn nhận màu khác nhau. (Vì tổng bình phương các toạ độ của chúng bằng 1, chúng không thể bằng không tất cả).

Nhận xét khó chịu này làm rõ một điểm khác nhau nữa giữa các bài toán IMO và các vấn đề trong nghiên cứu toán học.

Nguyên lý 1. *Một tỷ lệ lớn các giả thuyết phát sinh trong quá trình nghiên cứu của một ai đó hoá ra là dễ dàng hay là được phát biểu sai. Người ta phải may mắn lắm mới gặp phải một bài toán thú vị.*

Mặc dầu vậy, trong những trường hợp này, chúng ta có thể áp dụng một phương án của chiến lược mà tôi đề cập trước đó.

Chiến lược 3. *Nếu vấn đề mà bạn suy nghĩ hoá ra là không thú vị, hãy thay đổi nó.*

Đây là một thay đổi nhỏ trong bài toán tô màu các mặt cầu biến bài toán này từ một bài toán dở thành một bài toán tuyệt vời. Chúng ta hãy gọi một mặt cầu con là c-đơn sắc nếu như có một màu sao cho mỗi điểm của mặt cầu con nằm trong khoảng cách c tính từ một điểm nào đó được tô màu này. Chúng ta xét c nhỏ, như vậy về cơ bản chúng ta không yêu cầu mọi điểm của mặt cầu con đều là đỏ (chẳng hạn vậy), mà chỉ đơn thuần mỗi điểm của mặt cầu con gần với một điểm đỏ.

Bài toán 5. *Nếu như mặt cầu vô hạn chiều được tô bởi hai màu, và c là một số thực dương, liệu chúng ta luôn luôn có thể tìm được một mặt cầu con vô hạn chiều $c-$ đơn sắc?*

Đây là một vấn đề mở trong một thời gian dài và trở thành một câu hỏi chủ điểm trong lý thuyết không gian Banach, nó chính thức hoá ý tưởng của không gian vô hạn chiều và là một trong những khái niệm chủ đạo của toán học ở tầm nghiên cứu.

Không may thay, nó cũng đã có câu trả lời phủ định, nhưng phản ví dụ cho vấn đề này là thú vị hơn nhiều và kém rõ ràng hơn nhiều so với phản ví dụ cho phiên bản xấu của vấn đề. Nó được tìm ra bởi Odell và Schlumprecht.

Ví dụ của Odell và Schlumprecht làm tiêu tan hy vọng tìm ra một định lý kiểu Hindman cho không gian Banach (ngoại trừ một không gian đặc biệt khá tương tự với không gian các dãy nhị phân mà tôi có tìm được một định lý).

Mặc dầu vậy, nó không phá vỡ hoàn toàn mối liên hệ giữa lý thuyết Ramsey và lý thuyết không gian Banach như chúng ta thấy trong phần kế tiếp.

Trước khi chúng ta chấm dứt phần này, cho phép tôi đề cập thêm một sự khác nhau giữa các bài toán IMO và các bài toán nghiên cứu.

Nguyên lý 2. *Một vấn đề nghiên cứu có thể thay đổi từ chỗ không thể đạt được một điều gì hết sang một mục tiêu thực tiễn.*

Đối với ai đó chỉ có kinh nghiệm với những bài toán IMO, điều này có vẻ kỳ lạ: Làm sao mà cái khó của bài toán có thể thay đổi theo thời gian? Nhưng nếu bạn nhìn lại kinh nghiệm toán học của chính mình, bạn sẽ thấy nhiều ví dụ mà các bài toán "*trở nên dễ dàng*". Chẳng hạn xét bài toán tìm số thực dương x sao cho $x^{\frac{1}{x}}$ cực đại. Nếu bạn biết dùng đúng công cụ, bạn sẽ lý luận như sau. Logarithm của $x^{\frac{1}{x}}$ là $\frac{\log x}{x}$, và logarithm là một hàm tăng, cho nên bài toán tương đương với cực đại hoá $\frac{\log x}{x}$. Lấy đạo hàm ta được $\frac{1-\log x}{x^2}$, đạo hàm này triệt tiêu khi $x = e$ và hàm số giảm tại đó. Như vậy cực đại đạt được tại $x = e$. Lời giải này nói chung không phức tạp trên cả hai phương diện hiểu được nó và tìm lời giải nhưng chỉ dành cho những ai hiểu biết một chút về giải tích. Cho nên bài toán là ngoài tầm tay những ai không biết giải tích và mục tiêu thực tiễn mà những người biết giải tích làm. Một điều tương tự như vậy xảy ra trong nghiên cứu toán học, nhưng điều mà tôi muốn nhấn mạnh thêm là nó có thể là một hiện tượng tập thể chứ không chỉ là một cá nhân đơn lẻ. Đó là có nhiều bài toán ngoài tầm tay đơn giản chỉ vì người ta chưa phát minh ra đúng thứ công cụ cần dùng.

Bạn có thể thắc mắc rằng điều này không thực sự có nghĩa là bài toán ngoài tầm tay: Nó chỉ có nghĩa là một phần của việc giải toán là phát minh ra đúng kỹ thuật cần dùng. Trên một phương diện, điều này đúng, nhưng chúng ta đã không nhận thấy một sự kiện là những kỹ thuật toán học thường dùng để giải nhiều bài toán, nhưng các bài toán này lại không phải là chính các bài toán đã thúc đẩy người ta phát minh ra những kỹ thuật này. (Chẳng hạn, Newton và Leibniz không hề phát minh ra giải tích để chúng ta cực đại hoá hàm $x^{\frac{1}{x}}$). Như vậy, có thể xảy ra là Bài toán B trở thành một mục tiêu thực tế bởi vì có ai đó đã phát minh ra đúng kỹ thuật cần dùng trong khi suy nghĩ Bài toán A.

Tôi đề cập tất cả những điều này tại đây vì Odell và Schlumprecht xây dựng phản ví dụ của mình bằng cách sửa đổi (theo cách thông minh nhất) một ví dụ của Schlumprecht xây dựng vài năm trước đây vì một mục tiêu hoàn toàn khác.

6. Nói thêm một chút về không gian Banach

Tôi nhận thấy tôi chưa giải thích thật rõ ràng không gian Banach là gì, và tôi cần nhấn mạnh rằng khái niệm khoảng cách trong không gian vô hạn chiều chỉ là sự tổng quát hoá định lý Pythagore và khoảng cách của một điểm $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ đến gốc toạ độ được định nghĩa là

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots}$$

Mặc dầu vậy, các khái niệm khoảng cách khác có thể được dùng và tiện dụng. Chẳng hạn với mọi $p \geqslant 1$ chúng ta có thể định nghĩa khoảng cách từ $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ đến gốc toạ độ là

$$(|a_1|^p + |a_2|^p + |a_3|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Tất nhiên có những dãy mà con số này là vô hạn. Chúng ta xem như những dãy này không thuộc về không gian.

Ban đầu không dễ nhận ra rằng khái niệm khoảng cách là hợp lý, nhưng hoá là nó có nhiều tính chất rất hay. Ký hiệu a và b cho các dãy $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ và $(b_1, b_2, b_3, \ldots)$, và ký hiệu $||a||$ và $||b||$ cho các khoảng cách từ a và b đến gốc toạ độ (thường được gọi là chuẩn của a và b), chúng ta có thể diễn đạt lại các tính chất đó như sau.

(i) $||a|| = 0$ nếu và chỉ nếu $a = (0, 0, 0, \ldots)$.

(ii) $||\lambda a|| = |\lambda| \cdot ||a||$ với mọi a.

(iii) $||a + b|| \leqslant ||a|| + ||b||$ với mọi a và b.

Cả ba tính chất này đều quen thuộc với chúng ta giống như khái niệm khoảng cách thông thường trong không gian. (Để ý rằng chúng ta có thể định nghĩa khoảng cách từ a đến b là $||a - b||$). Một không gian Banach dãy là tập hợp các dãy trang bị một chuẩn thoả các tính chất (i) – (iii) nói trên, cùng với một điều kiện có tính chất kỹ thuật (gọi là tính đầy đủ) mà tôi không thảo luận ở đây.

Một ví dụ đặc biệt khi $||a||$ được định nghĩa bằng $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ là một loại không gian Banach rất đặc biệt gọi là không gian Hilbert. Tôi sẽ không nói không gian Hilbert là gì ngoại trừ đặc điểm không gian này có các tính chất đối xứng rất tốt. Một trong những tính chất lý thú này là mỗi không gian con của không gian Hilbert về căn bản rất giống với không gian sinh ra nó. Chúng ta đã thấy chuyện này: Khi chúng ta cắt một mặt cầu vô hạn chiều bởi một siêu phẳng vô hạn chiều, chúng ta nhận được một mặt cầu vô hạn chiều khác. Tính chất mọi không gian con đều "*đẳng cấu*" với cả không gian ban đầu có vẻ như không đúng cho mọi không gian khác, do vậy Banach tự đặt ra cho mình câu hỏi sau đây vào những năm 1930.

Bài toán 6. *Phải chăng mỗi không gian đẳng cấu với mọi không gian con vô hạn chiều của nó thì đẳng cấu với một không gian Hilbert?*

Phát biểu giảm nhẹ hơn là, phải chăng không gian Hilbert là không gian duy nhất có đặc tính lý thú này? Cái khó của câu hỏi này là hai không gian vô hạn chiều có thể đẳng cấu với nhau theo nhiều cách, do vậy loại bỏ chúng ra để chọn ra một không gian phi Hilbert và một không gian con khéo chọn nào đó có vẻ là điều khó khăn.

Đây là một ví dụ khác cho thấy một bài toán có thể thay đổi từ chỗ không giải được sang chỗ có thể giải được nhờ phát triển liên hệ với những bài toán khác, và có thể nói tôi vừa đủ may mắn ở vào đúng vị trí và vào đúng thời điểm. Một công trình của Komorowski và Tomczak–Jaegermann (một cách ngẫu nhiên, tôi đề cập tới vài nhà toán học mà tên gọi không có ý nghĩa lắm với hầu hết những độc giả của bài báo này, nhưng tôi quyết định chống lại cách giới thiệu họ bằng cách mở đầu "*một nhà toán học gọi là*") cho thấy nếu như tồn tại một phản ví dụ cho bài toán thì nó khá là hiểm hóc theo một nghĩa nào đó.

Không chắc là có một không gian hiểm hóc đến mức thỏa mãn yêu cầu, nhưng vài năm trước đây Maurey và tôi đã xây dựng một không gian rất hiểm hóc, và không gian hiểm hóc của chúng tôi hiểm hóc đến mức với mọi lý do khác nhau nó không thể là phản ví dụ cho câu hỏi của Banach. Nó làm tăng khả năng câu trả lời khẳng định cho câu hỏi của Banach bởi vì ví dụ đẹp không thoả mãn, ví dụ hiểm hóc cũng không thoả mãn. Để có một cách tiếp cận như công trình này, tôi cần phải chứng minh một phát biểu loại sau đây.

Phát biểu 1. *Mỗi không gian Banach vô hạn chiều có một không gian con vô hạn chiều thoả mãn mọi không gian con của nó là đẹp hay mọi không gian con của nó là hiểm hóc.*

Bây giờ chúng ta đã thấy hơi hướng của lý thuyết Ramsay: Chúng ta có thể xem các không gian con đẹp là "*đỏ*" và các không gian con hiểm hóc là "*xanh*".

7. Một định lý yếu kiểu Ramsey cho các không gian con

Mặc dầu vậy, có một điểm khác biệt quan trọng giữa phát biểu 1 và các phát biểu ban đầu của chúng ta về lý thuyết Ramsey, đó là đối tượng mà chúng ta tô màu là những không gian vô hạn chiều chứ không phải là là các điểm. (Tuy nhiên tôi muốn chỉ ra rằng trong định lý Ramsey chúng ta tô màu các cạnh chứ không phải các điểm, do vậy ý tưởng tô màu một cái gì đó không phải là điểm không phải là hoàn toàn mới) Chúng ta làm sao để đưa chúng vào chương trình làm việc của chúng ta?

Trên thực tế điều này không khó lắm. Các cấu trúc mà chúng ta tô màu có thể xem như "*cấu trúc của mọi không gian con của một không gian đã cho*". Nếu chúng ta lấy một không gian con tuỳ ý thì mọi không gian con của nó tạo thành một cấu trúc tương tự như cấu trúc ban đầu, do vậy chúng ta có thể suy tính chứng minh một định lý kiểu Ramsey.

Điều tốt nhất mà chúng ta hy vọng chứng minh sẽ là một cái gì đó như sau: Nếu bạn tô màu xanh hay đỏ tất cả các không gian con của một không gian thì ắt phải có một không gian con mà mọi không gian con của nó được tô bằng cùng một màu. Tuy nhiên, không ngạc nhiên lắm khi điều này hoá ra quá viển vông để hy vọng do những nguyên nhân buồn tẻ và lý thú. Lý do buồn tẻ tương tự như lý do chúng ta không thể tô các điểm của của một mặt cầu vô hạn chiều và hy vọng là có thể tìm được một mặt cầu con đơn sắc vô hạn chiều. Lý do lý thú là ngay cả khi chúng ta phát biểu lại bài toán đi tìm những không gian con mà chúng gần như tất cả có cùng một màu (chữ "*gần như*" hiểu theo một nghĩa thích hợp), các kết quả của Odell và Schlumprecht, đề cập tới việc tô màu các điểm, có thể được dùng để chỉ ra một cách khá dễ dàng rằng chúng ta không nhất thiết tìm được chúng.

Có vẻ như chúng ta đã tới đường cùng, nhưng trên thực tế chưa tới mức như vậy, lý do là tôi nghĩ rằng mình không cần đến toàn bộ sức mạnh của định lý Ramsey. Thay vào đó, tôi có thể giải quyết vấn đề với một "*định lý Ramsey yếu*" mà tôi sẽ trình bày ngắn gọn sau đây.

Để bắt đầu, tôi cần phải giới thiệu một trò chơi có vẻ kỳ lạ. Giả sử ta có một tập hợp $\sum$ các dãy có dạng $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ trong đó tất cả các a_i là các điểm của không gian Banach. (Tại chỗ này và nhiều chỗ trước đó, điều quan trọng là cần phải nhớ đối tượng mà tôi nói tới là gì. Điều này hơi khó hiểu: Như tôi vừa mới nói, $\sum$ là tập hợp các dãy, nhưng các số hạng trong mỗi dãy lại là các điểm trong không gian Banach, và mỗi điểm là một dãy số thực, đó là tại sao tôi viết chúng bằng chữ in đậm. Vậy $\sum$ là tập hợp các dãy của các dãy số thực. Người ta có thể tiến xa hơn khi nói rằng mỗi số thực được biểu diễn bằng số thập phân vô hạn, do vậy $\sum$ là tập hợp của những dãy của những dãy của những dãy số từ 0 đến 9. (Nhưng có vẻ như dễ hơn khi xem các số hạng a_n như là các điểm của không gian vô hạn chiều và quên rằng chúng có toạ độ). Cho tập hợp $\sum$, các người chơi A và B, và trò chơi như sau. Người chơi A chọn không gian con S_1. Kế đó người chơi B chọn điểm a_1 trong S_1. Người chơi A giờ đây chọn không gian con S_2 (không phải là không gian con của S_1) và người chơi B chọn điểm a_2 trong S_2. Và cứ thế tiếp tục. Kết thúc quá trình vô hạn này, người chơi B chọn được một dãy $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Nếu như dãy này là một trong các dãy của $\sum$ thì B thắng, ngược lại A thắng.

Rõ ràng là ai thắng trong trò chơi này phụ thuộc rất nhiều vào $\sum$. Chẳng hạn như nếu có một không gian con S sao cho không thể tìm các điểm a_n trong S tạo thành dãy $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ trong $\sum$ thì A sẽ thắng một cách dễ dàng bằng cách nước đi nào cũng chọn S, nhưng nếu $\sum$ chứa hầu hết các dãy thì B cần có một chiến lược chơi để thắng.

Ở đây định lý Ramsey yếu hoá ra là đủ để chứng minh một phiên bản phù hợp chính xác của phát biểu 1 và do vậy trả lời câu hỏi của Banach (bài toán 6). Tôi đã đơn giản hoá phát biểu một chút.

Trước khi tôi đưa ra chính phát biểu, chúng ta hãy tiến hành định nghĩa sau. Nếu S là một không gian con, hạn chế của trò chơi trên S là trò chơi mà tất cả các không gian con $S_1, S_2, \ldots$ chọn bởi A phải là không gian con của S (và do vậy mọi điểm chọn bởi B phải là điểm trong S).

Định lý 5. *Với mỗi tập hợp $\sum$ bao gồm các dãy trong không gian Banach, tồn tại một không gian con S sao cho hoặc là B có một chiến lược chiến thắng với hạn chế của trò chơi trên S hay là không có dãy nào trong $\sum$ được tạo thành từ các điểm của S.*

Để hiểu tại sao người ta gọi nó là định lý Ramsey yếu, chúng ta hãy tô màu đỏ một dãy nếu như nó thuộc về $\sum$ và tô màu xanh nếu ngược lại. Khi đó định lý nói rằng chúng ta có thể tìm được một không gian con S thế nào cho hoặc là tất cả các dãy tạo thành từ các điểm của S là xanh, hoặc là có rất nhiều dãy đỏ tạo thành từ các điểm trong S đến mức nếu trò chơi giới hạn trên S thì B có một chiến lược chiến thắng để sinh ra các dãy đỏ.

Nói cách khác, chúng ta đã thay "*mọi dãy trong S đều màu đỏ*" bằng "*trong S có nhiều dãy màu đỏ đến mức B có một chiến lược chiến thắng để sinh ra chúng*".

Đó là một cách tạo thành phát biểu và chúng ta thấy rằng nó vừa đủ cho mục đích của chúng ta, nhưng chứng minh nó lại là một chuyện khác. Điều này cho tôi thấy một điểm khác nhau giữa các bài toán IMO và các bài toán nghiên cứu, đó là chiến lược giải quyết vấn đề sau đây có vai trò chủ đạo trong các bài toán nghiên cứu hơn là các bài toán IMO.

Chiến lược 4. *Nếu bạn cố gắng chứng minh một phát biểu toán học, bạn hãy tìm kiếm một phát biểu tương tự đã được chứng minh rồi và cố gắng sửa đổi phép chứng minh một cách thích hợp.*

Tôi không dám nói rằng điều này luôn luôn áp dụng được trong nghiên cứu hay là không bao giờ dùng được trong một bài toán IMO, nhưng đối với toán IMO thông thường phải bắt đầu từ con số không.

Quay trở lại với định lý Ramsey yếu, hoá ra là nó giống với định lý Ramsey vô hạn được tìm ra bởi Galvin và Prikry. Chúng giống nhau đến mức tôi có thể sửa đổi lý luận và chứng minh cái tôi cần. Và may mắn thay, tôi có tham dự khoá học tại Cambridge vài năm trước đây trong đó Bela Bollob đã giảng định lý của Galvin và Prikry.

8. Kết luận

Tôi không có gì để nói nhiều trong phần kết luận mà tôi chưa đề cập. Mặc dù vậy, có một điểm đáng chú ý. Nếu bạn là một độc giả từng tham dự IMO, có vẻ như tài giải toán của bạn đã phát triển mà không cần bạn phải làm gì: Một vài người chỉ đơn giản là giỏi toán. Nhưng nếu bạn có tham vọng trở thành một nhà nghiên cứu toán học thì sớm hay muộn bạn cũng phải lưu tâm đến hai nguyên tắc sau.

Nguyên tắc 1. *Nếu bạn có thể giải một bài toán nghiên cứu trong một vài giờ thì bài toán đó có thể là không thú vị lắm.*

Nguyên tắc 2. *Thành công trong nghiên cứu toán học phụ thuộc nhiều vào sự nỗ lực làm việc.*

Điều này là rõ ràng từ chính những ví dụ mà tôi đã đưa ra. Khi dự định giải một bài toán nghiên cứu thú vị và sáng tạo, người ta thường chỉ có một ý niệm mơ hồ sẽ bắt đầu từ đâu. Từ một ý niệm mơ hồ đến một kế hoạch tấn công rõ ràng cần thời gian, đặc biệt là hầu hết kế hoạch tấn công rõ ràng sẽ bị bỏ qua vì chúng đơn giản không áp dụng được.

Nhưng bạn cũng cần sẵn sàng để ý đến những mối liên hệ và các điểm tương đồng với những bài toán khác và phải phát triển những kỹ thuật và bộ đồ nghề của mình, một chút kiến thức toán học, ...

Đằng sau bất cứ nghiên cứu thành công nào, nhà toán học phải bỏ ra hàng ngàn giờ suy tư về toán học, chỉ có vài giờ trong số đó trực tiếp dẫn đến phát minh. Thật lạ là mỗi người đều chuẩn bị cho những giờ như vậy theo một cách nào đó. Có lẽ là vì một nguyên tắc khác như sau.

Nguyên tắc 3. *Nếu bạn thực sự quan tâm đến toán học thì việc làm toán nặng nhọc không giống như việc nhà: Đó là cái mà bạn muốn làm.*

Đọc thêm

1. Ron Graham, Bruce Rothschild, and Joel Spencer, Ramsey Theory. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley, New York (1990).

   Quyển sách này chứa nhiều tài liệu về định lý Ramsey, định lý Van der Waerden, định lý Hindman, và nhiều kết quả khác. Đây là điểm khởi đầu nên có cho bất cứ ai quan tâm đến chủ đề này.

2. B'ela Bollob'as, Linear Analysis: An Introductory Course, second edition. Cambridge University Press, Cambridge (1999), xii+240 pp.

   Không gian Banach thuộc về một nhánh của Toán học gọi là Giải tích tuyến tính. Đây là sách nhập môn cho lãnh vực này, rất hấp dẫn cho những thí sinh IMO (Hãy xem qua những bài tập đánh dấu hai sao, ...)

3. Edward Odell and Thomas Schlumprecht, The distortion problem. Acta Mathematica 173, 259–281 (1994).

   Bài báo này có ví dụ của Odell và Schlumprecht được đề cập trong phần 5.

4. W. Timothy Gowers, An infinite Ramsey theorem and some Banach-space dichotomies. Annals of Mathematics (2) 156, 797–833 (2002).

   Bài báo này có kết quả của tôi về trò chơi vô hạn và những hệ quả của nó. Hai bài báo trên đòi hỏi bạn phải biết về không gian Banach và do vậy sẽ là rất khó cho những độc giải chưa học qua đại học. Một khả năng khác tốt hơn chút đỉnh là bài báo sau của tôi viết về mối liên hệ giữa lý thuyết Ramsey và không gian Banach.

5. W. Timothy Gowers, Ramsey methods in Banach spaces. In: William B. Johnson and Joram Lindenstrauss (editors), Handbook of the Geometry of Banach Spaces, volume 2, pp. 1071–1097. North-Holland, Amsterdam (2003).

   Nếu bạn đọc cả quyển một thì chương đầu tiên là các khái niệm cơ bản của chủ đề, nó có thể bổ ích, nó là quyển này.

6. William B. Johnson and Joram Lindenstrauss, Basic concepts in the geometry of Banach spaces. In: William B. Johnson and Joram Lindenstrauss (editors), Handbook of the Geometry of Banach Spaces, volume 1, pp. 1–84. North-Holland, Amsterdam (2001).

Bài viết được dịch từ nguyên bản tiếng Anh, *How do IMO Problems Compare with Research Problems? Ramsey Theory as a Case Study* của tác giả W.Timothy Gowers. Trích từ cuốn sách *An Invitation to Mathematics – From competitions to research* do Schleicher và Lackmann làm chủ biên.

W. Timothy Gowers Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics, University of Cambridge, Cambridge CB3 0WB, UK. e-mail: W.T.Gowers@dpmms.cam.ac.uk

D. Schleicher, M. Lackmann (eds.), An Invitation to Mathematics, DOI 10.1007/978-3-642-19533-4 5, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011.

NHỮNG BÀI TOÁN CÂN TIỀN - PHẦN KẾT

Đặng Nguyễn Đức Tiến
(DCU, Ireland)

GIỚI THIỆU

Cân tiền luôn luôn là một trong những dạng toán đố hấp dẫn nhất và trong số cuối cùng này của Epsilon, chúng tôi trân trọng gửi đến bạn đọc phần cuối cùng của chuyên mục "Những bài toán cân tiền" với những bài toán cực kỳ mới lạ. Tất cả các bài toán cũng như lời giải và bình luận trong phần này chủ yếu được chúng tôi tổng hợp, và dịch từ các nghiên cứu của Khovanova và cộng sự.

Mở đầu - Ba bài toán cân tiền

Như chúng ta vẫn quen thuộc với các bài toán cân tiền trước đây, mục tiêu luôn luôn là xác định được tiền giả có khối lượng LUÔN khác các đồng tiền thật dù bề ngoài giống nhau. Trong phần kết này, chúng tôi giới thiệu 3 bài toán khá mới và khác với thông lệ, mà mục tiêu đôi khi chỉ là xác nhận có tiền giả hay không (mà không được phép chỉ ra đâu là đồng giả), hoặc phải tìm ra những đồng tiền có khối lượng đôi khi ... không khác với đồng thật.

Bài toán 1a. Bài toán bảo mật tiền giả [1]. Bài toán đầu tiên chúng tôi muốn giới thiệu là bài toán yêu cầu xác định có tiền giả hay không mà không được chỉ đâu ra là đồng giả. Bài toán như sau:

Một người sưu tập tiền mua một bộ sưu tập gồm 80 đồng tiền, và ông ta biết rằng trong số này có 2 hoặc 3 đồng giả. Biết rằng các đồng tiền thật nặng bằng nhau và các đồng tiền giả nặng bằng nhau, và hơn nữa, các đồng tiền thật nặng hơn các đồng tiền giả. Một chuyên gia giám định biết rằng chính xác có 3 đồng tiền giả trong số 80 đồng này và biết rõ đó là những đồng nào. Tuy nhiên vì lý do bảo mật thông tin, cửa hàng không cho phép vị chuyên gia chỉ rõ các đồng đó.

Chỉ với một chiếc cân đĩa, làm thế nào để vị chuyên gia có thể chỉ rõ cho người mua là có đúng 3 đồng giả trong số 80 đồng này mà không được chỉ ra đó là những đồng nào?

Bài toán 1b. Bảo mật thông tin. Bài toán này có phát biểu giống như bài toán trên, nhưng khác biệt ở chỗ là thông tin của mọi đồng tiền phải được bảo mật, nghĩa là không được phép để người mua tiền xác định được đâu là đồng thật đâu là đồng giả nhưng vẫn có thể biết được trong số 80 đồng tiền có đúng 3 đồng giả (với giả thiết là người này biết có hoặc 2, hoặc 3 đồng giả trong số 80 đồng này).

Bài toán 2. Bài toán đồng tiền tráo trở [3]. Bài toán này có phát biểu gần như giống với bài toán cân tiền truyền thống, nhưng khác biệt là đồng tiền ở đây là một đồng tiền có trạng thái thay đổi liên tục. Bài toán như sau:

Có N đồng tiền bề ngoài giống hệt nhau. Trong đó có $N-1$ đồng thật có khối lượng các đồng đều bằng nhau và 1 đồng "tráo trở", có khối lượng thay đổi, hoặc bằng đúng đồng thật hoặc bằng với đồng giả, nhẹ hơn đồng thật. Biết rằng sau mỗi lần cân, trạng thái của đồng "tráo trở" sẽ thay đổi luân phiên (nghĩa là từ khối lượng của đồng thật nó sẽ chuyển thành khối lượng của đồng giả và ngược lại). Hỏi phải dùng ít nhất mấy lần cân để tìm ra đồng tráo trở này?

Bài toán 3. Bài toán đồng tiền xảo quyệt [2] Đây cũng là một bài toán về một dạng tiền mới: đồng tiền "xảo quyệt", có khả năng tự chọn khối lượng cho mỗi lần cân. Bài toán như sau:

Có 6 đồng tiền bề ngoài giống hệt nhau. Trong đó có 4 đồng thật có khối lượng các đồng đều bằng nhau, 1 đồng giả, có khối lượng nhẹ hơn 4 đồng thật và 1 đồng "xảo quyệt", có thể tự thay đổi khối lượng tuỳ ý ở mỗi lần cân, hoặc bằng đúng đồng thật hoặc bằng đúng đồng giả. Dễ thấy đồng xảo quyệt này không thể tìm ra nếu nó vẫn luôn giữ trọng lượng bằng đồng thật. Câu hỏi đặt ra là trong 3 lần cân, liệu có thể xác định được 2 đồng mà trong số chúng chắc chắn có chứa đồng giả?

Như thường lệ, chúng tôi khuyến khích độc giả hãy dành thời gian thử giải những bài toán này trước khi đi vào các phần lời giải và bình luận tiếp theo.

1. Bài toán bảo mật tiền giả

Để giải quyết bài toán 1a: chỉ cần đảm bảo thông tin không tiết lộ đâu là đồng giả, lời giải của bài toán không quá khó để tìm ra được. Một cách giải gợi ý có thể làm như sau:

- Chuyên gia chia tiền làm 2 phần: phần 1 gồm 40 đồng, trong đó có 1 đồng giả và phần 2 có 40 đồng (có chứa 2 đồng giả) còn lại và đặt lên cân. Khi đó cân chắc chắn sẽ lệch về phía có 2 đồng giả. Khi đó, người sưu tập tiền sẽ chắc chắn biết cân nhẹ có chứa đồng giả và buộc phải nghĩ tới 2 khả năng: phía cân nặng hơn hoặc không chứa đồng giả nào, hoặc nếu có thì chỉ có đúng 1 đồng giả.
- Lần 2 vị chuyên gia chỉ đơn giản chia 40 đồng bên phía cân nặng thành 2 phần, mỗi phần 20 đồng và đặt lên cân. Cân chắc chắn không thăng bằng do có chứa đồng giả. Nhìn vào kết quả này, vị chuyên gia biết chắc chắn trong tổng số 80 đồng có đúng 3 đồng giả.

Tuy nhiên, cách làm trên không thể áp dụng vào bài toán 1b. vì khi đó ở lần cân thứ 2 chúng ta đã tiết lộ ít nhất 1 phía cân chứa toàn tiền thật, điều này trái với yêu cầu bài toán 1b. là phải bảo mật thông tin của mọi đồng tiền. Và đây là một yêu cầu không đơn giản. Hãy thử giảm nhẹ yêu cầu của bài toán 1b, như sau:

"Có 80 đồng tiền, trong đó người mua tiền biết có 1 hoặc 2 đồng giả, nhẹ hơn các đồng thật. Vị chuyên gia biết chính xác có 2 đồng giả và biết đó là các đồng nào. Làm thế nào chỉ ra có đúng 2 đồng giả nhưng không tiết lộ bất cứ thông tin của bất cứ đồng nào?"

Với yêu cầu này, ta thấy lời giải khá đơn giản là chia 80 đồng này thành 2 phần, mỗi phần 40 đồng và mỗi phần chứa đúng 1 đồng giả. Khi đó cân sẽ thăng bằng và người mua tiền sẽ biết chắc chắn có 2 đồng giả nhưng không thể xác định được tính thật giả của bất cứ đồng nào trong số 80 đồng này!

Quay lại bài toán ban đầu, chúng ta đi đến lời giải chính thức (của chính tác giả): Chia 80 đồng thành 5 phần như sau: A, B, mỗi phần chứa 10 đồng; và C, D, E, mỗi phần chứa 20 đồng. Trong các phần A, D, và E, mỗi phần chứa đúng 1 đồng giả. Sau đó tiến hành 3 lần cân như sau:

- Lần 1: Cân C + D và A + B + E, cân nhẹ hơn ở phía A + B + E (do 2 đồng giả ở A và E).
- Lần 2: Cân A + B và E, cân thăng bằng.
- Lần 3: Cân A + C và B + D, cân thăng bằng.

Hãy cùng phân tích cách cân này. Ở lần cân đầu tiên, do cân lệch nên chắc chắn A + B + E phải chứa tiền giả. Lần cân thứ 2, ta biết số tiền giả ở nhóm này phải bằng 2, do cân thăng bằng, và do vậy E phải chứa 1 đồng giả và A + B chứa đồng giả còn lại. Do lần cân thứ 3 cân bằng, suy ra C + D phải chứa đồng giả cuối cùng. Do vậy xác định được 1 đồng giả ở E, 1 đồng giả ở A + B và 1 đồng giả ở C + D, hơn nữa, nếu A có đồng giả thì D có đồng giả, và nếu B có đồng giả thì C cũng sẽ có đồng giả. Tuy vậy, ta không thể xác định được chính xác đồng nào là đồng giả và đồng nào là đồng thật với từng đồng cụ thể. Và như vậy bài toán đã được giải quyết.

Bài toán được tổng quát hoá lên thành (n, f, d) với số đồng là n, số đồng giả thật sự là f và số lượng đồng giả ta phải loại bỏ nghi ngờ là d (nghĩa là người mua tiền biết rằng có hoặc f, hoặc d đồng giả trong số n đồng và ta cần phải chứng minh có đúng f đồng giả). Khi đó, bài toán chính ta cần giải quyết sẽ là $(80, 3, 2)$, với 80 đồng có 3 đồng giả và cần loại bỏ trường hợp có 2 đồng giả. Bài toán rút gọn là $(80, 2, 1)$.

Trong [1], các tác giả đã tìm cách giải quyết một số trường hợp cho bài toán tổng quát này, và một trong những kết quả quan trọng là nếu $\left\lfloor \frac{n}{f} \right\rfloor \geq 4$ và $0 < d < f$ thì bài toán luôn có lời giải, nghĩa là luôn có chiến thuật chỉ ra có đúng f đồng giả trong số n đồng mà thông tin của từng đồng luôn được bảo mật. Chi tiết hơn, bạn đọc có thể xem ở [1].

2. Bài toán đồng tiền tráo trở

Nhắc lại bài toán kinh điển: Có N đồng tiền, trong đó có 1 đồng giả nhẹ hơn các đồng còn lại, cần ít nhất bao nhiêu lần cân để tìm ra đồng giả? Đáp án cho bài toán này là $\lceil log_3(N) \rceil$. Dễ thấy, nếu mỗi lần cân ở bài toán kinh điển này, ta thực hiện 2 lần (thay vì chỉ cần 1 lần), thì ta luôn tìm được đồng tiền tráo trở. Hay nói cách khác, cận trên của số lần cân là $2 \lceil log_3(N) \rceil$.

Liệu ta có thể giảm số lượng cần phải cân? Hãy xét chi tiết hơn: gọi số lần cân với N đồng là $a(N)$ (do tác giả dùng thuật ngữ anternator cho đồng tiền "tráo trở"). $a(N)$ sẽ phụ thuộc vào trạng thái bắt đầu của đồng tráo trở, ta sẽ gọi $g(N)$ là số lần cân ít nhất nếu đồng tráo trở bắt đầu là đồng giả và $t(N)$ là số lần cân ít nhất nếu đồng tráo trở bắt đầu là đồng thật. Hơn nữa, ta gọi đồng tráo trở ở trạng thái g, nếu lần cân tiếp theo nó có khối lượng của đồng giả, là trạng thái t

nếu tiếp theo nó có khối lượng của đồng thật, và ở trạng thái a nếu ta không biết trạng thái của nó là gì. Dễ thấy $a(N) \geq t(N)$ và $a(N) \geq g(N)$.

Hãy cùng xét các giá trị N nhỏ:

- Nếu $N = 2, 3$, ta chỉ có 1 cách làm duy nhất là so sánh 2 đồng với nhau. Với tối đa 2 lần cân, ta sẽ xác định được đồng tráo trở. Do vậy $g(2) = g(3) = 1$ và $t(2) = t(3) = a(2) = a(3) = 2$.
- Nếu $N = 4, 5$, ta cần ít nhất 3 lần cân với trạng thái bắt đầu a và t và ít nhất 2 lần với trạng thái bắt đầu là g. Ta có thể làm như sau: cân 1+2 và 3+4 với nhau. Nếu cân không bằng nhau, đồng tráo trở ở về bên nhẹ và cần đúng 2 lần nữa để tìm ra nó (do trạng thái tiếp theo của nó là t). Nếu cân thăng bằng, lần thứ 2 cân 1 và 2, và lần thứ 3 cân 3 và 4. Và vấn đề được giải quyết. Do vậy $a(4) = t(4) = a(5) = t(5) = 3$ và $g(4) = g(5) = 2$.
- Liệu bạn đọc có còn nhớ cách giải bài toán 12 đồng tiền ở phần 1 của loạt bài toán cân tiền? Ý tưởng này có thể áp dụng ở đây, trong trường hợp 4 đồng, như sau: lần 1: cân 1 và 2; lần 2: cân 2 và 3; lần 3: cân 1 và 3. Nếu có 1 lần cân không thăng bằng trong 3 lần cân, ta phát hiện được đồng tráo trở. Nếu tất cả đều cân bằng, ta thấy rằng mỗi đồng trong số 3 đồng đầu đều được cân đúng 2 lần, do đó cả 3 đều phải là đồng thật, và do vậy đồng thứ 4 còn lại là đồng giả.

Trong các trường hợp nhỏ này, ta luôn thấy $a(N) = t(N) = g(N) + 1$, liệu điều này luôn đúng? Và thật vậy, trong [3], các tác giả đã chứng minh được:

$$a(N) = t(N) = g(N) + 1$$

và hơn nữa, xác định được với w lần cân, có thể tìm ra đồng tráo trở trong tối đa $N = J_{w+1}$ đồng, với J là số Jacobsthal, được định nghĩa: $J_n = (2^n - (-1)^n)/3$. Chi tiết kết quả này, bạn đọc có thể xem ở [3].

3. Bài toán đồng tiền xảo quyệt

Trước khi đi vào bài toán chính, một lần nữa chúng ta hãy cùng khảo sát phiên bản đơn giản hơn của bài toán: nếu chỉ có 3 đồng: 1 thật, 1 giả, và 1 xảo quyệt, hãy tìm ra 2 đồng chắc chắn có chứa đồng giả.

Ta có thể cân 2 lần cân với thuật toán ở dạng bảng như sau:

Lần cân - TH	Cân	Bằng nhau	Bên trái nhẹ hơn	Bên phải nhẹ hơn
1.1	1 và 2	=> 2.1	=> 2.2	(- tt -)
2.1	1 và 3	(2, 3)	(1, 2)	(3)
2.2	1 và 3	(1, 3)	(1)	(3)

trong đó lần cân có dạng "X.Y" ứng với lần cân thứ X, trường hợp Y, ví dụ "2.1" cho biết đây là lần cân thứ 2, trường hợp 1. Ký hiệu "=> A.B" cho biết nếu kết quả cân rơi vào trường hợp này thì sẽ đi đến lần cân A, trường hợp B. Ký hiệu (M, N) cho biết đồng giả phải là các đồng ở trong ngoặc, (- tt -) cho biết trường hợp này đã có, chỉ cần làm tương tự. $(\emptyset)$ cho biết khả năng này không thể xảy ra.

Giải thích cho bảng này như sau: Lần 1, cân 2 đồng 1 và 2, nếu bằng nhau, lần 2 cân theo cách 2.1 (tức là cân 1 và 3); nếu 1 nhẹ hơn 2, lần 2 cân theo cách 2.2 (vẫn là cân 1 và 3); nếu 1 nặng hơn 2, làm tương tự như khi 1 nhẹ hơn 2 vì không mất tính tổng quát ta có thể đánh số lại 1 và 2.

Xét ở lần cân 2.1, nếu 1 bằng 3 suy ra đồng 1 là đồng xảo quyệt, do vậy đồng giả phải ở trong 2 đồng (2, 3).

Tổng hợp lại, ta có 6 trường hợp như kết quả ở bảng:

- 1 = 2 và 1 = 3: suy ra đồng 1 là đồng xảo quyệt, nên đồng giả ở trong 2 hoặc 3.
- 1 = 2 và 1 < 3: đồng 3 không thể là đồng giả, do vậy đồng giả phải ở trong 1 hoặc 2.
- 1 = 3 và 1 > 3, đồng 1 không thể là đồng giả. Nếu đồng 2 là giả thì đồng 1 lúc này phải là đồng xảo quyệt và đồng 3 là thật (mâu thuẫn vì 1 > 3), do vậy trường hợp này đồng 3 là giả.
- 1 < 2 và 1 = 3, tương tự như trường hợp (1 = 2 và 1 < 3), suy ra 2 không thể là đồng giả, nên đồng giả ở trong 1 hoặc 3.
- 1 < 2 và 1 < 3, suy ra đồng 1 là đồng giả.
- 1 < 2 và 1 > 3, đồng 1 phải là đồng xảo quyệt và suy ra đồng giả là 3.

Cách làm này, ta có thể tổng quát hoá lên cho trường hợp 3^n đồng, lúc này ta sẽ cần $2n$ lần cân với chiến thuật tương tự bằng cách chia thành 3 nhóm X_1, X_2, X_3 bằng nhau và cứ thế tiếp tục.

Như vậy với 2 lần cân, cách làm trên ta có thể xác định 2 đồng có chứa chắc chắn đồng giả từ $N = 3$ đồng, nhưng với 2 lần cân, ta có thể làm được với $N = 4$. Thật vậy, ta có thể cân như sau:

Lần cân - TH	Cân	Bằng nhau	Bên trái nhẹ hơn	Bên phải nhẹ hơn
1.1	1 và 2	=> 2.1	=> 2.2	(- tt -)
2.1	1 + 2 và 3 + 4	(3, 4)	(1, 2)	(3, 4)
2.2	3 và 4	(1)	(1, 3)	(1, 4)

Giải thích chi tiết hơn một chút, ta có thể thấy giả sử lần 1 có 1 = 2, nghĩa là nếu 1 trong 2 đồng là giả, thì đồng còn lại phải là đồng xảo quyệt. Do vậy, lần thứ 2 (trường hợp 2.1 trong bảng) ta cân 1 + 2 và 3 + 4. Nếu cân không thăng bằng thì bên nhẹ hơn phải chứa đồng giả! Nếu cân thăng bằng thì đồng giả phải ở phía đối nghịch với đồng xảo quyệt. Điều này nghĩa là 1 và 2 không thể đồng thời đều không phải là đồng thật, hay nói cách khác, 3 và 4 phải chứa đồng giả.

Nếu lần 1 cân không bằng nhau và 1 < 2, nghĩa là đồng 2 không thể là đồng giả và đồng 1 phải hoặc là đồng giả hoặc là đồng xảo quyệt. Lần 2 ta cân 3 và 4. Nếu 3 = 4, rõ ràng không thể có đồng giả ở đây, do vậy chỉ có thể là 1 giả. Nếu không thăng bằng, đồng giả phải ở trong 1 và đồng nhẹ hơn (giữa 3 và 4).

Và đây, chúng ta đi đến lời giải của bài toán chính thức với 3 lần cân và 6 đồng:

Lần cân - TH	Cân	Bằng nhau	Bên trái nhẹ hơn	Bên phải nhẹ hơn
1.1	1 + 2 và 3 + 4	=> 2.1	=> 2.2	(- tt -)
2.1	1 + 3 và 5 + 6	=> 3.1	=> 3.2	(5, 6)
2.2	1 và 2	=> 3.3	=> 3.4	(- tt -)
3.1	2 + 4 và 5 + 6	($\emptyset$)	(2, 4)	(5, 6)
3.2	1 + 4 và 2 + 3	(1, 3)	(1, 4)	(2, 3)
3.3	1 + 2 và 5 + 6	(5, 6)	(1, 2)	(5, 6)
3.4	5 và 6	(1)	(1, 5)	(1, 6)

Và như vậy chúng tôi kết thúc loạt bài toán cân tiền ở đây. Các kết quả tổng quát hơn của bài toán này, độc giả quan tâm có thể tham khảo ở [2].

Tài liệu

[1] N. Diaco, T. Khovanova, *Weighing Coins and Keeping Secrets*, 1–14. arXiv: 1508.05052, (2015).

[2] T. Khovanova, K. Knop and O. Polubasov, *Chameleon Coins*, arXiv:1512.07338 [math.HO], (2015).

[3] B. Chen, E. Erives, L. Fan, M. Gerovitch, J. Hsu, T. Khovanova, N. Malur, A. Padaki, N. Polina, W. Sun, J. Tan, and A. The, *Alternator Coins*, arXiv:1605.05601 [math.CO], (2016).

VÀI NÉT VỀ PHƯƠNG TRÌNH NAVIER-STOKES

Dương Đức Lâm
University of Sussex, United Kingdom

GIỚI THIỆU

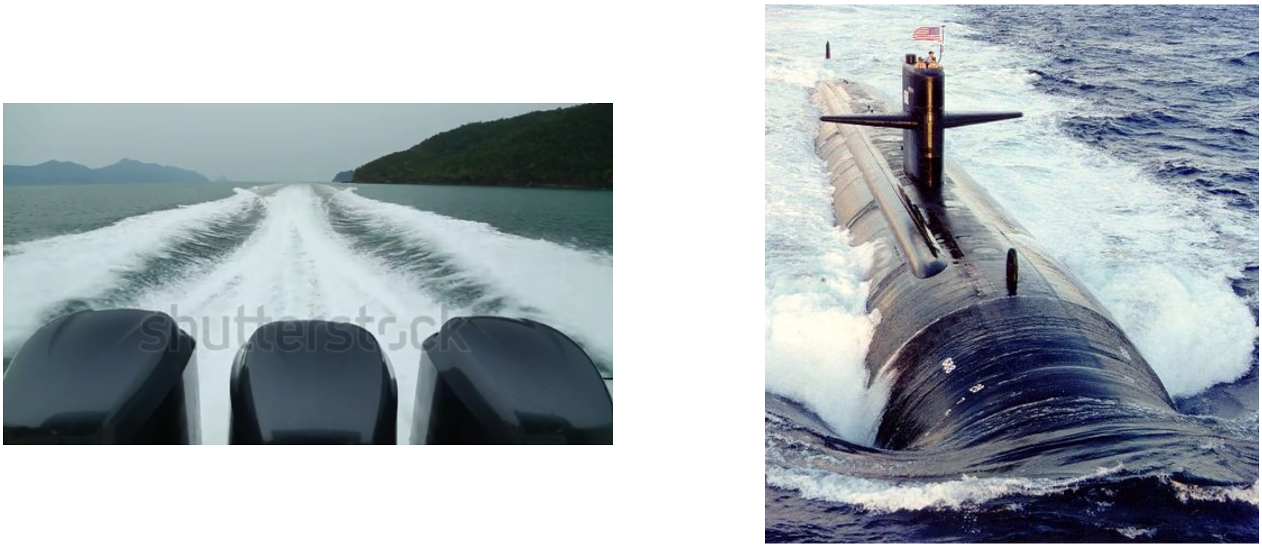
Phương trình Navier-Stokes là một trong những phương trình quan trọng nhất của Vật lý. Dù được biết đến và nghiên cứu từ thế kỉ XIX, nhưng cho đến nay, những hiểu biết của chúng ta về phương trình này còn quá ít ỏi. Viện Clay đã đưa phương trình này vào danh sách 7 bài toán thiên niên kỉ cùng giải thưởng 1 triệu đô cho người khám phá ra những bí mật ẩn chứa đằng sau nó. Vậy phương trình Navier-Stokes là gì, có liên quan thế nào đến cuộc sống chúng ta, và tại sao lại được các nhà toán học quan tâm như vậy? Bài viết sẽ điểm vài nét chấm phá xung quanh các vấn đề này.

1. Sự mô phỏng chuyển động của chất lỏng và chất khí

Có bao giờ bạn tự hỏi, các dòng nước chuyển động sau đuôi tàu đang chạy, hay các dòng khói tỏa ra từ một điếu thuốc đang cháy, liệu chúng có tuân theo một quy luật nào đó hay không? Câu trả lời là có. Những hiện tượng xảy ra trong các chất lỏng và chất khí[1] này tưởng như chẳng liên quan gì đến nhau, thực tế lại cùng được mô tả bởi phương trình Navier-Stokes. Các hiện tượng này được gọi chung là dòng chảy rối[2]. Dòng chảy rối có thể quan sát thấy ở mọi nơi trong tự nhiên lẫn trong cuộc sống hằng ngày như từ ống khói nhà máy, các đám mây trôi trên bầu trời, trận gió xoáy cuốn cát bụi lên cao, lưu lượng khí chuyển qua cách máy bay, sóng vỗ bên mạn tàu, nước chảy xiết trên sông hay các dòng chảy trên đại dương rộng lớn . . . và hầu hết các dòng chảy xảy ra trong tự nhiên và trong các ứng dụng kỹ thuật khác (xem một số hình ảnh dưới đây).

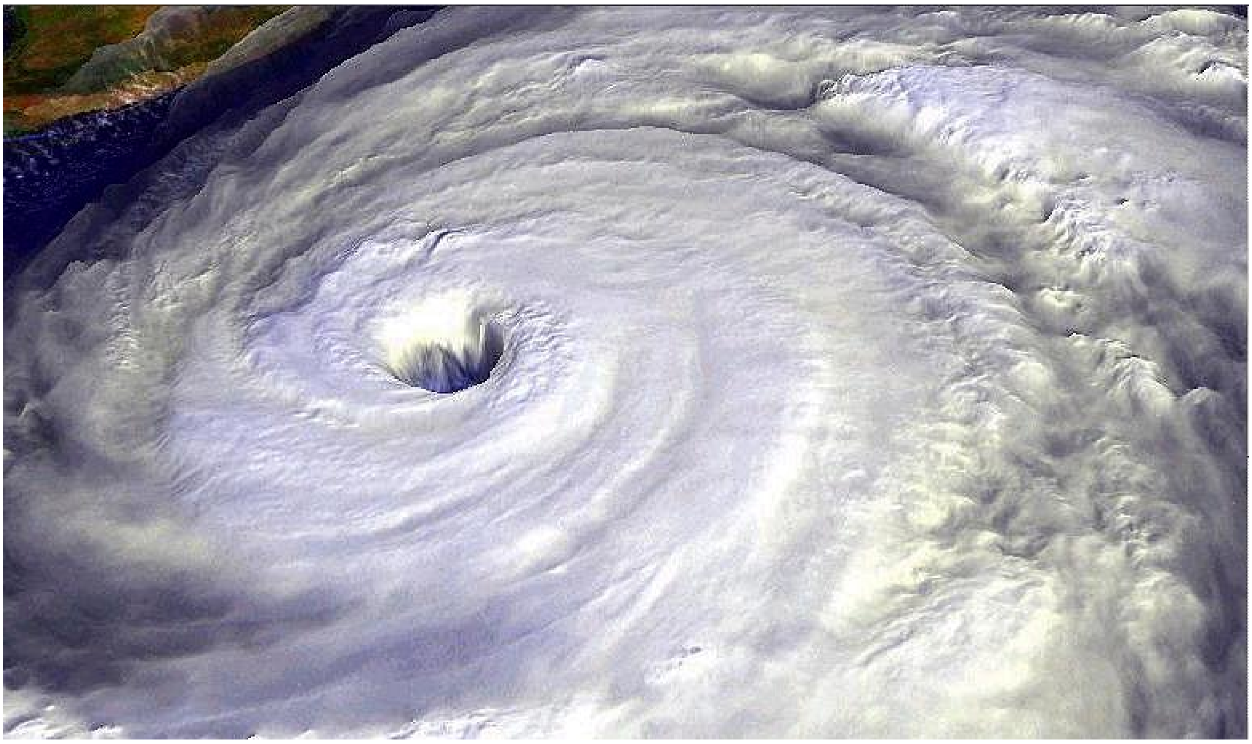
Phương trình Navier-Stokes, bởi thế, chính là một sự mô hình hóa bằng các công thức toán học, một mô phỏng chung cho sự chuyển động hỗn loạn của các dòng chảy rối. Để nắm được các quy luật của những hiện tượng tự nhiên và kĩ thuật này cũng như vận dụng chúng vào phục vụ cuộc sống loài người, chẳng hạn để dự báo thời tiết, hay tránh thảm họa thiên nhiên, việc nghiên cứu phương trình Navier-Stokes là điều vô cùng cần thiết.

[1] gọi chung là chất lưu.
[2] hay *sự rối loạn của dòng chảy*, tiếng Anh là *turbulence*.



Hình 1: Các dòng chảy rối sau đuôi hoặc bên cạnh mạn tàu.

Hình 2: Một cơn lốc xoáy xảy ra ở bang Manitoba (Canada) vào ngày 22/06/2007, được ghi nhận là cơn lốc xoáy lớn nhất trong lịch sử Canada. *Ảnh: Wikipedia*

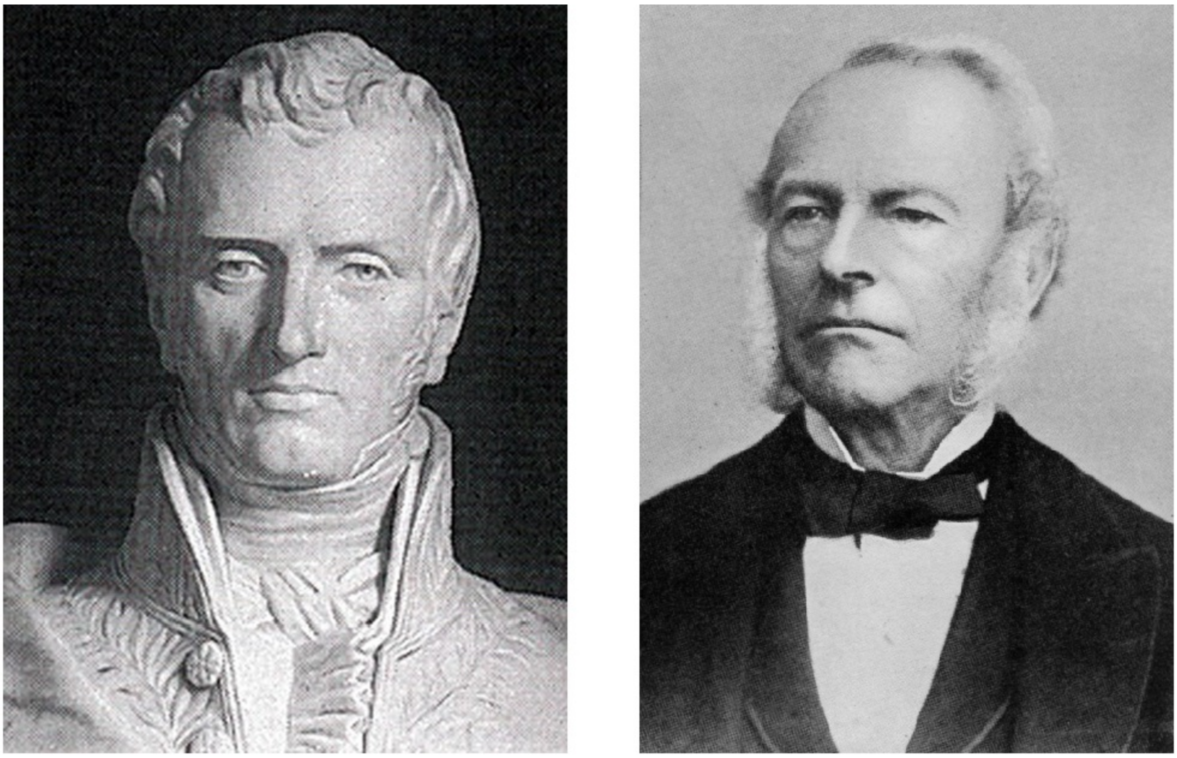


Hình 3: Hình ảnh của một mắt bão. Các dòng chảy rối xung quanh được mô tả bởi phương trình Navier-Stokes. *Ảnh: NASA*

Hình 4: Cơn bão supercell, được coi là "quái vật bầu trời", diễn ra vào tháng 5/2013 ở bang Montana, Mỹ. *Ảnh: Sean R. Heavey*

2. Công thức toán học của phương trình Navier-Stokes

Phương trình Navier-Stokes lần đầu tiên được Claude-Louis Navier[3] thiết lập vào năm 1821 cho các chất lỏng không nén được, và năm 1822, cho các chất lỏng nhớt. Tuy nhiên, Navier đi đến phương trình này mà chưa hoàn toàn nhận thức rõ tầm quan trọng của các yếu tố xuất hiện trong phương trình. Cho đến khi George Stokes[4] thiết lập lại dựa trên những giả thiết chính xác hơn, trong một bài báo tựa đề *On the theories of the internal friction of fluids in motion*, xuất bản năm 1845.



Hình 5: Claude-Louis Navier và George Stokes.

Về bản chất, phương trình Navier-Stokes chính là một áp dụng trực tiếp của Định luật 2 Newton $F = ma$ quen thuộc[5]. Cụ thể, nó có dạng như sau

$$\underset{\downarrow\, \text{m}}{\rho}\underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\cdot\nabla v\right)}_{\text{a}}=\underbrace{-\nabla p}_{\text{Fpression}}+\underbrace{\mu\nabla^2 v}_{\text{Fvisqueuse}}$$

trong đó

[3] Claude-Louis Navier (10/02/1785 – 21/08/1836), nhà toán học người Pháp.
[4] Sir George Gabriel Stokes (13/08/1819 – 01/02/1903), nhà toán học và vật lý người Anh.
[5] Lực tác dụng vào một vật F bằng khối lượng m của vật nhân với gia tốc a của nó.

- ρ là khối lượng chất lưu trên một đơn vị thể tích (hay mật độ của chất lưu)
- v là vận tốc của dòng chảy
- $\dfrac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v$ biểu thị gia tốc của dòng chảy[6]
- p là áp suất, ∇p mô tả ứng suất cắt[7]
- μ là hệ số nhớt, đặc trưng cho độ nhớt[8] (độ cản trở) của chất lỏng.

Chia hai vế của phương trình cho ρ, và gọi f là tổng các ngoại lực bên ngoài tác dụng lên chất lưu, ta nhận được dạng thường gặp của phương trình là

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -(v \cdot \nabla) \cdot v - \frac{1}{\rho}\nabla p + \mu \nabla^2 v + f.$$

Từ đây ta có thể nói, phương trình Navier-Stokes mô tả sự thay đổi vận tốc đối với thời gian dựa trên 4 đại lượng sau [1].

- Đại lượng đầu tiên là lượng $-(v \cdot \nabla) \cdot v$. Đại lượng này cho biết cách mà divergence tác động lên vận tốc v. Để dễ hình dung, hãy liên tưởng đến một con sông. Nếu trên dòng chảy của dòng sông ấy có một chỗ hẹp lại, khi đó tốc độ dòng chảy sẽ tăng lên ở đó. Ngược lại, nếu dòng sông có xu hướng mở rộng ra, lượng nước sẽ tăng nhưng tốc độ dòng chảy sẽ bị giảm lại, xem hình vẽ.

- Đại lượng thứ hai là $-\dfrac{1}{\rho}\nabla p$. Đại lượng này miêu tả sự sự di chuyển của các phần tử chất lưu khi áp suất thay đổi, cụ thể, dòng chảy có xu hướng đi từ nơi có áp suất cao về nơi có áp suất thấp. Điều này cũng tương tự như một đàn chim đang bay (đóng vai là tập hợp chất lưu với các phần tử chất lưu là các chú chim) thì bị tấn công bởi một con đại bàng (đóng

[6]Một cách rõ hơn, nếu kí hiệu $\dfrac{D}{Dt}$ là đạo hàm hữu hình (hay đạo hàm chất lưu, material derivative), thì ta có $\dfrac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = \dfrac{Dv}{Dt}$, đây chính là gia tốc của dòng chảy (theo đúng định nghĩa, gia tốc là đạo hàm của vận tốc theo thời gian).

[7]shear stress

[8]viscosity

vai là áp suất ρ). Những chú chim sẽ có xu hướng bay tản ra xa con chim đại bàng kia (ra khỏi nơi có áp suất cao). Nếu mật độ đàn chim càng cao (các chú chim bay gần nhau) thì chúng càng khó bay tản ra xa nhau và ngược lại, nếu mật độ đàn chim càng thưa, chúng càng dễ dàng thoát thân hơn khi con đại bàng tấn công. Xem hình vẽ.

- Đại lượng thứ ba là $\mu\nabla^2 v$. Để hình dung sự ảnh hưởng của đại lượng này, lấy ví dụ có hai chất lỏng là sirô (có độ nhớt cao) và nước (có độ nhớt nhỏ hơn). Rõ ràng sự chuyển động của mỗi phần tử siro tác động nhiều đến các phần tử xung quanh (nó kéo các phần tử xung quanh đi theo) hơn là so với nước, xem hình vẽ.

- Đại lượng cuối cùng là ngoại lực f.

3. Bài toán thiên niên kỉ

Qua các ví dụ đã dẫn ra ở trên, có thể thấy phương trình Navier-Stokes góp mặt ở hầu như mọi nơi của đời sống, và quan trọng không kém các phương trình nền tảng của vật lý như các định luật của Newton hay phương trình Einstein[9], mặc dù không có cơ hội nổi tiếng và quen thuộc như các phương trình này. Điều này có thể hiểu được vì cách phát biểu của nó không quá đơn giản (không phải dạng "nhìn phát hiểu ngay" như các phương trình kia!). Và quan trọng hơn, sau bao nhiêu nỗ lực của các nhà toán học lẫn vật lý, phương trình này vẫn còn ẩn chứa những bí mật mà cho đến nay vẫn chưa được làm sáng tỏ. Vậy bí mật đó là gì?

Một trong những điều cốt lõi được quan tâm nhất của một phương trình vi phân đó là, nó có nghiệm[10] hay không, và nếu có thì nghiệm có chính quy[11] và duy nhất không.

Đối với phương trình Navier-Stokes, vấn đề đã được giải quyết trong trường hợp hai chiều. Trong không gian ba chiều (là không gian chúng ta đang sống mà ở đó có các bài toán thực tế như nói ở trên), vấn đề phức tạp hơn rất nhiều. Cho trước một giá trị ban đầu bất kì của vận tốc $v(t = 0) = v_0$, chúng ta không biết liệu có tồn tại một nghiệm $v(t)$ xác định với mọi giá trị sau đó của thời gian t hay không[12].

Nhà vật lý Richard Feynman[13] đã gọi phương trình Navier-Stokes là vấn đề quan trọng nhất chưa giải quyết được của vật lý cổ điển.

Còn viện Toán Clay [2] đã liệt kê nó là một trong bảy bài toán của thiên niên kỉ mới. Kèm theo đó là giải thưởng 1 triệu đô la cho người đầu tiên: hoặc chứng minh được sự tồn tại toàn cục của nghiệm, hoặc chỉ ra được một phản ví dụ, nghĩa là tìm một giá trị ban đầu v_0 sao cho nghiệm toàn cục không tồn tại.

Vậy tại sao phương trình Navier-Stokes lại khó?

Về mặt toán học, sự phức tạp đến từ việc phương trình này là một phương trình vi phân phi tuyến. Đại lượng phi tuyến $-(v \cdot \nabla) \cdot v$ sinh ra những khó khăn mà phương trình tuyến tính (như phương trình dao động của con lắc đã quen thuộc với học sinh phổ thông, hay phương trình truyền nhiệt) không có. Khi vận tốc thay đổi, đại lượng này không thay đổi đều đặn mà thay đổi một cách "phi mã", khó kiểm soát. Do đó rất khó đánh giá đại lượng này. Các độc giả toán học tò mò hơn có thể xem thêm bài viết của Terence Tao [5] để biết chi tiết.

Về mặt vật lý, phương trình Navier-Stokes mô tả chuyển động của chất lưu. Chất lưu ở đây có thể là dòng dầu ăn khi được rót vào chai, hoặc là dòng chất khí chuyển động sau cánh của một máy bay đang cất cánh. Với chuyển động của dầu ăn, dòng chất lỏng di chuyển một cách đều đặn và nhất quán. Nhưng với dòng chất khí sau cánh máy bay, nó là một sự chuyển động hỗn loạn. Sự hỗn loạn này tương ứng với đại lượng phi tuyến được nói đến ở trên. Xem hình vẽ [4].

[9] $E = mc^2$

[10] Trong nhiều trường hợp, nghiệm được hiểu theo nghĩa rộng hơn, chẳng hạn *nghiệm yếu (weak solution)*, do không tồn tại nghiệm đúng.

[11] regularity, có thể hiểu là tính trơn, tính bị chặn.

[12] gọi là xác định toàn cục.

[13] Richard Phillips Feynman (1918 - 1988), nhà vật lý người Mỹ gốc Do Thái, giải thưởng Nobel về vật lý (1965). Ông được coi là một trong mười nhà vật lý xuất sắc nhất mọi thời đại theo tạp chí *Physics World* của Viện Vật lí IOP, Anh.

Hình 7: Sự nhiễu loạn sau cánh máy bay có thể quan sát thấy khi sử dụng khói màu.

4. Ai sẽ giành giải thưởng một triệu đô?

Cho đến nay, kết quả tốt nhất được biết đến về phương trình Navier-Stokes vẫn là một kết quả của Leray[14] từ đầu thế kỉ trước. Ông đưa ra trong một bài báo xuất bản năm 1934 [3] một chứng minh về sự tồn tại của nghiệm yếu của phương trình Navier-Stokes (mặc dù không chứng minh được tính duy nhất, và cho đến nay đây vẫn còn là một bài toán mở).

Hàng thế kỉ trôi qua, rất nhiều nhà toán học (và không ít những nhà toán học "nghiệp dư") đã tấn công bài toán bằng mọi cách nhưng nó vẫn sừng sững như một tòa lâu đài kiên cố. Từ các nhà toán học lão thành như Luis Caffarelli, Robert Kohn, Louis Nirenberg, Gregory Seregin, Vladimir Sverak... đến những nhà toán học trẻ như Terence Tao, Nader Masmoudi... dù có một vài kết quả nhỏ lẻ, nhưng vẫn chưa thể tìm được bước tiến đột phá.

Gần đây, vào cuối năm 2013, một nhà toán học người Kazakhstan, Mukhtarbay Otelbaev, công bố một bản thảo "dày cộp", trong đó nói đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm mạnh của bài toán. Không lâu sau, các thành viên trên diễn đàn Math Stackexchange đã tìm ra một lỗ hổng trong chứng minh này. Otelbaev tuyên bố sẽ sớm "vá" lại lỗ hổng. Nhưng cho đến nay, vẫn không có thêm một tin tức mới nào được cập nhật từ ông.

Vào tháng 2 năm 2014, Terence Tao đưa lên trang cá nhân một bài báo gây xôn xao cộng đồng,

[14] Jean Leray (1906 – 1998), nhà toán học người Pháp.

Hình 8: Danh họa Leonardo da Vinci (1452-1519) và bức tranh minh họa dòng chảy rối.

trong đó anh có đưa ra một kết quả cho phương trình Navier-Stokes *trung bình hóa*[15], đồng thời đề nghị một chương trình có thể cho phép tấn công phương trình Navier-Stokes đúng. Kết quả này hiện đã được đăng trên tạp chí "Journal of the American Mathematical Society", một trong những tạp chí tốt nhất về toán. Tuy nhiên, để đi đến được đích vẫn còn rất xa.

Thay lời kết

Chỉ mới có duy nhất một trong bảy bài toán triệu đô đã được giải, đó là giả thuyết Poincaré[16]. Và có lẽ vẫn còn lâu nữa viện Clay mới lại phải chi tiền. Dẫu sao, với một số thành tựu bước ngoặt gần đây liên quan đến một bài toán cũng lâu đời không kém là giả thuyết số nguyên tố sinh đôi, với kết quả mang tính đột phá lại đến từ một nhà toán học "vô danh" Yitang Zhang, cũng như sự trỗi dậy của một thế hệ các nhà toán học trẻ mới đôi mươi đầy hứa hẹn (Peter Scholze, James Maynard, Alessio Figalli, Maryna Viazovska...), toán học đang có những bước đi ngày càng mau lẹ. Hãy hi vọng rằng, những làn gió mới đó sẽ báo hiệu cho những bước tiến xa hơn trong hành trình chinh phục 6 ngọn núi triệu đô, nói riêng là phương trình Navier-Stokes.

[15]averaged Navier-Stokes

[16]Tiếc thay người giải được giả thuyết này, Grigori Perelman, lại từ chối nhận giải.

Tài liệu

[1] Steven Dobek, *Fluid Dynamics and the Navier-Stokes Equation*, Lecture Notes, 2012. Một bản dịch tiếng Việt có thể xem ở trang http://math2it.com/hieu-y-nghia-thuc-te-cua-phuong-trinh/

[2] Charles L. Fefferman, Existence and smoothness of the Navier–Stokes equation, *The Millennium Prize Problems*, pp. 57–67, Clay Math. Inst., Cambridge, 2006.

[3] Jean Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Mathematica* 63: 193–248, 1934.

[4] Science Étonnante, Le blog de David Louapre, Site https://sciencetonnante.wordpress.com/2014/03/03/la-mysterieuse-equation-de-navier-stokes/

[5] Terence Tao, *Why global regularity for Navier-Stokes is hard?* Blog post https://terrytao.wordpress.com/2007/03/18/why-global-regularity-for-navier-stokes-is-hard/

[6] Terence Tao, Finite time blowup for an averaged three-dimensional Navier-Stokes equation, *J. Amer. Math. Soc.*, 29, 601-674, 2016.

VỀ MỘT BÀI TOÁN TRONG KỲ THI OLYMPIC HÌNH HỌC SHARYGIN NĂM 2014

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

TÓM TẮT

Bài viết mở rộng và phát triển một bài toán hình học trong kỳ thi Olympic hình học Sharygin năm 2014 với các công cụ hình học thuần túy.

1. Bài toán và các lời giải

Trong kỳ thi Olympic hình học Sharygin năm 2014 cho khối lớp 8 ngày thi thứ 2 [1], tác giả **Trần Quang Hùng** đã đề nghị bài toán sau

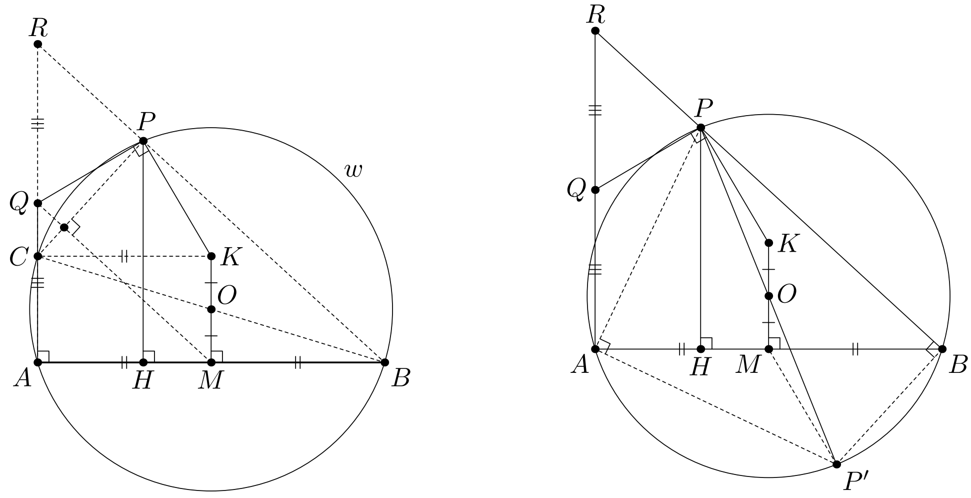
Bài toán 1. Cho M là trung điểm dây cung AB của đường tròn (O). K đối xứng với M qua O. P là một điểm trên (O). Đường thẳng vuông góc với AB tại A cắt đường thẳng qua P vuông góc với PK tại Q. H là hình chiếu vuông góc của P lên AB. Chứng minh rằng BQ chia đôi đoạn thẳng PH.

Hai lời giải thứ nhất và thứ hai sau được tham khảo trong [2]

Lời giải thứ nhất. Gọi QA cắt (O) tại C khác A. Từ BC là đường kính của (O), ta thu được BC và MK cắt nhau tại trung điểm mỗi đường cũng là tâm đường tròn, điều đó nghĩa là tứ giác $CKBM$ là một hình bình hành. Hơn nữa, M là trung điểm của AB, vậy thì $CKMA$ là hình chữ nhật. Ta sẽ chứng minh MQ vuông góc với PC. Ta có

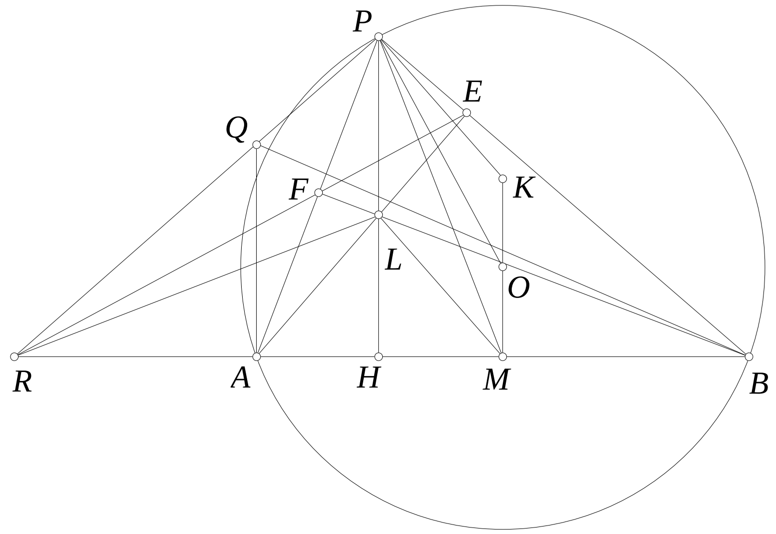
$$\begin{aligned}(MC^2 - MP^2) - (QC^2 - QP^2) &= (CK^2 + MK^2) - (2OP^2 + 2OK^2 - PK^2) \\ &\quad - (QK^2 - CK^2) + (QK^2 - PK^2) \\ &\text{(định lý Pythagoras và công thức trung tuyến)} \\ &= 2CK^2 + MK^2 - 2OP^2 - 2OK^2 \\ &= 2CK^2 + 4OK^2 - 2OC^2 - 2OK^2 \\ &= 2(CK^2 + OK^2 - OC^2) \\ &= 0\end{aligned}$$

Do đó, MQ vuông góc với PC. BP cắt QA tại R. Chú ý rằng CB là đường kính của (O) nên BR vuông góc PC. Như vậy kéo theo MQ song song với BR. M là trung điểm AB nên Q là trung điểm BR. Từ đó, QB chia đôi PH. $\square$



Hình 1.

Lời giải thứ hai. Chú ý rằng $\angle PBA \neq 90°$; vì trong trường hợp $PK \parallel AB$, thì Q không tồn tại. Vậy thì BP cắt AQ tại R. Do tam giác BPH và BRA có cạnh tương ứng song song, ta hướng tới chứng minh rằng Q là trung điểm của AR. Gọi P' là đối xứng của P qua O. Thì $PA \perp P'A$, $PR \perp P'B$, $AR \perp AB$, do đó các cạnh tương ứng của hai tam giác $P'AB$ và PAR vuông góc. Vậy hai tam giác này đồng dạng hơn nữa các trung tuyến từ P và P' là vuông góc. Sử dụng đối xứng tâm O ta thu được $P'M \parallel PK \perp PQ$. Vì vậy PQ là trung tuyến của $\triangle PAR$. $\square$



Hình 2.

Lời giải thứ ba. Đường cao AE, BF của tam giác PAB cắt nhau tại L. EF cắt BC tại R. $(A, B; H, R) = -1$ nên theo công thức Maclaurin $\overline{HA} \cdot \overline{HB} = \overline{HM} \cdot \overline{HR}$. Mà $\overline{HA} \cdot \overline{HB} =$

$-\overline{HP}\cdot\overline{HL}$ suy ra $\overline{HM}\cdot\overline{HR} = -\overline{HP}\cdot\overline{HL}$, đồng nghĩa với L là trực tâm của tam giác PRM. $PL \parallel = 2OM$ nên $PL \parallel = KM$ kéo theo $PKML$ là hình bình hành.
Do đó $PR \perp LM \parallel PK \perp PQ$ do đó P, Q, R thẳng hàng. Từ đó chùm $Q(A, B; H, R) = -1$ mà $PH \parallel QA$ nên QB chia đôi PH. $\square$

Hệ quả. Điểm Q nằm trên đường trung bình ứng với A của tam giác APB.

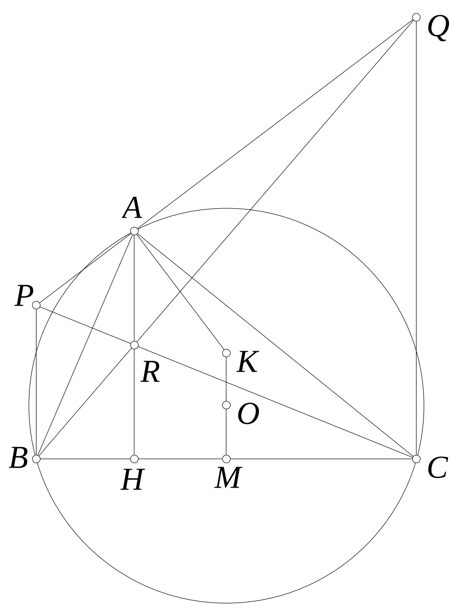
Chứng minh. Đây có thể coi là hệ quả trực tiếp từ lời giải thứ nhất. Nếu xuất phát từ lời giải thứ ba ta thấy $(A, B; H, R) = -1$ mà M là trung điểm AB nên theo hệ thức Maclaurin thì $RA\cdot RB = RH\cdot RM$ hay $\frac{RH}{RB} = \frac{RA}{RM} = \frac{RQ}{RP}$ do đó QM song song PB, nói cách khác Q cũng nằm trên đường trung bình ứng với A của tam giác PAB. $\square$

Nhận xét. Lời giải thứ nhất là lời giải tác giả đề xuất khi gửi bài toán này cho kỳ thi Sharygin. Trong lời giải sử dụng kỹ thuật về định lý Carnot. Lời giải thứ hai là do ban tổ chức đề nghị, dùng tam giác trực giao, đây cũng là một lời giải rất đẹp và đơn giản, chỉ dùng các kiến thức hình học lớp 8. Lời giải thứ ba sử dụng phương pháp về hàng điều hòa cũng rất ngắn gọn và giúp chúng ta thu được một hệ quả thú vị. Mỗi lời giải cho một ý nghĩa riêng. Nếu dây AB là đường kính của (O) thì ta thu được bài toán chia đôi đoạn thẳng rất kinh điển cũng xuất phát từ nước Nga, chúng ta sẽ tìm hiểu kỹ hơn bài toán này ở cuối bài viết.

2. Một số ứng dụng

Bài toán trên là một bài toán có nhiều giá trị áp dụng, chúng ta bắt đầu từ bài toán sau

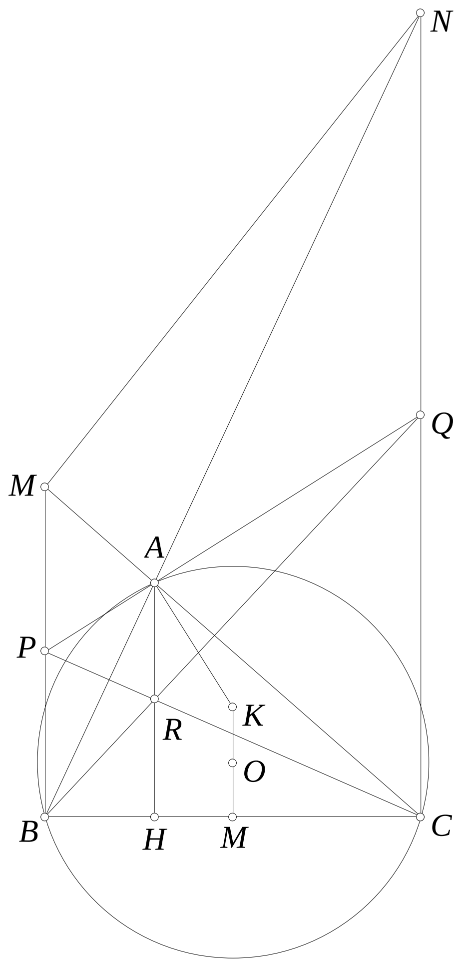
Bài toán 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M là trung điểm của BC. K đối xứng M qua O. Đường thẳng qua A vuông góc với AK cắt đường thẳng qua B, C vuông góc với BC tại P, Q. CP cắt BQ tại R. Chứng minh rằng $AR \perp BC$.



Hình 3.

Lời giải. Gọi AH là đường cao của tam giác ABC. Theo bài toán 1 thì CP, BQ đều đi qua trung điểm AH nói cách khác giao điểm hai đường thẳng đó phải là trung điểm AH do đó R là trung điểm AH nên $AR \perp BC$. □

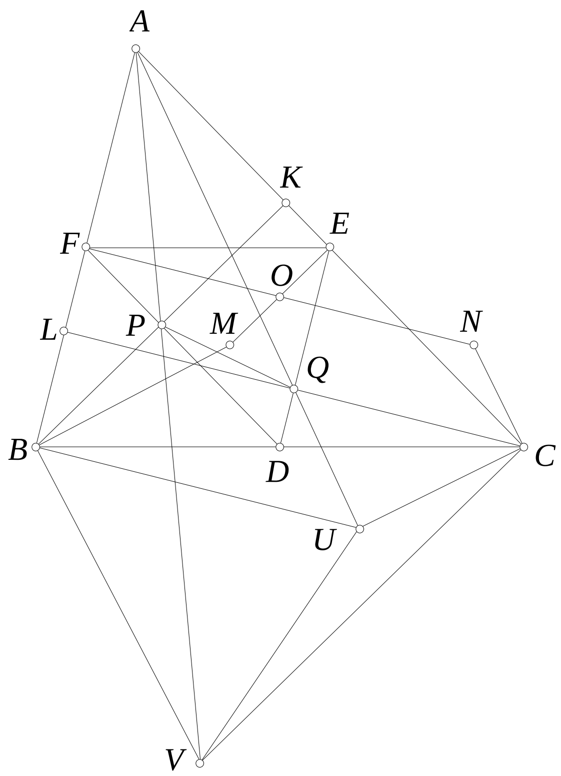
Bài toán 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển trên (O). CA, AB lần lượt cắt các đường thẳng qua B, C vuông góc với BC tại M, N. Gọi P, Q là trung điểm BM, CN. Chứng minh rằng đường thẳng qua A vuông góc PQ luôn đi qua điểm cố định khi A thay đổi.



Hình 4.

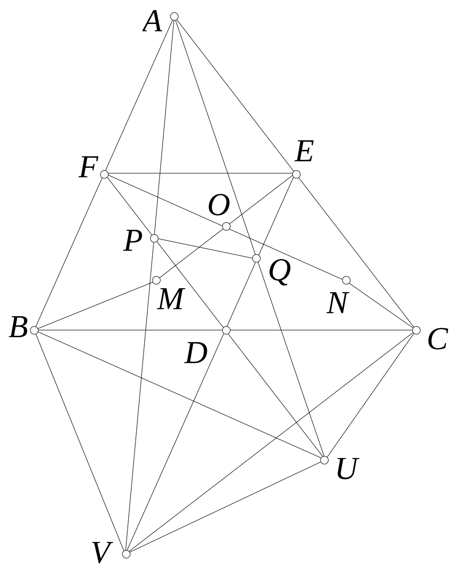
Lời giải. Theo tính chất hình thang dễ thấy PQ đi qua A. Từ đó gọi AH là đường cao của tam giác ABC. Vậy BQ, CP đều đi qua trung điểm AH. Theo bài toán 1 thì đường thẳng qua A vuông góc PQ đi qua điểm đối xứng trung điểm M của BC qua O cố định. □

Bài toán 4. Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O. D, E, F lần lượt là trung điểm CA, AB. M, N lần lượt đối xứng với E, F qua O. Lấy các điểm U, V sao cho $CU \perp CN$, $BU \perp BA$ và $BV \perp BM$, $CV \perp CA$. AU, AV lần lượt cắt DE, DF tại Q, P. Chứng minh rằng bốn điểm P, Q, U, V cùng thuộc một đường tròn.



Hình 5.

Lời giải thứ nhất. Gọi BK, CL là đường cao của tam giác ABC. Theo bài toán 1 thì AU, AV lần lượt đi qua trung điểm của BK, CL mà trung điểm BK, CL theo thứ tự nằm trên DF, DE do đó P, Q chính là trung điểm của BK, CL. Ta thấy các tam giác ABK và ACL đồng dạng có trung tuyến là AP, AQ nên hai tam giác AQL và APK đồng dạng. Lại có $CV \parallel BK$ và $BU \parallel QL$ nên ta có các cặp tam giác đồng dạng $\triangle AQL \sim \triangle AVC$ và $\triangle APK \sim \triangle AUB$. Từ đó $\frac{AQ}{AV} = \frac{AL}{AC} = \frac{AK}{AB} = \frac{AP}{AU}$ hay $AQ \cdot AU = AP \cdot AV$. Từ đó tứ giác $PQUV$ nội tiếp. $\square$



Hình 6.

Cách giải sau do bạn **Phạm Ngọc Khánh** lớp 12 Toán, THPT chuyên Sư phạm đề xuất.

Lời giải thứ hai. Theo hệ quả của bài toán 1 thì U, V lần lượt nằm trên DF, DE. $\angle VEC = \angle UFB = \angle BAC$ nên các tam giác vuông VCE và UBF đồng dạng g.g mà E, F lần lượt là trung điểm của CA, BA do đó hai tam giác VEA và UFA đồng dạng c.g.c. Suy ra $\angle FUA = \angle EVA$ nên tứ giác $PQVU$ nội tiếp. □

Nhận xét. Trong lời giải thứ nhất, việc sử dụng bài toán gốc để chỉ ra P, Q nằm trên các đường cao của tam giác đóng vài trò quyết định trong việc giải bài toán này. Mặt khác trong lời giải thứ hai thì việc sử dụng hệ quả của bài toán 1 cũng để chỉ ra U, V lần lượt nằm trên DF, DE đóng vai trò quan trọng. Từ việc U, V lần lượt nằm trên DF, DE ta sẽ đưa ra một bài toán hệ quả khá thú vị như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC có đường cao BE, CF cắt nhau tại H. K, L là trung điểm của CA, AB. M, N lần lượt đối xứng E, F qua K, L. Trên CA, AB lần lượt lấy P, Q sao cho $LP \perp LH$, $KQ \perp KH$. S, T đối xứng C, B qua P, Q.

a) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, S, T cùng nằm trên một đường tròn (J).

b) Chứng minh rằng trung trực BC chia đôi AJ.

c) Gọi ST cắt MN tại R. Chứng minh rằng $AR \parallel BC$.

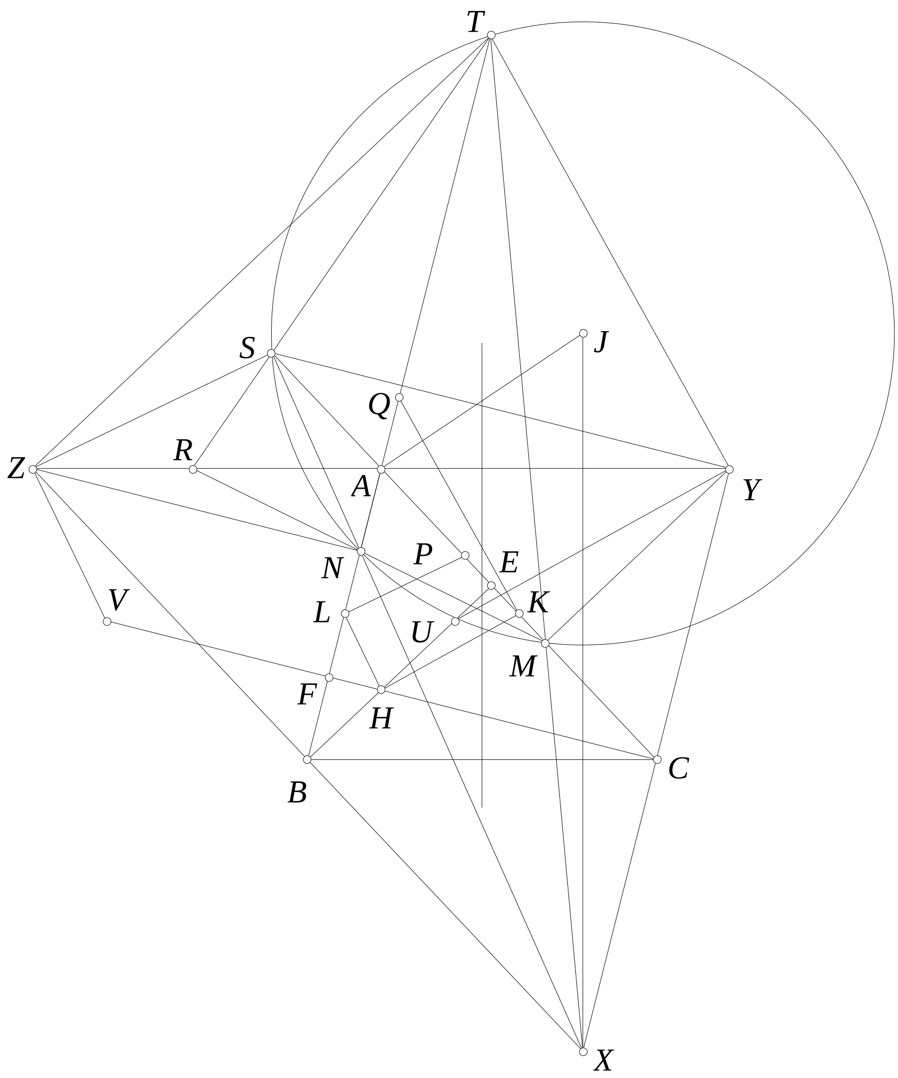
Lời giải thứ nhất. a) Lấy X, Y, Z lần lượt đối xứng với A, B, C qua trung điểm của BC, CA, AB. Dễ thấy M, N chính là hình chiếu vuông góc của Y, Z lên CA, AB. Mặt khác H là tâm ngoại tiếp tam giác XYZ. Vị tự tâm B tỷ số 2 thì H, K lần lượt biến thàng U, Y và Q biến thành T. Mặt khác Q được định nghĩa là giao điểm của đường thẳng qua K vuông góc KH và AB nên T chính là giao điểm của đường thẳng qua Y vuông góc YU với đường trung bình AB của tam giác XYZ. Tương tự với S. Vậy áp dụng bài toán 4 vào tam giác XYZ dễ suy ra bốn điểm M, N, S, T cùng thuộc một đường tròn.

b) Vị tự tâm A tỷ số 2 ta cần chứng minh $XJ \perp BC$. Chú ý rằng cũng theo bài toán 4 ta có $ZT \perp ZX, YS \perp YX$, từ đó áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông thì $BZ^2 = BN \cdot BT$, $CY^2 = CM \cdot CS$. Từ đó ta có biến đổi

$$BJ^2 - CJ^2 = (BJ^2 - R_J^2) - (CJ^2 - R_J^2) = BN \cdot BT - CM \cdot CS = BZ^2 - CY^2 = XB^2 - XC^2$$

trong đó R_J là bán kính của đường tròn đi qua M, N, S, T nên $XJ \perp BC$.

c) Theo lời giải thứ nhất bài toán 4 thì TM, SN đi qua X. Lại do tứ giác $STMN$ nội tiếp có hai đường chéo cắt nhau tại A nên theo định lý Brocard J là trực tâm tam giác ARX nên JX vuông góc với AR. Theo câu b), $JX \perp BC$ nên $AR \parallel BC$. □



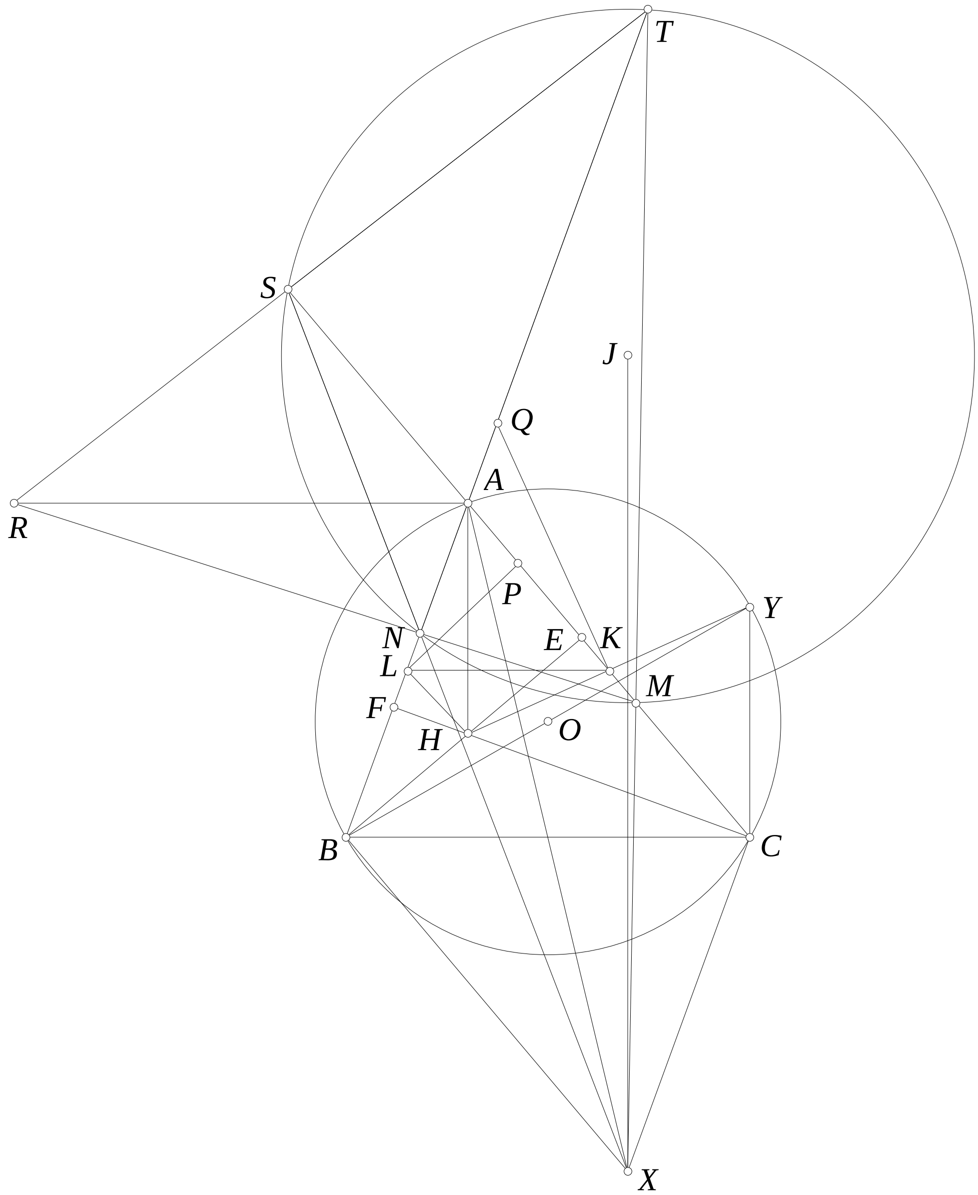
Hình 7.

Cách giải sau do các bạn **Đinh Công Duy** lớp 11 Toán và **Trần Minh Tiến** lớp 12 Toán, THPT chuyên KHTN đề xuất.

Lời giải thứ hai. a) Gọi BY là đường kính của (O) thì ta thấy các tam giác QKL và HYC có các cạnh tương ứng vuông góc nên đồng dạng. Do đó $\frac{QL}{HC} = \frac{KL}{YC} = \frac{KL}{HA}$. Chứng minh tương tự $\frac{PK}{HB} = \frac{KL}{HA}$ nên $\frac{PK}{HB} = \frac{QL}{HC}$ do đó $\frac{AS}{AT} = \frac{2PK}{2QL} = \frac{HB}{HC} = \frac{BF}{CE} = \frac{AN}{AM}$ từ đây suy ra $AN \cdot AT = AM \cdot AS$ nên tứ giác $STMN$ nội tiếp.

b) X đối xứng với A qua trung điểm BC, ta cần chứng minh $JX \perp BC$. Ta thấy $\frac{AT}{CX} = \frac{2QL}{AB} = \frac{2QL}{HC} \cdot \frac{HC}{AB} = \frac{2KL}{HA} \cdot \frac{HC}{AB} = \frac{BC}{HA} \cdot \frac{HC}{AB} = \frac{BE}{EA} \cdot \frac{EC}{EB} = \frac{EC}{EA} = \frac{MA}{MC}$. Từ đó theo định lý Thales đảo thì T, M, X thẳng hàng. Tương tự S, N, X thẳng hàng. Từ đó $\angle BXN = \angle NSC = \angle NTX$ do đó $BX^2 = BN \cdot BT = BJ^2 - R_J^2$. Tương tự $CX^2 = CM \cdot CS = CJ^2 - R_J^2$. Vậy $JB^2 - JC^2 = (JB^2 - R_J^2) - (JC^2 - R_J^2) = BX^2 - CX^2$ nên $JX \perp BC$.

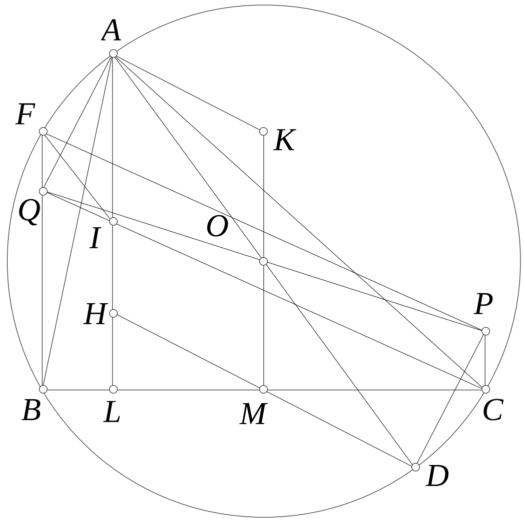
c) Trong tam giác XST thì $A(M, N; X, R) = -1$ mà AX đi qua trung điểm BC nên $AR \parallel BC$. $\square$



Hình 8.

Nhận xét. Trong lời giải thứ nhất thì ý b) của bài toán cũng có thể cho vào bài toán 4 tuy nhiên, rõ ràng việc viết lại bài toán 4 như trong bài toán 5 thì khi giải ta cần phải dựng lại các điểm X, Y, Z và giải thông qua việc áp dụng cả bài toán 1 và bài toán 4. Đó là thách thức không hề nhỏ khi giải cả hai ý của bài toán này. Nội dung ý c) và cách chứng minh ý c) ở cách giải thứ nhất là của bạn **Phạm Ngọc Khánh** lớp 12 Toán, THPT chuyên Sư phạm đề xuất. Tuy nhiên cách giải thứ hai là cách giải độc lập dựa hoàn toàn trên mô hình mới và ý c) nhìn theo lời giải thứ hai cũng rất đơn giản và có thể dùng nó chứng minh ngược lại ý b). Lời giải thứ nhất các ý a) và b) là cách tác giả tạo ra bài toán này tuy nhiên trong quá trình giảng dạy nó đã được giải theo các cách khác nhau bởi các bạn học sinh ở chuyên KHTN và chuyên Sư phạm như trên. Đây là các đóng góp về mặt ý tưởng hay và giá trị của các em cho bài toán.

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD, CF. AL là đường cao và H là trực tâm tam giác ABC. Lấy P sao cho $DP \perp DH$ và $CP \perp CB$. I là trung điểm AL. Chứng minh rằng $CI \parallel FP$.

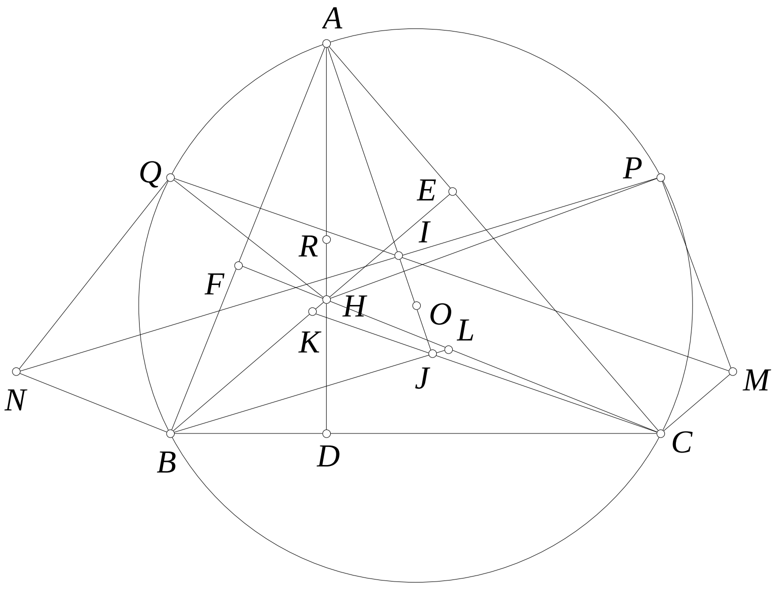


Hình 9.

Lời giải. $BHCD$ là hình bình hành nên H, D đối xứng qua trung điểm M của BC. Gọi K là điểm đối xứng M qua O. Phép đối xứng tâm O biến D thành A và biến đường thẳng qua C vuông góc CB thành đường thẳng qua B vuông góc CB. Do đó giao điểm P của đường thẳng qua D vuông góc DM và đường thẳng qua C vuông góc CB biến thành giao điểm Q của đường thẳng qua A vuông góc AK và đường thẳng qua B vuông góc CB. Theo bài toán 1 thì CQ đi qua I, mà $PFQC$ là hình bình hành nên $CI \parallel FP$. □

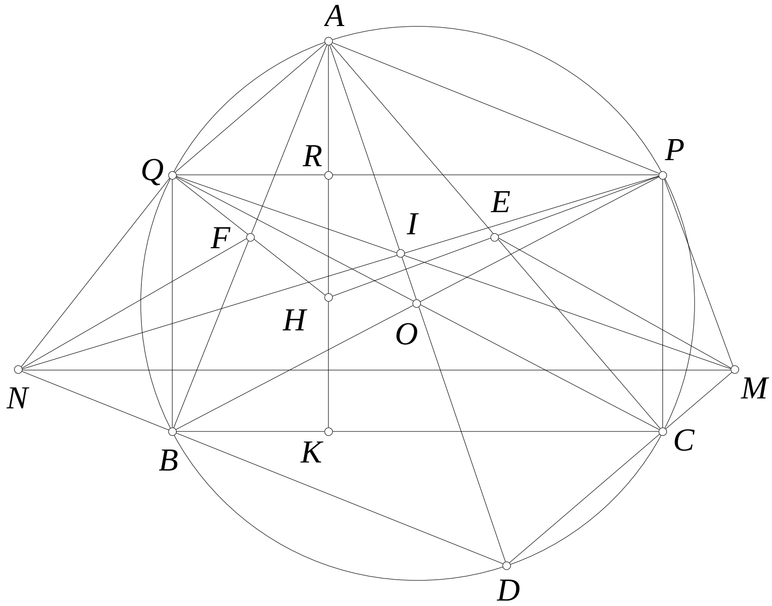
Dùng bài toán trên có thể giải bài toán dưới đây

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với BP, CQ là đường kính của (O). H là trực tâm tam giác ABC. Lấy các điểm M, N sao cho $CM \perp CA$, $PM \perp PH$, $BN \perp BA$, $QN \perp AH$. Chứng minh rằng QM, NP và AO đồng quy.



Hình 10.

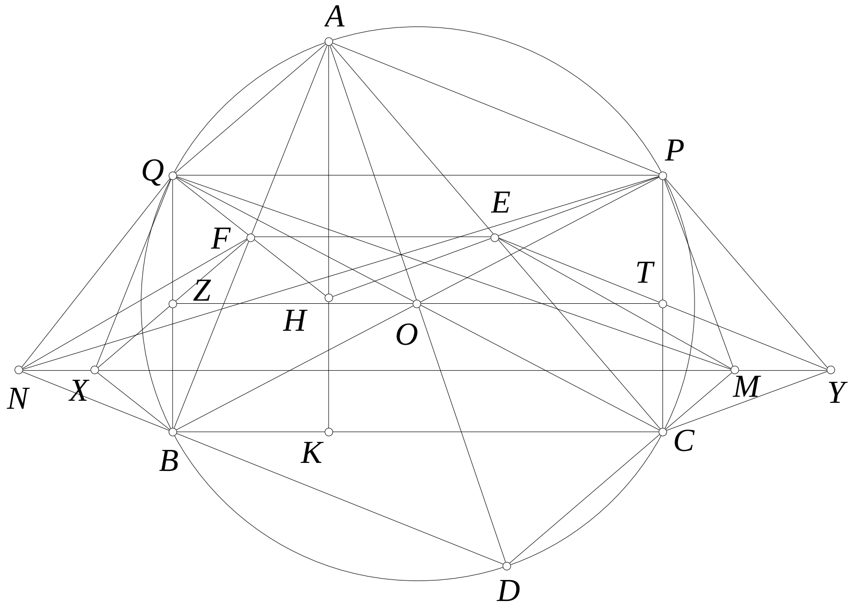
Lời giải thứ nhất. Gọi AD, BE, CF là đường cao của tam giác ABC. R, K, L lần lượt là trung điểm AD, BE, CF. Từ các tính chất tam giác đồng dạng của trực tâm dễ thấy R là đẳng giác của giao điểm J của BL và CK do đó J nằm trên AO. Theo bài toán 5 thì hai đường thẳng QM và CK đối xứng qua O, hai đường thẳng NP và BL cũng đối xứng qua O do đó giao điểm I của QM và PN đối xứng với giao điểm J của BL và CK qua O. Mà J thuộc AO nên I thuộc AO. Ta thu được điều phải chứng minh. □



Hình 11.

Cách giải sau do bạn **Trần Thị Hà** lớp 12 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định đề xuất.

Lời giải thứ hai. Gọi AK là đường cao của tam giác ABC. R, E, F là trung điểm HA, CA, AB. AD là đường kính của (O). Tứ giác $CEPM$ nội tiếp suy ra $\angle CEM = \angle CPM = \angle RPH$. Từ đó ta có hai tam giác vuông đồng dạng là $\triangle CEM \sim \triangle RPH$. Suy ra $\frac{CM}{RH} = \frac{CE}{RP} = \frac{AC}{2KC} = \frac{AD}{2BD}$. Chứng minh tương tự $\frac{BN}{RH} = \frac{AD}{2CD}$. Từ đó dễ suy ra $\frac{CM}{BN} = \frac{DC}{DB}$ hay $MN \parallel BC$. Từ đó hai tam giác AQP và DMN có các cạnh tương ứng song song nên QM, NP, AO đồng quy. □



Hình 12.

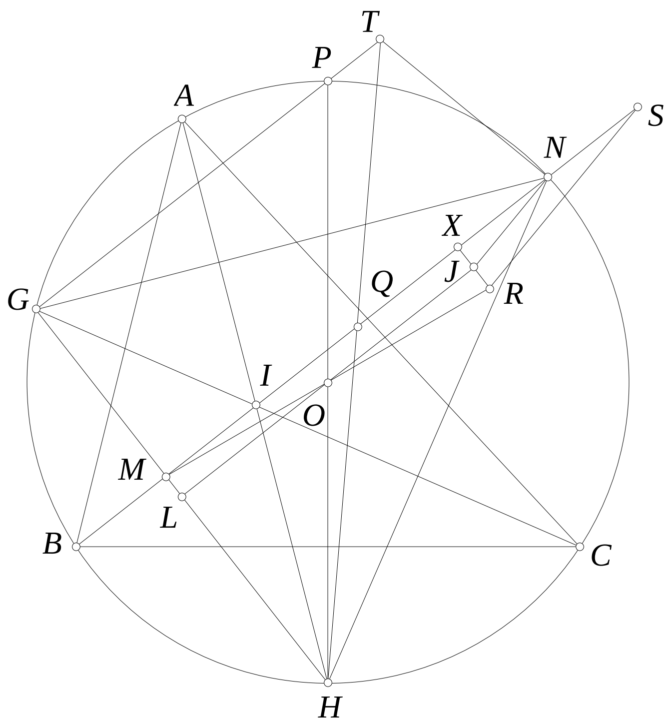
Cách giải sau do bạn **Trần Minh Khoa** lớp 12 Toán, THPT chuyên KHTN đề xuất.

Lời giải thứ ba. Gọi AD là đường kính của (O) thì MC, NB đi qua D. Gọi Z, T là trung điểm QB, PC. X, Y đối xứng F, E lần lượt qua Z, T. Do NF, YE là đường kính của (NQB), (MPC) nên X, Y là trực tâm các tam giác NQB, MCP. Ta suy ra NX, $MY \parallel BC$. Mặt khác do $EF \parallel BC \parallel ZT$ nên $XY \parallel BC$. Từ đó $XY \parallel BC$. Vậy M, N, X, Y thẳng hàng trên đường thẳng song song BC. Vậy hai tam giác AQP và DMN có các cạnh tương ứng song song nên QM, NP và AO đồng quy. □

Nhận xét. Lời giải thứ nhất cũng là cách tác giả tạo ra bài toán này hai cách giải sau chứng minh đồng quy bằng cách sử dụng các tam giác có cạnh tương ứng song song, một hệ quả của định lý Desargues. Cách giải thứ hai chỉ cần tới tam giác đồng dạng, đặc biệt cách giải thứ ba chỉ cần các kiến thức về phần đầu chương trình lớp 8, đó là các cách làm có giá trị.

Ta đi đến tiếp một ứng dụng khá lạ mắt như sau

Bài toán 8. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển trên cung lớn BC. P là trung điểm cung lớn BC của (O). I là tâm nội tiếp tam giác ABC. M là trung điểm IB. BI cắt (O) tại N khác B. Q là trung điểm MN. S đối xứng B qua Q. R đối xứng M qua O. Đường thẳng qua N vuông góc RS cắt đường thẳng qua P song song IB tại T. Chứng minh rằng đường thẳng TQ luôn đi qua điểm cố định khi A thay đổi.



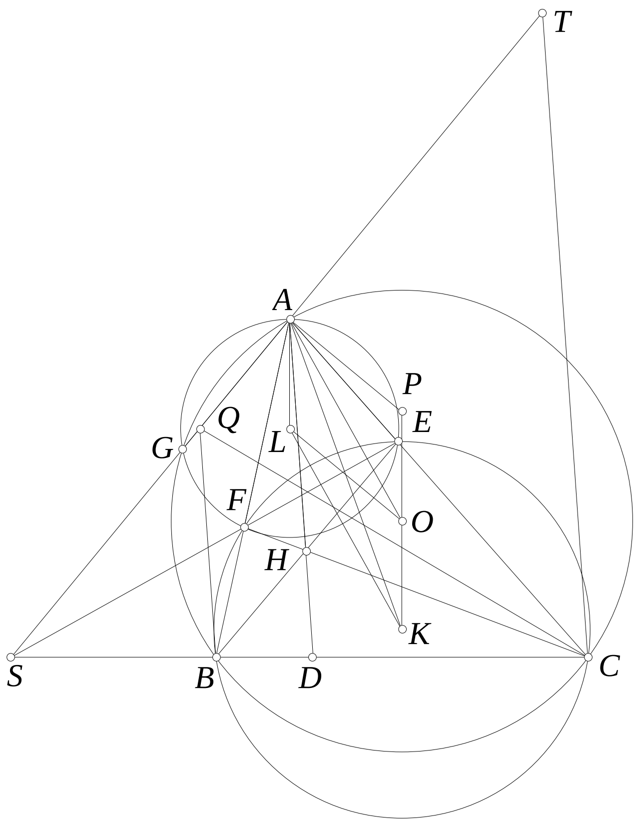
Hình 13.

Lời giải. AI, CI cắt (O) tại H, G khác A, C thì I là trực tâm tam giác GHN. HP là đường kính của (O) nên PT đi qua G. Gọi L là trung điểm GH, J đối xứng với L qua O. Vậy X đối xứng R qua J thì X thuộc MN mặt khác X cũng là đối xứng của M là hình chiếu vuông góc của O trên BN hay X là đối xứng của M qua trung điểm BN. Từ đó $XN = BM = NS$, nên $RS \parallel JN$. Vậy đường thẳng qua N vuông góc RS là đường thẳng qua N vuông góc JN. Áp dụng bài toán 1 vào tam giác NGH thì TH chia đôi NM hay TH đi qua Q nói cách khác là TQ đi qua H cố định. □

3. Mở rộng và kết hợp

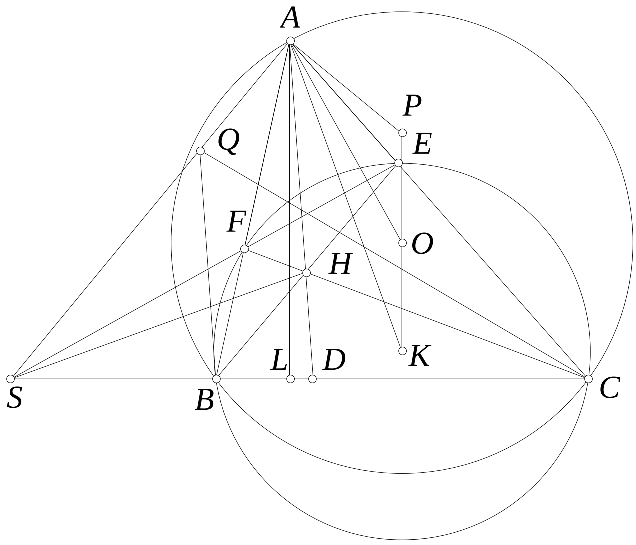
Bài toán này có thể được mở rộng theo nhiều cách khác nhau đồng thời kết hợp với các mô hình khác. Chúng ta hãy xét mở rộng đầu tiên như sau

Bài toán 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (K) đi qua B, C cắt CA, AB lần lượt tại E, F. BE giao CF tại H. AH cắt BC tại D. P đối xứng với K qua O. Đường thẳng qua A vuông góc AP cắt đường thẳng qua B song song AD tại Q. Chứng minh rằng CQ chia đôi AD.



Hình 14.

Lời giải thứ nhất. Gọi (L) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. (L) cắt (O) tại G khác A. Ta dễ thấy $AL \perp BC$ nên $AL \parallel OK$ và $LK \parallel AO$ do cùng vuông góc EF. Từ đó $ALKO$ là hình bình hành kéo theo $APOL$ là hình bình hành. Do AG là dây cung chung của (O) và (L) nên $AG \perp OL \parallel AP$. Từ đó AG đi qua Q. Theo tính chất trục đẳng phương, AG, EF, BC đồng quy tại S. Mặt khác hàng $(B, C; D, S) = -1$ nên chiếu song song theo phương AD lên AS có $(A, S; Q, T) = -1$ trong đó đường thẳng qua C song song AD cắt AS tại T. Suy ra chùm $C(A, S; Q, T) = -1$ nên CQ chia đôi AD. □



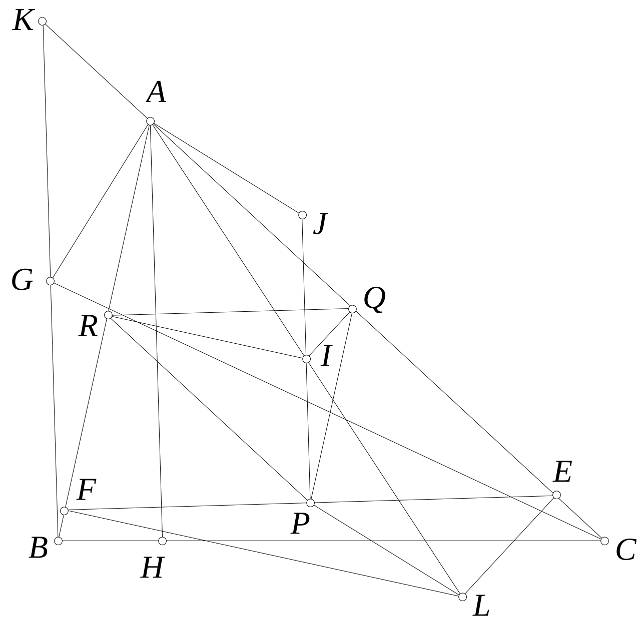
Hình 15.

Cách giải sau do bạn **Trần Minh Khoa** lớp 12 Toán, THPT chuyên KHTN đề xuất.

Lời giải thứ hai. Gọi EF cắt BC tại S. Gọi AL là đường cao của tam giác ABC. Do O là trung điểm PK nên $A(P,K;O,L) = -1 = S(A,H;F,D)$. Mà $AO \perp SF$, $AL \perp SD$ và $AK \perp SH$ theo định lý Brocard, từ đó suy ra $SA \perp AP$ hay A, S, Q thẳng hàng. Vậy $Q(B,C;D,S) = -1$ mà $AD \parallel QB$ nên CQ chia đôi AD. □

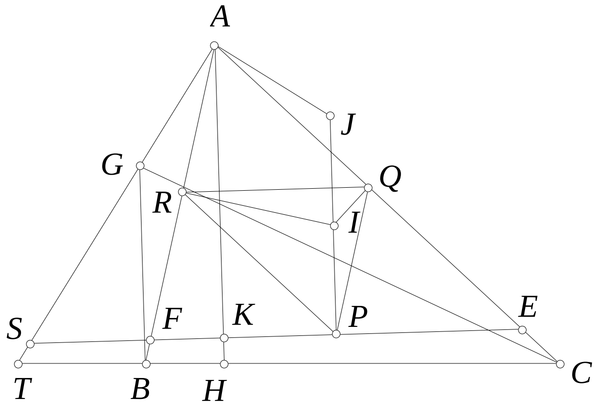
Nhận xét. Lời giải thứ nhất chứng minh A, Q, S thẳng hàng bằng cách thuần túy hình học. Lời giải thứ hai cũng chứng minh A, Q, S thẳng hàng nhưng bằng phương pháp chùm trực giao rất ngắn gọn tuy nhiên phải dùng qua định lý Brocard. Cả hai lời giải đều có nét đặc sắc riêng.

Bài toán 10. Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ. Các điểm Q, R lần lượt thuộc CA, AB sao cho $PQ \parallel AB$, $PR \parallel AC$. Lấy I sao cho $IQ \perp CA$, $IR \perp AB$. J đối xứng P qua I. Đường thẳng qua A vuông góc QR cắt BC tại H. Đường thẳng qua B song song AH cắt đường thẳng qua A vuông góc AJ tại G. Chứng minh rằng CG chia đôi AH.



Hình 16.

Lời giải thứ nhất. Gọi BG cắt AC tại K. Ta cần chứng minh G là trung điểm BK. Gọi L là đối xứng của A qua I và E, F là hình chiếu của L lên CA, AB. Do đó E, F cũng là đối xứng của A qua Q, R suy ra $RQEP$ và $RQPF$ là hình bình hành nên P là trung điểm của EF. Mặt khác các tam giác ABK và LFE có các cạnh tương ứng vuông góc nên đồng dạng. Cũng do đối xứng L qua trung điểm I của PJ nên $PL \parallel AJ \perp AG$. Vậy các tam giác ABK và LFE có các cạnh tương ứng vuông góc nên trung tuyến tương ứng cũng vuông góc nói cách khác AQ là trung tuyến của tam giác ABK. Vậy ta hoàn tất chứng minh. □



Hình 17.

Cách giải sau do bạn **Trần Minh Khoa** lớp 12 Toán, THPT chuyên KHTN đề xuất.

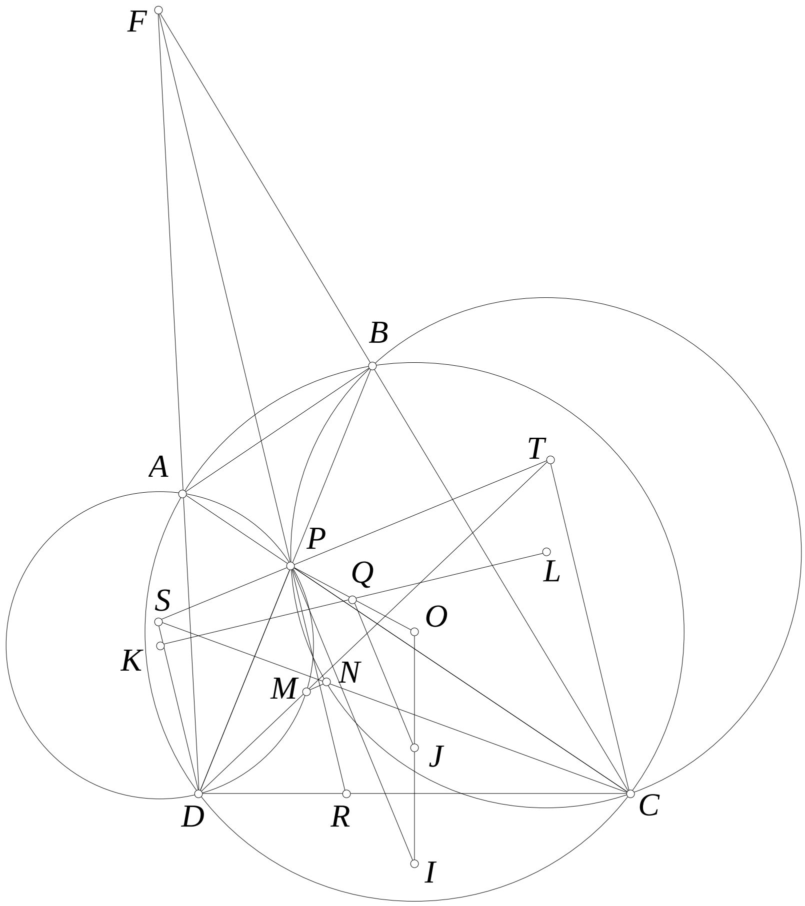
Lời giải thứ hai. E, F đối xứng với A qua Q, R dễ thấy $RQEP$ và $RQPF$ là hình bình hành nên P là trung điểm của EF và I là tâm ngoại tiếp tam giác ABC. AH cắt EF tại K, AG cắt EF, BC tại S, T. Áp dụng cách lời giải thứ ba của bài toán 1 vào tam giác AEF thì $(E, F; K, S) = -1$ do đó chiếu bằng tâm A xuống đường thẳng BC thì $(B, C; H, T) = -1$ nên $G(B, C; H, T) = -1$. Mà $AH \parallel BG$ nên CG chia đôi AH. □

Cách giải sau do bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 11 Toán, THPT chuyên KHTN đề xuất.

Lời giải thứ ba. AC cắt BG tại K. Ta cần chứng minh G là trung điểm BK thì CG chia đôi AH, thật vậy. $AQPR$ là hình bình hành nên AP và QR cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đoạn. Dựng $IL \parallel QR$ thì $I(Q, R; M, L) = -1$. Lại có $AC \perp IQ$, $QB \perp IR$, $AG \perp AJ \parallel IM$, $AH \perp QR \parallel IL$ do đó $A(B, C; G, H) = -1$ mà $BK \parallel AH$ do đó G là trung điểm BK. □

Nhận xét. Ý tưởng lời giải thứ nhất là dựa trên lời giải thứ hai của bài toán gốc, lời giải thứ hai trong trường hợp tổng quát này rất có hiệu lực. Mặt khác ta thấy bài toán hoàn toàn không dùng tới đường tròn trong phát biểu và lời giải này. Lời giải thứ hai dựa trên kết quả trong lời giải thứ ba của bài toán gốc. Tiếp cận theo hướng này cũng rất tự nhiên. Cách giải thứ ba dùng trực tiếp chùm vuông góc cũng rất đặc sắc. Các bài toán tổng quát có rất nhiều hướng áp dụng hay tuy nhiên do khuôn khổ bài viết có hạn tôi chỉ xin nêu ra một ứng dụng đẹp như sau [7]

Bài toán 11. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC cắt BD tại P. Gọi J, K, L lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác PCD, PAD, PBC. Q là trung điểm OP. Trên đường thẳng qua P vuông góc JQ lấy các điểm S, T sao cho DS, CT cùng vuông góc với KL. DT, CS cắt các đường tròn (PAD), (PBC) tại M, N. Chứng minh rằng bốn điểm C, D, M, N cùng thuộc một đường tròn.

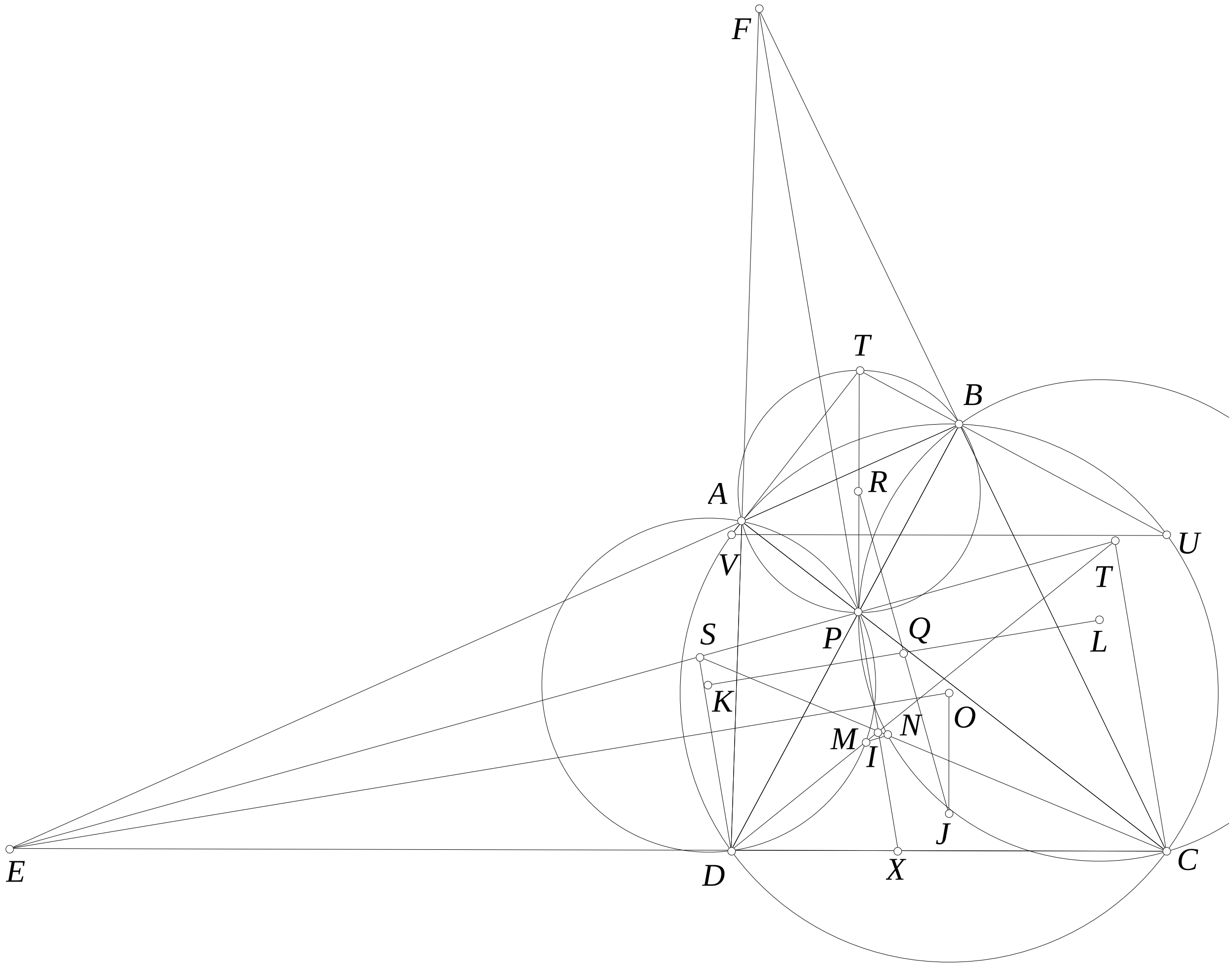


Hình 18.

Lời giải thứ nhất. Gọi I là đối xứng của O qua J, như vậy ST đi qua P và vuông góc với PI. AD cắt BC tại F, PF cắt CD tại R. Theo bài toán 9 thì DT, CS đi qua trung điểm X của PR. Dễ thấy PR là trục đẳng phương của (K) và (L). Do đó $XM \cdot XD = XN \cdot XC$ ta thu được tứ giác $CDMN$ nội tiếp. □

Cách giải sau do bạn **Đỗ Xuân Long** lớp 11 Toán, THPT chuyên KHTN đề xuất.

Lời giải thứ hai. Gọi R là tâm của (APB). DU, CV là đường kính của (O) và PT là đường kính của (R). Ta có U, B, T thẳng hàng và V, A, T thẳng hàng. Vì $ABUV$ nội tiếp nên $PR \perp UV$, kết hợp $PR \perp CD$ suy ra $PR \parallel OJ$. Tương tự thì $JPRO$ là hình bình hành nên R, Q, J thẳng hàng và L, K, Q thẳng hàng. AB cắt CD tại E, AD cắt BC tại F. Áp dụng định lý Brocard ta có $FP \perp OE \parallel KL$. Gọi FP cắt SC, CD tại I, X thì $\frac{IS}{IC} = \frac{XD}{XC}$. Vì $(E, X; D, C) = -1$ nên $\frac{IS}{IC} = \frac{SD}{CT}$ suy ra FP, SC, DT đồng quy tại I. (K) cắt (L) tại Y khác P, ta có F, P, Y thẳng hàng, ta suy ra $IY \cdot IP = IN \cdot IC = IM \cdot ID$ hay $DNMC$ nội tiếp. □



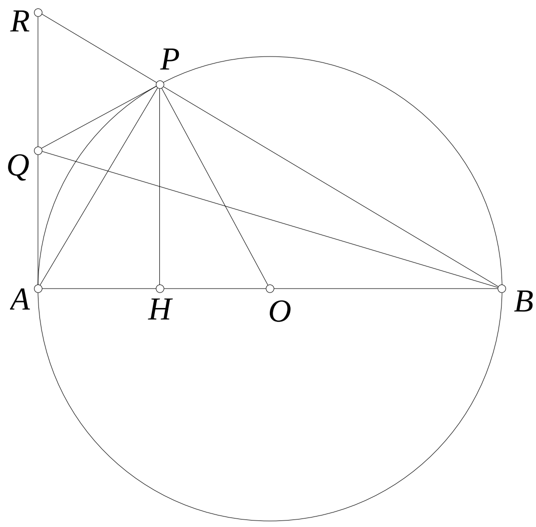
Hình 19.

4. Nguồn gốc và một phát triển khác

Các bạn lớp 9 ở Việt Nam hẳn đã quen thuộc với bài toán sau, đây cũng là bài toán số 75 trang 104 trong [3]

Bài toán 12. Cho đường tròn (O) đường kính AB và điểm P nằm trên (O). Tiếp tuyến tại A và P của (O) cắt nhau tại Q. H là hình chiếu của P lên AB. Chứng minh rằng BQ chia đôi PH.

Đây là một bài toán vào loại kinh điển của tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau. Nó có một lời giải rất đơn giản như sau

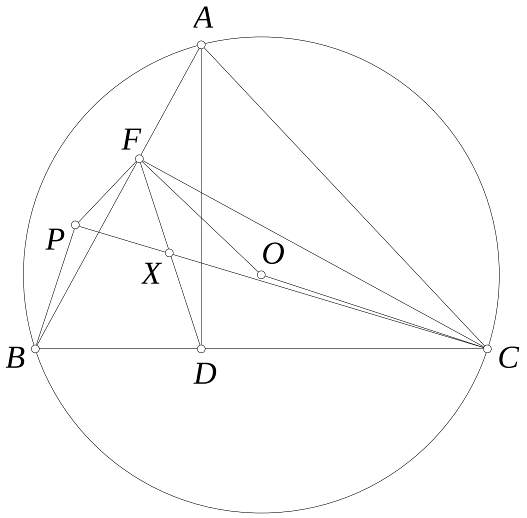


Hình 20.

Lời giải. Gọi PB cắt AQ tại R thì theo tính chất tiếp tuyến cắt nhau $QA = QP$ mà tam giác PAR vuông tại P nên Q là trung điểm AR do đó theo định lý Thales thì BQ chia đôi PH. $\square$

Mặc dù phát biểu và chứng minh hết sức đơn giản như vậy nhưng đây có thể coi là một bài toán kinh điển và như các bạn đã thấy thì bài toán 1 là một mở rộng đẹp cho bài toán này. Nếu trong bài toán này ta coi P là trực tâm tam giác PAB thì bài toán này còn có thể mở rộng theo cách khác như sau

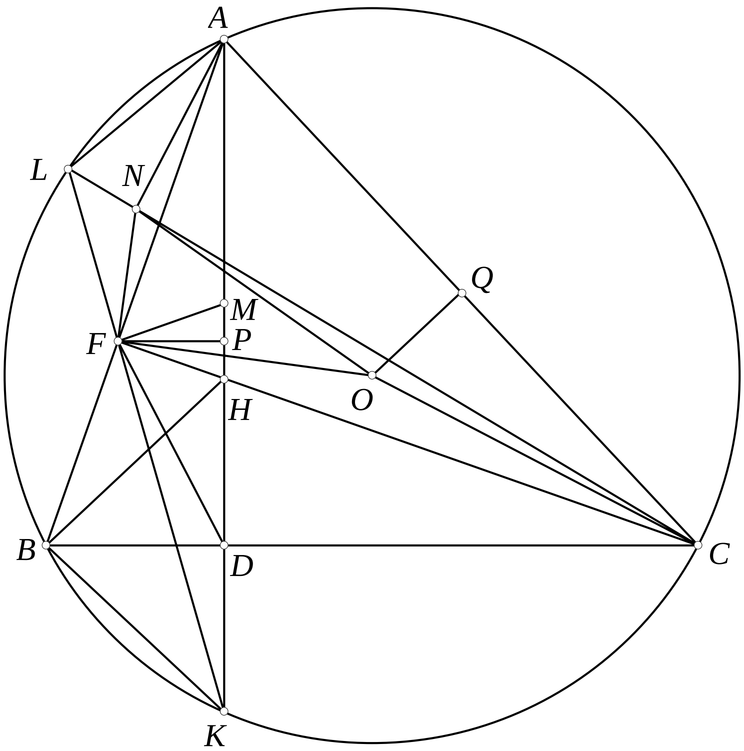
Bài toán 13. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD, CF. Đường thẳng qua B vuông góc OC cắt đường thẳng qua F vuông góc OF tại P. Chứng minh rằng CP chia đôi DF.



Hình 21.

Để giải bài toán này ta cần hai bổ đề sau, bổ đề thứ nhất tham khảo [4]

Bổ đề 13.1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với các đường cao AD, CF. AD cắt (O) tại K khác D. GọiKF cắt (O) tại L khác K. Đường thẳng qua A vuông góc OC cắt CL tại N. Chứng minh rằng FN vuông góc với FO.



Hình 22.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh $\triangle FNA \sim \triangle FOC$ để suy ra $\triangle FNO \sim \triangle FAC$ thì $\angle NFO = 90°$, thật vậy. $\angle NAC = \angle ABC = \angle ALC$, từ đó $\angle NAF = \angle NAC - \angle BAC = \angle ABC - \angle BAC = \angle FCO$. AD cắt CF tại H và P là hình chiếu của F lên AD, M đối xứng với H qua P. Ta có $\angle FMH = \angle FHM = \angle ABC = \angle NAC$ và $\angle FKM = \angle ACN$ do đó $\triangle KFM \sim \triangle CNA$. Ta cũng có tam giác $\triangle FAL \sim \triangle FKB$ và $\triangle FDP \sim \triangle ACF$. Gọi Q là trung điểm AC. Từ đó ta có biến đổi tỷ số

$$\frac{NA}{FA} = \frac{NA}{LA} \cdot \frac{LA}{FA} = \frac{NC}{AC} \cdot \frac{KB}{FK} = \frac{HB}{AC} \cdot \frac{NC}{FK} = \frac{2OQ}{AC} \cdot \frac{AC}{MK}$$

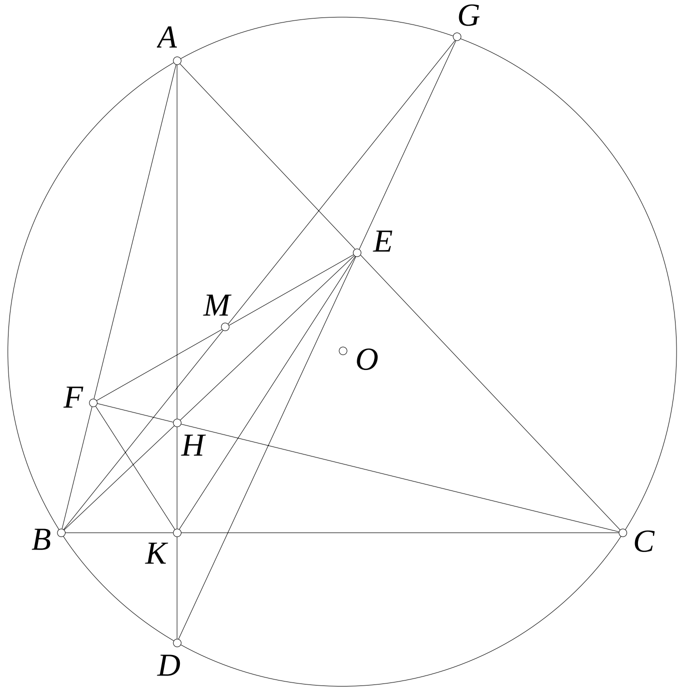
$$= \frac{2OQ}{2DP} = \frac{OQ}{OC} \cdot \frac{OC}{CF} \cdot \frac{CF}{DP} = \frac{BF}{BC} \cdot \frac{OC}{CF} \cdot \frac{AC}{FD} = \frac{OC}{CF}$$

Từ đó suy ra $\triangle FNA \sim \triangle FOC$ theo suy luận phần trên có điều phải chứng minh. □

Bổ đề thứ hai sau tham khảo trong [5,6]

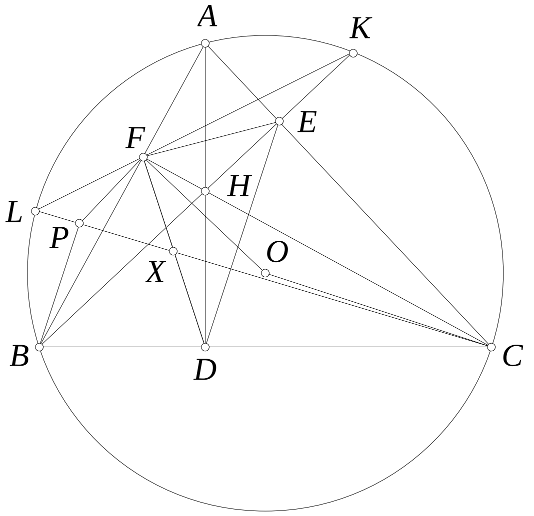
Bổ đề 13.2. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao BE, CF cắt nhau tại H. AH cắt (O) tại D khác A. DE cắt (O) tại G khác D. Chứng minh rằng BG chia đôi EF.

Lời giải sau lấy ý tưởng trong [6] là của oneplusone là nick của Jeck Lim [2]



Hình 23.

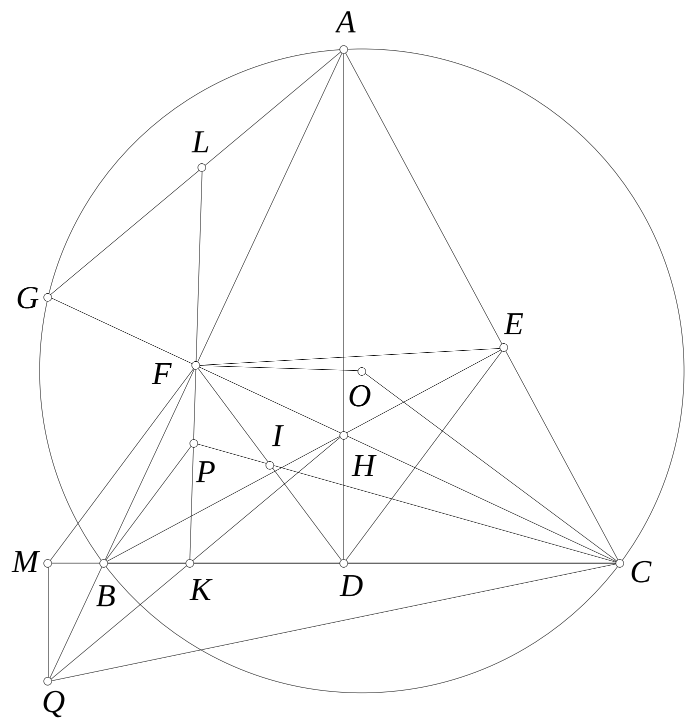
Chứng minh. Gọi AH cắt BC tại K thì K là trung điểm HD. Từ đó chú ý hai tam giác EFB và EHK đồng dạng (g.g). Gọi M là trung điểm EF ta có $\frac{EF}{HE} = \frac{BF}{HK}$ suy ra $\frac{EF/2}{HE} = \frac{BF}{2HK}$ hay $\frac{FM}{HE} = \frac{BF}{HD}$. Kết hợp $\angle BFM = \angle DHE$ suy ra hai tam giác BFM và DHE đồng dạng. Từ đó suy ra $\angle FBM = \angle HDE = \angle FBG$. Từ đó B, M, G thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. $\square$



Hình 24.

Lời giải thứ nhất. Gọi BE là đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC. BE cắt (O) tại K khác B. KF cắt (O) tại L khác K. Theo bổ đề 13.1 thì P nằm trên LC. Vậy theo bổ đề 13.2 thì CL chia đôi DF. Vậy ta hoàn tất chứng minh. $\square$

Lời giải trực tiếp sau do bạn **Nguyễn Lê Phước** đề xuất.



Hình 25.

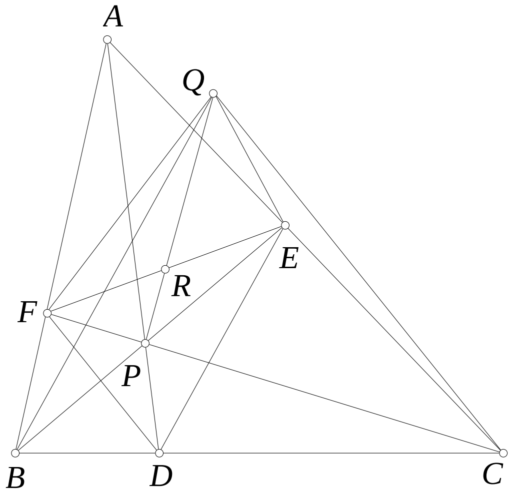
Lời giải thứ hai. Gọi BE là đường cao, CF cắt (O) tại G khác C. Gọi K, L là giao điểm của PF và BC, AG. Theo bài toán con bướm thì $FL = FK$ mà $FG = FH$ nên $KH \parallel GA$ nên $\angle FHK = \angle FGA = \angle FBC$. Gọi Q là giao điểm của KH và AB thì $\angle QHC = \angle QBC$ nên tứ giác $QBHC$ nội tiếp suy ra $\frac{KB}{KC} = \frac{HB}{HC} \cdot \frac{QB}{QC}$. Lấy M thuộc BC sao cho $FM \parallel BP$ suy ra $FM \perp OC \perp DE$ nên $FM \parallel DE$. Từ đó $\angle FMD = \angle EDC = \angle BAC = \angle FDM$ nên $FM = FD$. Vậy $\angle FQC = \angle FHB = \angle FDB = \angle FMC$ suy ra $MFCP$ nội tiếp. Từ đó $\frac{QB}{QC} = \frac{MB}{MF} = \frac{MB}{FD}$. Lại do $\triangle CBH \sim \triangle CFD$ nên $\frac{HB}{HC} = \frac{DF}{DC}$. Vậy $\frac{KB}{KC} = \frac{DF}{DC} \cdot \frac{MB}{FD} = \frac{MB}{DC}$. Từ đó lại do $MF \parallel BP$ nên $\frac{CD}{CK} = \frac{BM}{BK} = \frac{PF}{PK}$ suy ra $\frac{CD}{CK} . \frac{PK}{PF} = 1$. Gọi CP cắt FD tại I, áp dụng định lý Menelaus cho tam giác FKD với P, I, C thẳng hàng thì $\frac{ID}{IF} = \frac{CD}{CK} . \frac{PK}{PF} = 1$. Ta hoàn tất chứng minh. □

Dựa vào định lý con bướm thì bài toán 13 có một cách nhìn tổng quát hơn như sau

Bài toán 14. Cho tam giác ABC với P bất kỳ. PA, PB, PC cắt BC, CA, AB tại D, E, F. G đối xứng với P qua F. Đường thẳng qua P song song AG cắt BC tại K. Lấy Q trên FK sao cho $BQ \parallel DE$. Chứng minh rằng CQ chia đôi DF.

Ta sử dụng các bổ đề sau

Bổ đề 14.1. Cho tam giác ABC với P bất kỳ. PA, PB, PC cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Đường thẳng qua B song song DE cắt đường thẳng qua C song song DF tại Q. Chứng minh rằng PQ chia đôi EF.



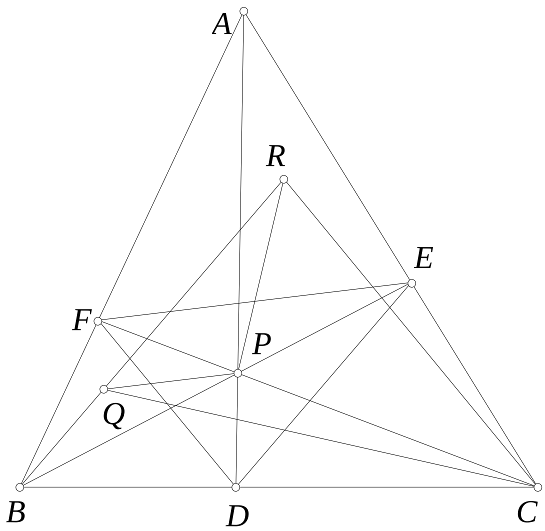
Hình 26.

Chứng minh. Ta có biến đổi diện tích

$$\frac{[PQE]}{[PQF]} = \frac{[PQE]}{[BQE]} \cdot \frac{[BQE]}{[CQF]} \cdot \frac{[CQF]}{[PQF]} = \frac{EP}{EB} \cdot \frac{[BQD]}{[CQD]} \cdot \frac{CF}{PF} = \frac{EP}{EB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{CF}{PF} = 1.$$

Đẳng thức cuối có do định lý Ceva cho tam giác PBC và điểm A. □

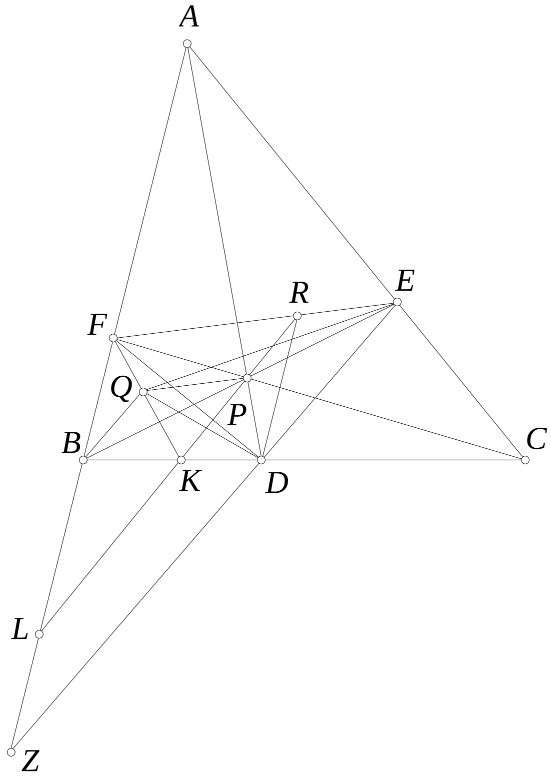
Bổ đề 14.2. Cho tam giác ABC với P bất kỳ. PA, PB, PC cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Đường thẳng qua B song song DE cắt đường thẳng qua P song song EF tại Q. Chứng minh rằng CQ chia đôi DF.



Hình 27.

Chứng minh. Gọi đường thẳng qua C song song DF cắt BQ tại R. Theo bổ đề 13.4 thì PR chia đôi EF mà $PQ \parallel EF$ do đó chùm $P(B, C; Q, R) = P(E, F; Q, R) = -1$ do B, Q, R thẳng hàng nên $C(B, Q; FR) = P(E, F; Q, R) = -1$ mà $CR \parallel DF$ do đó CQ chia đôi DF. □

Bổ đề 14.3. Cho tam giác ABC với P bất kỳ. PA, PB, PC cắt BC, CA, AB tại D, E, F. L đối xứng A qua F. PL cắt BC tại K. Đường thẳng qua B song song DE cắt đường thẳng qua P song song EF tại Q. Chứng minh rằng F, Q, K thẳng hàng.

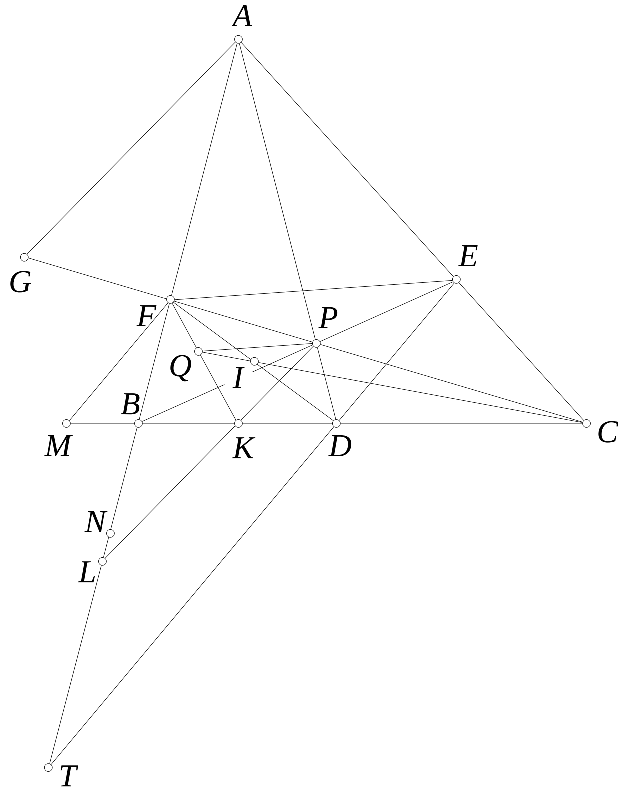


Hình 28.

Chứng minh. Lấy R thuộc EF sao cho $DR \parallel AB$. Do $F(BC, DE) = -1$ nên FC chia đôi DR do đó R, P, L thẳng hàng. Gọi DE cắt AB tại Z. Từ liên hệ giữa tỷ số đơn và tỷ số kép ta thấy $B(F, P; K, Q) = (ZE; D) = (FE; R) = P(F, B; K, Q)$ nên F, Q, K thẳng hàng. □

Lời giải thứ nhất. Dễ thấy PK đi qua L là đối xứng của A qua F. Do F, Q, K thẳng hàng nên theo bổ đề 14.3 thì $PQ \parallel EF$. Từ đó theo bổ đề 14.2 thì CQ chia đôi DF. □

Lời giải trực tiếp sau do bạn **Nguyễn Lê Phước** đề xuất.



Hình 29.

Lời giải thứ hai. PK cắt AB tại L; M thuộc BC sao cho FM song song với DE; DE cắt AB tại T; N là trung điểm FT. CQ cắt FD tại I. Theo định lý Menelaus

$$\frac{IF}{ID} = \frac{QF}{QK} \cdot \frac{CK}{CD}$$

Để chứng minh CQ chia đôi FD, hay nói cách khác là chứng minh I là trung điểm FD, ta sẽ chứng minh $\frac{QF}{QK} = \frac{CD}{CK}$. Theo định lý Thales, $\frac{QF}{QK} = \frac{BM}{BK}$. Như vậy ta sẽ chứng minh $\frac{KB}{KC} = \frac{BM}{CD}$.

Áp dụng định lý Menelaus

$$\begin{aligned}\frac{KC}{KB} &= \frac{PC}{PF} \cdot \frac{LF}{LB} \\ &= \frac{EC}{EA} \cdot \frac{BA}{BF} \cdot \frac{LF}{LB}\end{aligned}$$

F là trung điểm PG, mà AG song song với PL nên theo định lý Thales thì F cũng là trung điểm AL. $\frac{FL}{FB} = \frac{FA}{FB} = \frac{TA}{TB}$ nên $\frac{LF}{LB} = \frac{AT}{AB}$

$$\Rightarrow \frac{KC}{KB} = \frac{EC}{EA} \cdot \frac{BA}{BF} \cdot \frac{AT}{AB}$$

$$\begin{aligned}\frac{CD}{BM} &= \frac{DC}{DB}\cdot\frac{BD}{BM}\\ &= \frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}\cdot\frac{BT}{BF}\\ &= \frac{EC}{EA}\cdot\frac{TA}{TB}\cdot\frac{BT}{BF}\\ &= \frac{EC}{EA}\cdot\frac{TA}{BF}\end{aligned}$$

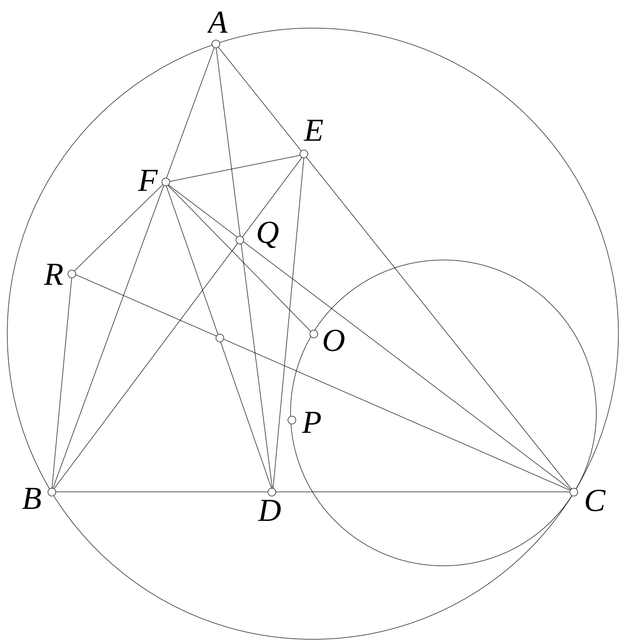
Ta chứng minh $\frac{KB}{KC} = \frac{BM}{CD}$ bằng biến đổi tương đương

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \frac{EC}{EA}\cdot\frac{BA}{BF}\cdot\frac{AT}{AB} = \frac{EC}{EA}\cdot\frac{TA}{BF}\\ &\Leftrightarrow \frac{AB}{AT}\cdot\frac{AT}{AB} = 1 \text{ (luôn đúng)}\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Dựa vào bài toán trên ta có thể thu được thêm các mở rộng có rất nhiều ý nghĩa cho bài toán 13.

Bài toán 15. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm bất kỳ trên đường tròn đường kính OC. Q đẳng giác P trong tam giác ABC. QA, QB, QC cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Đường thẳng qua F vuông góc FO cắt đường thẳng qua B song song DE tại R. Chứng minh rằng CR chia đôi DF.



Hình 30.

Lời kết

Bài toán này là một bài toán mà tác giả đã tổng quát từ một đề toán quen thuộc trong chương trình học mà thực chất là từ trong trí nhớ của tác giả từ những ngày còn đi học cấp 2. Cụ thể đó chính là bài toán số 75 trang 104 trong sách "Nâng cao và phát triển toán 9", tập 1 của thầy **Vũ Hữu Bình**, một cuốn sách mà chắc chắn rằng đã quen thuộc với hầu hết các bạn học sinh cấp 2 ở Việt Nam. Cũng thật vinh dự cho tôi khi bài toán này đã được chọn vào đề thi Sharygin một cuộc thi Olympic hình học uy tín nhất thế giới. Trong bài viết cuối cho báo Epsilon 13, tôi lại có dịp được viết về một bài toán của chính mình, viết về những ý tưởng bắt nguồn cách đây rất nhiều năm từ hồi còn là học sinh cấp 2 kéo dài cho đến tận những ngày đi làm hiện nay. Đó thực sự là cảm xúc rất vui và hạnh phúc khi tôi được chia sẻ những ý tưởng của mình với bạn đọc Epsilon những người luôn ủng hộ tôi với những bài viết của mình trong tất cả các số báo trước đây. Do đó trong bài viết cuối trên báo tôi xin được nói lời cảm ơn chân thành tới tất cả các bạn đọc Epsilon, những người đã dành thời gian của mình để theo dõi báo nói chung và những bài viết của tôi nói riêng trong 13 số báo vừa qua. Đó thực sự là niềm động viên và khích lệ to lớn cho tôi trong việc cố gắng tìm tòi để cho ra đời những bài viết chất lượng cho báo.

Cuối cùng tác giả muốn nói lời cám ơn tới bạn **Ngô Quang Dương** người học trò cần mẫn của tác giả, đã giúp tác giả đọc lại toàn bộ bài viết này và đưa ra các góp ý giá trị.

Tài liệu

[1] Đề thi Olympic Sharygin 2014 vòng cuối
http://jcgeometry.org/Articles/Volume3/JCG2014V3pp60-62.pdf

[2] Lời giải đề thi Olympic Sharygin 2014 vòng cuối
http://geometry.ru/olimp/2014/final_sol_e.pdf

[3] Nâng cao và phát triển toán 9, tập 1, Vũ Hữu Bình.

[4] Mỗi tuần một bài toán: Tuần 1 tháng 8 năm 2015
http://analgeomatica.blogspot.com/2015/08/moi-tuan-mot-bai-toan-tuan-1-thang-8.html

[5] Về một bài toán hình học từ diễn đàn AoPS, Trần Quang Hùng, Nguyễn Bảo Ngọc, tạp chí Epsilon 3.
http://analgeomatica.blogspot.com/2015/06/ve-mot-bai-toan-hinh-hoc-tu-dien-aops.html

[6] Topic Divide in two eqal segments.
http://www.artofproblemsolving.com/community/h386417

[7] Topic Concyclic points
http://artofproblemsolving.com/community/c6h1362268

HAI ĐIỂM BROCARD

Ngô Quang Dương
Đại học Khoa học Tự Nhiên - Đại học quốc gia Hà Nội

TÓM TẮT

Bài viết này đề cập và chứng minh các tính chất kinh điển của hai điểm Brocard.

1. Mở đầu

1.1. Trang bị kiến thức

Xuyên suốt bài viết, ta sử dụng các kí hiệu a, b, c cho độ dài của BC, CA, AB và S_{ABC} là diện tích tam giác ABC.
Bên cạnh việc sử dụng các công cụ hình học thuần túy, bài viết còn kết hợp sử dụng hệ tọa độ tỉ cự trong tam giác.

Định nghĩa 1. *Trong mặt phẳng của $\triangle ABC$, cho một điểm P, khi đó luôn tồn tại ba số thực α, β, γ không đồng thời bằng 0 sao cho $\alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$.*
Bộ ba số $(\alpha : \beta : \gamma)$ như vậy được gọi là tọa độ tỉ cự của P với $\triangle ABC$. Hơn nữa $(k\alpha : k\beta : k\gamma)$ với $k \neq 0$ cũng là tọa độ tỉ cự của P. Ta kí hiệu $P = (\alpha : \beta : \gamma)$.

Về tọa độ tỉ cự, chúng ta có những công thức cơ bản sau

Mệnh đề 1 (Jacobi, Lagrange). *$P = (x : y : z)$ thì với M bất kì, ta có*

1. $(x + y + z)\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC}$
2. $(x + y + z)MP^2 = xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 - xPA^2 + yPB^2 - zPC^2$
3. $xPA^2 + yPB^2 + zPC^2 = \dfrac{a^2yz + b^2zx + c^2xy}{x + y + z}$

Việc đưa ra hệ tọa độ tỉ cự không chỉ để kí hiệu cho gọn mà còn để thiết lập phương trình các đường. Cụ thể trong bài viết này, ta sẽ dùng đến phương trình đường tròn trong hệ tọa độ tỉ cự. Sau đây chúng ta sẽ xây dựng phương trình trong tọa độ tỉ cự. Phần này tác giả đã tham khảo trong [3]

Mệnh đề 2. *Trong mặt phẳng tam giác ABC, cho điểm $P = (x : y : z)$ và đường tròn (K, r). Khi đó*

$$\mathcal{P}_{P/(K)} = \frac{x\mathcal{P}_{A/(K)} + y\mathcal{P}_{B/(K)} + z\mathcal{P}_{C/(K)}}{x+y+z} - \frac{a^2yz + b^2zx + c^2xy}{(x+y+z)^2}.$$

trong đó kí hiệu $\mathcal{P}_{P/(K)}$ là phương tích của P với đường tròn (K, r).

Chứng minh. Vì $P = (x : y : z)$ nên áp dụng công thức Jacobi ta được

$$xKA^2 + yKB^2 + zKC^2 = xPA^2 + yPB^2 + zPC^2 + (x+y+z)KP^2$$

Theo cộng thức Lagrange về tâm tỉ cự thì $xPA^2 + yPB^2 + zPC^2 = \dfrac{a^2yz + b^2zx + c^2xy}{x+y+z}$, sau đó trừ hai vế của đẳng thức trên một lượng bằng $(x+y+z)r^2$ dẫn đến

$$(x+y+z)(KP^2 - r^2) = x(KA^2 - r^2) + y(KB^2 - r^2) + z(KC^2 - r^2) - \frac{a^2yz + b^2zx + c^2xy}{x+y+z}$$

Đó cũng chính là điều phải chứng minh. □

Từ định lý trên, cùng với nhận xét, P thuộc đường tròn (K, r) khi và chỉ khi phương tích của P với (K, r) bằng không đưa ta đến việc kết luận phương trình của đường tròn (K, r) là

$$(x\mathcal{P}_{A/(K)} + y\mathcal{P}_{B/(K)} + z\mathcal{P}_{C/(K)})(x+y+z) - (a^2yz + b^2zx + c^2xy) = 0$$

Người ta gọi đó là phương trình chính tắc của đường tròn (K, r) trong hệ tọa độ tỉ cự.

1.2. Định nghĩa

Định nghĩa 2. *Cho $\triangle ABC$. Đường tròn qua A, tiếp xúc BC tại B cắt đường tròn qua B, tiếp xúc CA tại A cắt nhau tại Ω_1 khác B. Đường tròn qua A, tiếp xúc BC tại C cắt đường tròn qua B, tiếp xúc CA tại A cắt nhau tại Ω_2 khác C.*
Ω_1 và Ω_2 lần lượt được gọi là điểm Brocard thứ nhất và thứ hai của $\triangle ABC$.

Từ định nghĩa, cùng với tính chất góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn một cung thì bằng nhau, ta suy ra

$$\begin{cases} \angle\Omega_1BC = \angle\Omega_1CA = \angle\Omega_1AB = \omega_1 \\ \angle\Omega_2CB = \angle\Omega_2AC = \angle\Omega_2BA = \omega_2 \end{cases}$$

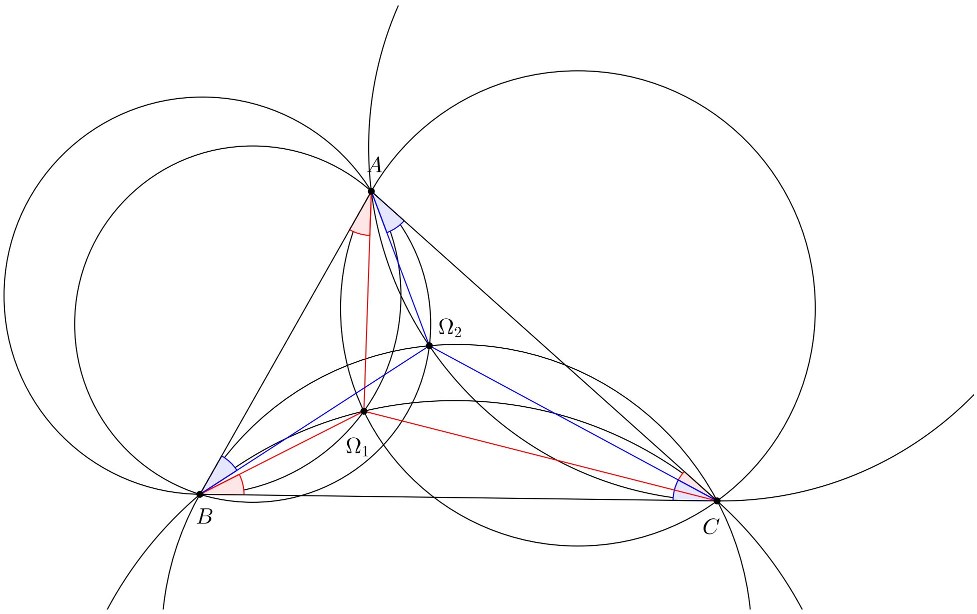
Hơn thế nữa, ta còn có $\omega_1 = \omega_2$. Nhớ lại công thức tính $\cot A$ của $\triangle ABC$ là $\cot A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{4S_{ABC}}$, áp dụng cho ba tam giác Ω_1BC, Ω_1CA, Ω_1AB, ta được

$$\cot\omega_1 = \frac{AB^2 + A\Omega_1^2 - B\Omega_1^2}{4S_{\Omega_1AB}} = \frac{BC^2 + B\Omega_1^2 - C\Omega_1^2}{4S_{\Omega_1BC}} = \frac{CA^2 + C\Omega_1^2 - A\Omega_1^2}{4S_{\Omega_1CA}}$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau

$$\cot \omega_1 = \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{4S_{ABC}}$$

Do tính tương tự, ta cũng có $\cot \omega_2 = \dfrac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{4S_{ABC}}$, kéo theo việc $\omega_1 = \omega_2$, lại suy ra rằng hai điểm Brocard là hai điểm đẳng giác. Từ giờ ta đặt chung hai góc này là ω, ω được gọi là góc Brocard. Đẳng thức $\cot \omega = \frac{BC^2+CA^2+AB^2}{4S_{ABC}}$ trực tiếp dẫn đến bất đẳng thức $\omega \leq \frac{\pi}{6}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều - có được điều này từ bất đẳng thức $BC^2 + CA^2 + AB^2 \geq 4\sqrt{3}S_{ABC}$



Điểm Brocard, góc Brocard được đặt tên theo nhà khí tượng học, nhà hình học người Pháp Henri Brocard(1945-1912). Ông được biết đến nhiều nhất qua hai điểm Brocard - hai điểm đặc biệt trong tam giác có nhiều tính chất đẹp đẽ, liên quan đến rất nhiều đối tượng khác của hình học tam giác. Cho đến nay, rất nhiều tính chất của hai điểm Brocard vẫn tiếp tục được tìm thấy. Vì các đối tượng hình học tam giác liên quan đến hai điểm Brocard là rất đa dạng nên đã ra đời một nhánh của hình học tam giác là hình học Brocard.

2. Các tính chất kinh điển

2.1. Tọa độ

Trong tam giác, trọng tâm G có tọa độ tỉ cự $(1 : 1 : 1)$, tức là $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. Điểm Lemoine K - đẳng giác của trọng tâm có tọa độ là $(a^2 : b^2 : c^2)$; trực tâm có tọa độ $(\tan A : \tan B : \tan C)$; ... Bây giờ chúng ta sẽ tìm tọa độ tỉ cự của hai điểm Brocard.

Chú ý rằng nếu P là điểm thuộc miền trong của $\triangle ABC$ thì tọa độ tỉ cự của P là $(S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB})$.

$$\begin{aligned}
\frac{S_{\Omega_1 CA}}{S_{\Omega_1 AB}} &= \frac{A\Omega_1 \cdot AC \sin \angle \Omega_1 AC}{A\Omega_1 \cdot AB \sin \angle \Omega_1 AB} \\
&= \frac{AC \sin(A-\omega)}{AB \sin \omega} \\
&= \frac{b}{c} \cdot \frac{\sin A \cos \omega - \cos A \sin \omega}{\sin \omega} \\
&= \frac{b}{c} \cdot (\sin A \cot \omega - \cos A) \\
&= \frac{b}{c} \cdot \left(\frac{a(a^2+b^2+c^2)}{2R \cdot 4S_{ABC}} - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \right) \\
&= \frac{b}{c} \cdot \frac{(a^2+b^2+c^2)-(b^2+c^2-a^2)}{2bc} \\
&= \frac{a^2}{c^2}.
\end{aligned}$$

Tương tự, ta chỉ ra được rằng $\dfrac{S_{\Omega_1 BC}}{S_{\Omega_1 CA}} = \dfrac{c^2}{b^2}$. Do đó ta kết luận tọa độ của điểm Brocard thứ nhất

$$\Omega_1 = \left(\frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2} \right)$$

Tương tự với điểm Brocard thứ hai

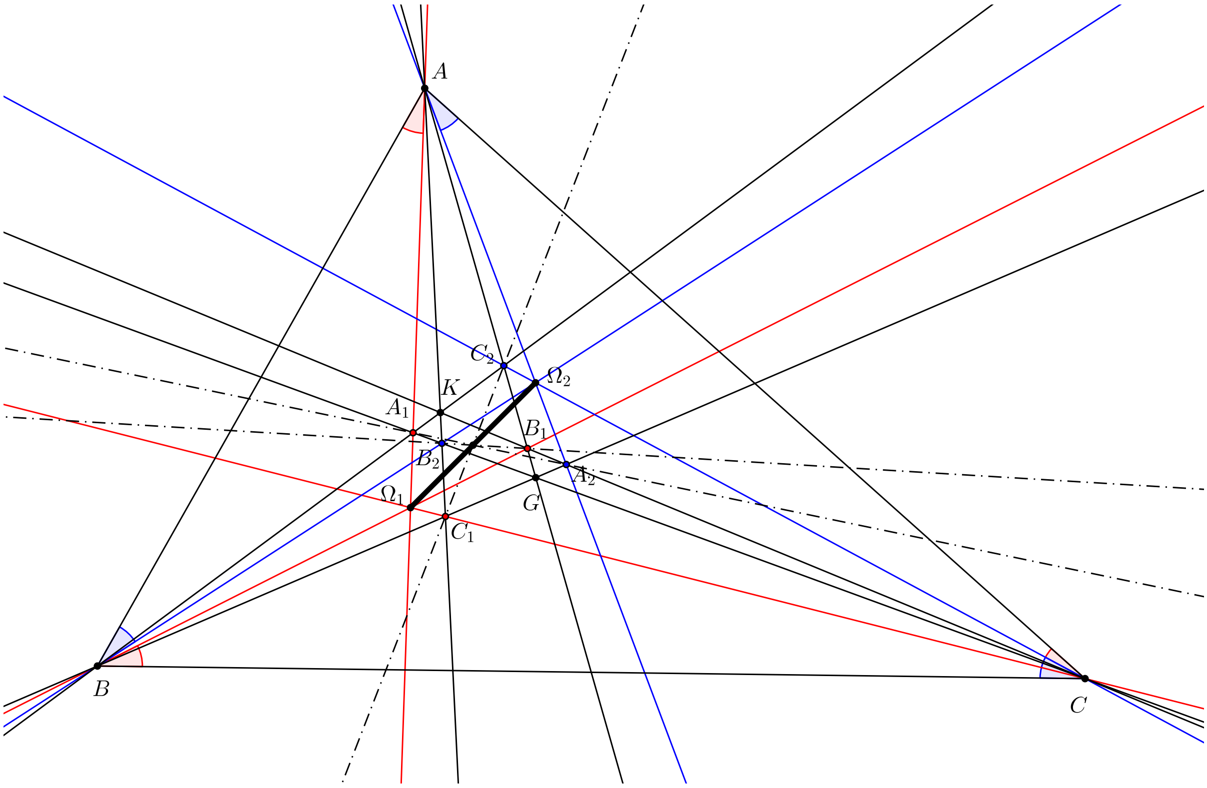
$$\Omega_2 = \left(\frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} \right)$$

Từ tọa độ tỉ cự của hai điểm Brocard, trọng tâm, điểm Lemoine mà ta thu được sáu bộ ba đường đồng quy kì lạ:

$$\begin{array}{ll}
(A\Omega_1, BK, CG) & (A\Omega_2, BG, CK) \\
(AG, B\Omega_1, CK) & (AK, B\Omega_2, AG) \\
(AK, BG, C\Omega_1) & (AG, BK, C\Omega_2)
\end{array}$$

Hiển nhiên là từng cặp trong ba cặp điểm đó liên hợp đẳng giác. Cụ thể hơn tọa độ của chúng lần lượt là

$$\begin{array}{ll}
A_1 = (a^2 : a^2 : c^2) & A_2 = (a^2 : b^2 : a^2) \\
B_1 = (a^2 : b^2 : b^2) & B_2 = (b^2 : b^2 : c^2) \\
C_1 = (c^2 : b^2 : c^2) & C_2 = (a^2 : c^2 : c^2)
\end{array}$$



Ngoài ra ta còn có thể chứng minh được A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy tại trung điểm Ω của $\Omega_1\Omega_2$. Có thể chứng minh khẳng định này bằng vector như sau. Từ tọa độ tỉ cự của hai điểm A_1, A_2 ta sử dụng hai đẳng thức

$$a^2\overrightarrow{\Omega A} + a^2\overrightarrow{\Omega B} + c^2\overrightarrow{\Omega C} = (2a^2 + c^2)\overrightarrow{\Omega A_1}$$

$$a^2\overrightarrow{\Omega A} + b^2\overrightarrow{\Omega B} + a^2\overrightarrow{\Omega C} = (2a^2 + b^2)\overrightarrow{\Omega A_2}$$

Sử dụng tọa độ của hai điểm Brocard.

$$c^2a^2\overrightarrow{\Omega_1 A} + a^2b^2\overrightarrow{\Omega_1 B} + b^2c^2\overrightarrow{\Omega_1 C} = \overrightarrow{0}$$

$$a^2b^2\overrightarrow{\Omega_2 A} + b^2c^2\overrightarrow{\Omega_2 B} + c^2a^2\overrightarrow{\Omega_2 C} = \overrightarrow{0}$$

$$\Rightarrow a^2(b^2+c^2)(\overrightarrow{\Omega_1 A} + \overrightarrow{\Omega_2 A}) + b^2(c^2+a^2)(\overrightarrow{\Omega_1 B} + \overrightarrow{\Omega_2 B}) + c^2(a^2+b^2)(\overrightarrow{\Omega_1 C} + \overrightarrow{\Omega_2 C}) = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow a^2(b^2+c^2)\overrightarrow{\Omega A} + b^2(c^2+a^2)\overrightarrow{\Omega B} + c^2(a^2+b^2)\overrightarrow{\Omega C} = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow b^2(a^2\overrightarrow{\Omega A} + a^2\overrightarrow{\Omega B} + c^2\overrightarrow{\Omega C}) + c^2(a^2\overrightarrow{\Omega A} + b^2\overrightarrow{\Omega B} + a^2\overrightarrow{\Omega C}) = \overrightarrow{0}$$

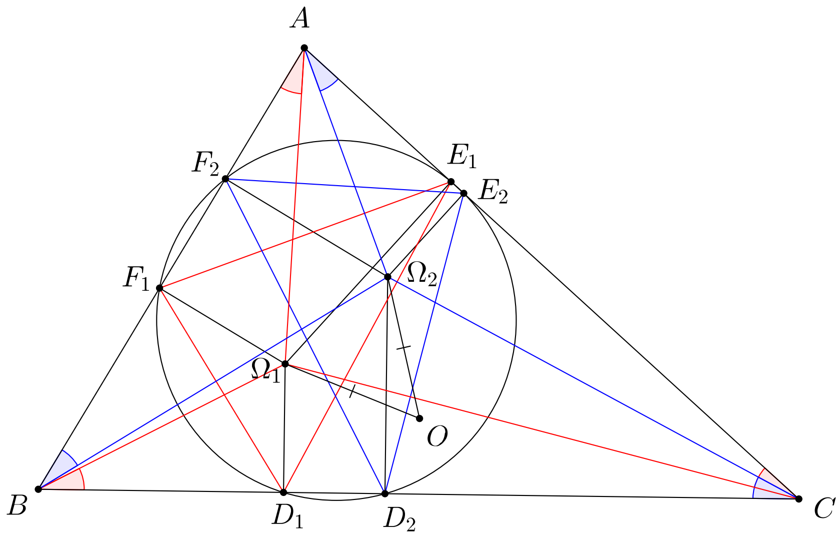
$$\Leftrightarrow b^2(2a^2+c^2)\overrightarrow{\Omega A_1} + c^2(2a^2+b^2)\overrightarrow{\Omega A_2} = \overrightarrow{0}.$$

Đẳng thức cuối chứng tỏ rằng A_1, A_2, Ω thẳng hàng.

2.2. Đối xứng sánh đôi

Từ định nghĩa của hai điểm Brocard, cùng với biểu thức tọa độ, ta thấy rằng chúng *hoán vị vòng quanh*. Hơn nữa, sự hoán vị của hai điểm lại ngược nhau nhưng khi đi cùng nhau, chúng làm nên tính đối xứng. Các kết quả sau đây sẽ làm minh chứng cho nhận định đó.

Định lý 1. *$\triangle D_1E_1F_1$ và $\triangle D_2E_2F_2$ là tam giác pedal của Ω_1 và Ω_2 với $\triangle ABC$ thì $\triangle F_1D_1E_1 = \triangle E_2F_2D_2$ và đồng dạng với $\triangle ABC$.*



Chứng minh. Từ việc $\angle\Omega_1AB = \angle\Omega_1BC = \angle\Omega_1CA = \angle\Omega_2BC = \angle\Omega_2AC = \angle\Omega_2CB = \omega$ và tổng ba góc trong tam giác bằng 180°, ta có

$$\begin{cases} \angle C\Omega_1A = \angle A\Omega_2B = 180^\circ - \angle A \\ \angle A\Omega_1B = \angle B\Omega_2C = 180^\circ - \angle B \\ \angle B\Omega_1C = \angle C\Omega_2A = 180^\circ - \angle C \end{cases}$$

Bởi Ω_1 và Ω_2 đẳng giác nên $A\Omega_1$, $B\Omega_1$, $C\Omega_1$ lần lượt vuông góc với E_2F_2, F_2D_2, D_2E_2 và $A\Omega_2$, $B\Omega_2$, $C\Omega_2$ lần lượt vuông góc với E_1F_1, F_1D_1, D_1E_1. Dẫn đến

$$\begin{cases} \angle F_1D_1E_1 = \angle E_2F_2D_2 = 180^\circ - (180^\circ - \angle B) = \angle B \\ \angle D_1E_1F_1 = \angle F_2D_2E_2 = 180^\circ - (180^\circ - \angle C) = \angle C \\ \angle E_1F_1D_1 = \angle D_2E_2F_2 = 180^\circ - (180^\circ - \angle A) = \angle A \end{cases}$$

Do đó $\triangle F_1D_1E_1$, $\triangle E_2F_2D_2$ và $\triangle ABC$ đồng dạng. Mà $\triangle F_1D_1E_1$ và $\triangle E_2D_2F_2$ cùng nội tiếp một đường tròn(tính chất của hai điểm đẳng giác), kết hợp hai điều trên ta suy ra $\triangle F_1D_1E_1 = \triangle E_2F_2D_2$. □

Với nhận xét là tam giác pedal và tam giác circumcevian đồng dạng, ta thu được hệ quả sau đây.

Hệ quả 2. *$A\Omega_1$, $B\Omega_1$, $C\Omega_1$ cắt (ABC) tại X_1, Y_1, Z_1. $A\Omega_2$, $B\Omega_2$, $C\Omega_2$ cắt (ABC) tại X_2, Y_2, Z_2 thì $\triangle Z_1X_1Y_1 = \triangle Y_2Z_2X_2 = \triangle ABC$.*

Hệ quả 3. *$O\Omega_1 = O\Omega_2$.*

Chứng minh. $\triangle F_1D_1E_1 = \triangle E_2F_2D_2$ nên chúng có diện tích bằng nhau. Theo công thức Euler về tam giác pedal thì

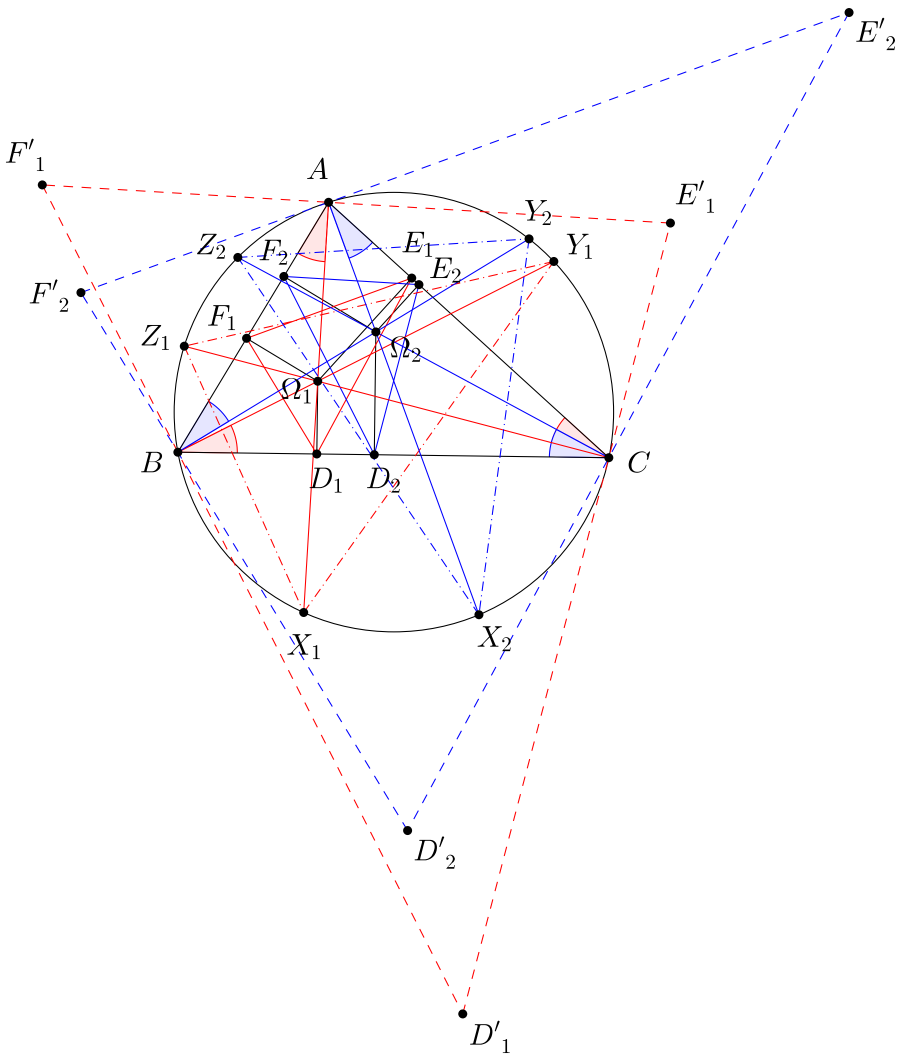
$$S_{D_1E_1F_1} = \frac{R^2 - O\Omega_1^2}{4R^2} \cdot S_{ABC} \qquad S_{D_2E_2F_2} = \frac{R^2 - O\Omega_2^2}{4R^2} \cdot S_{ABC}$$

ta suy ra $O\Omega_1 = O\Omega_2$. □

Định lý 4. *Các cặp bằng nhau khác.*

1. *Tam giác cevian của hai điểm Brocard có diện tích bằng nhau.*
2. *Tam giác antipedal của hai điểm Brocard bằng nhau.*
3. *Tam giác anticevian của hai điểm Brocard có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng nhau.*

Trong 3 ý trên, ý thứ 3 là một bài toán mở(chưa có chứng minh thuần túy hình học). Ở đây chỉ nêu ra chứng minh cho hai ý đầu tiên.



Chứng minh.

Bổ đề 5. *P nằm trong $\triangle ABC$ và có tọa độ $(x : y : z)$, $\triangle DEF$ là tam giác cevian của P với $\triangle ABC$, khi đó*

$$S_{DEF} = \frac{2xyz}{(y+z)(z+x)(x+y)} \cdot S_{ABC}$$

Chứng minh bổ đề. Ta có $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{y}{x+y}$ và $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{z}{x+z}$ nên $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \dfrac{yz(y+z)}{(y+z)(z+x)(x+y)}$.
Tương tự, ta tính được $\dfrac{S_{BFD}}{S_{ABC}}$ và $\dfrac{S_{CDE}}{S_{ABC}}$ theo x, y, z

$$\Rightarrow \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{yz(y+z) + zx(z+x) + xy(x+y)}{(y+z)(z+x)(x+y)} = \frac{2xyz}{(y+z)(z+x)(x+y)}$$

Quay trở lại bài toán, áp dụng cho hai tọa độ của hai điểm Brocard, ta tính được diện tích của hai tam giác cevian của chúng đều bằng

$$\frac{2a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)} \cdot S_{ABC}$$

Bổ đề 6 (Định lý Peletier)**.** *A_1, B_1, C_1 thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. A_2, B_2, C_2 thỏa mãn B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 lần lượt song song với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 thì*

$$S_{ABC}^2 = S_{A_1B_1C_1} \cdot S_{A_2B_2C_2}$$

Quay trở lại bài toán, kí hiệu $\triangle D_1E_1F_1$, $\triangle D_2E_2F_2$ là tam giác pedal của Ω_1, Ω_2, $\triangle D_1'E_1'F_1'$, $\triangle D_2'E_2'F_2'$ là tam giác antipedal của Ω_1, Ω_2. Với chú ý rằng $E_1'F_1'$, $F_1'D_1'$, $D_1'E_1'$, $E_2'F_2'$, $F_2'D_2'$, $D_2'E_2'$ lần lượt song song với E_2F_2, F_2D_2, D_2E_2, E_1F_1, F_1D_1, D_1E_1. Nên theo định lý Peletier

$$S_{D_1'E_1'F_1'} = S_{D_2'E_2'F_2'} = \frac{S_{ABC}^2}{S_{D_1E_1F_1}} = \frac{S_{ABC}^2}{S_{D_2E_2F_2}}$$

Hơn nữa $\triangle E_1'F_1'D_1' \sim \triangle F_2'D_2'E_2' \sim \triangle ABC$ nên $\triangle E_1'F_1'D_1' = \triangle F_2'D_2'E_2'$. $\square$

Tiếp theo, chúng ta đến với một hệ thống các tính chất kinh điển khác của hai điểm Brocard.

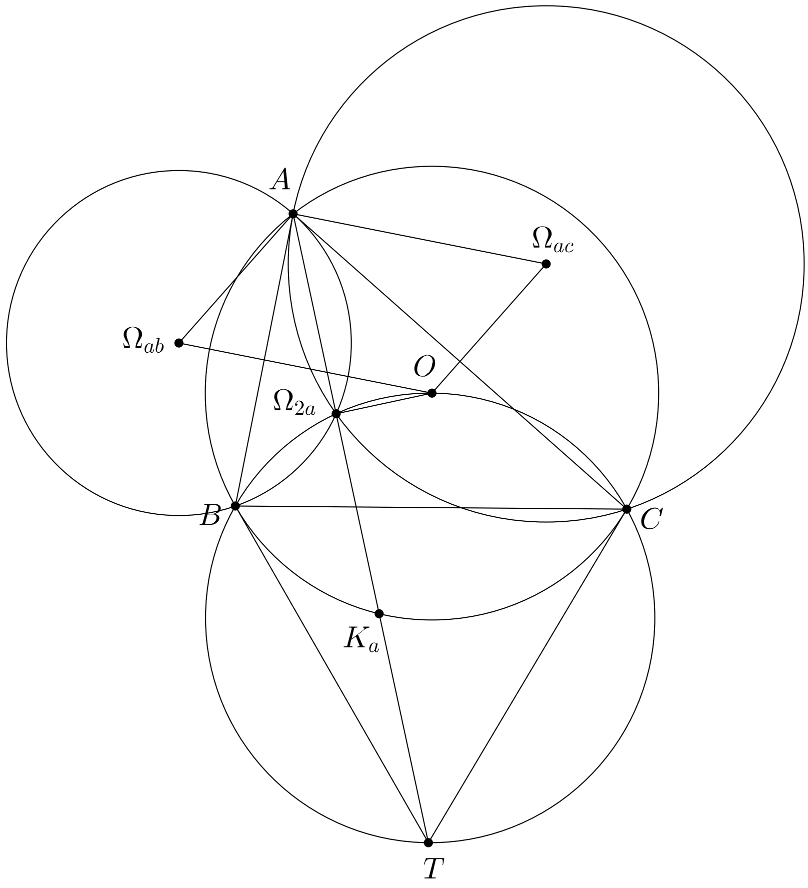
2.3. Hai tam giác Brocard, đường tròn Brocard

Định nghĩa 3. *$B\Omega_1$ cắt $C\Omega_2$ tại Ω_{1a}, $C\Omega_1$ cắt $A\Omega_2$ tại Ω_{1b}, $A\Omega_1$ cắt $B\Omega_2$ tại Ω_{1c}.*
(Ω_1CA) cắt (Ω_2AB) tại Ω_{2a} khác A, (Ω_1AB) cắt (Ω_2BC) tại Ω_{2b} khác B, (Ω_1BC) cắt (Ω_2CA) tại Ω_{2c} khác C.
$\triangle\Omega_{1a}\Omega_{1b}\Omega_{1c}$ được gọi là tam giác Brocard thứ nhất, $\triangle\Omega_{2a}\Omega_{2b}\Omega_{2c}$ được gọi là tam giác Brocard thứ hai.

Chú ý rằng tên gọi tam giác Brocard thứ nhất không có nghĩa là tương ứng với điểm Brocard thứ nhất, tam giác Brocard thứ hai không có nghĩa là tương ứng với điểm Brocard thứ hai. Tam giác Brocard thứ nhất và tam giác Brocard thứ hai đều bị phụ thuộc bình đẳng với cả hai điểm Brocard.

Định lý 7 (Tọa độ các đỉnh của hai tam giác Brocard)**.**

$$\Omega_{1a} = (a^2 : c^2 : b^2) \qquad \Omega_{2a} = (b^2 + c^2 - a^2 : b^2 : c^2)$$



Chứng minh. Từ tọa độ của hai điểm Brocard:

$$\frac{S_{\Omega_{1a}AB}}{S_{\Omega_{1a}BC}} = \frac{S_{\Omega_1 AB}}{S_{\Omega_1 BC}} = \frac{b^2}{a^2} \qquad \frac{S_{\Omega_{1a}CA}}{S_{\Omega_{1a}BC}} = \frac{S_{\Omega_2 CA}}{S_{\Omega_2 BC}} = \frac{c^2}{a^2}$$

Do đó $\Omega_{1a} = (a^2 : c^2 : b^2)$.
Để tính tọa độ của Ω_{2a}, ta cần tìm ra tính chất hình học khác của điểm này.

$$\begin{aligned} \angle B\Omega_{2a}C &= 360^\circ - \angle A\Omega_{2a}B - \angle A\Omega_{2a}C \\ &= 360^\circ - \angle A\Omega_2 B - \angle A\Omega_1 C \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \angle A) - (180^\circ - \angle A) \\ &= 2\angle A = \angle BOC \end{aligned}$$

Đẳng thức trên cho thấy Ω_{2a}, O, B, C đồng viên. Gọi Ω_{ab} và Ω_{ac} lần lượt là tâm của hai đường tròn $(A\Omega_{2a}B)$ và $(A\Omega_{2a}C)$. AC tiếp xúc $(A\Omega_{2a}B)$ tại A và AB tiếp xúc $(A\Omega_{2a}C)$ tại A nên $A\Omega_{ab}O\Omega_{ac}$ là hình bình hành, dẫn đến O đối xứng với A qua trung điểm $\Omega_{ab}\Omega_{ac}$. Hơn nữa, A và Ω_{2a} đối xứng qua $\Omega_{ab}\Omega_{ac}$ nên $O\Omega_{2a}$ vuông góc với $A\Omega_{2a}$. Do đó nếu gọi OT là đường kính của (OBC) thì A, Ω_{2a}, T thẳng hàng. Ta đã biết AT chính là đường đối trung của tam giác ABC nên Ω_{2a} chính là hình chiếu vuông góc của O lên KA.
Vì A, K, Ω_{2a} thẳng hàng nên tọa độ của Ω_{2a} có dạng $(p : b^2 : c^2)$. Bây giờ ta cần thiết lập phương trình để tính p - điều này dựa vào việc Ω_{2a} là hình chiếu vuông góc của O lên KA. Lấy

K_a là giao điểm khác A của KA với (ABC). (ABC) có phương trình $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$ nên từ đó ta tính được p, nên ta kết luận tọa độ của K_a là

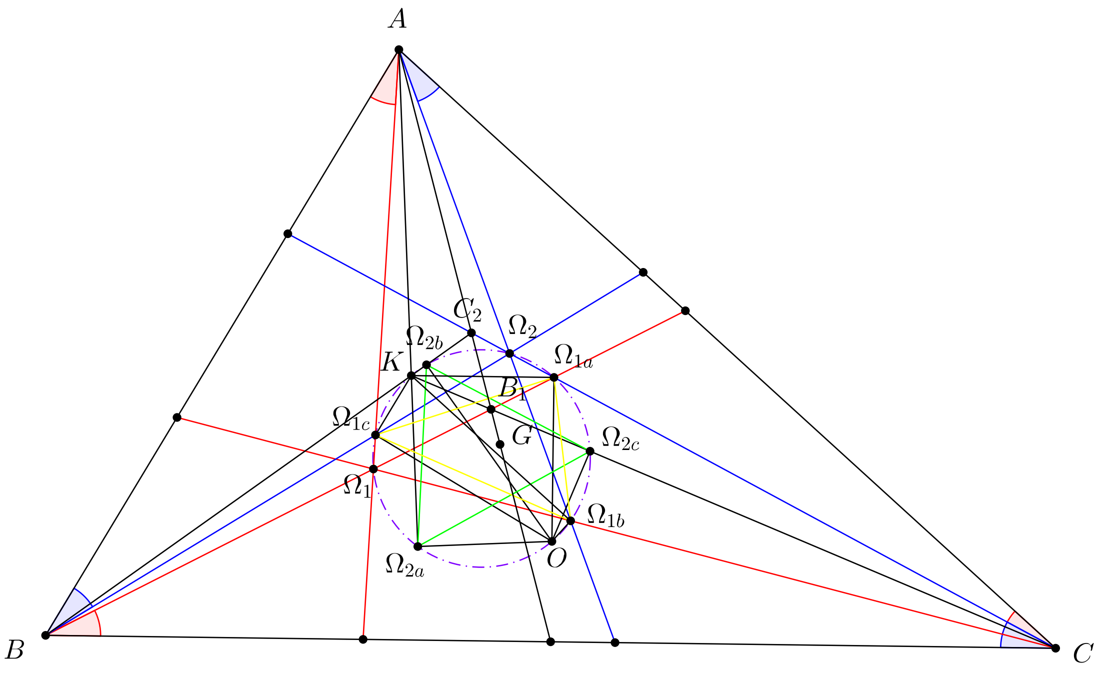
$$\left(-\frac{a^2}{2} : b^2 : c^2\right)$$

Vậy tọa độ của Ω_{2a} – trung điểm của AK_a là

$$\left(1 + \frac{\frac{-a^2}{2}}{b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}} : \frac{b^2}{b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}} : \frac{c^2}{b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}}\right) = (b^2 + c^2 - a^2 : b^2 : c^2)$$

□

Định lý 8 (Đường tròn Brocard)**.** *6 đỉnh của hai tam giác Brocard, 2 điểm Brocard, điểm Lemoine K, tâm đường tròn ngoại tiếp O cùng thuộc đường tròn đường kính KO.*



Chứng minh. $\angle\Omega_1BC = \angle\Omega_2CB = \omega$ nên Ω_{1a} thuộc trung trực của BC. Tương tự, Ω_{1b} thuộc trung trực của CA, Ω_{1c} thuộc trung trực của AB. Xét bốn điểm B, C, K và Ω_{1a}, ta có $C\Omega_{1a}$ cắt BK tại C_2 và $B\Omega_{1a}$ cắt CK tại B_1. Mà B_1C_2 đi qua trung điểm BC nên $K\Omega_{1a}$ song song với BC, dẫn đến $K\Omega_{1a}$ vuông góc với trung trực của BC. Như vậy Ω_{1a}, Ω_{1b}, Ω_{1c} lần lượt là hình chiếu vuông góc của K lên trung trực của BC, CA, AB nên Ω_{1a}, Ω_{1b}, Ω_{1c} thuộc đường tròn đường kính KO.
Ω_{2a}, Ω_{2b}, Ω_{2c} là hình chiếu vuông góc của O lên KA, KB, KC nên các đỉnh của tam giác Brocard thứ hai thuộc đường tròn đường kính KO.

Bây giờ ta chỉ cần chỉ ra nốt hai điểm Brocard cũng thuộc đường tròn này. Vẫn bằng việc cộng góc

$$\begin{aligned}\angle\Omega_{1b}\Omega_1\Omega_{1c} &= \angle A\Omega_1 C\\ &= 180^\circ - \angle A\\ &= \angle\Omega_{1b}O\Omega_{1c} \text{ (vì } O\Omega_{1b}, O\Omega_{1c} \text{ vuông góc với } AC, AB).\end{aligned}$$

Như vậy điểm Brocard thứ nhất thuộc $(O\Omega_{1b}\Omega_{1c})$ - đường tròn đường kính KO. Hoàn toàn tương tự, điểm Brocard thứ hai cũng thuộc đường tròn đường kính KO. □

Định lý 9. *$\triangle ABC$ và $\triangle\Omega_{1a}\Omega_{1b}\Omega_{1c}$ đồng dạng nghịch và có cùng trọng tâm.*

Chứng minh. Khi chứng minh một cặp tam giác là đồng dạng thuận hay nghịch, ta cần đến góc định hướng. Với việc O thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác Brocard thứ nhất và các đỉnh của nó lần lượt nằm trên trung trực của BC, CA, AB, ta có

$$(\Omega_{1a}\Omega_{1b}, \Omega_{1a}\Omega_{1c}) = (O\Omega_{1b}, O\Omega_{1c}) = (AC, AB) \pmod{\pi}.$$

Tương tự, $(\Omega_{1b}\Omega_{1c}, \Omega_{1b}\Omega_{1a}) = (BA, BC) \pmod{\pi}$ nên $\triangle ABC$ và $\triangle\Omega_{1a}\Omega_{1b}\Omega_{1c}$ đồng dạng nghịch.
Việc chứng minh hai tam giác trên có cùng trọng tâm tương đương với việc ta cần chỉ ra rằng $\overrightarrow{A\Omega_{1a}} + \overrightarrow{B\Omega_{1b}} + \overrightarrow{C\Omega_{1c}} = \overrightarrow{0}$ - hay $\overrightarrow{A\Omega_{1b}} + \overrightarrow{B\Omega_{1c}} + \overrightarrow{C\Omega_{1a}} = \overrightarrow{0}$. Ta sẽ chứng minh điều này bằng phép quay vector[5]
Không giảm tổng quát, giả sử $\triangle ABC$ có hướng dương. Khi đó

$$(\overrightarrow{\Omega_{1a}B}, \overrightarrow{\Omega_{1a}C}) = (\overrightarrow{\Omega_{1b}C}, \overrightarrow{\Omega_{1b}A}) = (\overrightarrow{\Omega_{1c}A}, \overrightarrow{\Omega_{1c}B}) = 2\omega$$

Phép quay vector góc $2\omega - \pi$ lần lượt biến $\overrightarrow{A\Omega_{1b}}$, $\overrightarrow{B\Omega_{1c}}$, $\overrightarrow{C\Omega_{1a}}$ thành $\overrightarrow{C\Omega_{1b}}$, $\overrightarrow{A\Omega_{1c}}$, $\overrightarrow{B\Omega_{1a}}$, tức là biến $\overrightarrow{A\Omega_{1b}} + \overrightarrow{B\Omega_{1c}} + \overrightarrow{C\Omega_{1a}}$ thành $\overrightarrow{C\Omega_{1b}} + \overrightarrow{A\Omega_{1c}} + \overrightarrow{B\Omega_{1a}}$. Mà $\overrightarrow{A\Omega_{1b}} + \overrightarrow{B\Omega_{1c}} + \overrightarrow{C\Omega_{1a}} = \overrightarrow{C\Omega_{1b}} + \overrightarrow{A\Omega_{1c}} + \overrightarrow{B\Omega_{1a}}$ vì điều này tương đương $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$. Phép quay góc $2\omega - \pi$ lại không làm thay đổi vector thì vector đó phải là vector không. Đó là điều phải chứng minh. □

Định lý 10. *$\Omega_{1a}\Omega_{2a}$, $\Omega_{1b}\Omega_{2b}$, $\Omega_{1c}\Omega_{2c}$ đồng quy tại trọng tâm của $\triangle ABC$.*

Chứng minh. Theo phần chứng minh trên:

$$\Omega_{1a} = (a^2 : c^2 : b^2) \qquad \Omega_{2a} = (b^2 + c^2 - a^2 : b^2 : c^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(a^2 + b^2 + c^2)\overrightarrow{G\Omega_{1a}} = a^2\overrightarrow{GA} + c^2\overrightarrow{GB} + b^2\overrightarrow{GC}\\ (2b^2 + 2c^2 - a^2)\overrightarrow{G\Omega_{2a}} = (b^2 + c^2 - a^2)\overrightarrow{GA} + b^2\overrightarrow{GB} + c^2\overrightarrow{GC}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)\overrightarrow{G\Omega_{1a}} + (2b^2 + 2c^2 - a^2)\overrightarrow{G\Omega_{2a}} = (b^2 + c^2)(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \overrightarrow{0}.$$

Vậy ta kết luận $\Omega_{1a}\Omega_{2a}$ đi qua G. □

2.4. Đường tròn Neuberg

Ta có một kết quả rất kì lạ như sau

Định lý 11 (Đường tròn Neuberg)**.** *Cho $\triangle ABC$. Tập hợp các điểm P thỏa mãn góc Brocard của $\triangle PBC$ và $\triangle ABC$ bằng nhau là hợp của hai đường tròn đối xứng nhau qua BC.*

Qũy tích đặc biệt này được đặt tên theo nhà hình học người Luxembourg - Joseph Jean Baptiste Neuberg. Xin nói thêm, tên tuổi ông cũng gắn với những đối tượng hình học khác như *đường tròn Neuberg - Mineur của tứ giác*, *đường bậc ba Neuberg* - đây là một trong những đường bậc ba nổi tiếng và hấp dẫn bậc nhất trong hình học tam giác.
Nhằm mục đích chặt chẽ, ở đây xin đưa ra một chứng minh bằng tọa độ tỉ cự.

Chứng minh. Điểm P thỏa mãn góc Brocard của tam giác ABC và PBC bằng nhau, tức là

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4S_{ABC}} = \frac{a^2+PB^2+PC^2}{4S_{PBC}} \tag{1}$$

Đặt tọa độ của P là $(x:y:z)$ thì $S_{PBC} = S_{ABC} \cdot \dfrac{|x|}{|x+y+z|}$ và

$$PB^2 = \frac{c^2x^2+a^2z^2+(a^2+c^2-b^2)zx}{(x+y+z)^2} \qquad PC^2 = \frac{b^2x^2+a^2y^2+(a^2+b^2-c^2)xy}{(x+y+z)^2}$$

cả hai đẳng thức trên đều thu được từ công thức Jacobi về tâm tỉ cự. Quy đồng và bình phương (1), ta thu được

$$(a^2+b^2+c^2)^2x^2(x+y+z)^2 - (a^2+PB^2+PC^2)^2(x+y+z)^4 = 0$$

Biểu thức ở vế trái có thể phân tích thành nhân tử vì là hiệu hai bình phương. Cuối cùng ta thu được đẳng thức tương đương là

$$\Big((a^2y+a^2z)(x+y+z) - (a^2yz+b^2zx+c^2xy)\Big)$$

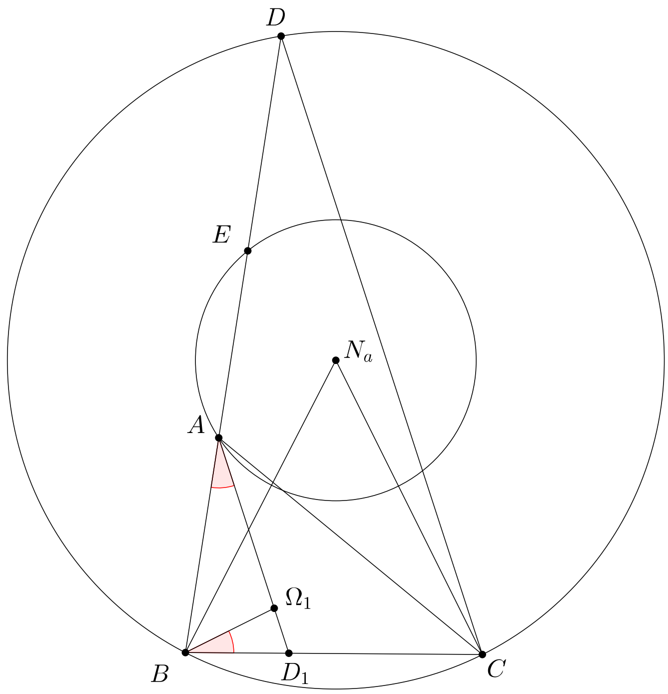
$$\times\Big(((a^2+b^2+c^2)x+a^2y+a^2z)(x+y+z) - (a^2yz+b^2zx+c^2xy)\Big) = 0$$

Như vậy quỹ tích điểm P là hợp của hai đường tròn với phương trình lần lượt là

$$(a^2y+a^2z)(x+y+z) - (a^2yz+b^2zx+c^2xy) = 0$$

$$((a^2+b^2+c^2)x+a^2y+a^2z)(x+y+z) - (a^2yz+b^2zx+c^2xy) = 0$$

Sử dụng định lý 12, cho các điểm thuộc BC(có tọa độ tỉ cự tại A bằng 0), ta thấy mọi điểm trên BC đều nằm ngoài cả hai đường tròn trên. Lại nhận xét rằng nếu P thuộc quỹ tích thì đối xứng của P qua trung trực của BC hay là qua BC cũng thuộc quỹ tích nên BC và trung trực của BC là hai trục đối xứng của quỹ tích. Từ điều này ta kết luận hai đường tròn trên bằng nhau và đối xứng nhau qua BC. □



So với nhiều đường tròn khác trong hình học tam giác, phương trình của đường tròn Neuberg được coi là đơn giản và đẹp.
Ta gọi đường tròn A-Neuberg đi qua A là đường tròn A-Neuberg thứ nhất, đường còn lại là đường tròn A-Neuberg thứ hai. Có một phép dựng đơn giản(việc giải thích hoàn toàn dựa vào định nghĩa của điểm Brocard) cho hai đường tròn này: *đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc BC tại B cắt AC tại D, đường tròn qua A, C và tiếp xúc BC tại C cắt AB tại E thì (ADE) và đối xứng của nó qua BC chính là hai đường tròn A-Neuberg*. Ngoài ra cũng có một phép dựng cũng rất đặc sắc như sau

Định lý 12 ([4])**.** *Tâm của đường tròn A-Neuberg thứ nhất là điểm N_a thỏa mãn N_a thuộc trung trực của BC, $\angle BN_aC = 2\omega$, A và N_a cùng phía với BC.*

Chứng minh. N_a là tâm đường tròn A-Neuberg thứ nhất. Theo chứng minh của đường tròn Neuberg ở trên thì đường tròn này nằm hoàn toàn về một phía của BC nên A và N_a cùng phía với BC.
Ta lấy D là giao điểm khác B của AB với đường tròn (N_a, N_aB) và E là giao điểm khác A của AB với đường tròn A-Neuberg thứ nhất. Theo phương trình của đường tròn Neuberg thì phương tích của B với đường tròn A-Neuberg thứ nhất là a^2, suy ra

$$a^2 = \overline{BA} \cdot \overline{BE} = \overline{BA} \cdot \overline{AD} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BA}}.$$

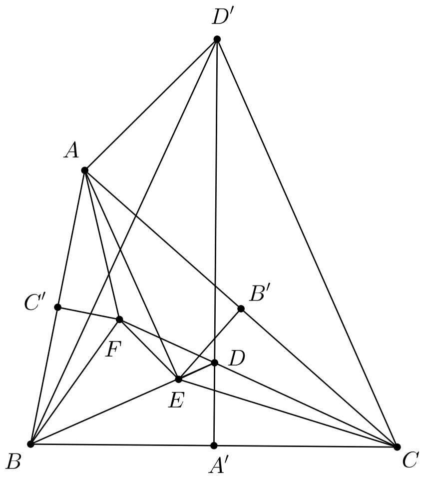
$A\Omega_1$ cắt BC tại D_1. Vì $\Omega_1 = \left(\frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2}\right)$ nên $\frac{\overline{D_1C}}{\overline{D_1B}} = -\frac{a^2}{c^2}$. Như vậy $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{D_1C}}{\overline{D_1B}}$. Theo định lý Thales đảo, CD song song với $A\Omega_1$ nên $\angle BDC = \omega$, tức là $\angle BN_aC = 2\omega$. □

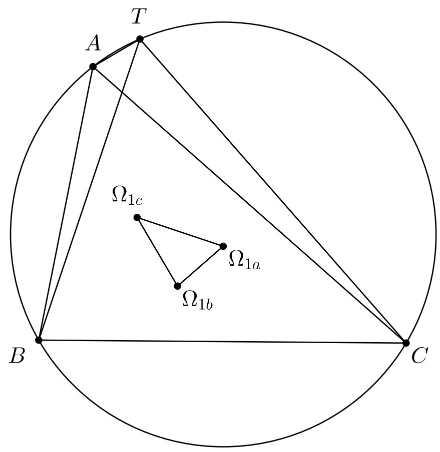
Với kết quả trên, bạn đọc có thể kiểm chứng được công thức đẹp đẽ sau:

Định lý 13. *Bán kính đường tròn A-Neuberg là* $\dfrac{a\sqrt{\cot^2\omega - 3}}{2}$

Với cả ba đường tròn Neuberg thứ nhất, ta có kết quả sau

Định lý 14 (Điểm Tarry – X_{98},[6])**.** AN_a*,* BN_b*,* CN_c *đồng quy trên* (ABC)*.*





Chứng minh. Ta chứng minh điều này qua bước trung gian – chỉ ra AN_a, BN_b, CN_c lần lượt vuông góc với các cạnh của tam giác Brocard thứ nhất. Thế nhưng nhận xét đó lại là trường hợp đặc biệt của kết quả sau, khi mà tam giác cân được dựng vào phía trong tam giác và có góc ở đáy bằng ω.

Bổ đề 15. *Cho* $\triangle ABC$*, dựng* $\triangle DBC$*,* $\triangle ECA$*,* $\triangle FAB$ *lần lượt cân tại* D*,* E*,* F *và đồng dạng thuận.* D' *là trực tâm* $\triangle DBC$ *thì* AD' *vuông góc với* EF*.*

Chứng minh bổ đề. Đặt

$$\angle DBC = \angle DCB = \angle ECA = \angle EAC = \angle FAB = \angle FBA = \varphi$$

Không giảm tổng quát, ta giả sử $\triangle DBC$ và $\triangle ABC$ cùng hướng. A', B', C' là trung điểm BC, CA, AB.

$$\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} + \cot^2\varphi\overrightarrow{A'D}$$

Một lần nữa ta sử dụng phép quay vector. Xét phép quay góc vuông $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{AD'}) &= \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{AB'}) + \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{AC'}) + \cot^2\varphi\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{A'D})\\ &= \cot\varphi\cdot\overrightarrow{C'F} + \cot\varphi\cdot\overrightarrow{EB'} + \cot\varphi\cdot\frac{\overrightarrow{CB}}{2}\\ &= \cot\varphi(\overrightarrow{C'F} + \overrightarrow{EB'} + \overrightarrow{B'C'})\\ &= \cot\varphi\cdot\overrightarrow{EF}\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ AD' vuông góc với EF. □

Quay trở lại chứng minh chính, ta suy ra AN_a, BN_b, CN_c lần lượt vuông góc với $\Omega_{1b}\Omega_{1c}$, $\Omega_{1c}\Omega_{1a}$, $\Omega_{1a}\Omega_{1b}$.

$$(A\Omega_{1b}^2 - A\Omega_{1c}^2) + (B\Omega_{1c}^2 - B\Omega_{1a}^2) + (C\Omega_{1a}^2 - C\Omega_{1b}^2)$$
$$= (\Omega_{1a}C^2 - \Omega_{1a}B^2) + (\Omega_{1b}A^2 - \Omega_{1b}C^2) + (\Omega_{1c}B^2 - \Omega_{1c}A^2) = 0.$$

Theo định lý Carnot, AN_a, BN_b, CN_c đồng quy tại một điểm T. Hơn nữa $(TB, TC) = (\Omega_{1a}\Omega_{1c}, \Omega_{1a}\Omega_{1b}) = (AB, AC) \pmod{\pi}$ nên T thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. □

Trên đây tác giả đã tổng kết những kết quả đẹp đẽ, kinh điển về hai điểm Brocard. Mọi góp ý, câu hỏi xin gửi về địa chỉ gmail: tenminhladuong@gmail.com

Tài liệu

[1] *Brocard points, First Brocard triangle, Second Brocard Triangle, Brocard circle*, Wolfram Mathworld

[2] R.Honsberger, *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*

[3] Trần Quang Hùng, Blog hình học sơ cấp, *Tâm tỉ cự và các bài toán phương tích* http://analgeomatica.blogspot.com/2014/01/tam-ty-cu-va-cac-bai-toan-phuong-tich.html

[4] Neuberg cirkel, http://www.pandd.demon.nl/lemoine/neuberg.htm

[5] Trần Văn Tấn, *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề hình học 11*

[6] C.Kimberling, *Encyclopedia of Triangle Centers* http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/

MỘT SỐ KẾT QUẢ VỀ ĐẲNG CỰ TRONG TAM GIÁC

Nguyễn Trần Hữu Thịnh
Trường THPT Chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ

TÓM TẮT

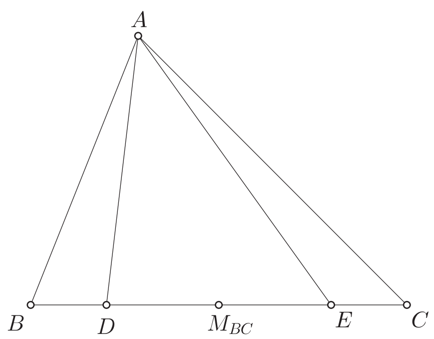
Trong bài viết này, tác giả sẽ trình bày các tính chất, bài toán về đường đẳng cự được tổng hợp lại từ nhiều nguồn khác nhau, cùng với những phát hiện của chính tác giả.

1. Đường đẳng cự

1.1. Định nghĩa

Định nghĩa 1. *Cho đoạn thẳng AB. Ta nói hai điểm D_1 và D_2 là hai điểm đẳng cự trên đoạn AB đã cho nếu chúng nằm trên AB và đối xứng với nhau qua trung điểm của AB.*

Định nghĩa 2. *Cho $\triangle ABC$. Gọi D, E là hai điểm nằm trên đường thẳng BC sao cho chúng đối xứng nhau qua trung điểm của cạnh BC. Khi đó ta gọi AD và AE là hai đường đẳng cự của góc A trong $\triangle ABC$.*



Ví dụ 1. *(i) Một trường hợp tầm thường là: Đường trung tuyến đẳng cự với chính nó.*

(ii) Nếu $\triangle ABC$ ngoại tiếp đường tròn (I) và có tâm đường tròn bàng tiếp góc A là I_a thì hình chiếu vuông góc của I và I_a lên BC là hai điểm đẳng cự trên BC.

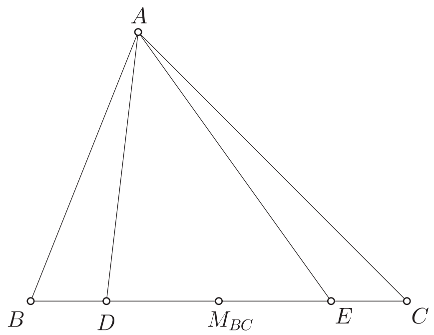
Bạn đọc có thể kiểm tra một cách dễ dàng các ví dụ trên.

1.2. Các tính chất cơ bản

1.2.1. Tiêu chuẩn kiểm tra hai đường thẳng đẳng cự với nhau

Định lý 1. *Cho $\triangle ABC$ và hai điểm D, E trên cạnh BC. Khi đó, AD và AE là hai đường đẳng cự của góc A khi và chỉ khi:*

$$\frac{\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})}{\sin(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})}{\sin(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC})}=\left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \tag{1}$$



Chứng minh.

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=\frac{[ADB]}{[ADC]}=\frac{AD\cdot AB}{AD\cdot AC}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})}{\sin(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})}=-\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})}{\sin(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})} \tag{2}$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})}{\sin(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC})} \tag{3}$$

Nhân vế với vế của hai đẳng thức trên, ta được

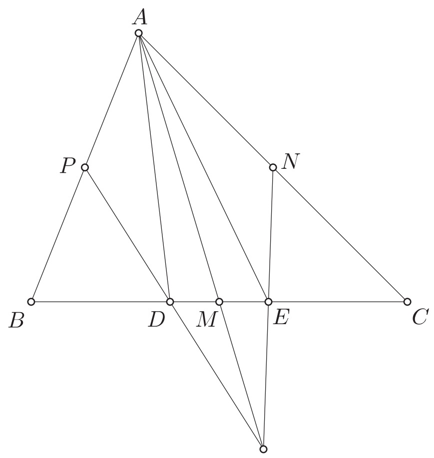
$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}=\frac{AB^2}{AC^2}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\cdot\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})}{\sin(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})\cdot\sin(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC})}$$

AD, AE là hai đường đẳng cự khi và chỉ khi $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\cdot\dfrac{\overline{EB}}{\overline{EC}}=1$, tương đương với

$$\frac{\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})}{\sin(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})}{\sin(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC})}=\left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

□

Định lý 2. *Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi D, E là hai điểm bất kỳ trên cạnh BC. Khi đó AD là đường đẳng cự với AE của góc A nếu và chỉ nếu AM, NE, PD đồng quy hoặc đôi một song song.*



Chứng minh. Gọi T là giao điểm của NE và PD(khi chúng song song thì giao điểm tại vô cùng). Ta đã biết A, T, M thẳng hàng khi và chỉ khi:

$$(PN, PA, PM, PT) = (NP, NA, NM, NT)$$

Tuy nhiên với việc NP song song với BC thì

$$(PN, PA, PM, PT) = (PN, PB, PM, PD) = \frac{\overline{BD}}{\overline{BM}}$$

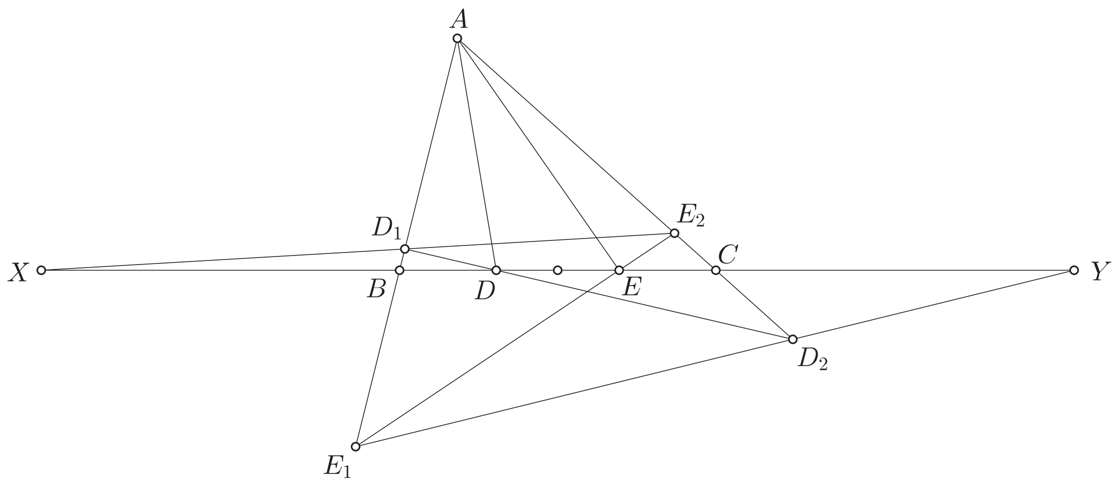
$$(NP, NA, NM, NT) = (NP, NC, NM, NE) = \frac{\overline{CE}}{\overline{CM}}$$

Do đó hai tỉ số kép trên bằng nhau khi và chỉ khi $\overline{BD} = \overline{EC}$, tức là AD, AE đẳng cự. □

Hẳn bạn đọc đã phần nào nhận ra một số điểm tương đồng giữa đường đẳng cự và đường đẳng giác thông qua hai tiêu chuẩn này. Đường đẳng giác liên quan đến hai góc bằng nhau và một định lý Steiner quen thuộc về tiêu chuẩn để hai đường thẳng là đẳng giác của một góc. Đường đẳng cự cũng tương tự, nó liên quan đến hai cạnh bằng nhau và thay vì là tích tỉ số giữa các cạnh như trong định lý Steiner thì chúng chính là tích tỉ số giữa $\sin$ các góc, và thú vị hơn chúng đều cho ta kết quả là $\dfrac{AB^2}{AC^2}$. Phần tiếp theo tác giả xin giới thiệu đến bạn đọc một số tính chất của đường đẳng cự.

1.2.2. Các tính chất cơ bản

Định lý 3. (Định lý con bướm mở rộng với cặp đường thẳng) *Cho $\triangle ABC$. Gọi D và E là hai điểm đẳng cự trên BC. Một đường thẳng bất kỳ đi qua D cắt AB, AC lần lượt tại D_1, D_2. Một đường thẳng bất kỳ đi qua E cắt AB, AC lần lượt tại E_1, E_2. Giả sử D_1E_2 và D_2E_1 cắt BC theo thứ tự tại X và Y. Chứng minh rằng X và Y là hai điểm đẳng cự trên BC.*



Chứng minh. Điều cần chứng minh tương đương với việc $\dfrac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = \dfrac{\overline{YC}}{\overline{YB}}$.
Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ABC$ với các cát tuyến $\overline{X, D_1, E_2}$ và $\overline{Y, D_2, E_1}$ ta có:

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{E_2C}}{\overline{E_2A}} \cdot \frac{\overline{D_1A}}{\overline{D_1B}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{E_2A}}{\overline{E_2C}} \cdot \frac{\overline{D_1B}}{\overline{D_1A}} \tag{1}$$

$$\frac{\overline{YC}}{\overline{YB}} \cdot \frac{\overline{E_1B}}{\overline{E_1A}} \cdot \frac{\overline{D_2A}}{\overline{D_2C}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{YC}}{\overline{YB}} = \frac{\overline{E_1A}}{\overline{E_1B}} \cdot \frac{\overline{D_2C}}{\overline{D_2A}} \tag{2}$$

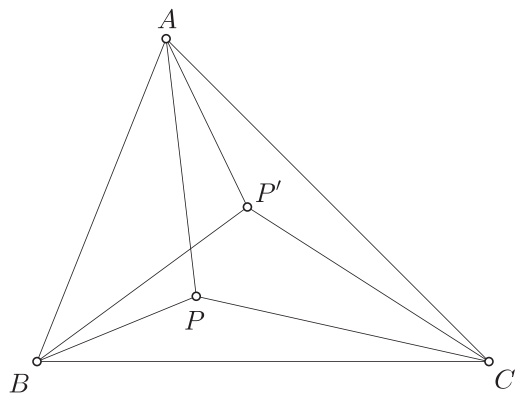
Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ABC$ với các cát tuyến $\overline{D_1, D, D_2}$ và $\overline{E_1, E, E_2}$ ta có:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{D_2C}}{\overline{D_2A}} \cdot \frac{\overline{D_1A}}{\overline{D_1B}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{D_2C}}{\overline{D_2A}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{D_1B}}{\overline{D_1A}} \tag{3}$$

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{EB}} \cdot \frac{\overline{E_1B}}{\overline{E_1A}} \cdot \frac{\overline{E_2A}}{\overline{E_2C}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{E_2A}}{\overline{E_2C}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{E_1A}}{\overline{E_1B}} \tag{4}$$

Từ $(1), (2), (3)$ và (4) kết hợp với việc D và E là hai điểm đẳng cự trên BC suy ra $\dfrac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = \dfrac{\overline{YC}}{\overline{YB}}$
suy ra điều phải chứng minh. □

Định lý 4. *Cho $\triangle ABC$. Cặp đường thẳng d_a, d'_a là hai đường đẳng cự ứng với góc A, định nghĩa tương tự với d_b, d'_b và d_c, d'_c. Khi đó điều kiện cần và đủ để d_a, d_b, d_c đồng quy tại P là d'_a, d'_b, d'_c đồng quy tại P'.*



Chứng minh. Gọi X, X' lần lượt là giao điểm của d_a, d'_a với BC, định nghĩa tương tự cho Y, Y' và Z, Z'. Từ đây ta có được:

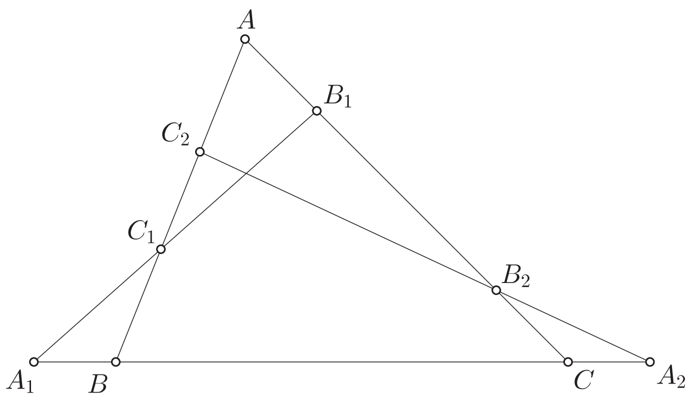
$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{YC}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{X'C}}{\overline{X'B}} \cdot \frac{\overline{Z'B}}{\overline{Z'A}} \cdot \frac{\overline{Y'A}}{\overline{Y'C}}$$

Do đó áp dụng định lý Ceva đảo ta kết luận d_a, d_b, d_c đồng quy tại P khi và chỉ khi d'_a, d'_b, d'_c đồng quy tại P'. Định lý được chứng minh. □

Định nghĩa 3. *Hai điểm được gọi là hai điểm liên hợp đẳng cự nếu các cặp đường thẳng nối chúng với mỗi đỉnh là những cặp đường đẳng cự.*

Ví dụ 2. *Trong một tam giác thì điểm Gergonne và điểm Nagel là hai điểm liên hợp đẳng cự.*

Định lý 5. *Cho $\triangle ABC$. Một cát tuyến bất kì cắt ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1 thì các điểm A_2, B_2, C_2 lần lượt đẳng cự với chúng cũng thẳng hàng.*

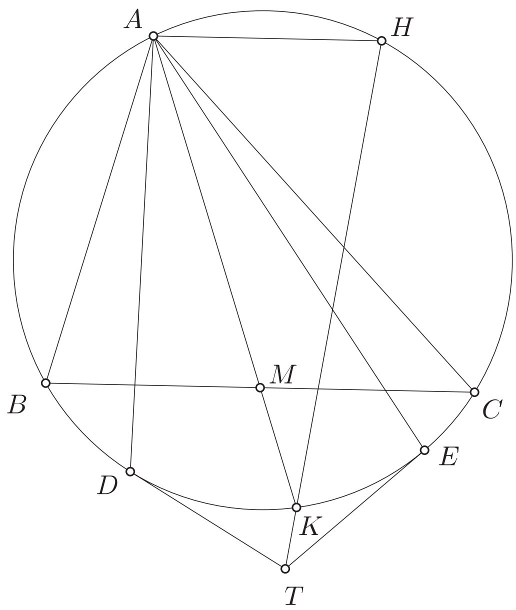


Chứng minh. Theo giả thiết ta có:

$$\frac{\overline{A_2C}}{\overline{A_2B}} \cdot \frac{\overline{C_2B}}{\overline{C_2A}} \cdot \frac{\overline{B_2A}}{\overline{B_2C}} = \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = 1$$

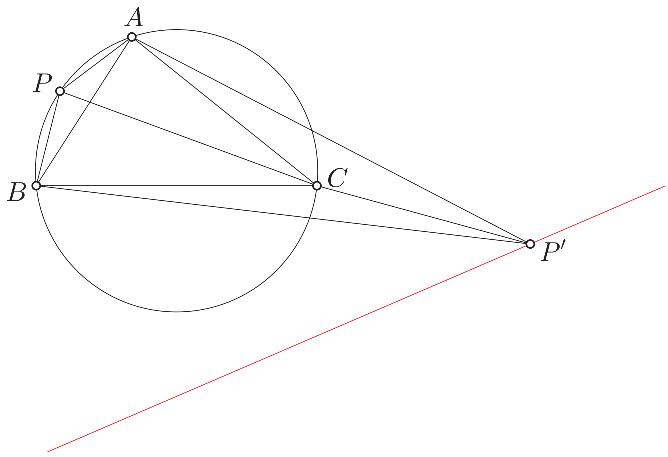
Do đó theo định lý Menelaus đảo thì A_2, B_2, C_2 thẳng hàng. □

Định lý 6. *Cho $\triangle ABC$, đường trung tuyến AM cắt (ABC) tại K. Từ A kẻ đường thẳng song song BC cắt (ABC) tại H. Trên tia HK lấy T bất kì nằm ngoài (ABC). Từ T kẻ tiếp tuyến TD và TE của (ABC). Khi đó AD và AE là hai đường đẳng cự với nhau.*



Chứng minh. Do TD và TE là các tiếp tuyến của (ABC) và HT cắt (ABC) tại K nên $HDKE$ là tứ giác điều hòa hay (AD, AE, AK, AH) là chùm điều hòa. Do $AH \parallel BC$ nên theo tính chất cơ bản về chùm điều hòa thì BC định ra trên ba đường AD, AK, AE hai đoạn thẳng bằng nhau. Mà AK là đường trung tuyến của tam giác ABC nên AD và AE là hai đường đẳng cự của tam giác này. □

Định lý 7 ([?]). *Cho $\triangle ABC$ và điểm P di chuyển trên (ABC). Gọi P' là điểm liên hợp đẳng cự của P đối với $\triangle ABC$. Khi đó P' luôn di chuyển trên một đường thẳng cố định khi P thay đổi.*



Chứng minh bởi nickname Colorful trên AoPS. Gọi P, P_1, P_2 là ba điểm bất kì nằm trên (ABC). Gọi P', P_1', P_2' lần lượt là điểm liên hợp đẳng cự của P, P_1, P_2 đối với $\triangle ABC$. Ta được $(AP_1', AP_2', AP', AB) = (AP_1, AP_2, AP, AC)$. Vì A, B, C, P, P_1, P_2 cùng nằm trên một đường tròn nên $(AP_1, AP_2, AP, AC) = (BP_1, BP_2, BP, BC)$. Lại do tính đẳng cự nên ta cũng có $(BP_1, BP_2, BP, BC) = (BP_1', BP_2', BP', BA)$. Như thế $(AP_1', AP_2', AP', AB) = (BP_1', BP_2', BP', BA)$. Điều này chứng minh tỏ P', P_1', P_2' thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Hệ quả 1. *Đường thẳng qua A song song BC cắt (ABC) tại X. Tiếp tuyến tại X của (ABC) cắt BC tại A'. Định nghĩa tương tự cho B', C'. Khi đó P' nằm trên đường thẳng đi qua A', B', C'.*

Đường đẳng cự quả là một trong những đường thẳng đẹp. Ta cùng liên hệ đến một số kết quả khác để thấy được tính ứng dụng của đường thẳng này.

2. Liên hệ tới các khái niệm khác

2.1. Đường đối phân giác

Định nghĩa 4. *Trong một tam giác, đường đẳng cự với đường phân giác xuất phát từ một đỉnh được gọi là đường đối phân giác của tam giác.*

Đường đối phân giác là đường đẳng cự với phân giác nên sẽ có các tính chất của cặp đường đẳng cự. Từ các định lý đã nêu ta có các tính chất sau:

1. Cho $\triangle ABC$. Ta có AP $(P \in BC)$ là đường đối phân giác khi và chỉ khi:

   (a) $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\dfrac{AC}{AB}$;

   (b) $\dfrac{\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP})}{\sin(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC})} = \left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2$;

   (c) $\dfrac{\mathrm{d}(P, AB)}{\mathrm{d}(P, AC)} = \left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2$.

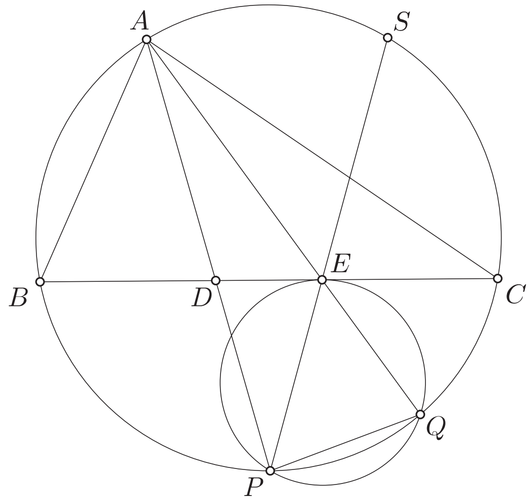
2. Các đường đối phân giác giao nhau tại một điểm gọi là điểm đối phân giác. Có ký hiệu $X(75)$ trong **ETC**[1].

Một kết quả trực tiếp từ tính chất (c) chính là ví dụ sau:

Ví dụ 3. *Cho $\triangle ABC$, đường phân giác trong góc A cắt BC tại D. Dựng bên ngoài tam giác các hình chữ nhật $ABPY$ và $ACQX$ sao cho $\dfrac{AX}{AY} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$. Gọi O là tâm của (AXY). Khi đó AO chính là đường đối phân giác góc A của $\triangle ABC$.*

Định lý 8. *Cho $\triangle ABC$, đường phân giác trong góc A cắt BC tại D. Gọi E là điểm đẳng cự của D trên BC. Tia AD, AE lần lượt cắt (ABC) tại P, Q khác A. Chứng minh rằng (EPQ) tiếp xúc BC.*

[1]Encyclopedia of Triangle Centers, http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html



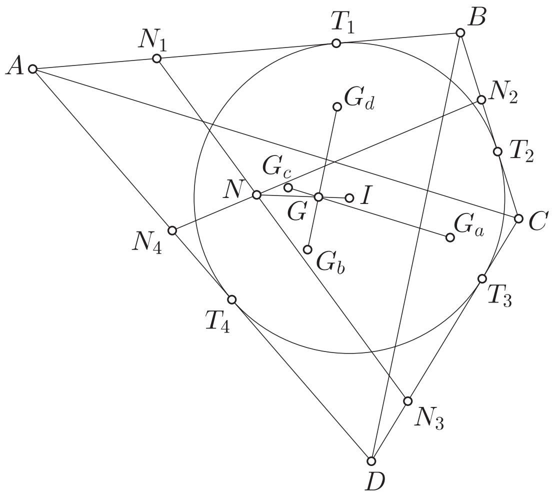
Chứng minh. Đường thẳng qua A song song BC cắt (ABC) tại S. Vì S, E lần lượt đối xứng với A, D qua trung trực của BC nên S, E, P thẳng hàng. Do D, E đẳng cự trên BC và chú ý $PA = PS$ nên $(DA, DB) = (EC, ES)$. Thông qua biến đổi góc:

$$(EB, EP) = (EC, ES) = (DA, DB) = (CA, CP) = (QA, QP)$$

Như vậy BC là tiếp tuyến tại E của (EPQ) hay (EPQ) tiếp xúc BC. □

2.2. Tứ giác ngoại tiếp

Định lý 9 ([?]). *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp (I). Gọi T_1, T_2, T_3, T_4 lần lượt là tiếp điểm của (I) đối với AB, BC, CD, DA. Gọi N_1, N_2, N_3, N_4 lần lượt là điểm đẳng cự của T_1, T_2, T_3, T_4 trên các cạnh tương ứng. Điểm Nagel N của tứ giác $ABCD$ được xác định là giao điểm của N_1N_3 và N_2N_4. Gọi G_a, G_b, G_c, G_d lần lượt là trọng tâm của $\triangle BCD$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$, $\triangle ABC$. Gọi G là giao điểm của G_aG_c và G_bG_d. Khi đó $\overrightarrow{NG} = 2\overrightarrow{GI}$.*



Lời giải sau đây sử dụng vector để chứng minh:

Chứng minh. Đặt $AT_1 = AT_4 = a$, $BT_1 = BT_2 = b$, $CT_2 = CT_3 = c$, $DT_3 = DT_4 = d$. Theo định lý con nhím

$$(a+b)\overrightarrow{IT_1} + (b+c)\overrightarrow{IT_2} + (c+d)\overrightarrow{IT_3} + (d+a)\overrightarrow{IT_4} = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow (b\overrightarrow{IA} + a\overrightarrow{IB}) + (c\overrightarrow{IB} + b\overrightarrow{IC}) + (d\overrightarrow{IC} + c\overrightarrow{ID}) + (a\overrightarrow{ID} + d\overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow (b+d)\overrightarrow{IA} + (a+c)\overrightarrow{IB} + (b+d)\overrightarrow{IC} + (a+c)\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{0}$$

Các điểm T_1, T_2, T_3, T_4, N_1, N_2, N_3, N_4 thỏa mãn

$$\begin{cases} b\overrightarrow{T_1A} + a\overrightarrow{T_1B} = \overrightarrow{0} & a\overrightarrow{N_1A} + b\overrightarrow{N_1B} = \overrightarrow{0} \\ c\overrightarrow{T_2B} + b\overrightarrow{T_2C} = \overrightarrow{0} & b\overrightarrow{N_2B} + c\overrightarrow{N_2C} = \overrightarrow{0} \\ d\overrightarrow{T_3C} + c\overrightarrow{T_3D} = \overrightarrow{0} & c\overrightarrow{N_3C} + d\overrightarrow{N_3D} = \overrightarrow{0} \\ a\overrightarrow{T_4D} + d\overrightarrow{T_4D} = \overrightarrow{0} & d\overrightarrow{N_4D} + a\overrightarrow{N_4A} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

Vì vậy, $N = N_1N_3 \cap N_2N_4$ và $T = T_1T_3 \cap T_2T_4$ thì

$$a\overrightarrow{NA} + b\overrightarrow{NB} + c\overrightarrow{NC} + d\overrightarrow{ND} = \overrightarrow{0}$$

$$\frac{1}{a}\cdot\overrightarrow{TA} + \frac{1}{b}\cdot\overrightarrow{TB} + \frac{1}{c}\cdot\overrightarrow{TC} + \frac{1}{d}\cdot\overrightarrow{TD} = \overrightarrow{0}$$

Ngoài ra, $\frac{1}{a}\cdot\overrightarrow{TA} + \frac{1}{c}\cdot\overrightarrow{TC}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$, còn $\frac{1}{b}\cdot\overrightarrow{TB} + \frac{1}{d}\cdot\overrightarrow{TD}$ cùng phương với $\overrightarrow{BD}$ nên

$$\frac{1}{a}\cdot\overrightarrow{TA} + \frac{1}{c}\cdot\overrightarrow{TC} = \frac{1}{b}\cdot\overrightarrow{TB} + \frac{1}{d}\cdot\overrightarrow{TD} = \overrightarrow{0}$$

Theo định lý Newton về tứ giác ngoại tiếp thì AC, BD, T_1T_3, T_2T_4 đồng quy. Lấy P là trọng tâm của 4 điểm A, B, C, D thì

$$\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PG_a} = \overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PG_b} = \overrightarrow{PC} + 3\overrightarrow{PG_c} = \overrightarrow{PD} + 3\overrightarrow{PG_d} = \overrightarrow{0}$$

do đó $\overrightarrow{PT} + 3\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{0}$ nên $c\overrightarrow{GG_a} + a\overrightarrow{GG_c} = \overrightarrow{0}$

$$\Rightarrow c(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) + a(\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) = \overrightarrow{0}$$

$$\Rightarrow a\overrightarrow{GA} + (a+c)\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} + (a+c)\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$$

Tương tự, $(b+d)\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + (b+d)\overrightarrow{GC} + d\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$

$$\Rightarrow (a+b+d)\overrightarrow{GA} + (a+b+c)\overrightarrow{GB} + (b+c+d)\overrightarrow{GC} + (a+c+d)\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow (b+d)\overrightarrow{GA} + (a+c)\overrightarrow{GB} + (b+d)\overrightarrow{GC} + (a+c)\overrightarrow{GD}$$
$$+a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} + d\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow 2(a+b+c+d)\overrightarrow{GI} + (a+b+c+d)\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{0}$$

Vậy, $2\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GN} = \overrightarrow{0}$, đó là điều phải chứng minh. $\square$

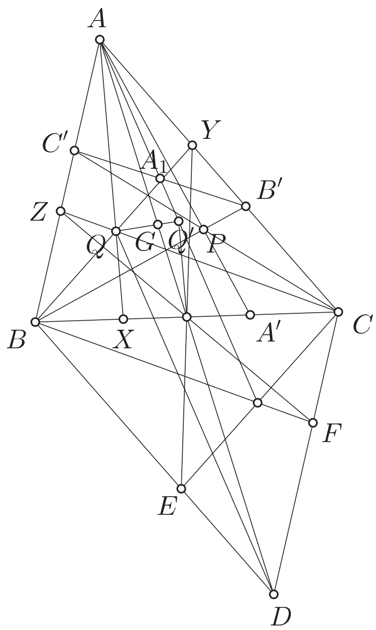
2.3. Isotomcomplement

Định nghĩa 5. *Cho $\triangle ABC$, trọng tâm G và điểm P bất kì. Điểm P' thỏa mãn $\overrightarrow{PG} = 2\overrightarrow{GP'}$ được gọi là điểm Complement của điểm P đối với $\triangle ABC$.*

Định nghĩa 6. *Cho $\triangle ABC$, trọng tâm G và điểm P bất kì. Điểm P' thỏa mãn $\overrightarrow{P'G} = 2\overrightarrow{GP}$ được gọi là điểm Anticomplement của điểm P đối với $\triangle ABC$.*

Định nghĩa 7. *Điểm Isotomcomplement của điểm P đối với $\triangle ABC$ là điểm Complement của điểm liên hợp đẳng cự của điểm P.*

Định lý 10. *Cho $\triangle ABC$ và điểm P bất kì trong mặt phẳng. Gọi $\triangle A'B'C'$ là tam giác Cevian của P đối với $\triangle ABC$. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là trung điểm của $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$. Khi đó AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm Isotomcomplement của điểm P đối với $\triangle ABC$.*

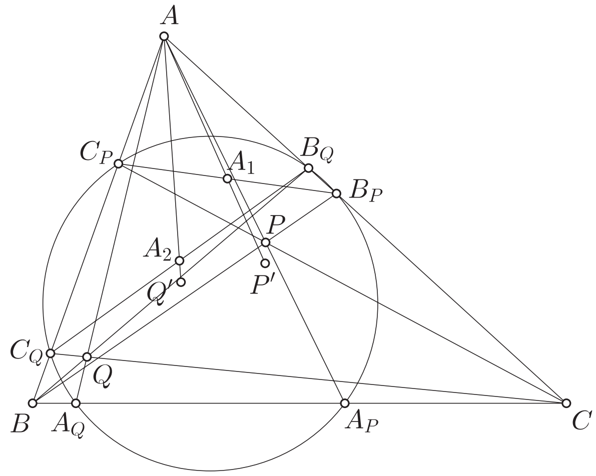


Chứng minh. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Gọi Q là điểm liên hợp đẳng cự của P đối với $\triangle ABC$. Gọi Q' là điểm Complement của điểm Q đối với $\triangle ABC$. Gọi $\triangle XYZ$ là tam giác Cevian của Q đối với $\triangle ABC$. Gọi D, E, F lần lượt là điểm đối xứng của A, Y, Z qua trung điểm của BC. $B'E$, $C'F$ lần lượt song song với AB, AC nên áp dụng hệ quả của định lý Pappus cho các cặp đường thẳng BE và CF ta có A, giao điểm của BF và CE, giao điểm của $B'E$ và $C'F$ đồng quy. Mà giao điểm của $B'E$ và $C'F$ là đối xứng của A qua A_1 nên AA_1, BF, CE đồng quy. Do tính đối xứng của trung điểm của BC nên ta được $AA_1 \parallel DQ$. Mặt khác vì $\dfrac{\overline{GD}}{\overline{GA}} = \dfrac{\overline{GQ}}{\overline{GQ'}} = -2$ nên theo định lý Thales đảo ta có $AQ' \parallel DQ$. Như vậy AA_1 đi qua Q'. Tương tự BB_1, CC_1 cũng đi qua Q'. Ta kết luận AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm Isotomcomplement của điểm P đối với $\triangle ABC$. □

Hệ quả 2. *Gọi M_A, M_B, M_C, M'_A, M'_B, M'_C lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB, AA', BB', CC'. Khi đó $M_AM'_A$, $M_BM'_B$, $M_CM'_C$ đồng quy tại điểm Isotomcomplement của điểm P đối với $\triangle ABC$.*

Định nghĩa 8. *Cho $\triangle ABC$ và điểm P bất kì. Gọi $A_PB_PC_P$ là tam giác Cevian của P đối với $\triangle ABC$. $(A_PB_PC_P)$ lần lượt cắt BC, CA, AB tại A_Q, B_Q, C_Q. Khi đó AA_Q, BB_Q, CC_Q đồng quy tại Q. Q được gọi là điểm liên hợp Cyclocevian của P đối với $\triangle ABC$.*

Định lý 11 ([?]). *Cho $\triangle ABC$ và điểm P bất kì. Gọi Q là điểm liên hợp Cyclocevian của P đối với $\triangle ABC$. Gọi P', Q' lần lượt là điểm Isotomcomplement của P, Q đối với $\triangle ABC$. Chứng minh rằng P', Q' là hai điểm liên hợp đẳng giác trong $\triangle ABC$.*

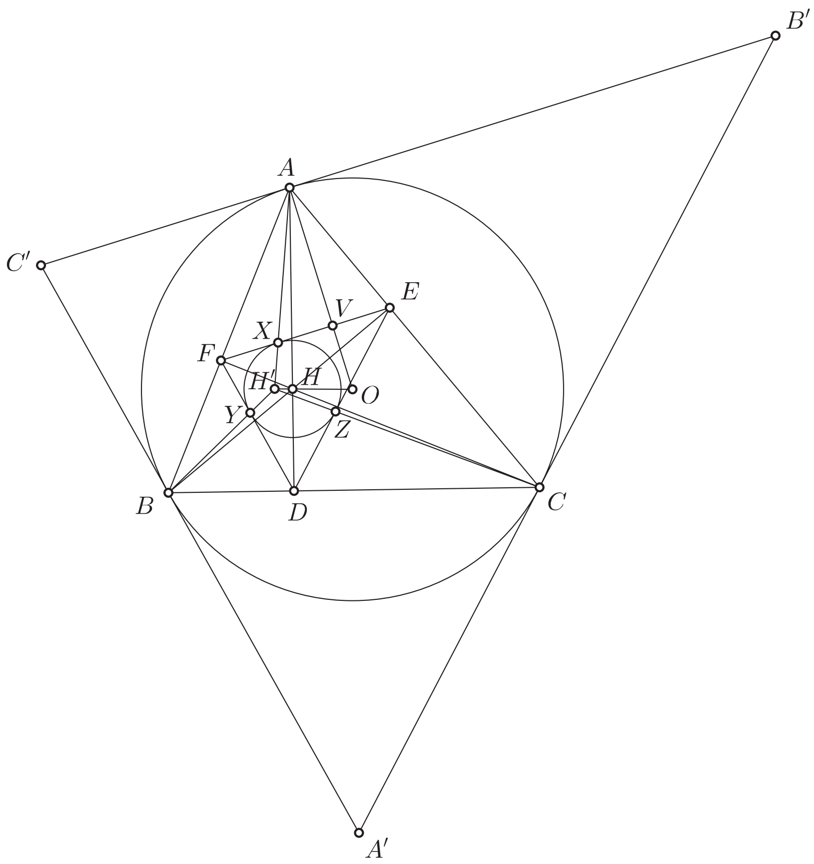


Chứng minh. Gọi $\triangle A_PB_PC_P$, $\triangle A_QB_QC_Q$ lần lượt là tam giác Cevian của P, Q đối với $\triangle ABC$. Gọi A_1, A_2 lần lượt là trung điểm của B_PC_P, B_QC_Q. Do B_PC_P đối song B_QC_Q nên AA_1 và AA_2 là hai đường đẳng giác góc A trong $\triangle ABC$. Mặt khác theo **Định lý 12** thì AA_1 đi qua P', AA_2 đi qua Q'. Suy ra AP' và AQ' đẳng giác góc A trong $\triangle ABC$. Tương tự BP', BQ' đẳng giác góc B, CP', CQ' đẳng giác góc C trong $\triangle ABC$. Ta kết luận P', Q' là hai điểm liên hợp đẳng giác trong $\triangle ABC$. □

Hệ quả 3. *Cho $\triangle ABC$, trực tâm H, điểm Lemoine L. Khi đó điểm liên hợp đẳng cự của H' chính là điểm Anticomplement của L.*

2.4. Một số điểm đặc biệt

Định lý 12. *Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O), trực tâm H. Gọi H' là điểm liên hợp đẳng giác của điểm liên hợp đẳng cự của H đối với $\triangle ABC$. Khi đó H', O, H thẳng hàng.*

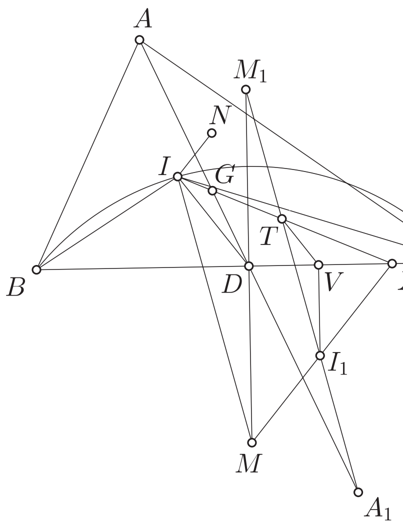


Chứng minh. Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của AH, BH, CH với BC, CA, AB. Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến tại B và C, C và A, A và B của (O). Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của H lên EF, FD, DE. Gọi V là hình chiếu của A lên EF. Do H, A lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn bàng tiếp góc D của $\triangle DEF$ nên X, V đẳng cự trên EF. Suy ra H' nằm trên AX. Tương tự H' nằm trên BY và CZ. Mặt khác vì $\triangle A'B'C' \cup \triangle ABC$ đồng dạng với $\triangle DEF \cup \triangle XYZ$ nên H' là tâm vị tự của $\triangle A'B'C'$ và $\triangle DEF$. Hơn nữa ta cũng có H, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle DEF$ và $\triangle A'B'C'$ nên H', O, H thẳng hàng. Định lý được chứng minh. $\square$

Hệ quả 4. *Gọi O_1, H_1 lần lượt là điểm liên hợp đẳng cự của O, H đối với $\triangle ABC$. Khi đó O', H', H thẳng hàng.*

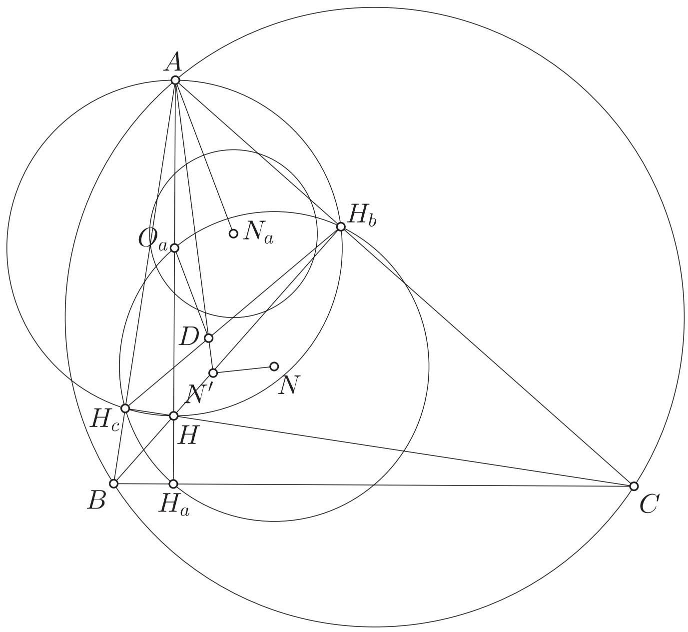
Định lý 13. *Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O), tâm đường tròn Euler N. Gọi N' là điểm liên hợp đẳng giác của điểm liên hợp đẳng cự của N đối với $\triangle ABC$. Chứng minh rằng N' là trọng tâm tam giác pedal của trực tâm H.*

Bổ đề 1. *Cho $\triangle ABC$, tâm đường tròn nội tiếp I. Gọi M, N lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn Euler của $\triangle BIC$. Đường thẳng qua M song song IN cắt BC tại X. Khi đó X nằm trên đường thẳng Nagel của $\triangle ABC$.*



Chứng minh. Gọi D là trung điểm của BC. Gọi A_1, I_1, M_1 lần lượt là điểm đối xứng của A, I, M qua D. Theo tính chất của đường tròn Euler thì N là trung điểm của IM_1 và I_1, M, X thẳng hàng. Gọi G, T lần lượt là trọng tâm, điểm Nagel của $\triangle ABC$. Do $\overrightarrow{GT} = 2\overrightarrow{IG}$ nên ta suy ra T nằm trên $\overline{A_1, I_1, M_1}$. Gọi V là hình chiếu của I_1 lên BC. Theo định nghĩa của điểm Nagel thì V nằm trên AT. Do I là điểm Complement của T đối với $\triangle ABC$ nên ta có $DI \parallel VT$ nên $\triangle DIM$ và $\triangle VTI_1$ đồng dạng. Do đó BC, IT, I_1M đồng quy hay X nằm trên đường thẳng Nagel của $\triangle ABC$. Bổ đề được chứng minh. □

Quay lại bài toán,



Chứng minh. Gọi AH_a, BH_b, CH_c là các đường cao của $\triangle ABC$ và O_a, N_a lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn Euler của $\triangle AH_bH_c$. Gọi D là giao điểm của AN' và H_bH_c. Do AD đi qua điểm liên hợp đẳng cự của N_a đối với $\triangle AH_bH_c$, chú ý điểm đối xứng của O_a qua H_bH_c nằm trên AN_a nên $AN_a \parallel DO_a$. Do A là tâm đường tròn bàng tiếp góc H_a của

$\triangle H_aH_bH_c$ nên áp dụng **Bổ đề 1** ta có AN' đi qua trọng tâm của $\triangle H_aH_bH_c$. Tương tự BN' và CN' cũng đi qua trọng tâm của $\triangle H_aH_bH_c$ nên N' là trọng tâm của $\triangle H_aH_bH_c$. □

3. Bài tập đề nghị

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC với hai điểm D, E lần lượt nằm trên AC, AB sao cho DE đối song BC. Gọi H, K lần lượt là hai điểm đẳng cự của D, E trên AC, AB. Gọi X, Y theo thứ tự là giao điểm của BC với (AHB) và (AKC). Chứng minh rằng AX và AY là hai đường đẳng cự trong tam giác ABC.*

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Đường trung tuyến AM của tam giác ABC cắt (I) tại L và K. Từ L, K kẻ đường thẳng song song BC cắt (I) lần lượt tại X, Y. Chứng minh rằng AX và AY là hai đường đẳng cự trong tam giác ABC.*

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC. Gọi D là một điểm di chuyển trên cạnh BC. Gọi E là điểm đẳng cự của D trên BC. AD và AE lần lượt cắt (ABC) tại P, Q. Chứng minh PQ luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi.*

Bài toán 4. *Chứng minh rằng đường thẳng đi qua A', B', C' được đề cập ở* **Định lý 7** *vuông góc với đường thẳng Euler của $\triangle ABC$.*

Bài toán 5. *Cho $\triangle ABC$ và điểm P bất kì nằm trên (ABC). Kẻ đường kính PQ của (ABC). Gọi P', Q' lần lượt là hai điểm liên hợp đẳng cự của P, Q đối với $\triangle ABC$. Chứng minh rằng $P'Q$ cắt PQ' tại một điểm thuộc (ABC).*

Bài toán 6. *Chứng minh rằng đường thẳng nối điểm liên hợp đẳng cự của hai điểm Brocard trong một tam giác vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác ấy.*

Bài toán 7. *Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O), tâm đường tròn Euler N và điểm Kosnita K. Gọi N', K' lần lượt là điểm liên hợp đẳng cự của N, K đối với $\triangle ABC$. Chứng minh rằng KN cắt $K'N'$ tại một điểm thuộc (O).*

Bài toán 8. *Chứng minh rằng điểm liên hợp Cyclocevian của một điểm là điểm liên hợp đẳng cự của điểm Anticomplement của điểm liên hợp đẳng giác của điểm Complement của điểm liên hợp đẳng cự của điểm ấy.*

Bài toán 9. *Cho tứ giác $ABCD$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là điểm liên hợp đẳng cự của A, B, C, D đối với $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$, $\triangle ABC$. Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn thẳng AC, BD, $A'C'$, $B'D'$ thẳng hàng.*

Trên đây là tổng kết của tác giả về một số kết quả đối với đường đẳng cự. Hi vọng bạn đọc thấy bài viết là một tài liệu hữu ích và sẽ tìm tòi những ứng dụng đẹp đẽ vẫn chưa được khai thác hết đối với đường thẳng này. Có thể bài viết chưa thực sự đầy đủ, mọi góp ý xin gửi về email chuyentoanltt1417@gmail.com để tác giả hoàn thiện hơn.

Tài liệu

[1] Isotomic conjugate, Complement, Anticomplement, Cyclocevian conjugate, *Wolfram Mathworld*

[2] D.Grinberg, *Cyclocevian conjugate* http://mathforum.org/kb/message.jspa?messageID=1071639

[3] Nguyễn Trần Hữu Thịnh, *Isotomic Problem* http://artofproblemsolving.com/community/c6h1366001p7504596

[4] A.Myakishev, *On two remarkable lines related to a quadrilateral, Forum Geometricorum*, 6 (2006) 289–295 http://forumgeom.fau.edu/FG2006volume6/FG200634.pdf

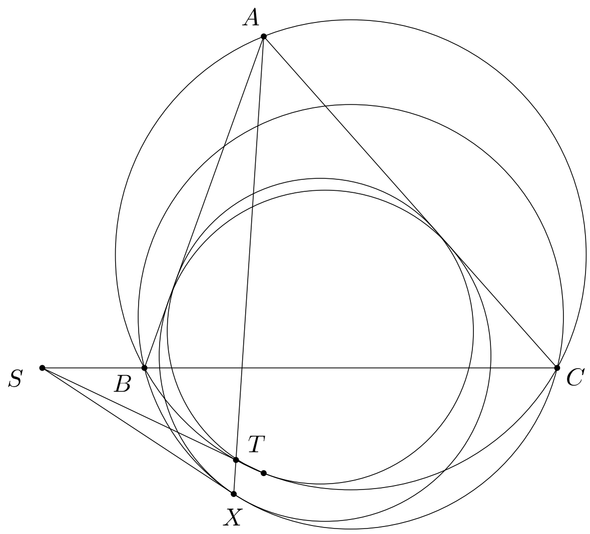
MỘT MỞ RỘNG CHO ĐƯỜNG TRÒN MIXTILINEAR

Nguyễn Đình Hoàng - Nguyễn Đức Bảo
THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An

TÓM TẮT

Bài viết ngắn này đưa ra một mở rộng cho đường tròn mixtilinear với cách chứng minh thuần túy hình học.

Bài toán. *Cho tam giác ABC, đường tròn Ω qua B, C khác (ABC). Giả sử tồn tại đường tròn ω tiếp xúc CA, AB và tiếp xúc trong với Ω tại X. Tiếp tuyến tại X của Ω cắt BC tại S, AX cắt (ABC) tại T khác A. Chứng minh rằng ST đi qua điểm tiếp xúc của đường tròn Mixilinear ứng với đỉnh A của tam giác ABC.*



Ta phát biểu và chứng minh một số bổ đề.

Bổ đề 1 (Định lí Protassov)**.** *Cho tam giác ABC và một đường tròn (K) đi qua B, C. Đường tròn (L) tiếp xúc cạnh CA, AB và tiếp xúc ngoài (K) tại P. Khi đó phân giác $\angle BPC$ đi qua tâm nội tiếp tam giác ABC.*

Bổ đề là một kết quả quen thuộc và đã có trong nhiều tài liệu, bạn đọc có thể tham khảo chứng minh trong [4].

Bổ đề 2. *Với kí hiệu như bài toán mở rộng, gọi M, N là điểm tiếp xúc của ω với CA, AB. P là điểm chính giữa cung lớn BC của Ω. Khi đó MN, BC, XP đồng quy.*

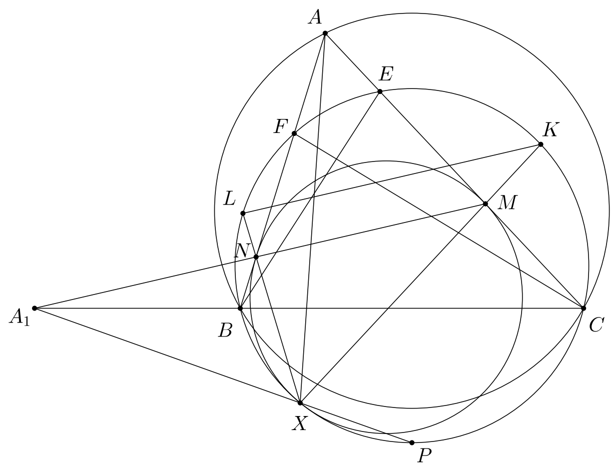
Chứng minh bổ đề. Gọi A_1 là giao điểm của MN với BC. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC với cát tuyến A_1, M, N ta thu được :

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{NA}{NB}\cdot\frac{MC}{MA}=1\Rightarrow\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{MC}{NB}=1\Rightarrow\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{NB}{MC}$$

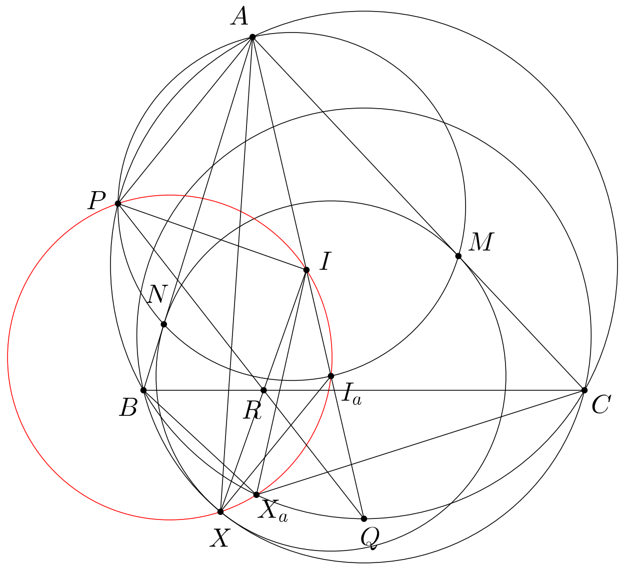
Gọi E, F lần lượt là giao điểm của CA, AB với Ω. K, L lần lượt là điểm chính giữa cung CE, BF của Ω. Dễ thấy X, M, K và X, N, L thẳng hàng. Từ đó $\triangle KMC\sim\triangle KCX$ suy ra :

$$\frac{MC}{XC}=\frac{KM}{KC}=\frac{KC}{KX}\Rightarrow\left(\frac{MC}{XC}\right)^2=\frac{KM}{KX}$$

Tương tự thì $\left(\frac{NB}{XB}\right)^2=\frac{LN}{LX}$ nên theo định lí Thales thì $\frac{MC}{XC}=\frac{NB}{XB}\Leftrightarrow\frac{XB}{XC}=\frac{NB}{MC}=\frac{A_1B}{A_1C}$
Do đó XA_1 là phân giác ngoài của $\angle BXC$ tức là A_1, X, P thẳng hàng. □



Bổ đề 3. *Cũng trong cấu hình bài toán mở rộng, gọi I_a là tâm đường tròn ω, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi P là giao điểm khác A của đường tròn đường kính AI_a với đường tròn O. Khi đó bốn điểm P, I, I_a, X cùng thuộc một đường tròn và đường tròn đó đi qua điểm tiếp xúc của đường tròn mixilinear ứng với đỉnh A của tam giác ABC.*

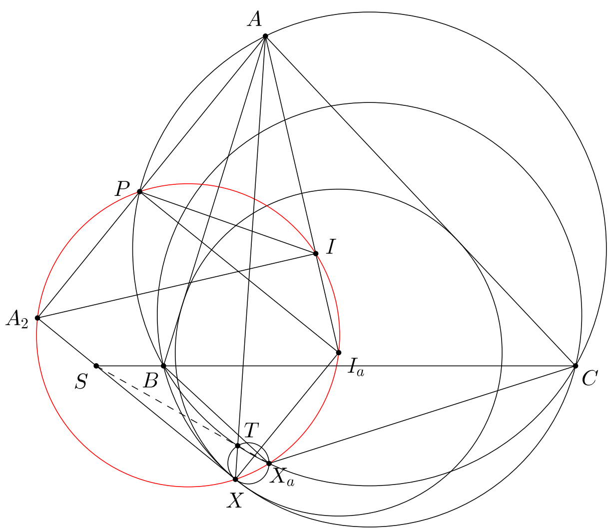


Chứng minh bổ đề. Gọi R là giao điểm của XI với BC, Q là giao điểm của AI với đường tròn (ABC). Do $\angle PNA = \angle PMA$, $\angle PBA = \angle PCA$ nên $\triangle PNB \sim \triangle PMC$ kết hợp với bổ đề 2 ta suy ra

$$\frac{PB}{PC} = \frac{NB}{MC} = \frac{XB}{XC}$$

Mặt khác theo bổ đề 1 thì XI là phân giác $\angle BXC$ nên PQ, XI cắt nhau trên BC tức là P, R, Q thẳng hàng. Do đó $QI^2 = QB^2 = QR \cdot QP$ nên $\triangle RIQ \sim \triangle IPQ$ suy ra $\angle PIQ = \angle IRQ$. Mặt khác do BC là đường đối song của tam giác APQ nên $\angle QRC = \angle PAI$ suy ra $\angle IRC = \angle IRQ - \angle QRC = \angle PIQ - \angle PAI = \angle IPA$ do đó $\angle IPI_a = 90° - \angle IPA = 90° - \angle IRC = 90° - \angle XRB = \angle RXI_a$ (do XI_a đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BXC). Từ đó tứ giác PII_aX nội tiếp.
Gọi X_a là điểm tiếp xúc của đường tròn mixilinear ứng với đỉnh A của tam giác ABC. Theo bổ đề 1 thì X_aI đi qua điểm chính giữa cung BC chứa A của (O). Mặt khác PI_a đi qua điểm đối xứng của A qua O và đường thẳng nối hai điểm này song song với AI nên tứ giác PII_aX_a nội tiếp. Bổ đề được chứng minh. □

Trở lại bài toán. Gọi A_2 là giao điểm của SX với AP, khi đó A_2 thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác PI_aX. Theo bổ đề 3, lục giác $PA_2XX_aI_aI$ nội tiếp một đường tròn. Ta có biến đổi góc : $\angle SXX_a = 90° + \angle I_aXX_a = 90° + \angle X_aII_a$. Theo bổ đề 1, X_aI là phân giác $\angle BX_aC$ nên $\angle X_aII_a = 180° - \angle AIX_a = 180° - \angle IX_aC - \angle IAC - \angle ACX_a = 90° - \angle ACX_a = 90° - \angle XTX_a$ suy ra $\angle XTX_a = 180° - \angle SXX_a$. Do đó SX là tiếp tuyến tại X của đường tròn ngoại tiếp tam giác TX_aX. Áp dụng định lý về tâm đẳng phương cho bộ ba đường tròn (ABC), (XTX_a), Ω ta thu được S, T, X_a thẳng hàng.



Tài liệu

[1] Mixtilinear incircles, *Wolfram Mathworld*
http://mathworld.wolfram.com/MixtilinearIncircles.html

[2] SK đi qua điểm cố định, *Diễn đàn toán học*
http://diendantoanhoc.net/topic/156035

[3] Khoa Lu Nguyen and Juan Carlos Salazar, *On mixtilinear incircles and excircles, Forum Geometricorum*, 6 (2006) 1–16

http://forumgeom.fau.edu/FG2006volume6/FG200601.pdf

[4] Mỗi tuần một bài toán, Tuần 1 tháng 9 năm 2016
http://analgeomatica.blogspot.com/2016/09/moi-tuan-mot-bai-toan-tuan-1-thang-9.html

SÓNG LƯU ĐỘNG VÀ ỨNG DỤNG VÀO MÔ HÌNH LAN TRUYỀN DỊCH BỆNH

Võ Hoàng Hưng, Nguyễn Đặng Minh Huy, Võ Hoàng Trọng, Võ Anh Kiệt

1. PHƯƠNG TRÌNH SÓNG LƯU ĐỘNG

Phương trình Fisher sau khi viết gọn các tham số sẽ có dạng:

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial^2 z} + \beta(1-\beta) \tag{1}$$

Trong đó β là hàm số theo hai biến z, t và β, z, t không phụ thuộc tham số.

Rõ ràng nghiệm của phương trình phụ thuộc vào điều kiện đầu và điều kiện biên. Chúng ta đặt những điều kiện đó theo thời gian như sau:

$$\beta(z,t) \to \beta_{\pm\infty} \text{ khi } z \to \pm\infty \text{ và } \beta(z, t=0) = \beta_0(z) \tag{2}$$

Trong đó $\beta_{\pm\infty}, \beta_0$ là những hằng số.

1.1. Một số điểm chính

1.1.1. Xây dựng phương trình sóng lưu động

Phương trình 1 có thể có rất nhiều nghiệm, tuy nhiên trong phần này ta sẽ tìm nghiệm có dạng sóng lưu động (đơn giản có thể hiểu là hàm không thay đổi về hình dạng và chuyển động với vận tốc v sẽ được xác định sau). Ý nghĩa của nghiệm sóng lưu động sẽ được giải bày rõ hơn ở mục 1.1.3.

Xét phép biến đổi $y = z - vt$ và hàm số $B : R \to R$ thỏa $B(y) = \beta(z,t)$. Sử dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp ta được:

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial y} \text{ và } \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \beta}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}.\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \tag{3}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t} = -v\frac{\partial B}{\partial y} \tag{4}$$

Thay vào (1) ta được

$$B'' + vB' + B(1-B) = 0 \tag{5}$$

với B là hàm số theo biến y và $' = \frac{d}{dy}$ và $B(y) \to B(\pm\infty), y \to \pm\infty$ là các hằng số.

1.1.2. Điều kiện biên

Ta chỉ tìm $B(y) \in [0,1], \forall y \in R$

- Ta cần điều kiện biên thỏa $B(+\infty), B(-\infty), B'(+\infty), B'(-\infty)$ là các số hữu hạn. Khi đó $B(+\infty), B(-\infty)$ hoặc bằng 0 hoặc bằng 1. Thật vậy, giả sử $B(+\infty) \in (0;1)$ hay $\lim\limits_{y\to\infty} B(y) = a \in (0;1)$ với $\varepsilon = \min\left\{\frac{a}{2}; \frac{1-a}{2}\right\} > 0$, tồn tại $y_0 > 0$ sao cho $|B(y) - a| < \varepsilon, \forall y \geq y_0$.

$$\Rightarrow a - \varepsilon < B(y) < a + \varepsilon, \quad \forall y \geq y_0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} B(y) > a - \varepsilon > a - \frac{a}{2} > \frac{a}{2} > 0 \\ 1 - B(y) > 1 - a - \varepsilon = 1 - a - \frac{1-a}{2} = \frac{1-a}{2} > 0 \end{cases}, \forall y \geq y_0$$
$$\Rightarrow B(y).(1 - B(y)) > \frac{a(1-a)}{2}, \forall y \geq y_0$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} B(y).(1 - B(y))dy \geq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(1-a)}{2} = \infty$$

Mặc khác ta có $B''(y) + vB'(y) + B(y)(1 - B(y)) = 0$, lấy tích phân 2 vế ta được

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [B'' + vB' + B(1 - B)]dy = 0 \tag{6}$$

$$[B'(y) + vB(y)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} B(y)(1 - B(y))dy = 0 \tag{7}$$

Do $B'(+\infty), B'(-\infty), B(+\infty), B(-\infty)$ là các số hữu hạn và kết hợp với (6) ta được vế trái (7) vô hạn đưa đến điều vô lý.

Vậy $a = 0$ hoặc $a = 1$. Tương tự cho trường hợp $B(-\infty)$.

- Không mất tính tổng quát và dựa trên những quy luật được tiên đoán trên thực tế ta có thể giả sử $(B(-\infty), B(+\infty)) = (1, 0)$. Khi đó ta phải có $v \geq 0$, khi đó sẽ có $v \geq 0$.

- Bây giờ ta sẽ chứng minh điều kiện biên cuối cùng là $B'(\pm\infty) = 0$.

  - Trước hết ta chứng minh $B(+\infty) = 0$.
    Ta có $\lim\limits_{y\to+\infty} B(y) = 0$ nên với $\varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0, n > 2$ thì tồn tại $\delta_n > 0$ sao cho:

$$|B(y)| < \varepsilon_n, \forall y > \delta_n$$

hay

$$0 < B(y) < \frac{1}{n}$$

do $B(y) \in [0;1]$.
Xét hàm số $g(t) = t - t^2, t \in (0; \frac{1}{n})$

$$g'(t) = 1 - 2t, g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} > \frac{1}{n}, \forall n > 2$$

Kẻ bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{n}$
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$

Qua bảng biến thiên ta thấy

$$0 < g(t) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

hay

$$0 < B(y)(1 - B(y)) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}, \forall y > \delta_n$$

lại có

$$B''(y) + vB'(y) = -B(y)(1 - B(y))$$

nên

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} < B''(y) + vB'(y) < 0, \forall y > \delta_n$$

Xét

$$u(y) = e^{vy}B'(y), y \in (\delta_n; +\infty)$$

khi đó

$$u'(y) = e^{vy}(B''(y) + vB'(y)) < 0, \forall y > \delta_n$$

nên u là hàm số giảm trên $(\delta_n; +\infty)$.
Suy ra

$$\begin{aligned} & u(y) < u(\delta_n), \forall y > \delta_n \\ \Rightarrow & e^{vy}B'(y) < e^{v\delta_n}B'(\delta_n) \\ \Rightarrow & B'(y) < e^{v\delta_n}B'(\delta_n).e^{-vy} \end{aligned}$$

Cho $y \to +\infty$ ta được

$$B'(+\infty) \leq 0 \tag{8}$$

Xét

$$h(y) = e^{vy}\left(B'(y) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{v}\right), y \in (\delta_n; +\infty)$$

khi đó

$$h'(y) = e^{vy}\left(B''(y) + vB'(y) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) > 0, \forall y > \delta_n$$

nên u là hàm số tăng trên $(\delta_n;+\infty)$.
Suy ra

$$\begin{aligned} &h(y) > h(\delta_n),\ \ \forall y > \delta_n \\ \Rightarrow &e^{vy}B'(y) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right).\frac{1}{v} > h(\delta_n) \end{aligned}$$

Cố định n, cho $y \to +\infty$ ta được

$$B'(+\infty) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{v} \geq 0, \forall n > 2$$

Cho $n \to +\infty$ ta được

$$B'(+\infty) \geq 0 \tag{9}$$

Từ (8) và (9) ta được $B'(+\infty) = 0$.

– Trường hợp $B'(-\infty)$

Đặt $\widetilde{B}(w) = B(-w) = \beta(z,t); w = z - \widetilde{v}\,t$, ở đây ta phải hiểu $(\widetilde{B};\widetilde{v})$ là một cặp nghiệm của (5), khi đó

$$\begin{aligned} \widetilde{B}'(y) &= -B(-y) \\ \widetilde{B}''(y) &= B''(-y) \end{aligned}$$

ta sẽ chứng minh $\widetilde{B}'(+\infty) = 0$ để suy ra $B'(-\infty) = 0$.
Thiết lập tương tự như phần 1.1.1, ta được

$$\widetilde{B}''(y) + \widetilde{v}\,\widetilde{B}'(y) + \widetilde{B}(y)(1 - \widetilde{B}(y)) = 0$$

Lúc này ta có

$$\begin{aligned} \widetilde{B}(+\infty) &= B(-\infty) = 1 \\ \widetilde{B}(-\infty) &= B(+\infty) = 0 \end{aligned}$$

khi đó $\widetilde{v} > 0$. Như vậy

$$\widetilde{B}''(y) + \widetilde{v}\,\widetilde{B}'(y) + \widetilde{B}(y)(1 - \widetilde{B}(y)) = 0$$

với $\widetilde{v} > 0$.
Áp dụng trường hợp trên, ta được

$$\begin{aligned} &\widetilde{B}'(+\infty) = 0 \\ \Rightarrow\ &B'(-\infty) = 0 \end{aligned}$$

1.1.3. Tiệm cận theo thời gian

Một kết quả nổi tiếng của nhà toán học người Nga Kolmogorov đã chứng minh được rằng, khi $t \to \infty$, nghiệm của phương trình (1) và (2) thật sự tiến về nghiệm sóng lưu động thỏa (5) nếu và chỉ nếu $v \geq 2$, với điều kiện đầu cho trước có dạng là một hàm số có giá compact hoặc có dạng Heaviside. Tuy nhiên nghiệm của phương trình sóng lưu động (5) không phải là duy nhất vì dễ thấy rằng nếu $B(y)$ là một nghiệm của (5) thì $B(y+A)$ với A là hằng số bất kì cũng là nghiệm của (5). Thật vậy, đặt $G(w) = B(y+A), w = y + A$ ta được

$$G'(w) = B'(y+A), \quad G''(w) = B''(y+A) \tag{10}$$

Thay y bởi $y + A$ vào (5) và kết hợp với (10) ta được

$$G''(w) + vG'(w) + u(w)(1 - u(w)) = 0.$$

1.2. Sự tồn tại nghiệm và mặt phẳng pha

Ta sẽ kiểm tra sự tồn tại nghiệm của phương trình Fisher (5) với điều kiện biên $(B(\infty), B(-\infty)) = (1, 0)$ và $v > 0$ dựa trên ý nghĩa của các bài tập mở rộng liên quan mặt phẳng pha (B', B).

Xét phương trình sóng lưu động:

$$B''(y) + vB'(y) + B(y)(1 - B(y)) = 0 \tag{11}$$

trong đó $(B(\infty), B(-\infty)) = (1, 0)$ và $v > 0$.

Đặt

$$\begin{cases} \gamma & = B' = f(B, \gamma) \\ -v\gamma - B(1-B) & = \gamma' = g(B, \gamma) \end{cases}$$

Bài tập 1. Chứng tỏ rằng điểm cân bằng (stationary point) $(\beta', \beta) = (1, 0)$ luôn là điểm yên ngựa (saddle point) và điểm cân bằng $(\beta', \beta) = (0, 0)$ là điểm ổn định (stable node) khi $v \geq 2$ và là điểm ổn định theo hình xoắn ốc (stable spiral) khi $v < 2$.

Giải. Bằng cách viết $\beta' = \gamma$ ta được

$$\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} \beta \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ -v\gamma - \beta(1-\beta) \end{pmatrix}$$

Ma trận Jacobi được cho bởi

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \beta} & \frac{\partial f}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial g}{\partial \beta} & \frac{\partial g}{\partial \gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2\beta & -v \end{pmatrix}$$

Tại điểm $(0, 0)$ ta có

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -v - \lambda \end{vmatrix}$$
$$\Rightarrow \lambda^2 + v\lambda + 1 = 0$$

Suy ra
$$\lambda = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 - 4}}{2}$$

Do đó, nếu $v < 2$ thì λ là nghiệm phức có dạng $\lambda = -v/2 \pm i\mu$ nên $(\beta', \beta) = (0, 0)$ là điểm ổn định theo hình xoắn ốc.

Nếu $v \geq 2$ thì
$$-v + \sqrt{v^2 - 4} < -v + \sqrt{v^2} = -v + v = 0$$
nên
$$-v - \sqrt{v^2 - 4} < -v + \sqrt{v^2 - 4} < 0$$
dẫn đến $(\beta', \beta) = (0, 0)$ là điểm ổn định.

Tại điểm $(1, 0)$ ta có

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -v - \lambda \end{vmatrix}$$
$$\Rightarrow \lambda^2 + v\lambda - 1 = 0$$

Suy ra
$$\lambda = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 4}}{2}$$

Dễ thấy
$$-v + \sqrt{v^2 + 4} > -v + \sqrt{v^2} = -v + v = 0$$
nên
$$-v - \sqrt{v^2 + 4} < 0 < -v + \sqrt{v^2 + 4}$$
Do đó $(\beta', \beta) = (1, 0)$ là điểm yên ngựa.

Bài tập 2. Hãy giải thích tại sao nghiệm của phương trình sóng lưu động Fisher phải tiến về điểm ổn định khi $y \to \pm\infty$ và nghiệm của (4) với $v < 2$ không thực tế?

Giải. Theo 1.1.2, ta có

$$B(\infty) = 0$$
$$B'(\infty) = 0$$
$$B(-\infty) = 1$$
$$B'(-\infty) = 0$$

do đó

$$(B, \gamma) \xrightarrow{y \to \infty} (0, 0)$$
$$(B, \gamma) \xrightarrow{y \to -\infty} (1, 0)$$

Nếu $v < 2$ thì $(0, 0)$ là điểm ổn định theo hình xoắn ốc, do đó vết (B, γ) tiến về $(0; 0)$ theo hình xoắn ốc thì $B(y) < 0$ tại một vài điểm trên vết và điều này không thực tế.

Bài tập 3. Hãy chỉ ra rằng gradient của đa tạp không ổn định tại $(B, \gamma) = (0, 1)$ là hai phần đường đi xuất phát từ điểm $(B, \gamma) = (0, 1)$, xác định bởi công thức

$$\frac{1}{2}(\pm v + \sqrt{v^2 + 4})$$

Giải. Ta tìm vector riêng của ma trận Jacobi tại $(1; 0)$, tức là

$$\begin{aligned}
J(1, 0). \begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta \gamma \end{pmatrix} &= \pm\lambda \begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta \gamma \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -v \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta \gamma \end{pmatrix} &= \pm\lambda \begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta \gamma \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \gamma = \Delta B . \lambda_+ \\ \Delta B - v \Delta \gamma = b \lambda_+ \end{cases} &\vee \begin{cases} \Delta \gamma = \Delta B . \lambda_- \\ \Delta B - v \Delta \gamma = b \lambda_- \end{cases} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \gamma = \Delta B . \lambda_+ \\ \Delta \gamma = \Delta B . \frac{1}{v + \lambda_+} \end{cases} &\vee \begin{cases} \Delta \gamma = \Delta B . \lambda_- \\ \Delta \gamma = \Delta B . \frac{1}{v + \lambda_-} \end{cases}
\end{aligned}$$

thay

$$\lambda_\pm = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 4}}{2}$$

ta được

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \gamma = \Delta B . \lambda_+ \\ \Delta \gamma = \Delta B . \frac{2}{v + \sqrt{v^2 - 4}} \end{cases} &\vee \begin{cases} \Delta \gamma = \Delta B . \lambda_- \\ \Delta \gamma = \Delta B . \frac{2}{v - \sqrt{v^2 - 4}} \end{cases} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \gamma = \Delta B . \lambda_+ \\ \Delta \gamma = \Delta B . \frac{v - \sqrt{v^2 + 4}}{-2} \end{cases} &\vee \begin{cases} \Delta \gamma = \Delta B . \lambda_- \\ \Delta \gamma = \Delta B . \frac{v + \sqrt{v^2 + 4}}{-2} \end{cases} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \gamma = \Delta B . \lambda_+ \\ \Delta \gamma = \Delta B . \lambda_+ \end{cases} &\vee \begin{cases} \Delta \gamma = \Delta B . \lambda_- \\ \Delta \gamma = \Delta B . (\lambda_-) \end{cases} \\
\Leftrightarrow \Delta \gamma &= \Delta B . \lambda_\pm
\end{aligned}$$

Khi đó ta được

$$\nabla = \left| \frac{\Delta \gamma}{\Delta B} \right| = \left| \frac{v \pm \sqrt{v^2 + 4}}{2} \right| = \frac{\pm v + \sqrt{v^2 + 4}}{2}$$

Bài tập 4. Hãy giải thích tại sao bất kì quỹ đạo (B, γ) hữu hạn phải đi ra từ điểm $(1; 0)$ trên đa tạp không ổn định theo hướng giảm B?

Giải. Nhắc lại gần ở những điểm rất gần điểm ổn định, ta có:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}B\\ \gamma\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\Delta B\\ \Delta\gamma\end{pmatrix}\\ &=a_-e^{\lambda_-y}v_-+a_+e^{\lambda_+y}v_+\\ &=a_-e^{\lambda_-y}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}(-v-\sqrt{v^2+4}\end{pmatrix}\\ &+a_+e^{\lambda_+y}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}(-v+\sqrt{v^2+4}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Từ đó ta được:

$$\begin{cases}B(y)-1=a_-e^{\lambda_-y}+a_+e^{\lambda_+y}\\ \gamma(y)=a_-e^{\lambda_-y}\lambda_-+a_+e^{\lambda_+y}\lambda_+\end{cases}$$

Với $y<0$ đủ bé thì ta có

$$\begin{cases}B(y)-1\approx a_-e^{\lambda_-y}\\ \gamma(y)\approx a_-e^{\lambda_-y}.\lambda_-\end{cases}$$

do $\lambda_+>0$. Mặt khác, do $B(y)\in(0;1)$ nên $a_-<0$, khi đó $B'(y)=\gamma(y)=a_-e^{\lambda_-y}.\lambda_-$ là hàm số giảm, mà $B'(-\infty)=0$ dẫn đến $B'(y)<0$, nói cách khác quỹ đạo (B,γ) hữu hạn phải đi ra từ điểm $(1;0)$ trên đa tạp không ổn định theo hướng giảm B.

Bài tập 5. Xét $v\geq 2$, hãy chỉ ra rằng

$$\frac{d\gamma}{dB}<1$$

khi $\gamma=-B;B\in(0;1]$

Giải. Ta có

$$\frac{d\gamma}{dB}=\frac{-v\gamma-B(1-B)}{B}$$

do đó

$$\left.\frac{d\gamma}{dB}\right|_{\gamma=-B}=-v+(1-B)=(-v+2)-(1+B)<-1$$

Bài tập 6. Chỉ ra rằng khi $v\geq 2$ thì đa tạp không ổn định rời khỏi $(B',B)=(1;0)$ và đi vào miền $B'<0,B<1$ sẽ không bao giờ rời khỏi miền.

$$R=\{(B,\gamma):\gamma\leq 0,B\in[0;1],\gamma\geq -B\}$$

Giải. Trên mặt phẳng (B,γ), R chính là miền hình tam giác tạo bởi 3 cạnh

$$\begin{aligned}L_1&=\{(B,\gamma):\gamma=0,B\in(0,1)\}\\ L_2&=\{(B,\gamma):B=1,\gamma\in(-1;0)\}\\ L_3&=\{(B,\gamma):\gamma=-B,B\in(0,1]\}\end{aligned}$$

Theo bài tập 4 thì quỹ đạo xuất phát từ điểm $(B,B')=(1;0)$ theo hướng giảm B (ta gọi là (C)) sẽ đi vào miền R vì

$$B(y)\approx 1+a_-e^{\lambda_-y}<1$$

$$\gamma(y)\approx a_-e^{\lambda_-y}.\lambda_-<0$$

Ta sẽ chứng minh (C) không thể đi ra khỏi R bằng cách chỉ ra rằng khi nó tiến đến gần hay chạm vào một trong 3 cạnh của R theo hướng ra thì nó sẽ không thể đi tiếp ra ngoài R mà phải đi vào trong R.

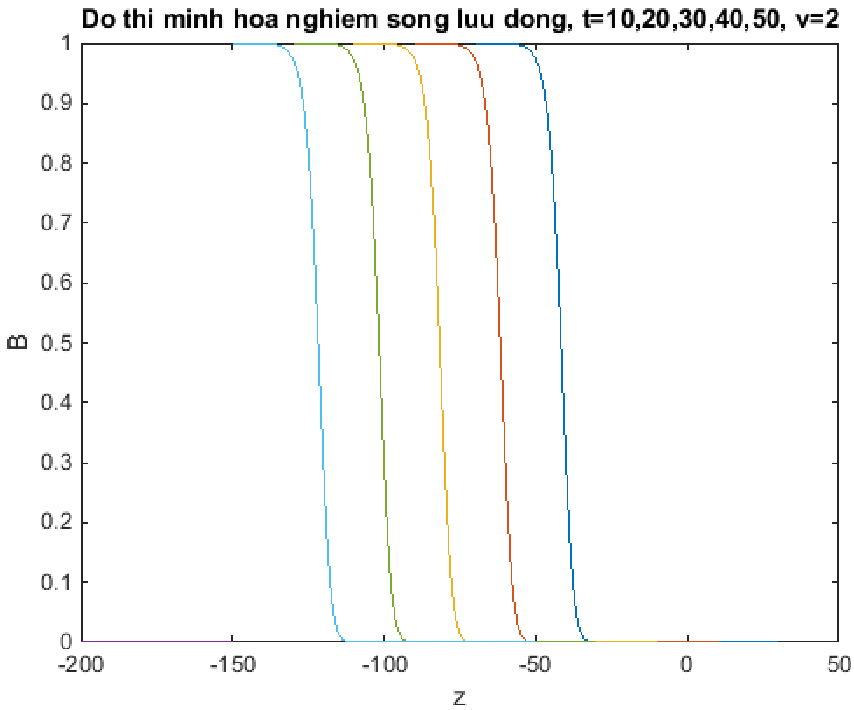
- Nếu (C) tiến đến L_1 từ bên trong R, khi đó
$$\frac{d\gamma}{dB} = -v - \frac{B(1-B)}{\gamma} \to -\infty$$
do $\gamma \to 0; B \in (0,1)$.
Lúc đó (C) sẽ quay ngược vào R theo hướng hợp với trục OB một góc -90^0 theo chiều lượng giác.
- Nếu (C) tiến đến L_2 từ bên trong R khi đó
$$\left.\frac{d\gamma}{dB}\right|_{L_2} = -v - \frac{B(1-B)}{\gamma} = -v < 0$$
Lúc đó (C) sẽ tiếp tục đi theo hướng hợp với OB một góc $a \in (90^0; 180^0)$ hoặc $a \in (270^0; 360^0)$ theo chiều lượng giác. Tuy nhiên do lúc này $B' = \gamma < 0$, do đó (C) phải tiếp tục đi theo chiều giảm B nghĩa là theo góc $a \in (90; 180)$, nói cách khác (C) tiếp tục đi trong R.
- Nếu (C) tiến đến L_3 từ bên trong R, khi đó theo bài tập 5 ta có
$$\left.\frac{d\gamma}{dB}\right|_{\gamma=-B} < -1$$
lúc đó (C) sẽ tiếp tục đi theo hướng hợp với OB một góc $a \in (90^0; 135^0)$ hoặc $a \in (270^0; 315^0)$ theo chiều lượng giác. Tuy nhiên do lúc này $B' = \gamma = -B < 0$, do đó (C) phải tiếp tục đi theo chiều giảm B nghĩa là theo góc $a \in (90^0; 135^0)$, nói cách khác (C) tiếp tục đi trong R.

Bài tập 7. Chứng minh rằng tồn tại nghiệm đơn điệu $B \geq 0$ thỏa phương trình (1) với mọi giá trị $v \geq 2$.

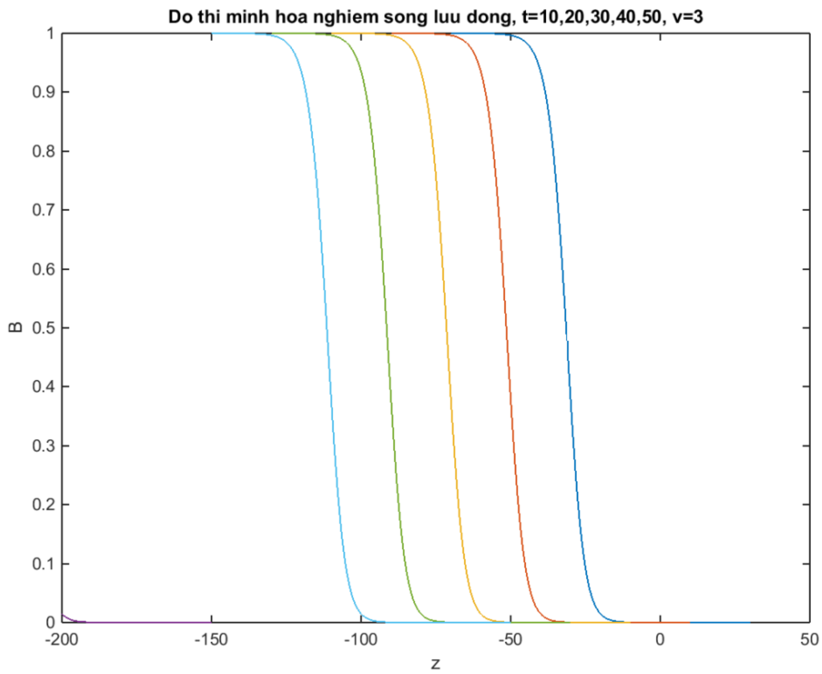
Giải. Để thỏa điều kiện biên của phương trình (1) thì nghiệm B phải có đồ thị trên hệ trục tọa độ (B, B') xuất phát từ điểm $(1; 0)$. Theo bài tập 4 thì quỹ đạo (C) của một hàm B nào đó thỏa (1). Với $v \geq 2$ cho trước thì chỉ xác định được một hàm như vậy. Quỹ đạo (C) sẽ đi vào miền R như đã lý luận ở bài tập 6, nó sẽ không thể đi ra khỏi R để rồi tiến về $(0; 0)$ khi $y \to \infty$ như đã trình bày ở bài tập 2. Trong quá trình đi trong R luôn có $B' = \gamma < 0$ nên nghiệm B sẽ đơn điệu giảm và duy nhất nếu v cho trước cố định.

1.3. Quan hệ giữ tốc độ lan truyền sóng và điều kiện đầu

Chúng ta đã thấy rằng, với v cố định, mặt phẳng biểu diễn nghiệm của phương trình sóng lưu động Fisher là duy nhất. Tính không duy nhất dễ thấy vì $\beta(y)$ là nghiệm của phương trình Fisher



Hình 1: Đồ thị minh họa nghiệm sóng lưu động ứng với $t = 10, 20, 30, 40, 50$ ứng với $v = 2$



Hình 2: Đồ thị minh họa nghiệm sóng lưu động ứng với $t = 10, 20, 30, 40, 50$ ứng với $v = 3$

thì $\beta(y + A)$ cũng là nghiệm với A là hằng số, về mặt hình học, điều này tương ứng với sự di chuyển của sóng dọc theo mặt phẳng biểu diễn.

Hai hình trên minh họa nghiệm của hệ (1) và (2) tại các thời điểm $t = 10, 20, 30, 40, 50$ với các vận tốc khác nhau $v = 2$ và $v = 3$.

Với cùng vận tốc, ta nhận xét đồ thị của nghiệm hệ (1) và (2) có hình dạng không thay đổi theo thời gian giống như một "con sóng" ổn định về biên độ đang chuyển động trong mặt phẳng tọa độ. Đồng thời với khi vận tốc v thay đổi, thì tốc độ chuyển động của sóng cũng thay đổi, cụ thể là tại cùng thời gian $t = 10$, con sóng đại diện cho nghiệm của hệ (1) và (2) với $v = 3$ chuyển động nhanh hơn con sóng với $v = 2$ (nhanh hơn theo nghĩa di chuyển sang phải nhiều hơn).

Kolmogorov đã xét phương trình sau

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \varphi(1 - \varphi)$$

với điều kiện biên

$$\varphi(z, \tau) \to 1 \text{ khi } z \to -\infty \text{ và } \varphi(z, \tau) \to 0 \text{ khi } z \to \infty$$

và điều kiện đầu thỏa mãn điều sau: Tồn tại K với $0 < K < \infty$ sao cho $\varphi(z, \tau = 0) = 0$ với $z > K$và $\varphi(z, \tau = 0) = 1$ với $z < -K$. Ông đã chứng minh được $\varphi(z, \tau)$ tiến tới nghiệm của phương trình sóng lưu động Fisher với $v = 2$ khi $t \to \infty$. Chúng ta chấp nhận điều này và không chứng minh.

2. MÔ HÌNH LAN TRUYỀN DỊCH BỆNH

2.1. Lịch sử

Vào giữa thế kỷ 14, ở châu Âu xuất hiện đại dịch "Cái Chết Đen" quét qua lục địa này. Những nghiên cứu gần đây cho thấy "Cái Chết Đen" hình thành do loài bọ chét truyền từ chuột sang người, gây nên bệnh dịch hạch. Đại dịch này xuất phát ở Ý vào khoảng tháng 12, năm 1347 từ những chuyến tàu cập bến từ phương Đông. Vài năm sau đó, đại dịch lan rộng khoảng 200 đến 400 dặm mỗi năm, khiến cho một phần ba dân số châu Âu thiệt mạng và 80% những người nhiễm bệnh sẽ chết trong 2 đến 3 ngày tới. Hình 3 mô tả mức độ lan truyền theo dạng sóng của bệnh dịch này.

Trong bài này, ta nghiên cứu một mô hình đơn giản của sự lan truyền và cách xấp xỉ trong thực tế với giả định rằng lượng tổng thể sinh vật luôn cố định. Giả sử có một dịch bệnh lan truyền trong một khu vực, bệnh này có thể được cứu chữa, nhưng người mắc bệnh có thể chết, ta không loại bỏ số lượng người chết ra khỏi tổng dân số trong vùng. Ta phân tổng số người trong vùng đó thành 3 lớp:

- Lớp dễ bệnh S: Những người trong lớp này chưa hề mắc bệnh và có nguy cơ nhiễm bệnh.

Hình 3: Ảnh minh hoạ sự lan truyền đại dịch "Cái Chết Đen" ở châu Âu vào năm 1347 – 1350

- Lớp nhiễm bệnh I: Những người trong lớp này đã mắc bệnh và có khả năng truyền bệnh sang người khác.
- Lớp hết bệnh R: Những người trong lớp này đã được trị khỏi bệnh hoặc đã chết vì bệnh.

Đây là mô hình SIR mà ta sẽ nghiên cứu sau đây.

2.2. Mô hình SIR

2.2.1. Điều kiện nghiên cứu

- Bệnh dịch xảy ra trong khoảng thời gian đủ ngắn để lượng dân số luôn cố định, tính cả người đã chết vì bệnh dịch này vào tổng số dân.
- Chu kỳ ủ bệnh không đáng kể.
- Nếu người nhiễm bệnh đã hết bệnh thì người này không còn khả năng nhiễm bệnh. Do đó, người này sẽ ở lại lớp R.
- Mẫu dân số đủ lớn để có kết quả xấp xỉ đúng.
- Ta xác định mức độ lan truyền dịch bệnh bằng định luật tác dụng khối lượng như sau:

$$\begin{aligned} S + I &\xrightarrow{r} 2I \\ I &\xrightarrow{a} R \end{aligned}$$

Ý nghĩa:

$$S + I \xrightarrow{r} 2I$$

Ở vế trái, người trong lớp S bị người trong lớp I lây bệnh với tốc độ $r > 0$, khiến người đó chuyển sang lớp I, thu được vế phải là $I + I = 2I$.

$$I \xrightarrow{a} R$$

Người trong lớp I sau một thời gian sẽ hết bệnh (hoặc chết vì bệnh này) và chuyển sang lớp R với tốc độ $a > 0$.

2.2.2. Mô hình

Ta xem mỗi lớp là một hàm số theo thời gian t gồm $S(t), I(t)$ và $R(t)$ có tính chất:

(i) Lớp nhiễm bệnh có tốc độ tỉ lệ thuận với số lượng người nhiễm bệnh và người dễ bệnh, tức rSI, với $r > 0$ là tham số hằng, đó cũng là tốc độ mất đi số người trong lớp dễ bệnh.

(ii) Tốc độ hết bệnh của người nhiễm bệnh tỉ lệ thuận với số lượng người nhiễm bệnh, tức aI, với $a > 0$ là hằng số, $1/a$ là độ đo thời gian một người ở trong trạng thái nhiễm bệnh.

(iii) Chu kỳ ủ bệnh ngắn, tức người dễ bệnh khi tiếp xúc với mầm bệnh sẽ nhiễm bệnh ngay.

Từ các tính chất trên, ta có được mô hình cổ điển Kermack – McKendrick, do W. O. Kermack và A. G. McKendrick công bố vào năm 1927.

$$\frac{dS}{dt} = -rSI \tag{12}$$
$$\frac{dI}{dt} = rSI - aI \tag{13}$$
$$\frac{dR}{dt} = aI \tag{14}$$

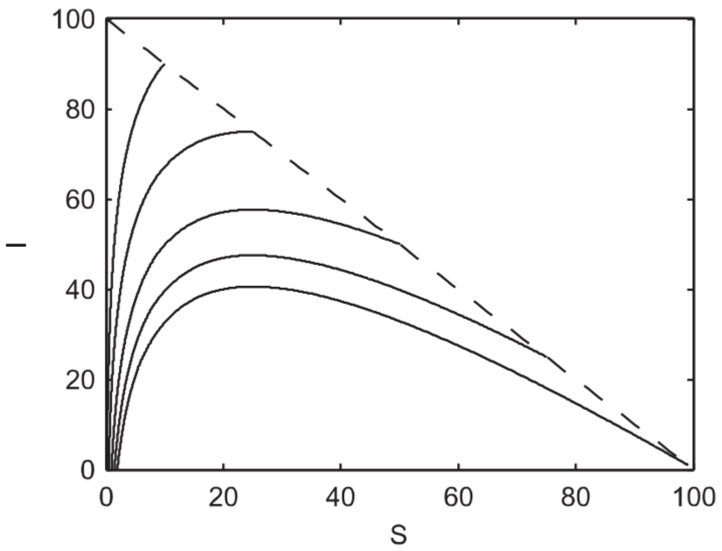
với $r > 0$ là tốc độ lây nhiễm và $a > 0$ là tốc độ hết bệnh của người nhiễm bệnh. Ta muốn tìm nghiệm không âm với mỗi S, I và R, tức $S(t), I(t), R(t) \geq 0$ với mọi $t \geq 0$. Do tổng kích thước dân số luôn cố định nên ta cộng các phương trình từ (12) đến (14) thu được:

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0 \Rightarrow S(t) + I(t) + R(t) = N \tag{15}$$

với N là tổng kích thước dân số.

Giả sử ta có điều kiện đầu $S(t=0) = S_0,\ I(t=0) = I_0,\ R(t=0) = 0$, tức tại thời điểm bắt đầu khảo sát, ta có S_0 người chưa mắc bệnh, I_0 người đã nhiễm bệnh và chưa có ai khỏi bệnh (hoặc chết vì bệnh đó). Từ phương trình (15), ta được:

$$\frac{d}{dt}(S + I + R) = 0S(0) + I(0) + R(0) = S_0 + I_0 \tag{16}$$



Hình 4: Nghiệm số của mô hình SIR của phương trình (6.2.1) – (6.2.3), đường nét đứt là $S+I = S_0 + I_0$, đường trơn là quỹ đạo pha, $r = 0.01, a = 0.25$

Trong bất kỳ dịch bệnh nào, người ta thường hỏi rằng nếu biết r, a, S_0 và I_0 người nhiễm bệnh thì

1. Dịch bệnh có lan rộng nữa không? Mức độ lan rộng theo thời gian như thế nào? Khi nào dịch bệnh kết thúc?

Từ phương trình (12)

$$\frac{dS}{dt} = -rSI \tag{17}$$

Do vế phải không thể dương nên S giảm, hay nói cách khác, số người dễ bệnh giảm theo thời gian. Do đó $S \leq S_0$.

Mặt khác, từ phương trình (13)

$$\frac{dI}{dt} = rSI - aI = I\left(rS - a\right) < I\left(rS_0 - a\right) \tag{18}$$

Vậy dịch bệnh sẽ không còn lan rộng, ít nhất là giữ nguyên nếu $I\left(rS_0 - a\right) < 0$ và dịch bệnh sẽ lan rộng nếu $I\left(rS_0 - a\right) > 0$.

Nếu $S_0 < a/r$ thì

$$\frac{dI}{dt} = I\left(rS - a\right) \leq 0, \forall t \geq 0 \tag{19}$$

Khi đó $I_0 > I\left(t\right) \to 0$ khi $t \to \infty$, tức số lượng người nhiễm bệnh ngày càng giảm, dẫn đến dịch bệnh không còn khả năng lan rộng. Mặt khác, nếu $S_0 > a/r$ thì $I\left(t\right)$ tăng, dẫn đến dịch bệnh lan rộng. Khái niệm "lan rộng" có nghĩa rằng $I\left(t\right) > I_0$ với một vài giá trị $t > 0$, từ đó ta có khái niệm ngưỡng hiện tượng, nếu $S_0 > S_c = a/r$ thì dịch bệnh lan rộng, còn nếu $S_0 < S_c$ thì không. Tham số tới hạn $\rho = a/r$ còn được gọi là tốc độ hết bệnh tương đối.

2. Nếu dịch bệnh lan rộng thì có nhiều nhất bao nhiêu người sẽ nhiễm bệnh ứng với thời gian cho trước bất kỳ?

Từ biểu thức định luật tác dụng khối lượng

$$S + I \xrightarrow{r} 2I$$

Ta nhận thấy sự thay đổi số người nhiễm bệnh có phụ thuộc đến sự thay đổi số người dễ bệnh. Do đó, ta lấy phương trình (13) chia cho phương trình (12), thu được tốc độ thay đổi tức thời của người nhiễm bệnh theo người dễ bệnh

$$\frac{dI}{dS} = -\frac{(rS - a)\, I}{rSI} = -1 + \frac{\rho}{S}; \rho = \frac{a}{r}, \;\; (I \neq 0) \tag{20}$$

Lấy tích phân phương trình (20), ta được mặt phẳng quỹ đạo pha $(I,\ S)$, hình 4 là đồ thị của mặt phẳng này:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dS} &= -1 + \frac{\rho}{S} \\ \Leftrightarrow dI &= \left(-1 + \frac{\rho}{S}\right) dS \\ \Rightarrow \int dI &= \int \left(-1 + \frac{\rho}{S}\right) dS \\ \Rightarrow I + \text{ const } &= -S + \rho \ln S + \text{ const} \\ \Rightarrow I + S - \rho \ln S = \text{ const } &= I_0 + S_0 - \rho \ln S_0 \end{aligned} \tag{21}$$

Để tìm giá trị cực đại, trước hết ta tìm nghiệm của phương trình $dI/dS = 0$

$$\frac{dI}{dS} = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{\rho}{S} = 0 \Rightarrow S = \rho$$

Trong trường hợp $S_0 < \rho$, khi đó dịch bệnh không lan rộng, số lượng người nhiễm bệnh có xu hướng giảm xuống. Từ đó, ta được $I_{\text{max}} = I_0$, tức số người nhiễm bệnh nhiều nhất xác định tại $t = 0$ với I_0 người.

Trong trường hợp $S_0 > \rho$, thay $S = \rho$ vào phương trình (21), ta được:

$$\begin{aligned} I + \rho - \rho \ln \rho &= I_0 + S_0 - \rho \ln S_0 \\ \Leftrightarrow I &= I_0 + S_0 - \rho \ln S_0 + \rho \ln \rho - \rho \\ \Leftrightarrow I &= N - \rho + \rho \ln \left(\frac{\rho}{S_0}\right) \end{aligned} \tag{22}$$

Ta chứng minh biểu thức (22) của I chính là giá trị lớn nhất, ta có miền xác định của $S \in [0, S_0]$. Do $\ln S$ không xác định tại $S = 0$ nên ta tìm giới hạn của I ở biểu thức (21) khi $S \to 0$

$$\begin{aligned} &\lim_{S \to 0} \left(N - \rho + \rho \ln \left(\frac{S}{S_0}\right)\right) \\ &= N - \rho + \rho \lim_{S \to 0} \left(\ln \left(\frac{S}{S_0}\right)\right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Vẽ bảng biến thiên:

S	0		ρ		S_0
dI/dS		$+$	0	$-$	
I	$-\infty$	$\nearrow$	(22)	$\searrow$	I_0

Từ bảng biến thiên, kết hợp $I_0 \geq 0$, ta kết luận trong trường hợp $S_0 < \rho$ thì $I_{\max} = I_0 + S_0 - \rho \ln S_0 - \rho \ln \rho - \rho$ Ta có kết luận về số người nhiễm bệnh nhiều nhất như sau:

$$I_{\max} = \begin{cases} I_0 \ ; S_0 < \rho \\ I_0 + S_0 - \rho \ln S_0 - \rho \ln \rho - \rho \ ; S_0 > \rho \end{cases} \tag{23}$$

3. Tổng cộng có bao nhiêu người nhiễm bệnh?

Vì trục $I = 0$ là đường kỳ dị nên mọi quỹ đạo I tiến đến 0 khi $t \to \infty$. Mặt khác, người trong lớp I sau một thời gian sẽ hết bệnh (hoặc chết vì bệnh này) và chuyển sang lớp R. Do đó, tổng số người mắc bệnh bằng $R(\infty)$ xác định bằng cách chuyển vế phương trình (15) với $t = \infty$ như sau

$$R(\infty) = N - S(\infty) - I(\infty) = N - S(\infty) \tag{24}$$

Ta tính $S(\infty)$ bằng cách thay $t = \infty$ vào phương trình (21) như sau

$$\begin{aligned} I(\infty) + S(\infty) - \rho \ln S(\infty) &= I_0 + S_0 - \rho \ln S_0 \\ \Leftrightarrow S(\infty) - \rho \ln S(\infty) &= N - \rho \ln S_0 \end{aligned} \tag{25}$$

Ta giải phương trình (24) để tìm $S(\infty)$, với $0 \leq S(\infty) \leq S_0$. Ta chứng minh phương trình (24) luôn có nghiệm bằng cách đặt $x = S(\infty)$, với $0 \leq x \leq S_0$, ta tìm nghiệm phương trình $f(x) = 0$ với

$$f(x) = x - \rho \ln x - N + \rho \ln S_0 \tag{26}$$

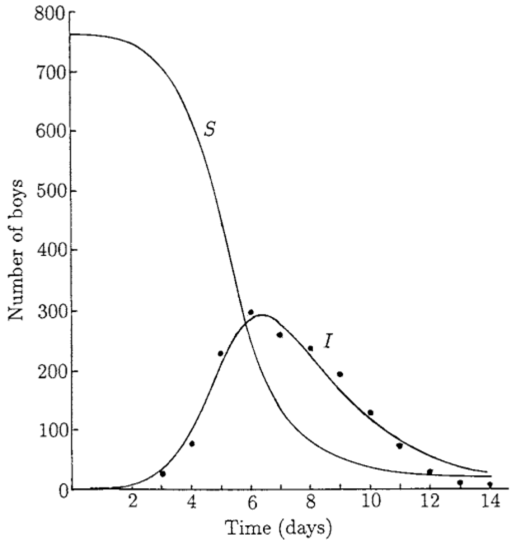
Lấy đạo hàm $f(x)$, giải phương trình $f'(x) = 0$ như sau

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Rightarrow 1 - \frac{\rho}{x} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \rho \end{aligned}$$

Vẽ bảng biến thiên

x	0		ρ		S_0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\rho)$	$\nearrow$	$S_0 - N$

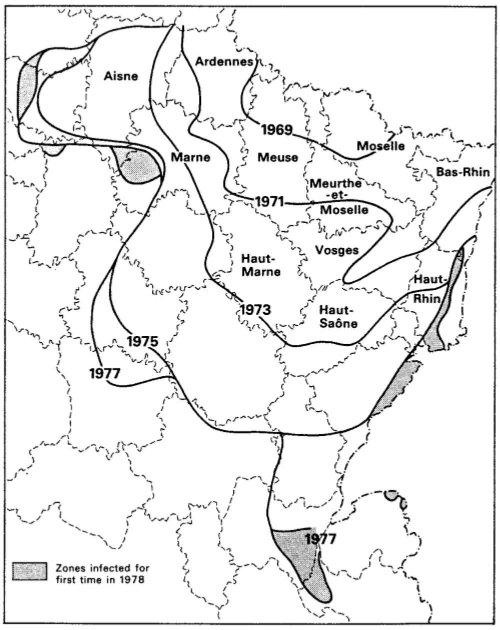
Hàm $f(x)$ liên tục trên miền $[0, S_0]$, từ bảng biến thiên, ta được $f(\rho) \leq S_0 - N \leq 0$. Mặt khác, có $f(0) > 0$, do đó, phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên đoạn $[0, \rho]$. Vậy phương trình (24) luôn tồn tại nghiệm $S(\infty)$, thay nghiệm này vào phương trình (24), ta thu được tổng số người nhiễm bệnh.



Hình 5: Đồ thị nghiệm xấp xỉ của $S(t)$ và $I(t)$ với dữ liệu dịch cúm (dấm chấm tròn đen) từ tạp chí The Lancet

2.3. Ứng dụng của mô hình SIR

Vào năm 1978, tạp chí y khoa Anh *The Lancet* có bài viết cung cấp một số dữ liệu thống kê về dịch cúm tại một trường nội trú nam sinh. Trường này có tổng cộng 763 nam sinh, từ ngày 22/1/1978 đến ngày 4/2/1978 có tổng cộng 512 em nhiễm bệnh và người ta dự đoán ban đầu có 1 em bị bệnh. Từ dữ kiện trên, ta được $N = 763, S_0 = 762, I = 1.\rho = 202, r = 2.18 \times 10^{-3}$/ngày, xấp xỉ phương trình (12)-(14) được nghiệm $S(t)$ và $I(t)$, nghiệm $R(t)$ tỷ lệ với diện tích dưới đường cong $I(t)$.



Hình 6: Độ lan truyền bệnh dại trên động vật ở châu Âu từ 1969 đến 1977

2.4. Mô hình SIR trong không gian không thuần nhất

Bệnh dại là bệnh có tính lan truyền trên khắp Thế Giới. Khoảng vài trăm năm trở lại đây, các nước châu Âu phải hứng chịu nhiều đợt bệnh dại, đơn cử như dịch xảy ra trên các loài động vật bắt đầu tại Ba Lan vào năm 1939 và lan truyền về hướng Tây với tốc độ 30 – 60 km mỗi năm. Hiện nay, bệnh này đã được kìm hãm và loài sói đỏ là vật chủ truyền bệnh cũng như là loài nhiễm bệnh trong suốt dịch bệnh tại châu Âu. Độ lan truyền bệnh dại có dạng giống như sóng lưu động như hình 6. Loài sói đỏ chiếm đến 70% trường hợp ghi nhận được ở phía Tây Âu. Mặc dù Anh Quốc không còn bệnh dại kể từ năm 1900, nhưng chính sách nhập khẩu thú cưng mang lại nguy cơ bùng phát bệnh này, đặc biệt khi Anh có mật độ loại sói, chó và mèo ở mức cao. Tại Bristol, mật độ loài sói là 12 con/km^2. Do đó, để kiểm soát cũng như ngăn ngừa sự lan truyền bệnh dại, ta cần biết bệnh dại lan truyền như thế nào. Ta nghiên cứu mô hình đơn giản dưới đây với các giả thiết giống với mô hình SIR, cộng thêm giả thiết

- Sói khỏe (dễ bệnh): Loại sói này có lãnh thổ riêng và nhìn chung chúng không di chuyển ra khỏi lãnh thổ.
- Sói dại (nhiễm bệnh): Loại sói này do nhiễm bệnh nên tính cách thay đổi thất thường và hay đi khắp nơi với hệ số khuếch tán $D\,\text{km}^2/$ năm.
- Virus bệnh dại nằm trong con sói dại được truyền từ sói dại sang sói khỏe với tốc độ nhiễm bệnh rI, với r là hệ số truyền bệnh.
- Bệnh dại rất nguy hiểm nên sói dại sẽ chết với tốc độ a, tức thời gian sống của sói dại là $1/a$.

Từ các giả thiết trên, ta được mô hình SIR xét trong một chiều

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -rIS \tag{27}$$
$$\frac{\partial I}{\partial t} = D\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + rIS - aI \tag{28}$$
$$\frac{\partial R}{\partial t} = aI \tag{29}$$

Ta viết gọn 3 phương trình trên bằng các cách đặt

$$I_* = \frac{I}{S_0}, S_* = \frac{S}{S_0}, x_* = \sqrt{\frac{D}{rS_0}}x, t_* = rS_0 t, \lambda = \frac{a}{rS_0}$$

1. Biến đổi phương trình (27)

Ta có:

$$\begin{aligned}
S &= S_* S_0 \Longrightarrow \partial S = S_0 \partial S_* \\
t &= \frac{1}{rS_0} t_* \Longrightarrow \partial t = \frac{1}{rS_0}\partial t_* \\
I &= I_* S_0
\end{aligned}$$

Thay vào phương trình (27), ta được

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial t} &= -rIS \\
\Leftrightarrow \frac{S_0 \partial S_*}{\frac{1}{rS_0}\partial t_*} &= -r(I_* S_0)(S_* S_0) \\
\Leftrightarrow r(S_0)^2 \frac{\partial S_*}{\partial t_*} &= -r(S_0)^2 I_* S_* \\
\Leftrightarrow \frac{\partial S_*}{\partial t_*} &= -I_* S_* \qquad (30)
\end{aligned}$$

2. Biến đổi phương trình (28)

Ta có:

$$\begin{aligned}
I &= I_* S_0 \Longrightarrow \partial I = S_0 \partial I_* \Longrightarrow \partial^2 I = S_0 \partial^2 I_* \\
t &= \frac{1}{rS_0} t_* \Longrightarrow \partial t = \frac{1}{rS_0}\partial t_* \\
x_* &= \sqrt{\frac{rS_0}{D}}x \Longrightarrow \partial^2 x = \frac{D}{rS_0}\partial^2 x_* \\
S &= S_* S_0
\end{aligned}$$

Thay vào phương trình (28), ta được

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial I}{\partial t} = D\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + rIS - aI\\
\Leftrightarrow\ &\frac{S_0 \partial I_*}{\frac{1}{rS_0}\partial t_*} = D\frac{S_0\partial^2 I_*}{\frac{D}{rS_0}\partial x_*^2} + r\left(I_* S_0\right)\left(S_* S_0\right) - aI_* S_0\\
\Leftrightarrow\ &r(S_0)^2\frac{\partial I_*}{\partial t_*} = r(S_0)^2\frac{\partial^2 I_*}{\partial x_*^2} + r(S_0)^2 I_* S_* - aI_* S_0\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\partial I_*}{\partial t_*} = \frac{\partial^2 I_*}{\partial x_*^2} + I_* S_* - \frac{a}{rS_0}I_*\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\partial I_*}{\partial t_*} = \frac{\partial^2 I_*}{\partial x_*^2} + I_*\left(S_* - \lambda\right)
\end{aligned} \tag{31}$$

Thay $S_* = S, I_* = I, t_* = t$, ta thu được hệ rút gọn

$$\begin{matrix} \frac{\partial S}{\partial t} = -IS \\ \frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + I\left(S - \lambda\right) \end{matrix} \tag{32}$$

và lúc này S, I, x và t không có thứ nguyên và $\lambda = a/rS_0$ là mức đo tốc độ chết so sánh với tốc độ truyền bệnh. Nghiệm sóng lưu động của (32) có dạng

$$S\left(x,\ t\right) = S\left(y\right), I\left(x,t\right) = I\left(y\right), y = x - ct \tag{33}$$

với c là tốc độ sóng. Từ dạng nghiệm sóng, ta viết lại hệ (32) như sau

$\frac{\partial S}{\partial t} = -IS$	$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + I\left(S - \lambda\right)$
$\frac{\partial S}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = -IS$ $-cS' = -IS$ $\Leftrightarrow 0 = cS' - IS$	$\frac{\partial I}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + I\left(S - \lambda\right)$ $-cI' = I'' + I\left(S - \lambda\right)$ $\Leftrightarrow 0 = I'' + cI' + I\left(S - \lambda\right)$

Vậy ta được hệ

$$\begin{matrix} 0 = cS' - IS \\ 0 = I'' + cI' + I\left(S - \lambda\right) \end{matrix} \tag{34}$$

Ta giả sử $\lambda = a/\left(rS_0\right) < 1$ nhằm đảm bảo điều kiện dịch bệnh đang lan rộng.

Điều kiện đầu của nghiệm sóng lưu động là

$$S\left(\infty\right) = 1, S'\left(-\infty\right) = 0, I\left(\infty\right) = I\left(-\infty\right) = 0$$

Lưu ý rằng $S'\left(-\infty\right) = 0$ vì ta muốn ước đoán số lượng sói khỏe còn sống sót sau dịch bệnh.

Ta viết $S = 1 - P$ và viết lại hệ (34) dưới dạng tuyến tính

$$\begin{aligned}
&\begin{matrix} 0 = cS' - IS \\ 0 = I'' + cI' + I\left(S - \lambda\right) \end{matrix}\\
\Leftrightarrow &\begin{matrix} 0 = -cP' - I + IP \\ 0 = I'' + cI' + I - I\lambda - IP \end{matrix}\\
\approx &\begin{matrix} 0 = -cP' - I \\ 0 = I'' + cI' + I\left(1 - \lambda\right) \end{matrix}
\end{aligned} \tag{35}$$

Ta tìm nghiệm của hệ (35) bằng cách đặt $\gamma = I'$, khi đó $\gamma' = I'' = -cI' - I(1-\lambda)$.

$$\begin{cases} I' = \gamma = f(I,\gamma) \\ f' = -c\gamma - I(1-\lambda) = g(I,\gamma) \end{cases}$$

Ta được ma trận Jacobi

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial I} & \frac{\partial f}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial g}{\partial I} & \frac{\partial g}{\partial \gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1-\lambda) & -c \end{pmatrix}$$

Ta tìm trị riêng μ của J bằng cách giải phương trình

$$\begin{aligned} &\det|J-\mu I| = 0 \\ \Leftrightarrow &\det\begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ -(1-\lambda) & -c-\mu \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow &\mu(c+\mu) + (1-\lambda) = 0 \\ \Leftrightarrow &\mu^2 + c\mu + (1-\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Tính biệt thức $\Delta = c^2 - 4(1-\lambda)$, khi đó ta được 2 trị riêng

$$\mu = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4(1-\lambda)}}{2}$$

Hệ (35) có nghiệm tập trung ổn định tại $(I, I') = (0,0)$ nếu μ là số phức, khi đó $\Delta < 0$ và tồn tại những vị trí để $I < 0$, điều này là không thực tế, do đó $\Delta \geq 0$, suy ra $c \geq 2\sqrt{1-\lambda}$.

Bây giờ ta sẽ tính mức độ nghiêm trọng của dịch bệnh bằng cách tính $S(\infty)$ với ý nghĩa ước lượng khi dịch bệnh kéo dài thì còn bao nhiêu con sói khỏe. Từ phương trình đầu của hệ (34), ta được $I = cS'/S$, thay xuống phương trình thứ hai, ta được:

$$\begin{aligned} &I'' + cI' + I(S-\lambda) = 0 \\ \Leftrightarrow &I'' + cI' + \frac{cS'(S-\lambda)}{S} = 0 \\ \Leftrightarrow &I'' + cI' = -cS'\left(1 - \frac{\lambda}{S}\right) \end{aligned}$$

Nguyên hàm hai vế, ta được:

$$\int (I'' + cI')\,dy = -c\int S'\left(1-\frac{\lambda}{S}\right)dy$$

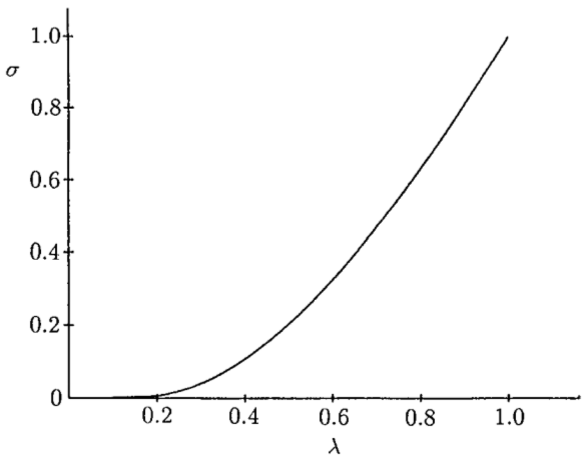
$$\Longrightarrow I' + cI + \text{const}_1 = -cS + c\lambda \ln S + \text{const}_2$$

$$\Longrightarrow (I' + cI) + c(S - \lambda \ln S) = \text{constant} \tag{36}$$

Sử dụng điều kiện đầu khi $y \to \infty$, với $S(\infty) = 1, I(\infty) = 0$ và với $I'(\infty) = 0$, thay vào (36), thu được hằng số là c.

Ta tính $S(-\infty)$ bằng cách thay $I(-\infty) = 0,\ I'(-\infty) = 0$ vào phương trình (36) với hằng số bằng c, ta được phương trình

$$S(-\infty) - \lambda \ln S(-\infty) = 1 \tag{37}$$



Hình 7: σ là mật độ sói khỏe còn sống sót sau khi trải qua sóng dịch bệnh dựa vào hàm số độ nghiêm trọng (37)

Ta chứng minh phương trình (37) có nghiệm $S(-\infty)$. Đặt $\sigma = S(-\infty)$, thay vào (37), ta được $f(\sigma) = \sigma - \lambda \ln \sigma - 1$, ta tìm nghiệm phương trình $f(\sigma) = 0$ với $\lambda, \sigma < 1$.

Tìm nghiệm $f'(\sigma) = 0$

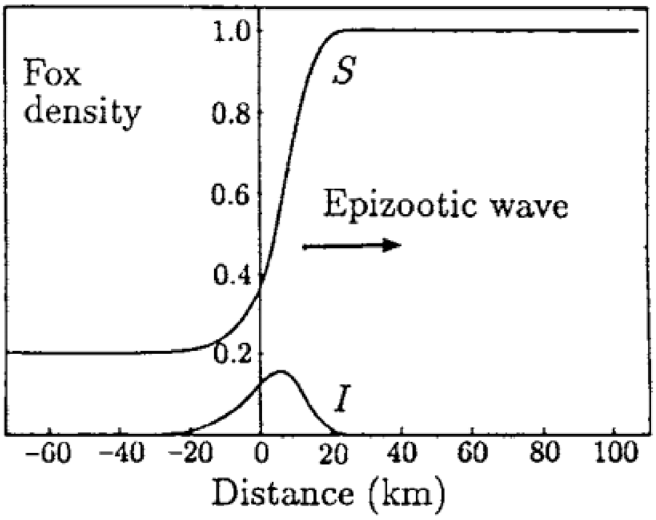
$$\begin{aligned} f'(\sigma) &= 0 \\ \Longrightarrow 1 - \frac{\lambda}{\sigma} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sigma &= \lambda \end{aligned}$$

Kẻ bảng biến thiên, ta được:

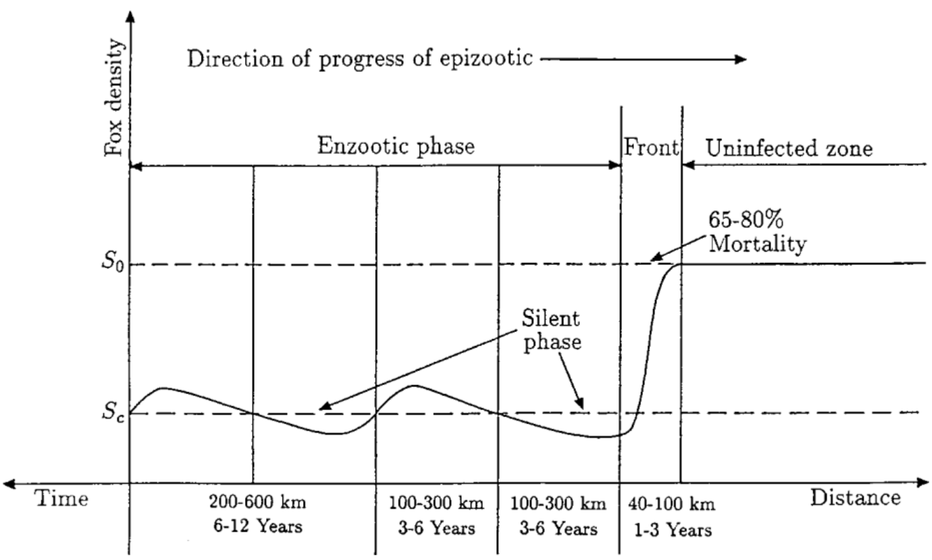
σ	0		λ		1
$f'(\sigma)$		$-$	0	$+$	
$f(\sigma)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\sigma)$	$\nearrow$	0

Từ bảng biến thiên, ta được $f(\sigma) \leq 0$. Mặt khác, có $f(\sigma \to 0) > 0$, kết hợp hàm $f(\sigma)$ liên tục trên $(0, \lambda]$ nên phương trình $f(x\sigma) = 0$ có nghiệm $\sigma \in (0, \lambda]$. Do đó, (37) có nghiệm với $0 < S(-\infty) < \lambda < 1$. Khi λ càng nhỏ thì càng ít loài sói sống sót, hay nói cách khác, dịch bệnh càng trầm trọng. Hình 7 minh họa số lượng sói khỏe theo phương trình (37) theo biến $\sigma = S(-\infty)$. Thông thường, sóng sẽ có tốc độ nhỏ nhất $c \simeq c_{min} = 2\sqrt{1-\lambda}$.

Hình 8 biểu diễn nghiệm xấp xỉ của sóng lưu động cho S và I từ hệ (32), với $\lambda = 0.5$. Ở hình 7 với $\lambda = 0.5$ thì tỉ lệ sói sống sót là $\sigma \approx 0.2$. Ta so sánh kết quả xấp xỉ của số lượng sói khỏe trong dịch bệnh với kết quả dữ liệu thực tế thu được ở châu Âu ở hình 9. Đồ thị của kết quả xấp xỉ và dữ liệu thực tế có trạng thái khác biệt rõ ràng. Mô hình (32) chỉ bảo đảm từ giai đoạn *"front"* trở đi. Rõ ràng sau một đoạn sóng thì số loài sói khỏe bắt đầu tăng lên do loài sói đã tìm được môi trường để trú ẩn, hay nói cách khác, thang đo thời gian của mô hình (32) được mô tả ngắn hơn so với độ dao động trong hình 9.



Hình 8: Nghiệm sóng lưu động của hệ (32) với mật độ sói khỏe (S) và sói bệnh (I) với $\lambda = 0.5$ và tốc độ sóng $c = \sqrt{2}$.



Hình 9: Dữ liệu từ *Centre National d'Etudes sur* la Rage vào năm 1977. Có biến động ở số lượng sói khỏe biểu diễn theo hàm số dịch bệnh dại theo thời gian.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

(1) Kermack, W. O. và A. G. McKendrick. "A contribution to the mathematical theory of epidemics." Proceedings of the Royal Society of London A: mathematical, physical and engineering sciences (1927): Vol. 115, No. 772, pp. 700-721. The Royal Society.

(2) Murray, J. D. Mathematical Biology I: An Introduction. New York: Springer New York, 2002. Book.

(3) Murray, J.D. Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications. New York: Springer New York, 2003. Book.

SỐ FERMAT - TÍNH CHẤT VÀ ỨNG DỤNG

Trần Minh Hiền (THPT Chuyên Quang Trung)

1. ĐỊNH NGHĨA

Như ta đã biết số $2^m + 1$, với m nguyên dương, là số nguyên tố thì $m = 2^n, n \in \mathbb{Z}^+$. Thật vậy, vì nếu $m = 2^n.k$, với k là số nguyên dương lẻ thì

$$2^m + 1 = 2^{2^n.k} + 1 = \left[2^{2^n}\right]^k + 1 = \left(2^{2^n} + 1\right).B$$

là hợp số.

Định nghĩa 1.1. Với mỗi số nguyên dương n, đặt

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

thì F_n gọi là số Fermat thứ n. Nếu F_n nguyên tố thì người ta gọi đó là *số nguyên tố Fermat thứ* n. Chú ý F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 đều là các số nguyên tố, nhưng F_5 không là số nguyên tố.

Số Fermat có rất nhiều ứng dụng. Năm 1796 nhà toán học Gauss đã tìm ra mối quan hệ giữa phép dựng đa giác đều bằng thước và compass và số nguyên tố Fermat là: "Một đa giác đều n cạnh dựng được bằng thước kẻ và compass khi và chỉ khi $n = 2^i p_1 p_2 \dots p_j$ với $n \geq 0, i \geq 0, j \geq 0$ và $p_1, p_2, \dots, p_j$ là các số nguyên tố Fermat".

2. CÁC ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ

Mệnh đề 2.1. *Cho số Fermat $F_n = 2^{2^n} + 1$. Khi đó:*

1. *Với mọi $n \geq 1$ thì*
$$F_n = (F_{n-1} - 1)^2 + 1.$$
2. *Với mọi $n \geq 1$ thì*
$$F_n = F_0 \dots F_{n-1} + 2.$$
3. *Với mọi $n \geq 2$ thì*
$$F_n = F_{n-1}^2 - 2\left(F_{n-2} - 1\right)^2.$$

4. *Với mọi* $n \geq 2$ *thì*
$$F_n = F_{n-1} + 2^{2^{n-1}} F_0 \ldots F_{n-2}.$$

Chứng minh. 1. Ta có
$$(F_{n-1} - 1)^2 + 1 = \left(2^{2^{n-1}} + 1 - 1\right)^2 + 1 = 2^{2^n} + 1 = F_n.$$

2. Quy nạp theo n. Giả sử đúng đến n, thì với $n+1$ ta có
$$\begin{aligned} F_0 \ldots F_n + 2 &= F_0 \ldots F_{n-1}.F_n + 2 \\ &= (F_n - 2) F_n + 2 \quad \text{(giả thiết quy nạp)} \\ &= \left(2^{2^n} - 1\right)\left(2^{2^n} + 1\right) + 2 \\ &= 2^{2^{n+1}} + 1 = F_{n+1}. \end{aligned}$$

3. Ta có
$$\begin{aligned} F_{n-1}^2 - 2(F_{n-2} - 1)^2 &= \left(2^{2^{n-1}} + 1\right)^2 - 2\left(2^{2^{n-2}} + 1 - 1\right)^2 \\ &= 2^{2^n} + 2.2^{2^{n-1}} + 1 - 2.2^{2^{n-1}} \\ &= 2^{2^n} + 1 = F_n. \end{aligned}$$

4. Quy nạp theo n, giả sử đúng đến n, khi đó với $n+1$ thì
$$\begin{aligned} F_n + 2^{2^n} F_0 \ldots F_{n-1} &= F_n + 2^{2^{n-1}}\left(2^{2^{n-1}} F_0 \ldots F_{n-2}\right).F_{n-1} \\ &= F_n + 2^{2^{n-1}}.F_{n-1}(F_n - F_{n-1}) \quad \text{(giả thiết quy nạp)} \\ &= 2^{2^n} + 1 + 2^{2^{n-1}}\left(2^{2^{n-1}} + 1\right)\left(2^{2^n} - 2^{2^{n-1}}\right) \\ &= 2^{2^n} + 1 + 2^{2^{n-1}}\left(2^{2^{n-1}} + 1\right)2^{2^{n-1}}\left(2^{2^{n-1}} - 1\right) \\ &= 2^{2^n} + 1 + 2^{2^n}\left(2^{2^n} - 1\right) \\ &= 2^{2^n} + 1 + 2^{2^{n+1}} - 2^{2^n} \\ &= 2^{2^{n+1}} + 1 = F_{n+1}. \end{aligned}$$

□

3. CÁC TÍNH CHẤT SỐ HỌC CƠ BẢN

Mệnh đề 3.1. *Cho số Fermat* $F_n = 2^{2^n} + 1$*, khi đó ta có một số tính chất số học đáng chú ý sau:*

1. *Với mọi* $n \geq 1$ *thì* $F_n \equiv 2 (\operatorname{mod} F_k), \forall k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

2. *Với mọi* $n \geq 2$ *thì chữ số tận cùng của* F_n *là 7.*

3. *Không có số Fermat nào là số chính phương.*

4. *Mọi số Fermat $F_n (n \geq 1)$ đều có dạng $6m - 1$.*

5. *Với mọi $n \geq 2$, mọi số Fermat F_n đều có vô hạn cách biểu diễn dưới dạng $x^2 - 2y^2$, với x, y là các số nguyên dương.*

6. *Với mọi $m \neq n$ thì $(F_m, F_n) = 1$.*

7. *Không có số Fermat $F_n (n \geq 2)$ nào có thể biểu diễn thành tổng của hai số nguyên tố.*

8. *Không có số nguyên tố Fermat nào có thể biểu diễn dưới dạng hiệu của hai lũy thừa bậc p, với p nguyên tố lẻ.*

9. *Không có số Fermat nào là lũy thừa thực sự của một số nguyên dương, tức không có dạng x^k với x nguyên dương và $k \geq 2$.*

10. *Tập tất cả các số nguyên không là thặng dư bậc hai của số nguyên tố Fermat F_n bằng với tập tất cả các căn nguyên thủy của nó.*

11. *Nếu $m \leq 2^n - 1$ thì $F_m | 2^{F_n} - 2$.*

Chứng minh. 1. Tính chất này suy ra từ bổ đề 21.3.2 ý 1, do $F_n = F_0 F_1 \ldots F_{n-1} + 2$.

2. Theo ý trên, suy ra $F_n \equiv 2 (\text{mod} F_1 = 5)$. Vì tất cả các số F_n đều lẻ nên dẫn đến $F_n \equiv 7 (\text{mod} 10)$.

3. Vì $F_0 = 3, F_1 = 5$ rõ ràng không là số chính phương. Với $n \geq 2$, theo ý trên ta vừa chứng minh $F_n \equiv 7 (\text{mod} 10)$. Mà một số chính phương thì tận cùng là $0, 1, 4, 5, 6, 9$. Do đó F_n cũng không thể là số chính phương khi $n \geq 2$.

4. Điều này đồng nghĩa với chứng minh $F_n + 1 \vdots 6, \forall n \geq 1$. Theo mệnh đề 2.1 ý 2 thì

$$F_n + 1 = F_0.F_1 \ldots F_{n-1} + 2 + 1 = 3.F_1 \ldots F_n + 2 + 1 = 3 \left(F_1 F_2 \ldots F_n + 1 \right) \vdots 6$$

do $F_1 \ldots F_n$ là số lẻ nên $F_1 \ldots F_n + 1$ chẵn.

5. Theo mệnh đề 2.1 ý 3, thì

$$(x_0, y_0) = (F_{n-1}, F_{n-2} - 1)$$

cho ta một biểu diễn như vậy. Chú ý đẳng thức

$$(3x + 4y)^2 - 2 \left(2x + 3y \right)^2 = x^2 - 2y^2.$$

Chú ý nếu x, y nguyên dương thì $3x + 4y > x$ và $2x + 3y > y$ cũng là các số nguyên dương. Điều này có nghĩa là ta có thể thiết lập quan hệ hồi quy

$$(x_i, y_i) = \left(3x_{i-1} + 4y_{i-1}, 2x_{i-1} + 3y_{i-1} \right).$$

Vậy các điểm (x_m, y_m) như trên là vô hạn, cùng biểu diễn cho F_n.

6. Giả sử mẫu thuẫn, tức là tồn tại i, j để $(F_i, F_j) = a > 1$. Giả sử $F_j > F_i$, khi đó theo mệnh đề 2.1 ý 4 ta có
$$F_j = F_{j-1} + 2^{2^{j-1}}.F_0.F_1 \ldots F_i \ldots F_{j-2}.$$
Vì $a|F_i, a|F_j$ nên suy ra $a|F_{j-1}$ và do đó $a|F_0 \ldots F_{j-1}$. Khi đó $a|F_j = F_0 \ldots F_{j-1} = 2$ (theo mệnh đề 2.1 ý 1). Suy ra $a = 2$, nhưng điều này vô lý vì mọi số F_n đều lẻ nên a phải là số lẻ.

7. Giả sử tồn tại số $F_n (n \geq 2)$ có thể biểu diễn thành $F_n = p + q$ với p, q nguyên tố. Do F_n lẻ nên một trong hai số p, q phải bằng 2. Giả sử $p = 2$, khi đó
$$q = F_n - 2 = 2^{2^n} - 1 = \left(2^{2^{n-1}} + 1\right)\left(2^{2^{n-1}} - 1\right)$$
là một hợp số, mâu thuẫn.

8. Giả sử ngược lại, tồn tại số nguyên tố Fermat F_n để $F_n = a^p - b^p (a > b)$ và p nguyên tố lẻ. Khi đó
$$F_n = (a - b)\left(a^{p-1} + a^{p-2}b + \cdots + ab^{p-2} + b^{p-1}\right).$$
Vì F_n nguyên tố nên $a - b = 1$. Ngoài ra theo định lý Fermat thì
$$a^p \equiv a (\text{mod} p), \quad b^p \equiv b (\text{mod} p) \Rightarrow F_n = a^p - b^p \equiv a - b = 1 (\text{mod} p).$$
Từ đây dẫn đến $p|F_n - 1 = 2^{2^n}$, vô lý vì p là số nguyên tố lẻ.

9. Do $F_0 = 3$ và 3 không là lũy thừa thực sự của một số nguyên dương. Với $n > 0$, theo mệnh đề 2.1 ý 1 thì
$$F_n = (F_{n-1} - 1)^2 + 1$$
nên F_n không thể là bình phương của một số nguyên dương (vì chỉ có hai số chính phương liên tiếp là 0 và 1). Bây giờ giả sử
$$F_n = x^k$$
với k là số nguyên dương lẻ, $k \geq 3$. Do $n > 0$ nên F_n lẻ, do đó x cũng là số lẻ. Khi đó
$$2^{2^n} = F_n - 1 = x^k - 1 = (x - 1)\left(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x + 1\right).$$
Do
$$\underbrace{x^{k-1} + \cdots + x}_{\text{gồm } k-1 \text{ (chẵn) thừa số lẻ nên là số chẵn}} \qquad +1 =$$
là số lẻ. Trong khi đó vế trái là một lũy thừa của 2, dẫn đến phải xảy ra
$$x^{k-1} + \cdots + x + 1 = 1 \Rightarrow \frac{x^k - 1}{x - 1} = 1 \Rightarrow x^k - 1 = x - 1 \Rightarrow k = 1$$
mâu thuẫn với $k \geq 3$. Vậy điều phản chứng sai, kết quả được chứng minh.

10. Gọi a là một số không là *thặng dư bậc hai* của F_n và gọi $h = \text{ord}_{F_n}(a)$. Theo định lý Fermat thì
$$a^{F_n - 1} \equiv 1(\bmod F_n).$$
Theo định nghĩa của cấp thì $h|F_n - 1 = 2^{2^n}$. Do đó $h = 2^k$ với k nguyên dương $k \leq 2^n$. Vì a không là thặng dư bậc hai modulo F_n, theo tiêu chuẩn Euler thì
$$a^{\frac{F_n - 1}{2}} = a^{2^{2^n - 1}} \equiv -1(\bmod F_n).$$
Vậy nếu $k < 2^n$ thì $2^k|2^{2^n - 1}$ nên
$$a^{2^{2^n - 1}} \equiv 1(\bmod F_n)$$
mâu thuẫn. Vậy $k = 2^n$ hay $\text{ord}_{F_n}(a) = 2^{2^n}$ nên a là một căn nguyên thủy theo modulo F_n. Ngược lại, nếu a là một căn nguyên thủy theo modulo F_n thì
$$a^{\frac{F_n - 1}{2}} \not\equiv 1(\bmod F_n).$$
Từ đó theo tiêu chuẩn Euler thì a không là thặng dư bậc hai theo modulo F_n.

11. Ta có
$$\begin{aligned} 2^{F_n} - 2 &= 2\left(2^{F_n - 1} - 1\right) \\ &= 2\left(2^{2^{2^n}} - 1\right) \\ &= 2\left(F_{2^n} - 2\right) \\ &= 2F_0F_1 \ldots F_{2^n - 1} \quad (\text{mệnh đề 2.1 ý 4}). \end{aligned}$$

Từ đây có điều phải chứng minh. □

3.1. CẤU TRÚC ƯỚC NGUYÊN TỐ CỦA SỐ FERMAT

Mệnh đề 3.2. *Cho $q = p^m$ là lũy thừa của một số nguyên tố lẻ p, với $m \geq 1$. Khi đó*
$$F_n \,\vdots\, q \Leftrightarrow ord_q(2) = 2^{n+1}.$$

Chứng minh. 1. Giả sử $q|F_n = 2^{2^n} + 1$. Khi đó
$$q|\left(2^{2^n} + 1\right)\left(2^{2^n} - 1\right) = 2^{2^{n+1}} - 1 \Rightarrow 2^{2^{n+1}} \equiv 1(\bmod q).$$
Đặt $h = \text{ord}_q(2)$, thì $2^h \equiv 1(\bmod q)$. Theo định nghĩa của cấp thì
$$h|2^{n+1} \Rightarrow h = 2^k \quad (k \leq n + 1).$$
Ta sẽ chứng minh $k = n + 1$. Nếu $k < n + 1$, khi đó
$$k \leq n \Rightarrow n - k \geq 0 \Rightarrow 2^{n-k} \geq 1.$$
Do đó, với $h = 2^k$ thì
$$2^h \equiv 1(\bmod q) \Rightarrow \left(2^{2^k}\right)2^{n-k} \equiv 1(\bmod q) \Rightarrow 2^{2^n} \equiv 1(\bmod q).$$
Từ đây suy ra $q|2^{2^n} - 1$, mà $q|2^{2^n} + 1$ nên $q|2$, mâu thuẫn vì q là số lẻ.

2. Ngược lại, nếu $\text{ord}_q(2) = 2^{n+1}$, tức là $2^{2^{n+1}} \equiv 1(\bmod q)$, hay

$$\left(2^{2^n}+1\right)\left(2^{2^n}-1\right) \vdots\, q = p^m.$$

Do p là số nguyên tố lẻ, nên p chia hết chỉ một trong hai số $2^{2^n}+1$ hoặc $2^{2^n}-1$. Từ đây dẫn đến

$$2^{2^n}+1 \vdots\, q \quad \text{hoặc} \quad 2^{2^n}-1 \vdots\, q.$$

Tuy nhiên $q \nmid 2^{2^n}-1$ do $\text{ord}_q(2) = 2^{n+1}$. Do đó

$$q | 2^{2^n} - 1 = F_n.$$

□

Mệnh đề 3.3 (EULER). *Nếu p là ước nguyên tố của F_n thì p có dạng $p = k.2^{n+1}+1$, tức là*

$$p \equiv 1 \left(\bmod 2^{n+1}\right)$$

với k nguyên dương.

Chứng minh. Theo định lý Fermat thì

$$2^{p-1} \equiv 1(\bmod p).$$

Theo định nghĩa của cấp, thì $\text{ord}_p(2)|p-1$. Dẫn đến tồn tại số nguyên dương k sao cho

$$p-1 = k.\text{ord}_p(2).$$

Theo mệnh đề 3.2 thì $\text{ord}_p(2) = 2^{n+1}$. Do đó

$$p-1 = k.2^{n+1} \Rightarrow \boxed{p = k.2^{n+1}+1}.$$

□

Ta còn có một kết quả chặt hơn như sau.

Mệnh đề 3.4 (LUCAS). *Nếu p là ước nguyên tố của $F_n (n>1)$ thì p có dạng $p = k.2^{n+2}+1$, với k nguyên dương.*

Chứng minh. Vì $p|F_n$ nên theo 3.3 thì $p \equiv 1(\bmod 2^{n+1})$. Vì

$$p-1 \vdots\, 2^{n+1} \vdots\, 8 \quad (n>1)$$

Dẫn đến p có dạng $p \equiv 1(\bmod 8)$. Theo kết quả **thặng dư bậc 2** thì 2 là *thặng dư bậc hai theo modulo p*, tức tồn tại số a nguyên để

$$a^2 \equiv 2(\bmod p).$$

Khi đó
$$a^{2^{n+1}} = \left(a^2\right)^{2^n} \equiv 2^{2^n} \equiv -1(\text{mod} p) \Rightarrow a^{2^{n+2}} \equiv 1(\text{mod} p).$$
Do đó nếu gọi $h = \text{ord}_a(2)$ thì $h|2^{n+2}$. Lặp lại cách chứng minh trong mệnh đề 25.4, ta có kết quả $h = 2^{n+2}$. Vậy
$$2^{n+2} = \text{ord}_a(2).$$
Theo định lý Fermat thì $a^{p-1} \equiv 1(\text{mod} p)$, nên theo định nghĩa của cấp thì
$$2^{n+2}|p-1 \Rightarrow \boxed{p \equiv 1\left(\text{mod} 2^{n+2}\right)}.$$
Định lý được chứng minh hoàn toàn. □

Chú ý: Số a có thể chọn tường minh là $a = 2^{2^{n-2}}\left(2^{2^{n-1}} - 1\right)$. *Ngoài ra từ các kết quả trên suy ra*
$$2^{\frac{p-1}{2}} \vdots F_n \quad \textit{với mọi } p|F_n.$$

Hệ quả 3.5. *Nếu d là một ước số bất kỳ của $F_n(n > 1)$ thì d có dạng $d = k.2^{n+2} + 1$, với k nguyên dương.*

Chứng minh. Theo mệnh đề 3.4 thì mọi ước nguyên tố của F_n đều có dạng $k.2^{n+2} + 1$. Mặt khác, xét tích của hai số nguyên tố dạng này
$$\left(k2^{n+2} + 1\right)\left(l2^{n+1} + 1\right) = \left(kl2^{n+2} + k + l\right)2^{n+2} + 1$$
cũng là một số có dạng $k2^{n+2} + 1$. Từ đó mọi ước số của F_n đều có dạng này. □

Bổ đề 3.6. *Với $n \geq 0$ và số Fermat F_n chia hết cho số có dạng $2^m + 1 (m \geq 1)$ thì $F_n = 2^m + 1$, tức là $m = 2^n$.*

Chứng minh. Với mỗi m nguyên dương, đặt $Q_m = 2^m + 1$, khi đó
$$F_n = Q_{2^n}.$$
Theo khai triển nhị thức Newton thì
$$Q_{ij} = 2^{ij} + 1 = \left(2^j\right)^i + 1 = (Q_j - 1)^i + 1 \equiv 1 + (-1)^i (\text{mod} Q_j).$$
Từ đây dẫn đến
$$(Q_{ij}, Q_j) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i \text{ chẵn,} \\ Q_j & \text{nếu } i \text{ lẻ.} \end{cases} \quad (*)$$
Theo bổ đề 25.3, ý 6 thì
$$(F_k, F_m) = 1 \quad \text{với } k \neq m. \quad (**)$$
Giả sử $m < 2^n$ (không thể xảy ra $m > 2^n$ vì lúc đó $2^m + 1 > F_n$). Vì $m < 2^n$, nên m có thể phân tích dưới dạng $m = i.2^k$, với i là số lẻ, và $k < n$. Theo (*), với $j = 2^k$ và i lẻ, thì
$$(Q_m, Q_i) = Q_j \Rightarrow Q_m \vdots Q_j = Q_{2^k} = F_k.$$
Theo giả thiết thì $Q_m|F_n$ nên suy ra
$$Q_m|\left(F_n, F_k\right)$$
mâu thuẫn với (**). Vậy điều giả sử là sai, do đó $m = 2^n$. Bổ đề được chứng minh. □

*Bổ đề trên cho ta tính chất, số F_n không có ước số **thực sự** nào dạng $2^m + 1$.*

Hệ quả 3.7. *Với $n \geq 3$ thì F_n không có ước số dạng $2^{n+2} + 1$.*

Chứng minh. Theo bổ đề 3.6, nếu F_n có ước số dạng $2^{n+2} + 1$ thì $n + 2 = 2^n$. Nhưng vì $n \geq 3$ nên $2^n > n + 2$, mâu thuẫn. □

Hệ quả 3.8. *Với mọi $n \geq 1$ thì $(n, F_n) = 1$.*

Chứng minh. Theo mệnh đề 3.6, thì mọi ước số của F_n đều có dạng $d = k.2^{n+2} + 1$, với k nguyên dương. Với $n = 1$ thì kết quả là hiển nhiên. Với $n > 1$, thì mọi dước số d của F_n đều có dạng $d = k.2^{n+2} + 1$, với k nguyên dương. Nhưng

$$d = k.2^{n+2} + 1 \geq 2^{n+2} + 1 > n,$$

tức mọi ước số của F_n đều lớn hơn n, do đó $(n, F_n) = 1$. □

Hệ quả 3.9. *Với số nguyên dương $n > 2$ thì F_n có không quá $\dfrac{2^n}{n+3}$ ước nguyên tố.*

Chứng minh. Theo mệnh đề 25.6, thì mọi ước nguyên tố của F_n đều có dạng $p = k.2^{n+2} + 1$, với k nguyên dương. Do $n > 2$, nên theo hệ quả 3.7 thì $k > 1$. Giả sử F_n có dạng phân tích chính tắc thành j thừa số nguyên tố

$$F_n = \left(k_1.2^{n+2} + 1\right)^{\alpha_1} \ldots \left(k_j 2^{n+2} + 1\right)^{\alpha_j}, \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_j \in \mathbb{Z}^+).$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
2^{2^n} + 1 &\geq \left(2.2^{n+2} + 1\right)^{\alpha_1} \ldots \left(2.2^{n+2} + 1\right)^{\alpha_j} \quad (\text{do } k_i > 1, \forall i = \overline{1, j}) \\
&\geq \left(2.2^{n+2} + 1\right) \ldots \left(2.2^{n+2} + 1\right) \quad (\text{do } \alpha_i \geq 1, \forall i = \overline{1, j}) \\
&= \left(2^{n+3} + 1\right)^j \\
&> 2^{j(n+3)} + 1.
\end{aligned}$$

Vậy

$$2^{2^n} + 1 > 2^{j(n+3)} + 1 \Rightarrow 2^n > j(n+3) \Rightarrow j < \frac{2^n}{n+3}.$$

□

Bổ đề 3.10. *Cho p là số nguyên tố lẻ và $a \geq 2$ là số nguyên dương. Nếu t là số nguyên dương lớn nhất sao cho*

$$ord_{p^t}(a) = ord_p(a).$$

Khi đó với mọi $r \in \{1, 2, \ldots, t\}$ thì $ord_{p^r}(a) = ord_p(a)$ và $ord_{p^r}(a) = p^{r-t}.ord_p(a)$.

Chứng minh. Đặt $\mathrm{ord}_{p^t}(a) = \mathrm{ord}_p(a) = h$. Vì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ nên $h | p - 1$ dẫn đến $h \leq p - 1$. Do tính chất số t, là số nguyên dương lớn nhất sao cho

$$a^h - 1 \vdots p^t \Rightarrow v_p\left(a^h - 1\right) = t.$$

Đặt $\text{ord}_{p^r}(a) = k$. Nếu $r = 1, r = t$ thì kết quả là hiển nhiên. Khi $r \in \{2, 3, \ldots, p-1\}$ do

$$a^h - 1 \vdots p^t \vdots p^r \Rightarrow a^h \equiv 1 \,(\text{mod} p^r)\,.$$

Theo định nghĩa của k thì $k|h$. Nếu $k < h$, đặt $h = k.i$ với $i > 1$. Khi đó

$$v_p\left(a^h - 1\right) = v_p\left(\left(a^k\right)^i - 1\right) = v_p\left(a^k - 1\right) + v_p(i) \Rightarrow t = v_p\left(a^k - 1\right) + v_p(i).$$

Chú ý $v_p\left(a^k - 1\right) < t$, vì nếu $v_p\left(a^k - 1\right) = t$, tức $a^k - 1 \vdots p^t \vdots p$, mâu thuẫn với h là cấp của a theo modulo p mà $k < h$. Khi đó

$$v_p\,(i) = t - v_p\left(a^k - 1\right) > 0 \Rightarrow i \vdots p,$$

mâu thuẫn vì $i < h < p - 1$. Vậy $k < h$ dẫn dến vô lý. Do đó $k = h$. Bổ đề được chứng minh. Trường hợp $r > t$ chứng minh tương tự. □

Mệnh đề 3.11. *Cho $n > 1$ nguyên dương. Giả sử F_n có ước nguyên tố p. Khi đó*

$$p^2 | F_n \Leftrightarrow 2^{p-1} \equiv 1 \left(\text{mod} p^2\right).$$

Chứng minh. 1. Theo mệnh đề 3.6, thì $p|F_n$ nên p có dạng $p = k.2^{n+2} + 1$, với k nguyên dương. Nếu $p^2|F_n$ thì

$$2^{2^n} \equiv -1(\text{mod} p^2) \Rightarrow 2^{2^{n+1}} \equiv 1(\text{mod} p^2).$$

Dẫn đến $2^{2^{n+2}} \equiv 1(\text{mod} p^2)$ và $2^{k.2^{n+2}} \equiv 1(\text{mod} p^2)$ hay

$$2^{p-1} \equiv 1(\text{mod} p^2).$$

2. Ngược lại, giả sử $2^{p-1} \equiv 1\,(\text{mod} p^2)$. Khi đó $\text{ord}_{p^2}(2)|p - 1$ (*). Đặt $\text{ord}_p(2) = k$. Gọi t là số nguyên dương lớn nhất sao cho $2^k \equiv 1(\text{mod} p^t)$. Nếu $t = 1$, khi đó, theo bổ đề 25.12 và (*) thì

$$\text{ord}_{p^2}(2) = p^{2-1}\text{ord}_p(2) = p.\text{ord}_p(2) \Rightarrow p.\text{ord}_p(2)|p - 1,$$

vô lý vì $p - 1$ không thể chia hết cho p. Từ đó $t > 1$. Khi đó lại theo bổ đề 3.10 suy ra

$$\text{ord}_{p^2}(2) = \text{ord}_p(2).$$

Từ đây suy ra

$$2^k \equiv 1\left(\text{mod} p^2\right) \Leftrightarrow 2^k \equiv 1\,(\text{mod} p) \quad (2).$$

Lại do $p|F_n$ nên $2^{2^n} \equiv -1\,(\text{mod} p)$ hay $2^{2^{n+1}} \equiv 1\,(\text{mod} p)$. Theo (2) suy ra

$$2^{2^{n+1}} \equiv 1\left(\text{mod} p^2\right) \Rightarrow p^2|\left(2^{2^n} + 1\right)\left(2^{2^n} - 1\right) = F_n.\left(2^{2^n} - 1\right) \quad (3).$$

Ngoài ra $p \nmid 2^{2^n} - 1$, vì nếu $p|2^{2^n} - 1$, lại do $p|2^{2^n} + 1$ nên suy ra $p|2$ (vô lý với p nguyên tố lẻ). Do đó từ (3) suy ra

$$p^2|F_n.$$

□

Định lý 3.12. *Nếu $n \geq 4$, và p là ước nguyên tố lớn nhất của F_n, khi đó*

$$p \geq (4n+9)2^{n+2} + 1.$$

Chứng minh. Với $n \geq 4$, theo mệnh đề 3.6, mọi ước nguyên tố $p|F_n$ đều có dạng $p \equiv 1(\text{mod } 2^{n+2})$. Viết F_n ở dạng chính tắc

$$F_n = p_1^{b_1} \dots p_m^{b_m}$$

với $b_1, \dots, b_m$ là các số nguyên dương và $p_1, p_2, \dots, p_m$ là các số nguyên tố dạng

$$p_i = k_i 2^{m+2} + 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

và k_i là các số nguyên dương. Do $n \geq 4$, nên theo hệ quả 25.9 thì $k_i > 1, \forall i = 1, 2, \dots, m$. Khi đó

$$2^{2^n} + 1 > \left(2^{2^{n+2}} + 1\right)^{b_1+b_2+\cdots+b_m}.$$

Từ đây dẫn đến, với việc sử dụng $\dfrac{\ln(y+1)}{\ln(x+1)} < \dfrac{\ln y}{\ln x}$, với mọi $y > x > 1$ (*kết quả này dễ dàng suy ra do hàm số* $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$ *là hàm tăng*)

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_m < \frac{\ln\left(2^{2^n}+1\right)}{\ln\left(2^{n+2}+1\right)} < \frac{\ln\left(2^{2^n}\right)}{\ln\left(2^{n+2}\right)} = \frac{2^n}{n+2}. \quad (1)$$

Theo khai triển nhị thức Newton thì

$$p_i^{b_i} = \left(k_i 2^{n+2} + 1\right)^{b_i} \equiv 2^{n+2} k_i b_i + 1 \left(\text{mod} 2^{2n+4}\right).$$

Vì $n \geq 4$ nên $2^n > 2n+4$, nên $2^{2^n} \vdots 2^{2n+4}$, do đó

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \equiv 1 \left(\text{mod} 2^{2n+4}\right).$$

Suy ra

$$1 \equiv \prod_{i=1}^{m} \left(2^{n+2} k_i b_i + 1\right) \left(\text{mod} 2^{2n+4}\right) \equiv 1 + 2^{n+2} \sum_{i=1}^{m} k_i b_i \left(\text{mod} 2^{2n+4}\right)$$

hay

$$2^{n+2} \sum_{i=1}^{m} k_i b_i \equiv 0 \left(\text{mod} 2^{2n+4}\right) \Rightarrow k_1 b_1 + \cdots + k_m b_m \equiv 0 \left(\text{mod} 2^{n+2}\right).$$

Từ đây dẫn đến

$$k_1 b_1 + k_2 b_2 + \cdots + k_m b_m \geq 2^{n+2}.$$

Khi đó, sử dụng (1) ta có

$$2^{n+2} \leq k_1 b_1 + \cdots + k_m b_m \leq \max\{k_1, \dots, k_m\}. \sum_{i=1}^{m} b_i < \max\{k_1, \dots, k_m\} \cdot \frac{2^{n+2}}{n+2}$$

suy ra

$$\max\{k_1, \dots, k_m\} > 4(n+2) = 4n+8 \Rightarrow \max\{k_1, \dots, k_m\} \geq 4n+9.$$

Do đó, nếu p là ước nguyên tố lớn nhất của F_n thì

$$p = \max\{k_1, \dots, k_m\} 2^{n+2} + 1 \geq (4n+9)2^{n+2} + 1.$$

Định lý được chứng minh hoàn toàn. $\square$

4. SỐ FERMAT TRONG CÁC BÀI TOÁN SỐ HỌC

Ví dụ 4.1. *Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k sao cho $2^n.k+1$ là hợp số với mọi số nguyên dương n.*

Phân tích giải.

1. Xét n viết dưới dạng $n = 2^m.l$, l là số tự nhiên lẻ. Khi đó
$$2^n k + 1 = 2^{2^m.l} k + 1 \equiv -k + 1 (\bmod 2^{2^m} + 1).$$
Do đó ta sẽ tìm k để
$$-k + 1 \equiv 0 (\bmod 2^{2^m} + 1).$$

2. Trước hết ta có F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 là các số nguyên tố và $F_5 = 641 \times 6700417$ và $(F_i, F_j) = 1, \forall i \neq j$. Đặt $p = 641, q = 6700417$.

3. Theo định lý thặng dư Trung Hoa, tồn tại số nguyên dương k thỏa mãn
$$\begin{cases} k \equiv 1 (\bmod F_0) \\ k \equiv 1 (\bmod F_1) \\ k \equiv 1 (\bmod F_2) \\ k \equiv 1 (\bmod F_3) \\ k \equiv 1 (\bmod F_4) \\ k \equiv 1 (\bmod p) \\ k \equiv -1 (\bmod q). \end{cases}$$

4. Nếu $m < 5$ thì
$$2^n = 2^{2^m l} \equiv -1 (\bmod F_m) \Rightarrow 2^n k \equiv -1 (\bmod F_m) \Rightarrow 2^n k + 1 \vdots F_m.$$

5. Nếu $m = 5$ thì
$$2^n = 2^{2^n l} \equiv -1 (\bmod F_5) \Rightarrow 2^n k \equiv -1 (\bmod p) \Rightarrow 2^n k + 1 \vdots p.$$

6. Nếu $m > 5$ thì
$$2^n = 2^{2^m l} = \left(2^{2^5}\right)^{2^{m-5} l} \equiv 1 (\bmod F_5) \Rightarrow 2^n k \equiv -1 (\bmod q) \Rightarrow 2^n k + 1 \vdots q.$$

□

Ví dụ 4.2. *Cho trước các số nguyên dương n, s. Chứng minh rằng tồn tại n số nguyên dương liên tiếp mà mỗi số đều có ước là lũy thừa bậc s của một số nguyên dương lớn hơn 1.*

Phân tích giải.

1. Xét dãy số Fermat $F_n = 2^{2^n} + 1 (n = 1, 2, \ldots)$. Liên quan đến số này có tính chất đáng lưu ý là
$$(F_n, F_m) = 1, \forall n \neq m.$$

2. Áp dụng định lý thặng dư Trung Hoa cho n số nguyên tố cùng nhau $F_1^s, F_2^s, \ldots, F_n^s$ và n số $r_i = -i(i = 1, 2, \ldots, n)$ thì tồn tại số nguyên x_0 sao cho

$$x_0 + i \vdots F_i^s.$$

Vậy dãy $\{x_0+1, x_0+2, \ldots, x_0+n\}$ gồm n số nguyên dương liên tiếp, số hạng thứ i chia hết cho F_i^s.

□

Ví dụ 4.3 (IMO SHORTLIST 1998). *Xác định tất cả số nguyên dương n sao cho với n này tồn tại $m \in \mathbb{Z}$ để*

$$2^n - 1 | m^2 + 9.$$

Phân tích giải. 1. Viết n dưới dạng $n = 2^s.t(s, t \in \mathbb{N})$, t là số lẻ.

2. Nếu $t \geq 3$ thì $2^t - 1 | 2^n - 1$ nên $2^t - 1 | m^2 + 9$. Ta có

$$2^t - 1 \equiv -1(\text{mod} 4).$$

Tức là số $2^t - 1$ có dạng $4k + 3$, do đó nó có ước nguyên tố p mà $p \equiv -1(\text{mod}4)$. Dĩ nhiên $p \neq 3$ vì

$$3 \nmid 2^t - 1, \forall t \text{ lẻ}.$$

Từ đó suy ra

$$p | m^2 + 9 \Rightarrow m^2 \equiv -9(\text{mod} p).$$

Chứng tỏ -9 là thặng dư bậc hai theo modulo p, tuy nhiên

$$1 = \binom{-9}{p} = \binom{-1}{p} \cdot \binom{9}{p} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \binom{3}{p}^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

nên $\dfrac{p-1}{2}$ phải là số chẵn, tức là $p \equiv 1(\text{mod}4)$, vô lý.

3. Từ đây suy ra $t = 1$ hay $n = 2^s$. Ta chứng minh đây là tất cả các số cần tìm bằng cách chỉ ra số m để $2^n - 1 | m^2 + 9$. Ta có

$$2^n - 1 = 2^{2^s} - 1 = (2-1)(2+1)(2^2+1)\left(2^{2^2}+1\right)\cdots\left(2^{2^{s-1}}+1\right).$$

Từ đó để

$$2^n - 1 | m^2 + 9 \Rightarrow 2^{2^k} + 1 | m^2 + 9, \forall k = 0, 1, \ldots, s-1.$$

Mặt khác các số Fermat có tính chất

$$\left(2^{2^m} + 1, 2^{2^n} + 1\right) = 1, \forall m \neq n.$$

Theo định lý thặng dư Trung Hoa thì tồn tại nghiệm x_0 thỏa mãn hệ đồng dư

$$\begin{cases} x \equiv 2(\text{mod} 2^2 + 1) \\ x \equiv 2^2(\text{mod} 2^3 + 1) \\ x \equiv 2^3(\text{mod} 2^4 + 1) \\ \ldots\ldots \\ x \equiv 2^{2^{s-2}}(\text{mod} 2^{2^{s-1}} + 1). \end{cases}$$

Từ đó suy ra
$$x_0^2 + 1 \equiv 0(\bmod 2^{2^{t+1}} + 1), \forall t = 0, 1, 2, \ldots, s-2.$$
Từ đây suy ra
$$2^n - 1 | 9(x_0^2 + 1) = m^2 + 9$$
với $m = 3x_0$, đây chính là giá trị m cần tìm.

□

Ví dụ 4.4 (**KOREA 1999**). *Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn $2^n - 1$ chia hết cho 3 và tồn tại số nguyên m để*
$$\frac{2^n - 1}{3} | 4m^2 + 1.$$

Phân tích giải.

1. Nếu $n \equiv 1(\bmod 2)$ thì $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{N})$, khi đó
$$2^n = 2^{2k+1} = 2.4^k \equiv 2(\bmod 3) \Rightarrow 2^n - 1 \equiv 1(\bmod 3)$$
không thỏa mãn $2^n - 1 \vdots 3$.

2. Nếu $n \equiv 0(\bmod 2)$, đặt $n = 2^k.u$ (u là số tự nhiên lẻ). Nếu $u \geq 3$ thì
$$2^u - 1 | 2^n - 1 \text{ vì } 2^n - 1 = 2^{2^k.u} - 1 = (2^u)^{2^k} - 1.$$
Do đó
$$2^u - 1 | 4m^2 + 1.$$
Mặt khác, vì $u \geq 3$ nên
$$2^u - 1 \equiv -1(\bmod 4).$$
Khi đó tồn tại p nguyên tố, $p \equiv -1(\bmod 4)$, là ước của $2^u - 1$. Khi đó
$$p | 4m^2 + 1.$$
Sử dụng tính chất "Nếu p là số nguyên tố dạng $4k + 3$ và $a^2 + b^2 \vdots p$ thì cả a và b đều chia hết cho p". Áp dụng vào đẳng thức trên thì
$$2m \vdots p \text{ và } 1 \vdots p,$$
vô lý. Do đó $u = 1$, tức n có dạng $\boxed{n = 2^k}$. Ta chứng minh đây là tất cả các số cần tìm.

3. Khi $n = 2^k$ thì
$$\frac{2^n - 1}{3} = \frac{2^{2^k} - 1}{3} = F_1.F_2.\ldots.F_{k-1}$$
với F_i là số Fermat thứ i : $F_i = 2^{2^i} + 1$. Theo định lý thặng dư Trung Hoa thì hệ
$$\begin{cases} x \equiv 2(\bmod 2^2 + 1) \\ x \equiv 2^2(\bmod 2^3 + 1) \\ x \equiv 2^3(\bmod 2^4 + 1) \\ \ldots\ldots \\ x \equiv 2^{2^{k-2}}(\bmod 2^{2^{k-1}} + 1). \\ x \equiv 0(\bmod 2). \end{cases}$$

có nghiệm, gọi nghiệm đó là x_0 thì x_0 chẵn, đặt $x_0 = 2m$ thì

$$4m^2 + 1 = x_0^2 + 1 \vdots 2^n - 1.$$

□

Ví dụ 4.5 (IRAN TST 2009). *Chứng minh rằng tập các ước nguyên tố của $2^{2^n} + 1$ với $n = 1, 2, \ldots$ là vô hạn.*

Chứng minh. Ta chứng minh kết quả trên đúng cho $2^{2^n} + a$, với a nguyên dương. Gọi $v_p(a)$ là lũy thừa lớn nhất của số nguyên tố p trong phân tích của a. Giả sử tập các ước nguyên tố của các số $2^{2^n} + a$ là hữu hạn. Gọi các thừa số nguyên tố là $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $p_1 < p_2 < \ldots < p_N$. Khi đó tồn tại $z \in \mathbb{Z}^+$ đủ lớn sao cho

$$p_1^r > a^{2^n} + a.$$

Và tồn tại số n_0 đủ lớn sao cho

$$2^{2^{n_0}} + 1 > (p_1 \ldots p_N)^r, \quad \text{do} \quad 2^{2^{n_0}} + 1 = p_1^{v_{p_1}(2^{2^n}+a)} \ldots p_N^{v_{p_N}(2^{2^n}+a)}$$

nên sẽ tồn tại một i_0 sao cho

$$v_{p_{i_0}}(2^{2^{n_0}} + a) > r.$$

Lấy $N+1$ bất đẳng thức, với các giá trị $n_0, n_0+1, \ldots, n_0+N$. Vì chỉ có N thừa số nguyên tố, mỗi một giá trị xảy ra cho một số nguyên tố p_i nào đó, theo Dirichlet, tồn tại i, k, l $(0 \le k, l \le N)$ nguyên dương để hai bất đẳng thức cùng xảy ra cho một thừa số nguyên tố p_i nào đó, tức là

$$v_{p_i}(2^{2^{n_0+l}} + a) > r, \quad v_{p_i}(2^{2^{n_0+k}} + a) > r.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $k > l$. Ta có

$$2^{2^{n_0+l}} + a \equiv 0 (\bmod p_i^r) \Leftrightarrow 2^{2^{n_0+l}} \equiv -a (\bmod p_i^r).$$

Mà

$$\begin{aligned} &2^{2^{n_0+k}} + a \equiv 0 (\bmod p_i^r) \Leftrightarrow 2^{2^{n_0+l}.2^{k-l}} + a \equiv 0 (\bmod p_i^r) \Leftrightarrow (-a)^{2^{k-l}} + a \equiv 0 (\bmod p_i^r) \\ &\Rightarrow a^{2^{k-l}} + a > p_i^r \ge p_1^r > a^{2^n} + 1. \end{aligned}$$

Điều này vô lý vì $k - l \le N$. Vậy điều giả sử là sai, tức tập các ước nguyên tố của dãy này là vô hạn. □

5. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 5.1. Sử dụng số Fermat, hãy chứng minh tồn tại vô hạn số nguyên tố.

Bài 5.2. Cho số Fermat F_n là hợp số. Giả sử

$$F_n = (k.2^m + 1)\left(l.2^i + 1\right)$$

với k, l là các số lẻ, thì $k \geq 3, l \geq 3$.

Bài 5.3. Cho $n \geq 1$. Chứng minh rằng số Fermat F_n là số nguyên tố khi và chỉ khi nó có thể biểu diễn duy nhất thành tổng của hai số chính phương là $F_n = \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 + 1^2$.

Bài 5.4. Chứng minh rằng

$$\binom{F_n}{a} = \binom{a}{F_n} = -1$$

trong trường hợp $a = 3$ với mọi $n \geq 1$ và với $a = 5, a = 7$ thì đúng với mọi $n \geq 2$ (*Ký hiệu* $\binom{a}{b}$ *trong bài toán là ký hiệu Jacobi*). Hơn nữa hãy chứng minh

$$\binom{F_n}{F_m} = \binom{F_m}{F_n} = 1, \forall n > m \geq 2.$$

Bài 5.5 (**Tiêu chuẩn Pepin**).

1. Với mỗi $n \geq 1$, số F_n là số nguyên tố khi và chỉ khi

$$3^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv -1 \left(\bmod F_n\right).$$

2. Giả sử tồn tại số nguyên dương a sao cho

$$a^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv -1 \left(\bmod F_n\right)$$

thì F_n là số nguyên tố.

3. Giả sử tồn tại số nguyên dương a sao cho

$$a^{F_n-1} \equiv 1 \left(\bmod F_n\right) \quad \text{nhưng} \quad a^{\frac{F_n-1}{2}} \not\equiv 1 \left(\bmod F_n\right).$$

Khi đó F_n là số nguyên tố.

Bài 5.6. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn cặp số nguyên tố (p, q) thỏa mãn điều kiện

$$2^{p-1} - 1 \vdots q \quad \text{và} \quad 2^{q-1} - 1 \vdots p.$$

Bài 5.7 (**BULGARI 2006**). Cho p là số nguyên tố sao cho $p^2 | 2^{p-1} - 1$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì số

$$(p-1)(p! + 2^n)$$

có ít nhất 3 ước nguyên tố phân biệt.

Bài 5.8. Cho $n \geq 5$ và $F_n = F.C$ với F, C là các số nguyên dương > 1. Nếu

$$3^{F-1} \neq 3^{F_n-1} \left(\bmod C\right)$$

thì C là hợp số.

Bài 5.9. Cho số nguyên dương n và F_n là hợp số. Cho $k.2^m + 1$ là một ước số thực sự của F_n, với k nguyên dương lẻ. Chứng minh rằng

1. $k \geq 3$;
2. $n + 2 \leq m < \dfrac{2^n}{3}$;
3. Tồn tại số nguyên dương l lẻ, ≥ 3, nguyên tố cùng nhau với k để

$$F_n = (k2^m + 1)(l2^m + 1)$$

   và $v_2(k + l) = n$. Ngoài ra $\max\{k, l\} \geq F_{n-2}$.

4. Chỉ có một trong hai thừa số k hoặc l chia hết cho 3. Từ đó suy ra với mọi hợp số F_n, luôn tồn tại một số nguyên dương lẻ h sao cho $3h2^n + 1 | F_n$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. M.Krirek, F.Luca và L.Somer, *17 lectures on Fermat numbers: From number theory to geometry*, Springer 2001.
2. F.Rothe, *Selected chapters from number thoery and algebra*, lectures notes on Internet.
3. C.Stang, *Fermat number*, lectures notes on Internet.
4. B.C.Tuấn, *Các số đặc biệt: Fermat, Mersenne, hoàn hảo*, bài giảng tập huấn chuyên môn hè 2016.
5. Trang mạng mathlinks.ro.

NHỮNG BÍ ẨN CỦA SỐ NGUYÊN TỐ

Ian Stewart
(Đại học Warwick, Anh)

GIỚI THIỆU

Bài báo được Trần Nam Dũng trích dịch từ quyển sách "*Những câu đố hóc búa của giáo sư Stewart*" của tác giả Ian Stewart, bản tiếng Nga.

Trong toán học có những bí mật và thách đố của mình, và những nhà toán học muốn giải mã những bí mật đó nhiều khi cũng giống như những thám tử. Họ tìm những dấu hiệu, sử dụng các suy diễn logic, đưa ra các kết luận và tìm kiếm các chứng minh cho sự đúng đắn của mình. Cũng giống như trong công việc của nhà thám tử lừng danh Sherlok Holmes, bước quan trọng nhất trong nghiên cứu là bắt đầu từ đâu và theo hướng suy nghĩ nào để đi đến thành công. Trong nhiều trường hợp cho đến nay chúng ta cũng chưa biết phải làm thế nào. Có thể tuyên bố này giống như lời thú nhận sự bất khả tri của chính chúng ta, và ở một mức độ nào đó thì đúng là như vậy. Nhưng điều này cũng có nghĩa là toán học mới cho đến bây giờ vẫn chờ đợi những phát hiện mới, và có nghĩa là lĩnh vực khoa học này không bao giờ cạn vấn đề. Các số nguyên tố là một miền đất giàu có cho những giả thuyết hữu lý mà chúng ta chưa biết là đúng hay sai. Dưới đây chúng ta sẽ kể đến một số giả thuyết như vậy. Trong bài này, p_n ký hiệu số nguyên tố thứ n.

1. Giả thuyết Agoh-Giuca

Số p là số nguyên tố khi và chỉ khi $pB_{p-1} + 1$ chia hết cho p, trong đó B_k là số Bernoulli thứ k (Takashi Agoh, 1990). Nếu như bạn thực sự thấy thú vị, thông tin về những số này có thể xem trên Internet. Ở đây ta đưa ra những số Bernoulli đầu tiên

$$B_0 = 1,\ B_1 = \frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_7 = 0,\ B_8 = -\frac{1}{30}.$$

Còn đây là một khẳng định khác, tương đương với giả thuyết trên: Số p là số nguyên tố khi và chỉ khi $1^{p-1} + 2^{p-1} + \cdots + (p-1)^{p-1} + 1$ chia hết cho p (Guiseppe Giuca, 1950).

Phản ví dụ, nếu có, phải có ít nhất 13800 chữ số (David Borwein, Jonathan Borwein, Peter Borwein and Roland Girgensohn, 1996).

Chú ý, khi kiểm tra giả thuyết này, sau khi tính pB_{p-1} theo nghĩa thông thường, ta sẽ tiếp tục tính toán trong modulo p. Ví dụ

$$5B_4 + 1 = -\frac{1}{6} + 1 = \frac{5}{6} \equiv 0 \pmod 5,\ 7B_6 + 1 = \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6} \equiv 0 \pmod 7.$$

2. Giả thuyết Andrica

Nếu p_n là số nguyên tố thứ n thì $\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1$ (Dorin Andrica, 1986).

Imran Gori sử dụng thông tin về khoảng cách lớn nhất giữa những số nguyên tố đã kiểm tra khẳng định này với những n đến $1,3002 \times 10^{16}$. Hình dưới đây chúng ta thấy sự phụ thuộc của $\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}$ vào n cho 200 số nguyên tố đầu tiên. Số 1 là số lớn nhất trên trục tung còn tất cả các đỉnh khác trên đồ thị đều nằm dưới 1. Và chúng rõ ràng là giảm khi n tăng, nhưng chúng ta vẫn không thể tin chắc rằng không xảy ra tình huống với n lớn nào đó lại có một đỉnh lớn hơn 1. Để giả thiết đã cho là sai, ta cần có một khoảng cách lớn giữa hai số nguyên tố rất lớn. Điều này có vẻ rất khó xảy ra nhưng hiện nay ta vẫn chưa thể loại trừ hoàn toàn khả năng này.

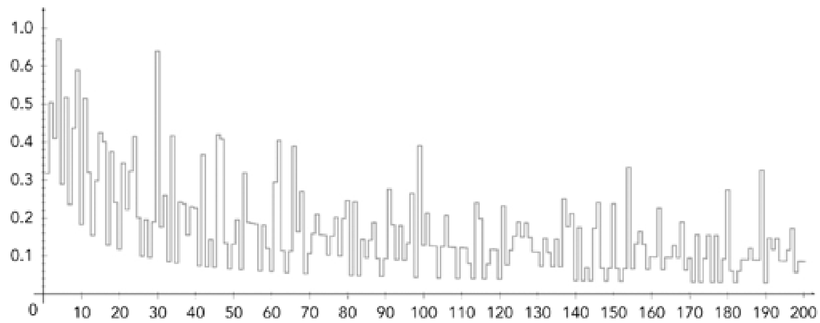


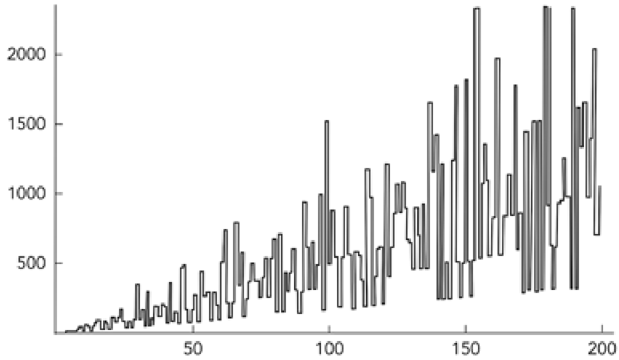
График зависимости $\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}$ от n для первых 200 простых чисел

3. Giả thuyết Artin về căn nguyên thuỷ

Mọi số nguyên a, khác -1 và không phải là số chính phương là căn nguyên thuỷ theo modulo của vô số số nguyên tố. Có nghĩa là mọi số nguyên từ 1 đến $p-1$ nếu bằng hiệu của một luỹ thừa nào đó của a và một bội nào đó của p. Tồn tại những công thức tường minh cho tỷ lệ các số như vậy theo chiều tăng của chúng (Emil Artin, 1927).

4. Giả thuyết Brocard

Với $n > 1$ tồn tại ít nhất 4 số nguyên tố nằm giữa p_n^2 và p_{n+1}^2 (Henri Brocard, 1904). Dự đoán là giả thuyết này đúng, hơn nữa có thể có những khẳng định mạnh hơn.



Зависимость числа простых чисел между p_n^2 и p_{n+1}^2 от n
(Eric W. Weisstein, «Brocard's Conjecture», с сайта *MathWorld* —
http://mathworld.wolfram.com/BrocardConjecture. html)

5. Giả thuyết Cramér

Khoảng cách $p_{n+1} - p_n$ giữa hai số nguyên tố liên tiếp với n đủ lớn không vượt quá $(\ln p_n)^2$ với hệ số cố định (Harald Cramér, 1936).

Cramer chứng minh khẳng định tương tự mà trong đó thay vì $(\ln p_n)^2$ là $\sqrt{p_n} \ln p_n$ với điều kiện là giả thuyết Riemann, một trong những vấn đề mở quan trọng nhất của toán học, đúng.

6. Giả thuyết Firoozbakht

Đại lượng $p_n^{1/n}$ giảm nghiêm ngặt (Farideh Firoozbakht, 1982). Điều này có nghĩa là $p_n^{1/n} > p_{n+1}^{1/(n+1)}$ với mọi số nguyên dương n. Khẳng định này đúng với mọi số nguyên dương nhỏ hơn hay bằng 4×10^{18}.

7. Giả thuyết Hardy – Littlewood thứ nhất

Giả sử $\pi_2(x)$ ký hiệu số các số nguyên tố $p \leqslant x$, sao cho $p + 2$ cũng là số nguyên tố. Định nghĩa hằng số các số nguyên tố sinh đôi

$$C_2 = \prod_{p \geqslant 3} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} = 0,66016$$

(trong đó ký hiệu π là tích theo tất cả các số nguyên tố $p \geqslant 3$). Khi đó

$$\pi_2(n) \sim 2C_2 \frac{n}{(\ln n)^2},$$

trong đó dấu $\sim$ có nghĩa là tỷ số giữa hai đại lượng dần đến 1 khi n dần đến vô cùng (Godfrey Harold Hardy và John Edensor Littlewood, 1923).

Ngoài giả thuyết trên còn có giả thuyết Hardy-Littlewood thứ hai (xem ở dưới).

8. Giả thuyết Gilbreath

Chúng ta bắt đầu từ các số nguyên tố

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ldots$$

và tính hiệu giữa các số hạng liên tiếp của dãy số này:

$$1,\ 2,\ 2,\ 4,\ 2,\ 4,\ 2,\ 4,\ 6,\ 2,\ldots$$

Lặp lại các tính toán như vậy với dãy số mới, không quan tâm đến dấu của các số, và cứ tiếp tục theo cách đó. Năm dãy số đầu tiên sẽ như thế này:

$$\begin{aligned}
&1,\ 0,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 4,\ldots\\
&1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ldots\\
&1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ldots\\
&1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ldots\\
&1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 2,\ldots
\end{aligned}$$

Gilbreath và Proth đưa ra giả thuyết rằng số hạng đầu tiên của các dãy số này luôn luôn là 1, cho dù ta có lặp lại quá trình bao nhiêu lần (Norman Gilbreath 1958, François Proth, 1978).

Vào năm 1993 Andrew Odlisko đã kiểm tra giả thuyết này cho $3,4 \times 10^{11}$ dãy số đầu tiên.

9. Giả thuyết Goldbach về số chẵn

Mọi số nguyên chẵn lớn hơn 2 đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng hai số nguyên tố (Christian Goldbach, 1742).

T.Oliveira-i-Silva đã kiểm tra giả thuyết này trên máy tính cho $n \leqslant 1,609 \times 10^{18}$.

10. Giả thuyết Grimm

Mỗi một phần tử của tập hợp các hợp số liên tiếp có thể cho tương ứng với các số nguyên tố phân biệt là ước của nó (C. A. Grimm, 1969).

Ví dụ, nếu lấy các hợp số $32,\ 33,\ 34,\ 35,\ 36$ thì ta có thể cho tương ứng với $2,\ 11,\ 17,\ 5,\ 3$.

11. Bài toán thứ tư của Landau

Năm 1912 Edmund Landau đã liệt kê bốn bài toán nền tảng liên quan đến các số nguyên tố mà ngày nay được gọi là các bài toán Landau. Ba bài toán đầu là giả thuyết Goldbach (xem ở trên), giả thuyết về các số nguyên tố sinh đôi (xem dưới đây) và giả thuyết Legendre (xem dưới đây). Bài toán thứ tư như sau: Phải chăng tồn tại vô số số nguyên tố p, sao cho $p-1$ là số chính phương? Nói cách khác $p = x^2 + 1$ với x là số nguyên.

Đây là một số số như vậy: $2,\ 5,\ 17,\ 37,\ 101,\ 197,\ 257,\ 401,\ 577,\ 677,\ 1297,\ 3137,\ 4357,\ 5477,\ 7057,\ 8101,\ 8837,\ 12101,\ 13457,\ 14401$ và 15377. Và đây là số lớn hơn (nhưng không phải là số lớn nhất)

$$p = 1524157875323883675049535156256668194500533455762536198787501905199875019052 1,$$
$$x = 1234567890123456789012345678901234567890.$$

Vào năm 1997 John Friedlander và Henryk Iwaniec chứng minh được rằng có vô số số nguyên tố dạng x^2+y^4 với $x,\ y$ là số nguyên. Đây là các số hạng đầu tiên của dãy số này: $2,\ 5,\ 17,\ 37,\ 41,\ 97,\ 101,\ 137,\ 181,\ 197,\ 241,\ 257,\ 277,\ 281,\ 337,\ 401\ 457$. Iwaniec chứng minh được rằng có vô số số có dạng $x^2 + 1$, có không quá hai ước nguyên tố.

Gần vậy nhưng không phải là giả thuyết của chúng ta.

12. Giả thuyết Legendre

Adrien-Marie Legendre đề xuất giả thuyết với mọi số nguyên dương n tồn tại số nguyên tố nằm giữa n^2 và $(n+1)^2$. Khẳng định này là hệ quả của giả thuyết Andrica (xem ở trên) và giả thuyết Oppermann (xem dưới đây). Từ giả thuyết Cramer (xem ở trên) suy ra rằng giả thuyết Legendre đúng với các số đủ lớn. Hiện nay giả thuyết đã được kiểm chứng cho đến 10^{18}.

13. Giả thuyết Lemoine hay giả thuyết Levy

Mọi số nguyên lẻ lớn hơn 5 đều có thể viết dưới dạng tổng của một số nguyên tố lẻ và hai lần một số nguyên tố khác (Émile Lemoine, 1894, Hyman Levy, 1963).

D. Korbitt kiểm tra tính đúng đắn của giả thuyết này cho đến 10^9.

14. Giả thuyết Mersenne

Vào năm 1644 Marin Mersenne thông báo rằng các số 2^n-1 là nguyên tố với $n = 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 13,\ 17,\ 19,\ 31,\ 67,\ 127$ và 257 và là hợp số với tất cả các số nguyên còn lại $n < 257$. Sau này người ta chỉ ra rằng Mersenne sai ở 5 trường hợp: Các số $n = 67$ và 257 cho ta các hợp số, còn $n = 61, 89, 107$ lại cho ta các số nguyên tố. Giả thuyết Mersenne dẫn đến giả thuyết Mersenne mới và giả thuyết Lenstra, Carl Pomerance and Samuel Wagstaff sẽ được đề cập dưới đây.

15. Giả thuyết Mersenne mới hay giả thuyết Bateman, John Selfridge and Samuel Wagstaff

Với mọi số nguyên tố lẻ p nếu hai điều kiện dưới đây đúng thì điều kiện thứ ba cũng đúng:

1. $p = 2^k \pm 1$ hoặc $p = 4k \pm 3$ với số nguyên dương k nào đó.
2. Số $2^p - 1$ nguyên tố (số nguyên tố Mersenne).
3. Số $\frac{2^p+1}{3}$ nguyên tố (số nguyên tố Wagstaff).
   (Paul Bateman, John Selfridge and Samuel Wagstaff Jr., 1989)

16. Giả thuyết Lenstra, Pomerance và Wagstaff

Tồn tại vô số số nguyên tố Mersenne, trong đó số các số nguyên tố Mersenne nhỏ hơn x, xấp xỉ bằng $e^{\gamma} \ln \ln x / \ln 2$, trong đó γ – là hằng số Euler, gần bằng $0,577$ (Hendrik Lenstra, Carl Pomerance and Samuel Wagstaff Jr., không công bố).

17. Giả thuyết Oppermann

Với mỗi số nguyên $n > 1$ tồn tại ít nhất một số nguyên tố nằm giữa $n(n-1)$ và n^2 và ít nhất một số nguyên tố nằm giữa n^2 và $n(n+1)$ (Ludvig Henrik Ferdinand Oppermann, 1882).

18. Giả thuyết Polignac

Với mọi số nguyên dương chẵn n tồn tại vô số cặp số nguyên tố liên tiếp với khoảng cách là n (Alphonsede Polignac, 1849).

Với $n = 2$ khẳng định này tương ứng với giả thuyết về các số nguyên tố sinh đôi (xem dưới đây). Với $n = 4$ nó khẳng định rằng có vô số số cặp số nguyên tố là "*anh em họ*" $(p, p+4)$. Với $n = 6$ giả thuyết này có nghĩa là có vô số cặp số nguyên tố $(p, p+6)$, được gọi là sexy (từ tên gọi la-tinh của số 6), trong đó nằm giữa các số p và $p+6$ không có số nguyên tố nào.

19. Giả thuyết Redmond - Sun

Mọi đoạn $[x^m, y^n]$ (tức là tập hợp các số từ x^m đến y^n) đều chứa ít nhất một số nguyên tố, ngoại trừ $[2^3, 3^2]$, $[5^2, 3^3]$, $[2^5, 6^2]$, $[11^2, 5^3]$, $[3^7, 13^3]$, $[5^5, 56^2]$, $[181^2, 2^{15}]$, $[43^3, 282^2]$, $[46^3, 312^2]$, $[22434^2, 55^5]$ (Stephen Redmond and Zhi-Wei Sun, 2006).

Giả thuyết này được kiểm chứng là đúng cho tất cả các đoạn $[x^m, y^n]$ cho đến 10^{12}.

20. Giả thuyết Hardy-Littlewood thứ hai

Nếu như $\pi(x)$ là số các số nguyên tố nhỏ hơn hay bằng x, thì $\pi(x+y) \leqslant \pi(x) + \pi(y)$ với$x, y \geqslant 2$ (Godfry Harold Hardy and John Littlewood, 1923).

Tồn tại các suy luận kỹ thuật mà theo đó ta có thể dự đoán rằng giả thuyết này sai, nhưng phản ví dụ đầu tiên, nếu có sẽ xảy ra với x rất lớn, có thể là lớn hơn $1,5 \times 10^{174}$, nhưng nhỏ hơn $2,2 \times 10^{1198}$.

21. Giả thuyết về số nguyên tố sinh đôi

Tồn tại vô số số nguyên tố p, sao cho $p + 2$ cũng nguyên tố.

Tháng 9 năm 2016 các "*dự án tính toán phân bố*" Twin Prime Search và PrimGrid, mà trong đó sử dụng các nguồn lực nhàn rỗi các máy tính của các tình nguyện viên mong muốn tham gia vào dự án đã công bố cặp số nguyên tố sinh đôi lớn nhất tính tới thời điểm hiện nay:

$$2996863034895 \cdot 2^{1290000} \pm 1.$$

Mỗi số này có $388,342$ chữ số.

Trong đoạn từ 1 đến 10^{18} có tất cả 808675888577436 cặp số nguyên tố sinh đôi.

ĐỊNH LÝ VAN DER WAERDEN VỀ CẤP SỐ CỘNG VÀ MỘT SỐ TỔNG QUÁT HÓA

M. A. Lukomskaia
Người dịch: Hoàng Đức Tân

Định lý Van Der Waerden được phát biểu như sau.

Định lý 1. *Đối với mọi cặp số tự nhiên k, l luôn tồn tại số tự nhiên $n(k,l)$ sao cho nếu một đoạn bất kỳ của dãy số tự nhiên có độ dài $n(k,l)$ được phân chia theo một phương pháp bất kỳ thành k lớp thì sẽ có ít nhất là một lớp trong k lớp đó mà trong lớp ấy ta luôn tìm được một cấp số cộng có độ dài l.*

Ta sẽ chứng minh định lý tổng quát hơn định lý trên.

Định lý 2. *Cho trước một dãy vô hạn các số tự nhiên nào đó*

$$t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_q,\ \dots \tag{1}$$

Đối với mỗi cặp số tự nhiên k, l luôn tồn tại một số tự nhiên $n(k,l)$ sao cho nếu một đoạn bất kỳ của dãy số tự nhiên có độ dài $n(k,l)$ được phân chia theo một phương pháp bất kỳ thành k lớp thì sẽ có ít nhất là một lớp (trong k lớp ấy) mà trong lớp đó ta luôn tìm được l số $c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_l$ thỏa mãn điều kiện sau

$$(c_2 - c_1) : (c_3 - c_2) : \dots : (c_l - c_{l-1}) = t_1 : t_2 : \dots : t_{l-1}.$$

Ta sẽ nói một cách ngắn gọn là l số đó tạo thành một cấp số cộng tổng quát có độ dài l được tạo ra bởi dãy số (1).

Định lý Van Der Waerden sẽ là trường hợp riêng của định lý vừa được phát biểu chỉ trong trường hợp $t_1 = t_2 = \dots = t_q = \dots = 1$.

Chứng minh mà tôi đã thông báo cho Viện sĩ Khinchin A. Ya mà bạn có thể đọc trong cuốn "*Ba viên ngọc trong lý thuyết số*" do ông viết thật sự là một trường hợp riêng của chứng minh này.

Ta sẽ chứng minh định lý bằng phương pháp quy nạp toán học theo l tức là bằng cách giả thiết định lý là đúng đối với một l nào đó và đối với mọi k và ta cần phải chứng minh rằng định lý cũng đúng đối với $l+1$ và đối với mọi k.

Trước tiên ta đặt số hạng đầu tiên của dãy (1) bằng đơn vị: t_1 (về sau này ta sẽ thấy rằng có cách để thoát ra khỏi ràng buộc này).

Định lý là hiển nhiên đối với $l = 2$ và đối với mọi k (bởi vì số $n(k, l)$ có thể nhận giá trị k+1).

Vậy tuân theo giả thiết của ta thì định lý là đúng đối với số $l \geqslant 2$ nào đó và đối với k bất kỳ.

Đặt

$$q_0 = 1,\, n_0 = n(k,l)q_s = (1 + t_l)n_{s-1}q_{s-1},\, n_s = n(k^{q_s}, l) > 0 \tag{2}$$

Ta hãy chứng minh rằng số $n(k, l + 1)$ có thể lấy bằng q_k.

Vậy giả sử đoạn Δ của dãy số tự nhiên có độ dài q_k được phân chia theo một phương pháp bất kỳ thành k lớp. Hai số a và b của đoạn Δ đó được gọi là cùng loại nếu chúng cùng nằm trong một lớp và sẽ được viết là $a \sim b$. Hai đoạn $\Delta'(a, a+1, \dots, a+r)$ và $\Delta''(a', a'+1, \dots, a'+r)$ có độ dài bằng nhau và cùng nằm trong đoạn Δ sẽ được gọi là *cùng loại* và được viết là $\Delta' \sim \Delta''$ nếu $a + j \sim a' + j,\ j = 0, 1, \dots, r$. Rõ ràng đối với các đoạn có độ dài m thì số các loại khác nhau có thể có sẽ bằng k^m.

Vì $q_k = (1 + t_l)n_{k-1}q_{k-1}$ nên đoạn Δ có thể được xem như là gồm hai phần không bằng nhau: Phần bên trái là một dãy gồm n_{k-1} đoạn có độ dài q_{k-1}, còn phần bên phải là một dãy gồm $t_l n_{k-1}$ đoạn có độ dài q_{k-1}. Ta sẽ nói rằng các đoạn có độ dài bằng nhau sẽ tạo nên một cấp số cộng tổng quát nếu cấp số đó được tạo nên bởi các số đầu tiên của chúng. Do định nghĩa của số n_{k-1} nên ta có thể khẳng định được rằng phần bên trái của đoạn Δ có chứa một cấp số cộng tổng quát từ l đoạn cùng loại với nhau $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \dots,\ \Delta_l$ và cùng có độ dài là q_{k-1}. Ký hiệu các khoảng cách giữa các đầu mút bên trái của hai đoạn kề nhau (tức là hiệu giữa hai số đầu tiên của hai đoạn kề nhau) là: $d_1,\ d_1t_2,\ \dots,\ d_1t_{l-1}$.

Đối với cấp số tổng quát từ các đoạn cùng loại đó ta gắn thêm vào nó phần tử thứ $l + 1$ là Δ_{l+1} mà phần tử ấy có thể không cùng loại với các phần tử đứng trước và nó có thể sẽ vượt ra ngoài phần đầu tiên của đoạn Δ, nhưng nó vẫn luôn nằm trong đoạn Δ.

Bây giờ ta lấy một phần tử Δ_{i_1} bất kỳ từ l phần tử của cấp số tổng quát đó, đó là đoạn có độ dài q_{k-1}. Chúng ta sẽ tiến hành trên đoạn đó tương tự như đã tiến hành với đoạn Δ (tức là coi đoạn Δ như là dãy $(1 + t_l)n_{k-1}$ đoạn có độ dài q_{k-1}) do định nghĩa của số n_{k-1} mà ta có thể khẳng định rằng trong phần bên trái của đoạn Δ_{i_1} bao gồm n_{k-1} đoạn có độ dài q_{k-2} có chứa cấp số cộng tổng quát từ l đoạn cùng loại $\Delta_{i_1 i_2}(1 \leqslant i_2 \leqslant l)$ có cùng độ dài q_{k-1}. Ta ký hiệu các khoảng cách giữa các đầu mút trái của hai đoạn kề nhau $\Delta_{i_1 i_2}$ qua $d_2,\ d_2t_2,\ \dots,\ d_2t_{l-1}$.

Một lần nữa ta lại nối thêm vào cấp số cộng tổng quát này phần tử thứ $l + 1$ và rõ ràng phần tử ấy cũng vẫn nằm trong đoạn Δ_{i_1}. Việc xây dựng đó được ta tiến hành với tất cả các $\Delta_{i_1}(1 \leqslant i_1 \leqslant l + 1)$ và trong tất cả các đoạn đó ta sẽ lấy tương ứng các đoạn $\Delta_{i_1 i_2}(1 \leqslant i_2 \leqslant l + 1)$ theo vị trí tương ứng. Bởi vì tất cả các là cùng loại nên rõ ràng giữa chúng với nhau và tất cả $\Delta_{i_1 i_2}$ sẽ là cùng loại nếu $1 \leqslant i_1 \leqslant l,\ 1 \leqslant i_2 \leqslant l$.

Quá trình xây dựng đó được tiếp tục kéo dài k lần. Kết quả của lần cuối cùng ta sẽ nhận được các đoạn có độ dài $q_0 = 1$ tức là một đoạn đơn giản Δ mà một cách tổng quát ta có thể ký hiệu là $\Delta_{i_1 i_2 \cdots i_k}(1 \leqslant i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_k \leqslant l + 1)$. Như vậy ta dễ thấy rằng với $1 \leqslant s \leqslant k,\ 1 \leqslant i_r \leqslant l,\ 1 \leqslant i'_r \leqslant l(1 \leqslant r \leqslant s)$ thì

$$\Delta_{i_1 i_2 \cdots i_s} \sim \Delta_{i'_1 i'_2 \cdots i'_s}. \tag{3}$$

Hai nhận xét sau đây là rất quan trọng đối với phần còn lại trong chứng minh định lý của ta.

1) Giả sử $1 \leqslant s \leqslant k,\ 1 \leqslant i_r \leqslant l,\ 1 \leqslant i'_r \leqslant l\ (1 \leqslant r \leqslant s),\ 1 \leqslant i_m \leqslant l+1\ (s+1 \leqslant m \leqslant k)$. Khi đó
$$\Delta_{i_1 i_2 \cdots i_s i_{s+1} \cdots i_k} \sim \Delta_{i'_1 i'_2 \cdots i'_s i'_{s+1} \cdots i_k}. \tag{4}$$
Thật vậy do hai số đó đứng ở các vị trí giống nhau trong các đoạn cùng loại $\Delta_{i_1 i_2 \cdots i_s}$ và $\Delta_{i'_1 i'_2 \cdots i'_s}$.

2) Với $s \leqslant k,\ i_s \leqslant l,\ i'_s = i_s + 1$ thì các đoạn $\Delta_{i_1 \cdots i_{s-1} i_s}$ và $\Delta_{i_1 \cdots i_{s-1} i'_s}$ sẽ là các đoạn kề nhau ở bước xây dựng thứ s của chúng ta. Cho nên đối với mọi chỉ số $i_{s+1}, \ldots, i_k$ thì số $\Delta_{i_1 i_2 \cdots_{s-1} i_s i_{s+1} \cdots i_k}$ và $\Delta_{i_1 i_2 \cdots_{s-1} i'_s i_{s+1} \cdots i_k}$ sẽ chiếm các vị trí giống nhau trong hai đoạn kề nhau sao cho:
$$\Delta_{i_1 i_2 \cdots_{s-1} i'_s i_{s+1} \cdots i_k} - \Delta_{i_1 i_2 \cdots_{s-1} i_s i_{s+1} \cdots i_k} = d_s t_{i_s}. \tag{5}$$
Để cho ngắn gon, ta đặt $l' = l + 1$. Xét $k + l$ số
$$a_r = \Delta_{\underbrace{1 \cdots 1}_{r} \underbrace{l' \cdots l'}_{k-r}},\ r = 0, 1, \ldots, k. \tag{6}$$

Trong các số đó ta luôn tìm được hai số a_r và a_s cùng nằm trong một lớp
$$\Delta_{\underbrace{1 \cdots 1}_{r} \underbrace{l' \cdots l'}_{k-r}} \sim \Delta_{\underbrace{1 \cdots 1}_{s} \underbrace{l' \cdots l'}_{k-s}} \tag{7}$$

Xét các số
$$a_r = \Delta_{\underbrace{1 \cdots 1}_{r} \underbrace{i \cdots i}_{s-r} \underbrace{l' \cdots l'}_{k-s}}\ (1 \leqslant i \leqslant l'). \tag{8}$$

Và ta sẽ chứng minh rằng chúng cùng nằm trong một lớp và tạo thành một cấp số cộng tổng quát.

Thật vậy các số $c_{l'}$ và c_1 là cùng loại do (7). Còn tất cả các số c_i $(i < l')$ là cùng loại do (4). Vì vậy tất cả các số c_i $(1 \leqslant i \leqslant l')$ là cùng nằm trong một lớp. Phần còn lại là ta cần phải chỉ ra rằng các số đó tạo ra một cấp số cộng, tức là:
$$(c_2 - c_1) : (c_3 - c_2) : \cdots : (c_{l'} - c_l) = 1 : t_2 : \cdots : t_{l'}. \tag{9}$$

Để cho ngắn gọn ta đặt $i' = i + 1$. Ta đưa vào xét các số sau
$$c_{i,m} = \Delta_{\underbrace{1 \cdots 1}_{r} \underbrace{i' \cdots i'}_{m} \underbrace{i \cdots i}_{s-r-m} \underbrace{l' \cdots l'}_{k-s}}\ (0 \leqslant m \leqslant s - r)$$

Khi đó $c_{i+1} - c_i = \displaystyle\sum_{m=1}^{s-r} (c_{i,m} - c_{i,m-1})$ bởi vì $c_{i,0} = c_i$ và $c_{i,s-r} = c_{i+1}$. Nhưng do (5) ta có
$$c_{i,m} - c_{i,m-1} = \Delta_{\underbrace{1 \cdots 1}_{r} \underbrace{i' \cdots i'}_{m} \underbrace{i \cdots i}_{s-r-m} \underbrace{l' \cdots l'}_{k-s}} - \Delta_{\underbrace{1 \cdots 1}_{r} \underbrace{i' \cdots i'}_{m-1} \underbrace{i \cdots i}_{s-r-m+1} \underbrace{l' \cdots l'}_{k-s}} = d_{r+m} t_i.$$

Có nghĩa là
$$c_{i+1} - c_i = \sum_{m=1}^{s-r} d_{r+m} t_i.$$

Nhưng do $\sum_{m=1}^{s-r} d_{r+m}$ không phụ thuộc vào i và do đó điều kiện (9) là thỏa mãn.

Do đó định lý đã được chứng minh với giả thiết rằng phần tử đầu tiên của dãy số (1) bằng đơn vị (tức là bằng 1). Nếu t_1 khác đơn vị thì ta hãy xét dãy số sau đây

$$1,\ t_1,\ \ldots,\ t_q,\ \ldots \tag{10}$$

Khi đó $l+1$ số c_i $(i = 1, 2, \ldots, l+1)$ tạo ra cấp số cộng tổng quát có độ dài $l+1$, được tạo ra bởi dãy số (10), cùng nằm trong một lớp, vì thế đương nhiên là nó chứa l số tạo ra cấp số cộng tổng quát có độ dài l, được tạo ra bởi dãy số (1) và cùng nằm trong một lớp (cụ thể là cũng các số c_i đó, ở đây bằng $2, 3, \ldots, l+1$).

Và định lý đã được chứng minh hoàn toàn.

Thông tin liên hệ với dịch giả

Email: hdtan54@gmail.com

Địa chỉ: Số 3 Hẻm 147/89/29 phố Tân Mai, Quận Hoàng Mai, Hà Nội

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN TỒN TẠI TRONG SỐ HỌC

Lê Xuân Đại
(Trường THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc)

Đã có khá nhiều chuyên đề về số học được viết và thường tập trung vào các chủ đề như phương trình nghiệm nguyên, đồng dư chia hết, cấp của phần tử, số chính phương, ... Tuy nhiên trong các đề thi học sinh giỏi hiện nay xuất hiện khá nhiều bài toán về sự tồn tại của một tập hợp số thỏa mãn điều kiện cho trước. Đây là chủ đề rất khó bởi tính đa dạng của nó và cũng giống như trong tổ hợp thì cách xây dựng không hề tự nhiên chút nào. Có thể thấy các chuyên đề về bài toán tồn tại trong số học và tổ hợp rất ít và chưa được quan tâm đúng mức. Chính vì vậy tác giả mạnh dạn viết về một số phương pháp cũng như hướng tiếp cận với bài toán về sự tồn tại trong số học.

1. Phương pháp quy nạp

Tư tưởng quy nạp để chứng minh sự tồn tại của một số nguyên thỏa mãn điều kiện cho trước rõ ràng rất tự nhiên và phổ biến. Việc xây dựng một tập hợp các số thỏa mãn yêu cầu của bài toán dựa trên nguyên lý quy nạp sẽ khiến vấn đề trở lên đơn giản hơn.

Bài toán 1. *(IMO 2013) Chứng minh rằng với mỗi cặp số nguyên dương k và n luôn tồn tại k số nguyên dương $m_1, m_2, \ldots, m_k$ thỏa mãn*

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

Lời giải. Từ việc cần biểu diễn vế trái theo các nhân tử đồng dạng, ta nghĩ tới phương pháp chứng minh bằng quy nạp theo biến k.

Thật vậy, với $k=1$ thì kết quả là hiển nhiên. Giả sử bài toán đúng đến $k-1$, ta cần chứng minh nó đúng với k. Xét các trường hợp sau:

- Với $n=2t-1$, ta có

$$1+\frac{2^k-1}{2t-1}=\frac{2\left(t+2^{k-1}-1\right)}{2t}\cdot\frac{2t}{2t-1}=\left(1+\frac{2^{k-1}-1}{t}\right)\left(1+\frac{1}{2t-1}\right). \qquad (1)$$

Theo giả thiết quy nạp thì tồn tại các số $m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}$ sao cho

$$1 + \frac{2^{k-1} - 1}{t} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_{k-1}}\right).$$

Khi đó ta chọn $m_k = 2t - 1$ sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Với $n = 2t$, ta có

$$1+\frac{2^k - 1}{2t} = \frac{2t + 2^k - 1}{2t + 2^k - 2}\cdot\frac{2t + 2^k - 2}{2t} = \left(1 + \frac{1}{2t + 2^k - 2}\right)\cdot\left(1 + \frac{2^{k-1} - 1}{t}\right). \quad (2)$$

Theo giả thiết quy nạp thì tồn tại các số $m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}$ sao cho

$$1 + \frac{2^{k-1} - 1}{t} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_{k-1}}\right).$$

Khi đó ta chọn $m_k = 2t + 2^k - 2$ sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Mấu chốt của bài toán là quy nạp theo biến k và hai đẳng thức quan trọng (1), (2) ứng với trường hợp n lẻ và chẵn. Để bước quy nạp được đơn giản ta thường phải sử dụng thêm các đẳng thức đặc biệt liên quan đến cấu trúc bài toán, ta xét bài toán tiếp theo sau đây.

Bài toán 2. *(Bulgarian MO) Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geqslant 3$, tồn tại các số nguyên dương lẻ x, y sao cho*

$$7x^2 + y^2 = 2^n.$$

Lời giải. Ta sẽ chứng minh tồn tại các số nguyên dương lẻ x_n, y_n sao cho

$$7x_n^2 + y_n^2 = 2^n, \ n \geqslant 3.$$

Với $n = 3$, ta có thể chọn $x_3 = y_3 = 1$.

Giả sử mệnh đề đúng với n. Ta cần xây dựng một cặp (x_{n+1}, y_{n+1}) các số nguyên dương lẻ sao cho $7x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = 2^{n+1}$.

Thật vậy, ta có đẳng thức sau

$$7\left(\frac{x_n \pm y_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{7x_n \mp y_n}{2}\right)^2 = 2\left(7x_n^2 + y_n^2\right) = 2^{n+1}.$$

Chú ý là một trong hai số $\frac{x_n + y_n}{2}, \frac{|x_n - y_n|}{2}$ là lẻ, giả sử $\frac{x_n + y_n}{2}$ lẻ thì

$$\frac{7x_n - y_n}{2} = 3x_n + \frac{x_n - y_n}{2},$$

cũng là số lẻ, do đó ta chọn

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \text{ và } y_{n+1} = \frac{7x_n - y_n}{2}.$$

Nếu $\dfrac{x_n - y_n}{2}$ lẻ, thì $\dfrac{7x_n + y_n}{2} = 3x_n + \dfrac{x_n + y_n}{2}$ cũng lẻ, do đó ta chọn

$$x_{n+1} = \frac{|x_n - y_n|}{2} \text{ và } y_{n+1} = \frac{7x_n + y_n}{2}.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Một số bài tập tương tự

Bài toán 3. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geqslant 2$, tồn tại các số nguyên dương lẻ x, y sao cho $\left|x^2 - 17y^2\right| = 4^n$.*

Bài toán 4. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, tồn tại các số nguyên x, y sao cho $x^2 + xy + y^2 = 7^n$.*

Bài toán 5. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, tồn tại các số nguyên dương lẻ x, y, z sao cho $x^2 + y^2 + z^2 = 59^n$.*

Bài toán 6. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geqslant 3$, tồn tại các số nguyên dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$, x_{n+1} sao cho*

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} = \frac{n+1}{x_{n+1}^2}.$$

Lời giải. Xét $n = 3$, từ $5^2 = 3^2 + 4^2$ ta được $\dfrac{1}{12^2} = \dfrac{1}{15^2} + \dfrac{1}{20^2}$, suy ra

$$\frac{1}{12^4} = \frac{1}{12^2{\cdot}15^2} + \frac{1}{12^2{\cdot}20^2} = \frac{1}{12^2{\cdot}15^2} + \left(\frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2}\right)\frac{1}{20^2} = \frac{1}{(12\cdot 15)^2} + \frac{1}{(15\cdot 20)^2} + \frac{1}{(20\cdot 20)^2},$$

Do đó $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = \left(12\cdot 15,\ 15\cdot 20,\ 20^2,\ 2\cdot 12^2\right)$ thỏa mãn.

Giả sử tồn tại bộ $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} = \frac{n+1}{x_{n+1}^2}.$$

Khi đó rõ ràng

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{x_{n+1}^2} = \frac{n+2}{x_{n+1}^2}$$

nên mệnh đề cũng đúng với $(n+1)$. Bài toán được chứng minh hoàn toàn. □

Một số bài tập tương tự

Bài toán 7. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geqslant 6$, tồn tại các số nguyên dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho*

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} = 1.$$

Bài toán 8. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geqslant 412$, tồn tại các số nguyên dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho*

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \cdots + \frac{1}{x_n^3} = 1.$$

Bài toán 9. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geqslant 2$, tồn tại các số nguyên dương $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ sao cho*

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \cdots + \frac{1}{x_n^3} = \frac{1}{x_0^2}.$$

Bài toán 10. *(Gặp gỡ toán học 2015)*

a) Tìm tất cả các số nguyên dương lẻ t thỏa mãn tính chất: Với mọi số nguyên dương k, tồn tại số nguyên dương a_k sao cho $a_k^2 + t$ chia hết cho 2^k.

b) Chứng minh rằng tồn tại một dãy số nguyên dương (a_k) sao cho $a_k^2 + 7$ chia hết cho 2^k và $\dfrac{a_{k+1}^2 + 7}{2^{k+1}}$ chia hết cho $\dfrac{a_k^2 + 7}{2^k}$ với mọi $k = 1, 2, 3, \ldots$

Lời giải. a) Ta sẽ chứng minh rằng các số t cần tìm có dạng $8m + 7$.

- Điều kiện cần: Ta phải có $a_k^2 \equiv -t \pmod{2^k}$ với mọi $k \geqslant 1$. Rõ ràng một số chính phương khi chia 8 chỉ có các số dư là 0, 1, 4, đồng thời do t là số lẻ nên $1 \equiv -t \pmod 8$, nghĩa là t chỉ có thể có dạng $8k + 7$.
- Điều kiện đủ: Giả sử t có dạng $8k + 7$, ta sẽ xây dựng dãy các số a_k bằng quy nạp.

  Với $k = 1, 2, 3$, chọn $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ thì dễ thấy các giá trị này thỏa mãn.

  Giả sử ta có $a_k^2 \equiv -t \pmod{2^k}$ và a_k lẻ với $k \geqslant 3$. Khi đó $d = \dfrac{a_k^2 + t}{2^k}$ là số chẵn hoặc lẻ. Ta xét hai trường hợp:

  - Nếu d chẵn thì $a_k^2 + t \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$, lúc đó ta chọn $a_{k+1} = a_k$ là xong.

  - Nếu d lẻ thì $a_k^2 + t \equiv 2^k \pmod{2^{k+1}}$, lúc đó ta chọn $a_{k+1} = a_k + 2^{k-1}$. Ta có

  $$\begin{aligned} a_{k+1}^2 + t = \left(a_k + 2^{k-1}\right)^2 + t = a_k^2 + 2^k \cdot a_k + 2^{2k-2} + t = 2^k \left(\frac{a_k^2 + t}{2^k} + a_k + 2^{k-2}\right) \\ \equiv 2^k \left(2 + 2^{k-2}\right) \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

  Do đó số a_{k+1} cũng thỏa mãn. Vậy theo nguyên lý quy nạp thì có thể xây dựng được dãy (a_k) thỏa mãn với k tùy ý. Vậy các số t cần tìm có dạng $8m + 7$.

b) Ta cũng xây dựng bằng quy nạp theo phương pháp trên. Đầu tiên vẫn chọn $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. Giả sử $a_k^2 + 7 \vdots 2^k$ với $k \geqslant 3$. Xét công thức $a_{k+1} = \dfrac{a_k^2 - 2a_k + 7}{2}$. Khi đó

$$a_{k+1}^2 + 7 = \left(\frac{a_k^2 - 2a_k + 7}{2}\right)^2 + 7 = \frac{\left(a_k^2 + 7\right)\left(a_k^2 - 4a_k + 11\right)}{4}.$$

Suy ra

$$\frac{a_{k+1}^2+7}{2^{k+1}}=\frac{a_k^2+7}{4}\cdot\frac{a_k^2-4a_k+11}{8}.$$

Ta chỉ cần chứng minh $\frac{a_k^2-4a_k+11}{8}$ là số nguyên. Thật vậy, do a_k lẻ nên đặt $a_k=2b_k+1$ ta được

$$a_k^2-4a_k+11=4b_k\left(b_k-1\right)+8\equiv 0 \pmod 8,$$

do đó $\frac{a_k^2-4a_k+11}{8}\in\mathbb{Z}$, tức là số hạng a_{k+1} cũng thỏa mãn. Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét. Đây là bài toán điển hình trong số học về việc xây dựng dãy các số mà phổ biến là quy nạp như trên. Ở ý (b) để tìm được công thức $a_{k+1}=\frac{a_k^2-2a_k+7}{2}$ ta có thể thử các trường hợp nhỏ:

$$a_1=a_2=a_3=1,\ \ a_4=3,\ \ a_5=5,\ \ a_6=11,\ \ a_7=53.$$

Ta sẽ tìm mối liên hệ giữa a_{k+1} và a_k. Dễ thấy rằng a_{k+1},a_k không có quan hệ tuyến tính, ta đi tìm quan hệ bậc hai dạng $a_{k+1}=ma_k^2+na_k+p$ với m,n,p là các số hữu tỷ. Thay $k=3,4,5$ vào ta có hệ

$$\begin{cases} m+n+p=3\\ 9m+3n+p=5\\ 25m+5n+p=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m=\frac{1}{2}\\ n=-1\\ p=\frac{7}{2}\end{cases}$$

Từ đó có quan hệ $a_{k+1}=\frac{a_k^2-2a_k+7}{2}$ như trên.

Bài toán 11. *(Shorlist 2014) Cho trước số nguyên dương $n>1$. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số hạng của dãy $(a_k)_{k\geqslant 1}$ là lẻ, trong đó $a_k=\left[\frac{n^k}{k}\right]$.*

Lời giải 1. Nếu n lẻ, đặt $k=n^m$ với $m=1,2,\dots$ thì $a_k=n^{n^m-m}$ là số lẻ với mọi m.

Ta xét n chẵn, đặt $n=2t$ với $t\geqslant 1$. Khi đó với mỗi $m\geqslant 2$ thì $n^{2^m}-2^m=2^m\left(2^{2^m-m}\cdot t^{2^m}-1\right)$ có một ước nguyên tố lẻ p, do $2^m-m>1$. Với $k=p{\cdot}2^m$, ta có

$$n^k=\left(n^{2^m}\right)^p\equiv\left(2^m\right)^p=\left(2^p\right)^m\equiv 2^m \pmod p.$$

Mặt khác từ $n^k-2^m<n^k<n^k+2^m\left(p-1\right)$, suy ra

$$\frac{n^k-2^m}{p{\cdot}2^m}<\frac{n^k}{k}<\frac{n^k+2^m\left(p-1\right)}{p{\cdot}2^m}.$$

Do đó

$$a_k=\left[\frac{n^k}{k}\right]=\frac{n^k-2^m}{p{\cdot}2^m}=\frac{\frac{n^k}{2^m}-1}{p}.$$

Vì $\frac{n^k}{2^m}-1$ là một số nguyên lẻ nên a_k lẻ, bài toán được chứng minh hoàn toàn. □

Lời giải 2. Ta sẽ tìm cách chỉ ra các số k nhờ sử dụng một bổ đề sau:

Bổ đề 1. *Cho n chẵn, $n > 2$ và gọi p là một ước nguyên tố của $n - 1$. Khi đó p^{i+1} là ước của $n^{p^i} - 1$ với mọi $i = 0, 1, \ldots$*

Ta chứng minh bằng quy nạp theo $i \geqslant 0$. Thật vậy, trường hợp $i = 0$ đúng theo cách chọn p. Giả sử mệnh đề đúng với i. Ta có

$$n^{p^{i+1}} - 1 = \left(n^{p^i} - 1\right)\left[n^{p^i(p-1)} + n^{p^i(p-2)} + \cdots + n^{p^i} + 1\right].$$

Do $n^{p^i} \equiv 1 \pmod{p}$ nên

$$n^{p^i(p-1)} + n^{p^i(p-2)} + \cdots + n^{p^i} + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

suy ra $n^{p^{i+1}} - 1$ chia hết cho p^{i+2}. Vậy bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán. Xét n chẵn, $n > 2$. Theo bổ đề trên ta chỉ cần chọn $k = p^i$ sẽ có ngay $\left[\dfrac{n^{p^i}}{p^i}\right] = \dfrac{n^{p^i} - 1}{p^i}$ là số nguyên lẻ với mọi $i \geqslant 1$.

Bây giờ xét $n = 2$: Ta thấy ngay $2^{3\cdot 4^i} - 4^i \,\vdots\, 3$, với mọi $i \geqslant 1$. Mặt khác do $3 \cdot 4^i > 2i$ nên $2^{3\cdot 4^i} - 4^i \,\vdots\, 4^i$. Do đó $\left(2^{3\cdot 4^i} - 4^i\right) \,\vdots\, \left(3 \cdot 4^i\right)$, suy ra

$$\left[\frac{2^{3\cdot 4^i}}{3 \cdot 4^i}\right] = \frac{2^{3\cdot 4^i} - 4^i}{3 \cdot 4^i} = \frac{2^{3\cdot 4^i - 2i} - 1}{3},$$

là số nguyên lẻ với mọi $i \geqslant 1$. Bài toán được chứng minh hoàn toàn. □

Nhận xét. Trong trường hợp n chẵn, $n > 2$ ta cũng có thể xây dựng dãy chỉ số (k_i) thỏa mãn theo cách sau: $k_1 = 1$ và $k_{i+1} = n^{k_i} - 1$ với $i \geqslant 1$. Khi đó (k_i) là dãy tăng ngặt các số nguyên dương và bằng quy nạp dễ chứng minh được $k_i \mid \left(n^{k_i} - 1\right)$ với mọi $i \geqslant 1$. Như vậy k_i thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Một số bài toán tương tự.

Bài toán 12. *Chứng minh rằng nếu n nguyên dương và $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ thì tồn tại các số nguyên không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa mãn điều kiện*

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Bài toán 13. *Tìm tất cả các số k nguyên dương sao cho tồn tại 2015 số nguyên dương phân biệt thỏa mãn tổng của 2015 số này chia hết cho tổng của k số phân biệt bất kỳ trong 2015 số đó.*

Bài toán 14. *Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu $S(n)$ là tổng các chữ số của nó. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương phân biệt $n_1, n_2, \ldots, n_{2016}$ sao cho*

$$n_1 + S(n_1) = n_2 + S(n_2) = \cdots = n_{2016} + S(n_{2016}).$$

2. Phương pháp sử dụng định lí thặng dư trung hoa

Ngay nội dung của định lý về phần dư Trung hoa đã chứa đựng yếu tố tồn tại về nghiệm của một hệ đồng dư, do đó việc sử dụng định lý này là việc làm hết sức quen thuộc và hay được sử dụng trong các bài toán về sự tồn tại.

Bài toán 15. *(Trường hè toán học 2015) Ta gọi một số là lũy thừa đúng nếu nó có dạng a^m với a, m nguyên lớn hơn 1. Tìm tất cả các số nguyên dương $n > 1$ sao cho tồn tại các số nguyên dương $b_1, b_2, \ldots, b_n$ không đồng thời bằng nhau để với mọi k nguyên dương thì $(b_1 + k)(b_2 + k) \cdots (b_n + k)$ là lũy thừa đúng?*

Lời giải. Ta chứng minh mọi hợp số n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• Điều kiện đủ: Giả sử n là hợp số, $n = rs$ với $r > 1, s > 1$. Ta chọn các số như sau:

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_r = 1, \ \ b_{r+1} = b_{r+2} = \cdots = b_n = 2.$$

Khi đó, với mọi k ta có

$$(b_1 + k)(b_2 + k) \cdots (b_n + k) = (k + 1)^r (k + 2)^{(s-1)r},$$

là lũy thừa đúng bậc r.

• Điều kiện cần: Ta chứng minh nếu n nguyên tố thì n không thỏa mãn.

Thật vậy, giả sử tồn tại bộ số $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ thỏa mãn điều kiện đề bài, có thể giả sử $b_1, b_2, \ldots, b_t$ là các số đôi một phân biệt, còn mỗi một trong các số $b_{t+1}, b_{t+2}, \ldots, b_n$ là sự lặp lại của các số trước, ta có ngay $t > 1$ vì các số không đồng thời bằng nhau.

Giả sử trong các số $b_1, b_2, \ldots, b_n$ có s_i số bằng b_i, trong đó $1 \leqslant i \leqslant t$ và $s_1 + s_2 + \cdots + s_t = n$.

Theo định lý phần dư Trung hoa thì với mọi $a_1, a_2, \ldots, a_t$ nguyên tố cùng nhau và mọi số nguyên không âm $r_1, r_2, \ldots, r_t$ với $0 \leqslant r_i < a_i, i = \overline{1, t}$, tồn tại số nguyên dương m sao cho trong phép chia cho $a_1, a_2, \ldots, a_t$ cho số dư tương ứng là $r_1, r_2, \ldots, r_t$.

Xét t số nguyên tố phân biệt $p_1, p_2, \ldots, p_t$, mỗi số đều lớn hơn tất cả các số b_i và đặt $a_i = p_i^2, r_i = p_i - b_i$ với $i = \overline{1, t}$. Các số p_i^2 đôi một nguyên tố cùng nhau và $0 < r_i < p_i < p_i^2$ nên điều kiện của định lý phần dư Trung hoa được thỏa mãn.

Xét số nguyên dương m thỏa mãn điều kiện m chia a_i dư r_i, ta sẽ chứng minh rằng nếu

$$(b_1 + m)(b_2 + m) \cdots (b_n + m) = u^v,$$

thì $v = 1$. Xét chỉ số i bất kỳ với $1 \leqslant i \leqslant t$. Số $b_i + m$ khi chia cho p_i^2 cho số dư $r_i + b_i = p_i$ nên suy ra $b_i + m$ chia hết cho p_i nhưng không chia hết cho p_i^2.

Với $j \neq i$ và $1 \leqslant j \leqslant t$, ta có $0 < \left| b_i - b_j \right| < p_i$ nên suy ra $b_j + m$ không chia hết cho p_i. Do đó trong phân tích tiêu chuẩn của

$$(b_1 + m)(b_2 + m) \cdots (b_n + m),$$

mỗi số p_i sẽ có mặt với số mũ s_i. Vì tích này bằng u^v nên v là ước số của tất cả các s_i và cũng là ước của tổng của chúng, tức là n. Ngoài ra n là số nguyên tố và $v < n$ nên $v = 1$. Do vậy số n không thỏa mãn. Bài toán được chứng minh hoàn toàn. □

Nhận xét. Đây là một ứng dụng hay của định lý thặng dư Trung hoa. Bước đầu tiên kiểm tra với hợp số thì khá rõ, đến số nguyên tố thì cần xử lý nhiều hơn, khai thác tính có nghiệm của các hệ phương trình đồng dư để chỉ ra phản ví dụ.

Bài toán 16. *Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn cặp số nguyên dương (a, b) với $a, b > n$ sao cho*

$$\prod_{i=1}^{n}(a+i) \mid b(b+2016), \quad \prod_{i=1}^{n}(a+i) \nmid b, \quad \prod_{i=1}^{n}(a+i) \nmid (b+2016).$$

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bài toán tổng quát sau:

Cho trước các số nguyên dương m, k. Gọi $k_1, k_2, \dots, k_m$ là các số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn cặp số nguyên dương (a, b) sao cho $\prod_{i=1}^{m}(a+k_i) \mid b(b+k)$ nhưng

$$\prod_{i=1}^{m}(a+k_i) \nmid b \text{ và } \prod_{i=1}^{m}(a+k_i) \nmid (b+k).$$

Đặt $k < p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ là m số nguyên tố phân biệt. Theo định lý phần dư Trung hoa, tồn tại vô hạn số nguyên dương $a > m$ sao cho

$$a \equiv -k_i \pmod{p_i}, \ \forall i = \overline{1, m}.$$

Đặt $M = \prod_{i=1}^{m}(a+k_i)$ thì

$$M \equiv 0 \pmod{p_1 p_2 \cdots p_m}.$$

Ta viết

$$M = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m} \cdot q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdots q_s^{\beta_s},$$

với $\alpha_i \geqslant 1$, $i = \overline{1, m}$ và $\beta_j \geqslant 1$, $j = \overline{1, s}$ và $q_1, q_2, \dots, q_s$ là s ước nguyên tố của M khác với $p_1, p_2, \dots, p_m$.

Theo định lý phần dư Trung hoa, tồn tại vô hạn số nguyên dương $b > m$ sao cho

$$\begin{cases} b \equiv 0 \left(\bmod \dfrac{M}{p_m^{\alpha_m}}\right) \\ b \equiv -k \left(\bmod p_m^{\alpha_m}\right) \end{cases}$$

Chú ý $k < p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ nên ta có ngay: $M \nmid b$, $M \nmid b+k$ và $M \mid b(b+k)$.

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. □

Bài toán 17. *(Iran TST 2015) Cho dãy $b_1 < b_2 < b_3 < \cdots$ là dãy các số tự nhiên mà mỗi số hạng là tổng của hai số chính phương. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn m sao cho* $b_{m+1} - b_m = 2015$.

Lời giải. Xét 2014 số nguyên tố $p_1, p_2, \ldots, p_{2014}$ sao cho $p_i \equiv 3 (\bmod\ 4), \forall i = \overline{1, 2014}$.

Theo định lý phần dư Trung hoa, tồn tại vô hạn x sao cho:

$$\begin{cases} x \equiv p_i - i \pmod{p_i^2} \\ x \equiv 2 \pmod 8 \end{cases}$$

Khi đó $x = 2(4k+1)$và $x + 2015 = 4h + 1$. Do các số có dạng $4k + 1$ đều viết được thành tổng của hai số chính phương nên tồn tại m để $b_{m+1} = x + 2015$.

Ta có
$$\frac{x}{2} = a^2 + b^2 \Rightarrow x = (a-b)^2 + (a+b)^2,$$
suy ra tồn tại h để $b_\ell = x$.

Ta sẽ chứng minh $\ell = m$. Thật vậy do

$$\begin{cases} x + i \,\vdots\, p_i \\ x + i \not\vdots\, p_i^2 \\ p_i \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

suy ra không tồn tại u, v mà $x + i = u^2 + v^2$. Do đó $\ell = m$, tức là $b_{m+1} - b_m = 2015$. Bài toán được chứng minh. □

Bài toán 18. *(APMO 2011) Chứng minh rằng với mỗi k nguyên dương, $k \geqslant 2$, luôn tồn tại một cấp số cộng $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ các số hữu tỷ, trong đó $a_i, b_i \in \mathbb{Z}^+, (a_i, b_i) = 1$ và các số $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2, \ldots,\ a_n,\ b_n$ đều phân biệt.*

Lời giải. Gọi $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_k$ là k số nguyên tố phân biệt sao cho $k < p_k < p_{k-1} < \cdots < p_1$. Đặt $N = p_1 p_2 \cdots p_k$. Theo định lý phần dư Trung hoa, tồn tại x nguyên dương sao cho $x \equiv -i \pmod{p_i}$ với mọi $i = \overline{1, k}$ và $x > N^2$.

Xét dãy gồm k số sau:
$$\frac{x+1}{N}, \frac{x+2}{N}, \ldots, \frac{x+k}{N}.$$

Hiển nhiên dãy này là một cấp số cộng. Ta có ngay, với mỗi $i = \overline{1, k}$ thì $x + i \,\vdots\, p_i$.

Nếu tồn tại $j \neq i$ mà $x + i \,\vdots\, p_j$ thì $|i - j| \,\vdots\, p_j$. Tuy nhiên $p_j > k > |i - j|$, nên ta có điều mâu thuẫn.

Do đó $x + i$ chia hết cho p_i nhưng không chia hết cho p_j với $j \neq i$.

Đặt $a_i = \dfrac{x+i}{p_i},\ \ b_i = \dfrac{N}{p_i}$ với $i = \overline{1, k}$. Khi đó $\dfrac{x+i}{N} = \dfrac{a_i}{b_i}$ và $(a_i, b_i) = 1$.

Cuối cùng ta còn phải chứng minh các số $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2, \ldots,\ a_n,\ b_n$ phân biệt. Ta có $x > N^2$ suy ra
$$a_i = \frac{x+i}{p_i} > \frac{N^2}{p_i} > N > \frac{N}{p_j} = b_j\ \forall i,\ j.$$

Rõ ràng các số b_i phân biệt. Ta có

$$a_j = \frac{x+j}{p_j} > \frac{x+i}{p_j} > \frac{x+i}{p_i} = a_i, \forall i < j.$$

Vậy $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ phân biệt. Bài toán được chứng minh. □

Bài toán 19. *(Tạp chí Crux 2015) Cho p nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên x sao cho x và $4x$ đều là căn nguyên thủy modulo p.*

Lời giải. Do p nguyên tố nên luôn tồn tại căn nguyên thủy modulo p. Gọi a là một căn nguyên thủy modulo p. Khi đó tồn tại số nguyên dương r sao cho $a^r \equiv 2 \pmod{p}$, suy ra $a^{2r} \equiv 4 \pmod{p}$.

Đặt $p_1, p_2, \dots, p_\ell$ là các ước nguyên tố phân biệt của $p-1$. Với mỗi $1 \leqslant k \leqslant \ell$, kí hiệu s_k là một số nguyên thỏa mãn $s_k \not\equiv 0 \pmod{p_k}$ và $s_k \not\equiv -2r \pmod{p_k}$. Theo định lý phần dư Trung hoa, tồn tại một số tự nhiên m sao cho

$$s_k \equiv m \pmod{p_k}, \ \forall 1 \leqslant k \leqslant \ell.$$

Khi đó cả m và $m+2r$ đều không chia hết cho p_k, suy ra cả m và $m+2r$ đều nguyên tố cùng nhau với $p-1$.

Từ đó các số $m, \ 2m, \ 3m, \dots, \ (p-2)m$ đều không chia hết cho $p-1$, cũng vậy các số

$$(m+2r), 2(m+2r), 3(m+2r), \dots, (p-2)(m+2r),$$

đều không chia hết cho $p-1$. Do a là căn nguyên thủy modulo p nên ta được

$$\begin{aligned} a^m, a^{2m}, \dots, a^{(p-2)m} &\not\equiv 1 \pmod{p}, \\ a^{m+2r}, a^{2(m+2r)}, \dots, a^{(p-2)(m+2r)} &\not\equiv 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra a^m và $a^{m+2r} \equiv 4a^m \pmod{p}$ là căn nguyên thủy modulo p. Do đó số $x = a^m$ là số thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Một số bài toán tương tự

Bài toán 20. *Tồn tại hay không tập hợp X thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:*

i) Tập X gồm 2016 số tự nhiên phân biệt.

ii) Tổng của một số phần tử bất kì trong X đều có dạng luỹ thừa bậc lớn hơn 1 của một số nguyên dương.

Bài toán 21. *Cho tập $S = \{a_1, \ a_2, \dots, \ a_n\}$ gồm các số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên b sao cho tập $bS = \{ba_1, ba_2, \dots, ba_n\}$ chứa toàn những lũy thừa bậc lớn hơn 1 của một số nguyên nào đó.*

Bài toán 22. *(Tạp chí Crux 2015) Cho p nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên x sao cho x và $4x$ đều là căn nguyên thủy modulo p.*

3. Phương pháp sử dụng hệ thặng dư

Một tính chất cơ bản và hay sử dụng nhất của hệ thặng dư là nếu H là hệ thặng dự đầy đủ mod m thì với mỗi số nguyên x, luôn tồn tại duy nhất $n \in H$ để $x \equiv n(\text{mod } m)$.

Bài toán 23. *(THTT 2010) Cho $m,\ n,\ d$ là số nguyên dương thỏa mãn $m < n$ và $(m,d) = (n,d) = 1$. Chứng minh rằng trong một dãy gồm n số nguyên bất kì tạo thành một cấp số cộng với công sai d luôn tồn tại hai số khác nhau mà tích của chúng chia hết cho mn.*

Lời giải. Xét cấp số cộng công sai d là $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$.

Nhận xét. Với mọi k nguyên dương, $k \leqslant n$ và $(k,d) = 1$ thì trong k số hạng liên tiếp của dãy luôn có một số chia hết cho k. Thật vậy, nhận xét này đúng với $k = 1$. Với $2 \leqslant k \leqslant n$, hiệu hai số bất kì trong k số hạng liên tiếp sẽ có dạng jd, $0 < j \leqslant k-1$. Do $(k,d) = 1$ nên jd không chia hết cho k. Do đó k số trên tạo thành một hệ thặng dư đầy đủ (mod k), suy ra có đúng một số chia hết cho k. Nhận xét được chứng minh Từ nhận xét suy ra trong cấp số cộng này có đúng một số chia hết cho n và có ít nhất một số chia hết cho m. Giả sử $a_i \vdots n$ và $a_j \vdots m$.

Nếu $i \neq j$ thì $a_i a_j \vdots mn$, ta được điều phải chứng minh.

Nếu $i = j$ thì $a_i \vdots [m,n]$. Vì $m < n$ nên $t = (m,n) \leqslant \dfrac{n}{2}$. Do đó trong cấp số cộng sẽ có t số hạng liên tiếp không chứa a_i. Theo nhận xét trên thì trong t số hạng này có một số chia hết cho t. Giả sử $a_u \vdots t$ $(u \neq i)$. Khi đó $a_i a_u \vdots st$, mà $st = mn$. Suy ra $a_i a_u \vdots mn$, ta được điều phải chứng minh. □

Bài toán 24. *Cho số nguyên m. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên $a,\ b,\ k,\ a,\ b$ lẻ và $k \geqslant 0$ sao cho*

$$2m = a^{2015} + b^{2015} + k{\cdot}2^{2016}.$$

Lời giải. Ta sử dựng hai bổ đề cơ bản sau:

Bổ đề 2. *Hệ $H = \{1, 3, 5, \ldots, 2^n - 1\}$ là hệ thặng dư đầy đủ* $(\text{mod } 2^n)$.

Bổ đề 3. *Với n, r nguyên dương, r lẻ thì*

$$x \equiv y \ (\text{mod } 2^n) \Leftrightarrow x^r \equiv y^r \ (\text{mod } 2^n).$$

Trở lại bài toán. Từ hai bổ đề trên ta suy ra $H' = \left\{1^r, 3^r, 5^r, \ldots, (2^n-1)^r\right\}$ cũng là hệ thặng dư đầy đủ $(\text{mod } 2^n)$.

Áp dụng kết quả này với $r = 2015$ và $n = 2016$ suy ra tồn tại a_0 lẻ sao cho

$$2m - 1 \equiv a_0^{2015} \ (\text{mod } 2^{2016}).$$

Khi đó ta chọn $a \equiv a_0$ $(\text{mod } 2^{2016})$ sao cho $2m - 1 - a^{2015} > 0$ thì bộ

$$(a,\ b,\ k) = \left(a,\ 1,\ \frac{2m-1-a^{2015}}{2^{2016}}\right)$$

sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài toán 25. *(VN TST 2001) Cho dãy số nguyên dương được xác định bởi $a_0 = 1$ và*

$$a_n = a_{n-1} + a_{\left[\frac{n}{3}\right]}, \ \forall n \geqslant 1.$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố $p \leqslant 13$, tồn tại vô số số nguyên dương k sao cho $a_k \vdots p$.

Lời giải. Với các số nguyên tố $p \leqslant 13$ thì luôn tồn tại một số hạng của dãy chia hết cho p.

Cụ thể

$$a_1 = 2 \vdots 2, \ a_2 = 3 \vdots 3, \ a_3 = 5 \vdots 5, \ a_4 = 7 \vdots 7, \ a_{11} = 33 \vdots 11, \ a_{20} = 117 \vdots 13.$$

Tiếp theo, gọi n là số nguyên dương sao cho $a_n \vdots p$. Ta sẽ chứng minh có vô số số tự nhiên $m > n$ sao cho $a_m \vdots p$. Thật vậy, từ công thức xác định dãy số ta có

$$\begin{aligned}
a_{3n} &= a_{3n-1} + a_n,\\
a_{3n+1} &= a_{3n} + a_n = a_{3n-1} + 2a_n,\\
a_{3n+2} &= a_{3n+1} + a_n = a_{3n-1} + 3a_n.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $a_{3n}, a_{3n+1}, a_{3n+2}$ có cùng số dư khi chia cho p, gọi số dư đó là k.

Nếu $k = 0$ thì nhận xét được chứng minh.

Nếu $k \neq 0$ thì ta xét các số hạng sau của dãy:

$$\begin{aligned}
&a_{9n-4} \equiv a_{9n-4} \equiv a_{9n-4} \pmod{p},\\
&a_{9n-3} \equiv a_{9n-4} + a_{3n-1} \equiv a_{9n-4} + a \pmod{p},\\
&a_{9n-2} \equiv a_{9n-3} + a_{3n-1} \equiv a_{9n-4} + 2a_{3n-1} \equiv a_{9n-4} + 2a \pmod{p},\\
&\ldots,\\
&a_{9n+8} \equiv a_{9n+7} + a_{3n+2} \equiv a_{9n-4} + 12a \pmod{p}.
\end{aligned}$$

Do $k \neq 0$ nên p số đầu tiên trong dãy 13 số $a_{9n-4}, \ a_{9n-3}, \ a_{9n-2}, \ \ldots, \ a_{9n+8}$ lập thành một hệ thặng dư đầy đủ mod p và như vậy tồn tại một số chia hết cho p. Chú ý là $9n - 4 > n$ nên nhận xét được chứng minh. □

Nhận xét. Trong bài toán trên, ta có thể khái quát hóa bằng cách thay số 3, 13 tương ứng bởi $n, \ n^2 + n + 1$ và có lời giải hoàn toàn tương tự.

Bài toán 26. *(China Girl MO 2010) Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương luôn tồn tại số nguyên tố p và số nguyên dương m thỏa mãn đồng thời ba điều kiện sau*

i) $p \equiv 5 \pmod{6}$.

ii) *p không là ước của n.*

iii) $n \equiv m^3 \pmod{p}$.

Lời giải. Đầu tiên, ta chọn p không là ước của n. Chú ý điều kiện (i) ta nhớ tới kết quả cơ bản sau: Tồn tại vô hạn số nguyên tố dạng $6h+5$ (việc chứng minh kết quả này dành cho bạn đọc). Từ kết quả này suy ra tồn tại số nguyên tố p dạng $6h+5$ mà $p>n$.

Cũng dễ chứng minh được rằng với $p=6h+5$ thì hệ $H=\left\{1^3, 2^3, \ldots, (p-1)^3\right\}$ lập thành một hệ thặng dư thu gọn mod p. Do đó tồn tại một số $m \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ sao cho $n \equiv m^3 \pmod{p}$. Vậy bài toán được chứng minh hoàn toàn. □

Một số bài toán tương tự.

Bài toán 27. *Cho p nguyên tố lẻ và đa thức* $Q(x)=(p-1)x^p-x-1$. *Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương a sao cho* $Q(a) \vdots p^p$.

Bài toán 28. *(China 2008). Chứng minh rằng:*

a) *Nếu n là số nguyên dương sao cho* $2n-1$ *là số nguyên tố thì với mọi bộ số nguyên dương phân biệt* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *đều tồn tại* $i, j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ *sao cho* $\dfrac{a_i+a_j}{(a_i,a_j)} \geqslant 2n-1$.

b) *Nếu n là số nguyên dương sao cho* $2n-1$ *là hợp số thì tồn tại bộ số nguyên dương phân biệt* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *sao cho* $\dfrac{a_i+a_j}{(a_i,a_j)} < 2n-1$ *với mọi* $i, j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$.

4. Phương pháp phản chứng

Nội dung của phương pháp phản chứng là giả sử mệnh đề của bài toán sai, khi đó ta tạo ra một giả thiết mới và dùng các suy luận để dẫn đến một điều mâu thuẫn. Với bài toán về sự tồn tại thì phương pháp phản chứng thường dùng để giải quyết các bài toán có câu trả lời là không cho các câu hỏi "*tồn tai hay không*", hoặc "*chứng minh rằng không tồn tại*" một số nguyên thỏa mãn yêu cầu nào đó.

Bài toán 29. *(Iran TST 2013) Tồn tại hay không các số nguyên dương* a, b, c *thỏa mãn*

$$2013(ab+bc+ca) \mid a^2+b^2+c^2.$$

Lời giải. Ta sẽ chứng minh không tồn tại 3 số thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng phương pháp phản chứng. Thật vậy, giả sử tồn tại a, b, c thỏa mãn. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $\gcd(a,b,c)=1$. Ta có

$$a^2+b^2+c^2=2013k(ab+bc+ca),\ k \in \mathbb{Z}^+.$$

Suy ra

$$(2013k+2)\left(a^2+b^2+c^2\right)=2013k(a+b+c)^2. \tag{1}$$

Do $2013k+2$ có dạng $3t+2$ nên tồn tại số nguyên tố $p \equiv 2 \pmod{3}$ mà $v_p(2013k+2)$ lẻ. Ta xét hai trường hợp sau:

* Nếu $p = 2$, do a, b, c không thể cùng chẵn nên $v_2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \leqslant 1$ và

$$v_2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 0 \Leftrightarrow v_2\left(a + b + c\right) = 0.$$

+ Nếu $v_2(k) \geqslant 2$ thì $v_2\left(2013k + 2\right) = 1$. Xét số mũ của 2 trong hai vế của (1) ta được:

$$v_2\left(k\right) + 2v_2\left(a + b + c\right) = 1 + v_2\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Từ đó suy ra $v_2(k) = 2,\ v_2\left(a + b + c\right) = 0$ và $v_2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 1$, điều này vô lí.

+ Nếu $v_2(k) = 1$ thì $v_2\left(2013k + 2\right) > 1$. Ta có

$$v_2\left(k\right) + 2v_2\left(a + b + c\right) = v_2\left(2013k + 2\right) + v_2\left(a^2 + b^2 + c^2\right). \tag{2}$$

Do $v_2\left(2013k + 2\right)$ lẻ nên $v_2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$ chẵn, suy ra $v_2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 0$. Thay trở lại (2) ta được $2v_2\left(a + b + c\right) = v_2\left(2013k + 2\right) - 1 > 0$, mâu thuẫn.

* Nếu $p > 2$, do $p \mid 2013k + 2$ nên $\gcd(2013k, p) = 1$, từ (1) suy ra $p \mid (a + b + c)$.

Mà
$$v_p\left(2013k + 2\right) + v_p\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 2v_p\left(a + b + c\right),$$
và $v_p\left(2013k + 2\right)$ lẻ nên $v_p\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geqslant 1$.

Do đó $p \mid (a + b + c)$ và $p \mid \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$, suy ra

$$p \mid \left(a^2 + b^2 + (a + b)^2\right),$$

hay

$$p \mid \frac{1}{2}\left((2a + b)^2 + 3b^2\right).$$

Do $a,\ b,\ c$ không cùng chia hết cho p nên suy ra -3 là số chính phương modp, suy ra $p \equiv 1(\bmod\ 3)$, mâu thuẫn. Vậy không tồn tại 3 số a, b, c thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài toán 30. *(China TST 2015) Cho $a_1, a_2, a_3, \ldots$ là các số nguyên dương phân biệt và số $c \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương k sao cho $[a_k, a_{k+1}] > ck$, trong đó kí hiệu $[x, y]$ chỉ bội chung nhỏ nhất của x và y.*

Lời giải. Phản chứng rằng tồn tại số nguyên dương L mà

$$[a_k, a_{k+1}] \leqslant ck,\ \forall k \geqslant L.$$

Trước hết ta đi chứng minh

$$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} \leqslant 2c\left(k + 2\right),\ \forall k \geqslant L. \tag{1}$$

Từ giải thiết suy ra $a_k,\ a_{k+1} \leqslant [a_k, a_{k+1}] \leqslant ck$ và

$$a_{k+2} \leqslant [a_{k+1}, a_{k+2}] \leqslant c\left(k + 1\right).$$

Ta sẽ sử dụng kết quả đơn giản sau: Xét hai số nguyên dương u, v và $u \nmid v$, khi đó

$$u,\ v \leqslant \frac{[u, v]}{2}.$$

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. Nếu $a_k = max\left\{a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2}\right\}$, khi đó xét tiếp các trường hợp nhỏ:

+ Nếu $a_{k+1} \mid a_k$ thì $a_{k+1} \leqslant \frac{a_k}{2} \leqslant \frac{ck}{2}$.

- Nếu $a_{k+2} \mid a_{k+1}$ thì $a_{k+2} \leqslant \frac{ck}{2}$, suy ra $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} \leqslant 2ck \leqslant 2c\left(k+2\right)$.

- Nếu $a_{k+2} \nmid a_{k+1}$ thì $a_{k+2} \leqslant \frac{c\left(k+1\right)}{2}$, suy ra $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} \leqslant 2c\left(k+2\right)$.

+ Nếu $a_{k+1} \nmid a_k$ thì $a_k \leqslant \frac{ck}{2}$, suy ra $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} \leqslant 2c\left(k+2\right)$.

Trường hợp 2. Nếu $a_{k+1} = max\left\{a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2}\right\}$, khi đó xét tiếp các trường hợp nhỏ

+ Nếu $a_k \nmid a_{k+1}$ thì $a_{k+1} \leqslant \frac{ck}{2}$, suy ra $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} \leqslant \frac{3}{2}ck \leqslant 2c\left(k+2\right)$.

+ Nếu $a_k \mid a_{k+1}$ thì $a_k \leqslant \frac{ck}{2}$, tương tự như trên ta có $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} \leqslant \frac{3}{2}ck \leqslant 2c\left(k+2\right)$.

Trường hợp 3. Nếu $a_{k+2} = max\left\{a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2}\right\}$, tương tự các trường hợp trên ta có điều phải chứng minh.

Tiếp theo ta xét tổng $S = \sum\limits_{i=L}^{L+n-1}\left(a_i + a_{i+1} + a_{i+2}\right)$. Áp dụng (1) ta được

$$S = \sum_{i=L}^{L+n-1}\left(a_i + a_{i+1} + a_{i+2}\right) \leqslant 2c\sum_{i=L}^{L+n-1}\left(i+2\right) = \frac{2cn\left(n+2L+3\right)}{2},\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} S &= 3\left(a_{L+2} + \cdots + a_{L+n-1}\right) + a_L + a_{L+n+1} + 2\left(a_{L+1} + a_{L+n}\right) \\ &\geqslant 3\left(1 + 2 + \cdots + n - 2\right) + 2\left(n - 1 + n\right) + \left(n + 1 + n + 2\right) \\ &= \frac{3n^2 + 3n + 8}{2}. \end{aligned}$$

Từ đó $c \geqslant \frac{3n^2 + 3n + 8}{2n\left(n+2L+3\right)}$. Cho $n \to +\infty$ ta được $c \geqslant \frac{3}{2}$, mâu thuẫn giả thiết.

Vậy tồn tại vô hạn số nguyên dương k sao cho $[a_k, a_{k+1}] > ck$. □

Bài toán 31. *(Bulgaria 2012) Cho dãy số nguyên dương (a_n) xác định bởi $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2t(n)$, trong đó $t(n)$ là số ước dương của n. Hỏi trong dãy (a_n) có thể chứa hai số hạng liên tiếp đều là số chính phương được không?*

Lời giải. Ta có $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, ... từ đó có thể dự đoán câu trả lời là không. Dễ thấy $t(n) \geqslant 2$ với mọi $n \geqslant 2$ nên dễ quy nạp được $a_n \geqslant 2n$. Bây giờ phản chứng rằng tồn tại hai số hạng liên tiếp là số chính phương và gọi đó là a_n và a_{n+1}. Dễ thấy a_n, a_{n+1} cùng tính chẵn lẻ nên ta có

$$2t(n) = a_{n+1} - a_n \geqslant \left(\sqrt{a_n} + 2\right)^2 - a_n > 4\sqrt{a_n}.$$

Do đó $t^2(n) > 4a_n \geqslant 8n$.

Để dẫn đến điều mâu thuẫn ta sẽ chứng minh $t(n) \leqslant 2\sqrt{n}$. Thật vậy, n có tối đa $\left[\sqrt{n}\right]$ ước số nguyên dương mà không vượt quá $\sqrt{n}$. Với mỗi ước $d > \sqrt{n}$ của n thì ta có tương ứng một ước nhỏ hơn $\sqrt{n}$ là $\dfrac{n}{d}$. Do đó tổng số ước của n không vượt quá $2\sqrt{n}$.

Do đó điều giải sử là sai, từ đó suy ra trong dãy không thể có hai số hạng liên tiếp nào đều là số chính phương. □

Nhận xét. Rõ ràng phương pháp phản chứng tỏ ra rất hiệu quả với các bài toán cùng dạng này. Tuy nhiên kịch bản không phải lúc nào cũng vậy, nhiều khi ta cần chỉ ra (xây dựng) một tập hợp các số thỏa mãn yêu cầu nào đó và điều này giải quyết cho các bài toán về chứng minh sự tồn tại trực tiếp. Ta có thể đưa ra một bài toán sau.

Bài toán 32. *(Serbia TST 2014) Ta nói một số tự nhiên n là số kì dị nếu tồn tại hai số nguyên dương $a, b > 1$ sao cho $n = a^b + b$. Có tồn tại hay không 2014 số tự nhiên liên tiếp mà trong đó có đúng 2012 số là số kì dị?*

Lời giải. Trước hết, ta có thể chỉ ra được 2012 số kì dị liên tiếp. Thật vậy, xét 2012 số liên tiếp sau: $N + 2$, $N + 3$, ..., $N + 2013$, trong đó $N = 2^{2013!}$ thì N luôn viết được dưới dạng a_i^i, với $i \in \{2, 3, \ldots, 2013\}$. Do đó 2012 số này là số kì dị.

Tuy nhiên bằng cách này ta chưa thể trực tiếp chỉ ra 2014 số thỏa mãn yêu cầu bài toán, nhưng ta có thể chứng minh sự tồn tại của nó. Đặt $f(n)$ là số các số kì dị trong 2014 số liên tiếp $n, n+1, \ldots, n+2013$. Ta có ngay $|f(n+1) - f(n)| \leqslant 1$, và $f(N) \geqslant 2012$, $f(1) \leqslant 2012$ (do $n = 1, 2$ đều không là số kì dị).

Do đó, từ các giá trị của $f(1)$, $f(N)$ suy ra tồn tại số m, $1 \leqslant m \leqslant N$ để $f(m) \leqslant 2012$. Khi đó 2014 số liên tiếp $m, m+1, \ldots, m+2013$ sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài toán 33. *Cho số n nguyên dương. Tồn tại hay không 6n số nguyên dương đôi một phân biệt thỏa mãn*

a) Bội chung nhỏ nhất của hai số bất kì trong 6n số đó đều không vượt quá $32n^2$?

b) Bội chung nhỏ nhất của hai số bất kì trong 6n số đó đều không vượt quá $9n^2$?

Lời giải. Câu trả lời cho phần (a) là có và phần (b) là không.

a) Xét $6n$ số sau: $1, 2, 3, \ldots, 4n, 4n+2, 4n+4, \ldots, 8n$, gồm $4n$ số liên tiếp từ 1 đến $4n$ và $2n$ số chẵn liên tiếp từ $4n+2$ đến $8n$. Xét hai số bất kì a, b trong $6n$ số trên.

+ Nếu tồn tại một trong hai số $a, b \in \{1, 2, 3, \ldots, 4n\}$ thì

$$\operatorname{lcm}[a, b] \leqslant ab \leqslant 4n \cdot 8n = 32n^2.$$

+ Nếu cả hai số $a, b > 4n$ thì theo cách chọn các số ta thấy a, b cùng chẵn, suy ra

$$\operatorname{lcm}[a, b] \leqslant \frac{ab}{2} \leqslant \frac{8n \cdot 8n}{2} = 32n^2.$$

Vậy $6n$ số này thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Ta sẽ chứng minh không tồn tại $6n$ số thỏa mãn bằng phản chứng. Thật vậy, giả sử tồn tại các số $a_1 < a_2 < \cdots < a_{6n}$ thỏa mãn $\operatorname{lcm}\left[a_i, a_j\right] \leqslant 9n^2$. Ta có

$$\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}} = \frac{a_{i+1} - a_i}{a_i a_{i+1}} \geqslant \frac{1}{\operatorname{lcm}\left[a_i, a_j\right]} \geqslant \frac{1}{9n^2}.$$

Do đó

$$\frac{1}{a_{3n}} - \frac{1}{a_{6n}} \geqslant (6n - 3n) \cdot \frac{1}{9n^2} = \frac{1}{3n}.$$

Mặt khác $a_{3n} \geqslant 3n$ nên $\frac{1}{a_{3n}} \leqslant \frac{1}{3n}$ nên dẫn đến điều mâu thuẫn. Vậy không tồn tại $6n$ số thỏa mãn đề bài. □

Nhận xét. Trong cả hai bài 18 và 19 đều đưa về việc đánh giá bất đẳng thức để dẫn đến một điều vô lí, từ đó cho ta lời giải bài toán. Ta tiếp tục xét một bài toán có sử dụng việc đánh giá bất đẳng thức thông qua dãy số nhưng ở mức độ khó hơn.

Một số bài toán tương tự.

Bài toán 34. *(IMO Shortlist 2013) Tồn tại hay không một dãy vô hạn các chữ số $a_1, a_2, a_3, \ldots$ khác 0 và một số N nguyên dương thỏa mãn điều kiện với mọi $k > N$ thì số $\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1}$ luôn là số chính phương.*

Bài toán 35. *Cho k nguyên dương lớn hơn 1. Tồn tại hay không các số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sao cho $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ và $\varphi(a_1) + \varphi(a_2) + \cdots + \varphi(a_n)$ đều là lũy thừa bậc k của các số nguyên dương.*

5. Một số phương pháp tiếp cận khác

Bài toán 36. *(Turkey JBMO TST 2016) Cho n là số nguyên dương và p, q là hai số nguyên tố thỏa mãn $pq \mid n^p + 2$ và $n + 2 \mid n^p + q^p$. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương m sao cho $q \mid 4^m \cdot n + 2$.*

Lời giải. Rõ ràng bài toán là hiển nhiên khi $q = 2$. Xét $q > 2$. Ta có

$$q \mid 4^m \cdot n + 2 \Leftrightarrow q \mid (4^m \cdot n + 2) \cdot 2^{q-1-2m} \Leftrightarrow q \mid \left(2^{q-1} \cdot n + 2^{q-2m}\right) \Leftrightarrow q \mid \left(n + 2^k\right),$$

trong đó k là một số lẻ nào đó.

Ta có $p \mid n^p + 2 \Rightarrow p \mid n + 2$, suy ra $p \mid n^p + q^p \Rightarrow p \mid n + q$. Từ đó $p \mid q - 2$.

Vậy gcd $(q-1, p) = 1$. Gọi x là phần tử nghịch đảo của p (mod $q-1$), tức $px \equiv 1 \pmod{q-1}$, dễ thấy x lẻ.

Do đó $q \mid n^p - (-2) \Rightarrow q \mid n^{px} - (-2)^x$. Suy ra $q \mid n + 2^x$, như vậy $k = x$ thỏa mãn. □

Bài toán 37. *Cho trước số nguyên tố p. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m luôn tồn tại số n nguyên dương sao cho khi viết ở dạng thập phân thì số p^n có chứa ít nhất m chữ số 0 liên tiếp.*

Lời giải. Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. Với $p = 5$, ta thấy rằng với $a > b$ bất kì, ta luôn có

$$5^{b+2^a} - 5^b = 5^b\left(5^{2^a} - 1\right).$$

Mặt khác

$$v_2\left(5^{2^a} - 1\right) \geqslant v_2\left(2^a\right) = a,$$

suy ra

$$5^{b+2^a} \equiv 5^b (\text{mod } \ 10^b),\ (a > b). \tag{1}$$

Khi đó nếu ta chọn b đủ lớn thỏa mãn $a > b$ và $b - b\log 5 > m$ thì từ (1) ta suy ra 5^{b+2^a} có ít nhất m chữ số 0 liên tiếp.

Trường hợp 2. Với $p = 2$, tương tự như trên thì

$$16^{b+5^a} \equiv 16^b (\text{mod } \ 10^{4b}),\ \forall a > 4b. \tag{2}$$

Khi đó nếu ta chọn b đủ lớn thỏa mãn $a > 4b$ và $4b - b\log 16 > m$ thì từ (2) ta suy ra 16^{b+5^a} có ít nhất m chữ số 0 liên tiếp.

Trường hợp 3. Với $p \neq 2, 5$ thì $\gcd(p, 10) = 1$. Do $\varphi(10) = 4$, nên theo định lý Euler ta được $p^4 \equiv 1 (\text{mod } \ 10)$. Từ đó bằng quy nạp ta được

$$p^{4 \cdot 10^k} \equiv 1 (\text{mod } \ 10^{k+1}).$$

Khi đó nếu chọn $k > m$ thì ta sẽ được $p^{4\cdot 10^k}$ có ít nhất m chữ số 0 liên tiếp. □

Nhận xét. Với cách chứng minh bài toán trong trường hợp $\gcd(p, 10) = 1$ ta thấy không cần p nguyên tố mà chỉ cần với q nguyên dương thỏa mãn $\gcd(q, 10) = 1$ thì luôn tồn tại n để q^n có ít nhất m chữ số 0 liên tiếp. Cũng dễ thấy rằng nếu q chia hết cho 10 thì q^m có đúng m chữ số 0 tận cùng.

Trong bài toán trên ta đã sử dụng thêm định lý Euler để tạo ra các quan hệ đồng dư, giúp sớm tạo ra các đối tượng cần xây dựng. Ta xét tiếp một số bài toán tương tự có sử dụng các định lý cơ bản của số học như định lý Fermat, Euler, ...

Bài toán 38. *(IMO 2003) Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên tố q sao cho $n^p - p$ không chia hết cho q với mọi số nguyên dương n.*

Lời giải. Ta có
$$\frac{p^p-1}{p-1}=1+p+\cdots+p^{p-1}\equiv p+1 \pmod{p^2}.$$
Suy ra tồn tại một ước nguyên tố b của $\dfrac{p^p-1}{p-1}$ thỏa mãn
$$b\not\equiv 1 \pmod{p^2}. \tag{1}$$
Đặt $q=b$, ta sẽ chứng minh q thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Thật vậy, giả sử tồn tại n sao cho $n^p-p\,\vdots\, q$, suy ra $n^p\equiv p \pmod q$. Do đó
$$n^{p^2}\equiv p^p\equiv 1 \pmod q.$$
Theo định lý Fermat $n^{q-1}\equiv 1 \pmod q$. Theo (1) thì $\left(p^2,q-1\right)\mid p$, suy ra
$$n^p\equiv 1 \pmod q \Rightarrow p\equiv 1 \pmod q.$$
Khi đó
$$1+p+\cdots+p^{p-1}\equiv p \pmod q\Rightarrow p\equiv 0 \pmod q\Rightarrow p\,\vdots\, q,$$
mâu thuẫn. Bài toán được chứng minh hoàn toàn. □

Bài toán 39. *(Trường hè Bắc trung bộ 2015) Giả sử $N>1$ là số nguyên dương, $d<N$ là ước dương tùy ý của N. Chứng minh rằng với mọi $k>0$, tồn tại x nguyên dương sao cho N^x-d có ước nguyên tố $p>k$.*

Lời giải. Ta cần chứng minh tập hợp các ước nguyên tố của N^x-d, $x=1,2,\ldots$ là tập hợp vô hạn.

Giả sử ngược lại, tất cả các ước nguyên tố của N^x-d, $x=1,2,\ldots$ đều thuộc tập hữu hạn số nguyên tố $\{p_1,p_2,\ldots,p_r\}$. Do $N>1$ nên rõ ràng tập đó khác rỗng.

Lấy $x=2$ ta có
$$N^2-d=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r},\ a_i\geqslant 0.$$
Đặt $X=\varphi\left(p_1^{a_1+1}p_2^{a_2+1}\cdots p_r^{a_r+1}\right)+2$, trong đó φ là hàm Euler. Khi đó ta có
$$N^X-d=p_1^{b_1}p_2^{b_2}\cdots p_r^{b_r},\ b_i\geqslant 0.$$
Viết $N^X-d=d\left(\dfrac{N^X}{d}-1\right)$. Do $X>2$ nên $\dfrac{N^X}{d}$ chia hết cho p_i với mọi i.

Nếu p_i là một ước của d thì do cách viết trên đây, dễ thấy $p_i^{b_i}\mid d$. Suy ra $p_i^{b_i}$ là ước của N^2-d, tức là $b_i\leqslant a_i$.

Nếu p_i không là ước của d thì p_i không là ước của N, tức là $\left(p_i^{a_1+1},N\right)=1$.

Từ Định lý Euler suy ra rằng
$$N^X-d\equiv N^2-d \left(\operatorname{mod}\ p_i^{a_i+1}\right).$$

Do $p_i^{a_i+1}N^2 - d$ nên đồng dư kéo theo $p_i^{a_i+1}N^X - d$, tức là $b_i \leqslant a_i$.

Như vậy trong mọi trường hợp ta đều có $b_i \leqslant a_i$, vô lý vì $X > 2$. □

Bài toán 40. *(IMO Shortlist 2007) Cho hai số nguyên dương b và $n > 1$. Biết rằng với mỗi số nguyên $k > 1$, tồn tại số nguyên a_k sao cho $b - a_k^n \vdots k$. Chứng minh rằng b là lũy thừa bậc n của một số nguyên.*

Lời giải. Giả sử phân tích tiêu chuẩn của b có dạng $b = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$, trong đó p_i nguyên tố phân biệt. Ta cần chứng minh $\alpha_i \vdots n$, với mọi $i = \overline{1, s}$.

Xét số $k = b^2$, theo giả thiết tồn tại a_k sao cho $b - a_k^n \vdots b^2$.

Suy ra $b - a_k^n \vdots p_i^{2\alpha_i}$, với mọi $i = \overline{1, s}$. Do đó

$$a_k^n \equiv b \equiv 0 \left(\bmod\ p_i^{2\alpha_i}\right) \text{ và } a_k^n \equiv b \not\equiv 0 \left(\bmod\ p_i^{\alpha_i+1}\right).$$

Tức là $v_{p_i}\left(a_k^n\right) = \alpha_i$. Bản thân a_k^n cũng là một lũy thừa đúng bậc n. Suy ra $\alpha_i \vdots n,\ \forall i = \overline{1, s}$. Bài toán được chứng minh hoàn toàn. □

Bài toán 41. *(IMO 2008) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số nguyên dương n sao cho $n^2 + 1$ có một ước nguyên tố $p > 2n + \sqrt{2n}$.*

Lời giải. Xét số nguyên $N \geqslant 2$, p là một ước nguyên tố của $(N!)^2 + 1$, rõ ràng $p > N$. Gọi x là số tự nhiên sao cho $0 < x < \dfrac{p}{2}$ sao cho $x \equiv \pm N! \pmod p$.

Khi đó $0 < x < p - x < p$ và $x^2 \equiv -1 \pmod p$, suy ra

$$(p-2x)^2 \equiv -4 \pmod p \Rightarrow (p-2x)^2 \geqslant p - 4 \Rightarrow p \geqslant 2x + \sqrt{p-4}.$$

Ta nhận thấy nếu $p \geqslant 20$ thì $p - 4 \geqslant 2x + \sqrt{p-4} - 4 > 2x \Rightarrow p > 2x + \sqrt{2x}$.

Chọn $p > N$, N lớn tùy ý, ta được vô hạn số nguyên x mà $x^2 + 1 \vdots p$ thỏa mãn $p > 2x + \sqrt{2x}$. Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải của bài toán là việc xây dựng lại một tính chất cơ bản và kinh điển trong số học, đó là tính chất sau:

Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố dạng $4k + 1$ thì tồn tại số nguyên dương N sao cho $N^2 + 1$ chia hết cho p.

Chứng minh rằng số $N^2 + 1$ không có ước nguyên tố dạng $4k + 3$.

Một số bài toán tương tự.

Bài toán 42. *(India TST 2009) Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho $n^2 + 1$ không là ước của $n!$.*

Bài toán 43. *Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho ước nguyên tố lớn nhất của n^2+1 lớn hơn $2n$.*

Kết quả mạnh hơn: Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số nguyên dương n sao cho n^2+1 có một ước nguyên tố $p > 2n+\sqrt{10n}$.

Bài toán 44. *(China TST 2012) Cho n là số phi chính phương chẵn và số nguyên tố p thỏa mãn các điều kiện sau*

i) $(n,p)=1$.

ii) $p \leqslant 2\sqrt{n}$.

iii) Tồn tại k nguyên sao cho $n+k^2 \vdots p$.

Chứng minh rằng tồn tại $a,\ b,\ c$ nguyên dương phân biệt sao cho $n=ab+bc+ca$.

Lời giải. Đây là một bài toán khó và không hề đơn giản để chỉ ra sự tồn tại của các số $a,\ b,\ c$. Trước tình huống này ta sẽ cố gắng đưa về các dạng cơ bản hơn, cụ thể ở đây nếu để ý đẳng thức

$$(a+b)(a+c)=a^2+(ab+bc+ca)$$

ta có thể biến đổi như sau:

$$n+a^2=(a+b)\,(a+c)=xy\,. \tag{1}$$

Như vậy cần $x,y>a$. Rõ ràng (1) đã cho ta một hướng đi rõ ràng và đơn giản hơn rất nhiều.

Ta chuyển về bài toán tương đương sau: *Chứng minh tồn tại a,x,y nguyên dương thỏa mãn (1), trong đó $x,y>a$.*

Từ giả thiết tồn tại k sao cho $n+k^2 \vdots p$, ta nghĩ đến việc chọn hai trong ba số $a,\ b,\ c$ có tổng bằng p, điều này cũng đảm bảo hai số đó phân biệt vì p lẻ. Ta lần lượt thực hiện các bước sau:

<u>Bước 1.</u> Chọn a tự nhiên nhỏ nhất sao cho $n+a^2 \vdots p$ và a lẻ.

Thật vậy, với k thỏa mãn (iii), giả sử $k\equiv m \pmod p$, $0\leqslant m\leqslant p-1$.

Từ $(n,p)=1$ và $n+k^2 \vdots p$ suy ra $(n,k)=1 \Rightarrow m>0$. Cũng từ $(n,p)=1$ suy ra p lẻ, do đó $p-m\neq m$.

Nếu m lẻ thì chọn ngay $a=m$, nếu m chẵn thì chọn $a=p-m$.

<u>Bước 2.</u> Đặt $n+a^2=p\cdot x$. Vì n là square-free chẵn nên $n\equiv 2 \pmod 4$, suy ra px không chính phương, tức là $x\neq p$. Ta có $x=\dfrac{n+a^2}{p}\geqslant \dfrac{2a\cdot\sqrt{n}}{p}\geqslant \dfrac{2a\cdot\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}=a$. Dấu đẳng thức không thể xảy ra nên $x>a$. Đặt $b=x-a$, $c=p-a$ thì ta được

$$n+a^2=(a+b)\,(a+c)\,.$$

Như vậy ta đã chỉ ra sự tồn tại của các số $a,\ b,\ c$. Ta cần chỉ ra $a,\ b,\ c$ đôi một phân biệt. Ta có ngay $a\neq c$ do p lẻ, cũng do $x\neq p$ nên $b\neq c$. Mặt khác do x lẻ nên $a\neq b$. Bài toán được chứng minh hoàn toàn. $\square$

Nhận xét. Việc mô hình hóa lại các yêu cầu để chuyển bài toán phức tạp về bài toán đơn giản hơn là một tư duy quan trọng khi giải toán. Bằng cách chuyển về sự tồn tại của x, y thỏa mãn $n + a^2 = xy$, mọi việc đã đơn giản hơn rất nhiều.

Bài toán 45. *(IMO shorlist 2011) Cho đa thức $P(x) = (x + a_1)(x + a_2)\cdots(x + a_9)$, với a_i là các số nguyên phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên N sao cho với mọi $x \geqslant N$ thì $P(x)$ chia hết cho một số nguyên tố lớn hơn 20.*

Lời giải. Ta có thể giả sử các số a_i đều dương. Ta có nhận xét rằng có 8 số nguyên tố nhỏ hơn 20 là các số của tập $S = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$, trong khi $P(x)$ có 9 nhân tử bậc nhất, và đây chính là chìa khóa để giải quyết bài toán này. Đặt $a = \max\{a_1,\ a_2, \ldots,\ a_9\}$ và $N = a^8$. Ta sẽ chứng minh N thỏa mãn yêu cầu bài toán. Thật vậy, giả sử tồn tại $x \geqslant N$ mà $P(x)$ chỉ có các ước nguyên tố thuộc S. Với mỗi $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ các số $x + a_i$ chỉ có biểu diễn dạng

$$x + a_i = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdots 19^{\alpha_8}, \alpha_j \geqslant 0.$$

Do $x + a_i > x \geqslant a^8 > a_i^8, \forall i = \overline{1,8}$ suy ra trong $x + a_i$ có một nhân tử f_i lớn hơn a. Theo nguyên lý Đirichlet thì tồn tại hai số $i \neq j$ sao cho f_i và f_j tương ứng là lũy thừa của cùng một số nguyên tố, có thể giả sử $f_i \leqslant f_j$. Xét hai số $x + a_i$ và $x + a_j$ đều chia hết cho f_i, suy ra $a_i - a_j \,\vdots\, f_i$.

Tuy nhiên $0 < \left|a_i - a_j\right| \leqslant \max\left(a_i, a_j\right) \leqslant a < f_i$. Từ điều mâu thuẫn này dẫn tới điều phải chứng minh. □

Nhận xét. 1) Bài toán có thể được tổng quát như sau:

Cho đa thức $P(x) = (x + a_1)(x + a_2)\cdots(x + a_k)$, trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_k$ là các số nguyên phân biệt. Khi đó tồn tại số nguyên dương N sao cho với mọi số nguyên $x \geqslant N$ thì $P(x)$ chia hết cho một số nguyên tố lớn hơn p_k.

2) Sử dụng bài toán trên ta có thể giải quyết được bài toán sau:

Cho A là tập con vô hạn của tập các số nguyên dương. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai số $a,\ b \in A$ mà $a + b$ có ước nguyên tố lớn hơn 2016^{2017}.

Một số bài tập tổng hợp.

Bài tập 1. (IMO Shorlist 2009) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại một dãy các số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa mãn: $a_{k+1} = \dfrac{a_k^2}{a_{k-1} + 1} - 1$ với mọi $2 \leqslant k \leqslant n - 2$.

Bài tập 2. (IMO Shorlist 2012) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố $p > 100$ và với mỗi số nguyên r luôn tồn tại hai số nguyên a, b sao cho $a^2 + b^5 - r$ chia hết cho p.

Bài tập 3. Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho với n số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ phân biệt bất kì, ta luôn chọn được m nguyên dương sao cho các số $m - a_1, m - a_2, \ldots, m - a_n$ là các số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau.

Bài tập 4. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương a sao cho dãy (x_n) với $x_n = n^4 + a, n \geqslant 1$ không chứa một số nguyên tố nào.

Bài tập 5. Xét dãy các số nguyên dương (x_n) thỏa mãn $x_{n+1} = \gcd(x_n, x_{n+1}) + 2016$. Chứng minh rằng tồn tại dãy (x_n) như vậy mà có ít nhất 2016^{2017} số hạng đôi một phân biệt.

Bài tập 6. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho $n \nmid 2^n + 1$ và $n \mid 2^{2^n+1} + 1$.

Bài tập 7. (USA TST 2008) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, tồn tại các số nguyên tố cùng nhau đôi một $k_0, k_1, \ldots, k_n$ $(k_i > 1)$ sao cho $k_0 \cdot k_1 \cdots k_n - 1$ là tích của hai số nguyên liên tiếp.

Bài tập 8. (IMO Shorlist 2002) Tìm cặp số nguyên dương (m, n), $m, n \geqslant 3$ sao cho tồn tại vô hạn số nguyên dương a mà $\dfrac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$ là số nguyên.

Bài tập 9. (IMO Shorlist 2005) Cho đa thức $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ hệ số nguyên, $a_n > 0, n \geqslant 2$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương m để $P(m!)$ là hợp số.

Bài tập 10. (IMO Shorlist 2008) Cho các số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 3)$. Chứng minh rằng tồn tại $i \neq j$ sao cho $a_i + a_j$ không là ước của số nào trong các số $3a_1, 3a_2, \ldots, 3a_n$.

Bài tập 11. (China TST 2012) Cho trước số nguyên $n \geqslant 2$. Chứng minh rằng tồn tại hữu hạn các bộ n số nguyên dương $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ thỏa mãn đồng thời ba điều kiện sau:

i) $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$,

ii) $\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$,

iii) $a_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i, a_{i+1})$, coi $a_{n+1} = a_1$.

Bài tập 12. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại số nguyên m thỏa mãn $2^n - 1 \mid m^2 + 9$.

Bài tập 13. Chứng minh rằng tồn tại dãy số nguyên dương $(a_n)_{n \geqslant 0}$ thỏa mãn điều kiện: Với mọi số nguyên dương k, dãy $(k + a_n)_{n \geqslant 0}$ chỉ chứa hữu hạn các số nguyên tố.

Bài tập 14. a) Chứng minh rằng tồn tại một cấp số cộng có độ dài hữu hạn tùy ý sao cho mọi số hạng của cấp số cộng này đều là lũy thừa của một số nguyên tố nào đó.

b) Chứng minh rằng không tồn tại một cấp số cộng vô hạn thỏa mãn điều kiện trên.

Bài tập 15. Cho đa thức $f(x) = 64x^2 + 21x + 27$. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n luôn tồn tại số tự nhiên x sao cho $f(x)$ chia hết cho 2^n.

Tài liệu

[1] Hà Huy Khoái. Những chứng minh khác nhau của định lý Euclid về sự tồn tại vô hạn của tập hợp số nguyên tố.

[2] Một số đề thi học sinh giỏi và đề chọn đội tuyển của các tỉnh năm 2015 - 2016.

[3] Titu Andreescu, Dorin Andrica, Zuming Feng October 25, 2006. 104 Number Theory Problems.

[4] Titu Andreescu, Dorin Andrica, Ion Cucurezeanu, An Introduction to Diophantine Equations.

[5] Titu Andreescu, Dorin Andrica. Number Theory Structures, Examples, and Problems.

[6] Tạp chí Crux năm 2015, 2016.

[7] Tài liệu từ Internet: www.matlinks.ro, diendantoanhoc.net, matscope.org, imo.org.yu.

SỬ DỤNG GIỚI HẠN TRONG GIẢI TOÁN

Lê Phúc Lữ
(FPT Software, TP.Hồ Chí Minh)

Chúng ta đều biết rằng giới hạn dãy số là một nội dung đặc thù của giải tích. Tuy nhiên, không phải vì thế mà nó không thể ứng dụng ở các phân môn còn lại. Trong phương trình hàm, ta có thể dùng phép thế liên tục để xây dựng nhiều ràng buộc đối với các hàm số. Trong số học, ta có thể dùng giới hạn để kẹp giữa một đại lượng nào đó và từ đó ước lượng giá trị của nó. Trong bất đẳng thức, việc cho các biến tiến đến 0^+ hoặc $+\infty$ cũng là cách quen thuộc để tìm hằng số tốt nhất. Và trong bài viết này, chúng ta sẽ cùng điểm qua một số tình huống như thế.

Đố vui. Harry Potter muốn luyện vàng từ cát. Biết rằng

1. Từ a gam cát, anh ấy có thể luyện ra b gam chì.
2. Từ c gam chì, anh ấy có thể luyện ra d gam vàng.
3. Từ e gam vàng, anh ấy có thể luyện ra f game cát.

Với $a, b, c, d, e, f > 0$ hãy tìm điều kiện giữa chúng để Harry Potter có thể luyện ra vô hạn lượng vàng từ một lượng cát tùy ý cho trước.

Lời giải. Để ý rằng từ 1 gam cát, thông qua các quá trình cát $\to$ chì $\to$ vàng $\to$ cát, ta có được $\frac{bdf}{ace}$ gam cát. Ngoài ra, nếu muốn có vô hạn lượng vàng thì phải có vô hạn lượng cát và chì. Do đó, sau n lần luyện, ra có $\left(\frac{bdf}{ace}\right)^n$ gam cát và để giá trị này tiến ra vô cực, cần có $bdf > ace$. $\square$

1. Giới hạn trong một số bài toán đại số, giải tích

Chúng ta bắt đầu chủ đề này bằng một bổ đề khá quan trọng dưới đây về chuỗi số (tổng của nhiều số hạng của dãy).

Bài toán 1. *Đặt $s_n = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{n^k}$ với $k > 0$ và n nguyên dương. Khi đó,*

- *Nếu $k \le 1$ thì $s_n \to +\infty$.*

- *Nếu $k > 1$ thì s_n bị chặn, tức là có giới hạn hữu hạn.*

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh rằng khi $k = 1$ thì $s_n \to +\infty$.

Thật vậy, bằng đạo hàm, dễ dàng có được $\ln(x+1) \leq x$ với mọi $x > 0$. Thay x bởi $\frac{1}{n}$, ta có $\ln\frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{n}$ hay $\frac{1}{n} \geq \ln(n+1) - \ln n$ với mọi n. Suy ra

$$s_n \geq \sum_{i=1}^{n} (\ln(i+1) - \ln i) = \ln(n+1),$$

mà $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ nên khẳng định đúng.

Từ đây dễ thấy rằng khẳng định cũng đúng với mọi $k < 1$ vì $\frac{1}{n^k} > \frac{1}{n}$ với $k < 1$.

Tiếp theo với $k > 1$, ta có thể dùng định lý Lagrange:

Xét hàm số $f(x) = x^{-k}$ với $x > 0, k > 1$. Chọn hàm số $F(x) = \frac{x^{1-k}}{1-k}$ thì $F'(x) = f(x)$.

Hàm số $F(x)$ liên tục trên các đoạn $[n, n+1]$ và khả vi trên $(n, n+1)$ nên áp dụng định lý Lagrange, ta có $\exists c \in (n, n+1)$ để

$$F'(c) = \frac{F(n+1) - F(n)}{n+1-n} \Rightarrow f(c) = F(n+1) - F(n).$$

Chú ý rằng $f(c)$ là hàm nghịch biến nên $f(c) > f(n+1)$ hay $f(n+1) < F(n+1) - F(n)$.

Từ đó, cho $n = 1, 2, 3, ...$ ta thu được

$$\begin{aligned}\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{n^k} &< 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (F(i+1) - F(i)) \\ &= 1 + F(n+1) - F(1) = \frac{k - n^{1-k}}{k-1}.\end{aligned}$$

Dễ thấy $\lim n^{1-k} = 0$ vì $1 - k < 0$ nên giá trị của s_n bị chặn. □

Nhận xét 1. *Chú ý rằng với $k > 1$ thì các dãy đó đều có giới hạn hữu hạn (tăng và bị chặn trên) nhưng tìm ra chính xác các giá trị đó là điều không dễ. Bằng cách tương tự, ta cũng giải quyết được các bài toán sau*

1. *Chứng minh rằng* $\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} + \cdots + \frac{1}{n\ln n} \to +\infty$.
2. *Chứng minh rằng* $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i \cdot \sqrt[n]{i+1}} > n$ *với mọi số nguyên dương* $n \geq 2$.

Bài toán 2. *Biết rằng với k là số nguyên nào đó, đa thức $P(x) = x^{n+1} + kx^n + 31x^2 + 12x + 2016$ có nghiệm nguyên với vô hạn giá trị nguyên dương $n \geq 3$. Tìm k.*

Lời giải. Đa thức này có nghiệm nguyên thì các nghiệm đó chỉ có thể là ước của 2016.

Giả sử a là một nghiệm nguyên nào đó thì

$$a^{n+1} + ka^n + 31a^2 + 12a + 2016 = 0$$
$$\Leftrightarrow a + k = -\frac{31a^2 + 12a + 2016}{a^n}$$

Với $|a| \geq 2$ thì khi n đủ lớn (vì có vô hạn giá trị n), giá trị của vế phải sẽ không còn nguyên nữa (mẫu lớn hơn tử) và vì thế không thể thỏa mãn. Do đó, nghiệm nguyên ở đây chỉ có thể là 1 hoặc -1. Ta xét các trường hợp

1. Với $a = 1$, ta có $1 + k + 31 + 12 + 2016 = 0 \Leftrightarrow k = -2060$.
2. Với $a = -1$, ta có $(-1)^{n+1} + k(-1)^n + 31 - 12 + 2016 = 0$ hay $k = \frac{-2035}{(-1)^n} + 1$. Nếu n chẵn thì ta có $k = -2034$; còn n lẻ thì $k = 2036$. Tuy nhiên cũng có vô hạn số chẵn và lẻ nên khẳng định vẫn đúng.

Vậy có tất cả 3 giá trị k là $2060, -2034, 2036$. □

Nhận xét 2. *Tất nhiên lập luận trên chỉ áp dụng được với nghiệm nguyên. Khi hỏi trên nghiệm thực, dễ dàng thấy cho dù k bằng bao nhiêu thì với n lẻ, đa thức trên vẫn có nghiệm.*

Bài toán 3. *Cho dãy số thực dương (u_n) xác định bởi*

$$u_1, u_2 > 0 \text{ và } u_{n+2} = \{(3 + 2\sqrt{2})^n\}u_{n+1} + \{(3 - 2\sqrt{2})^n\}u_n \text{ với } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Chứng minh rằng tồn tại n sao cho $|u_{n+2017} - u_n| < \frac{1}{2016}$, trong đó ký hiệu $\{x\}$ là phần lẻ của số thực x.

Lời giải. Ta có nhận xét rằng nếu 2 số vô tỷ x, y thỏa mãn điều kiện $x + y$ nguyên thì

$$\{x\} + \{y\} = 1.$$

Khai triển nhị thức Newton, dễ dàng có $(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n \in \mathbb{Z}$ với mọi n. Đặt $q = 3 - 2\sqrt{2} \in (0; 1)$ thì chú ý rằng $0 < q^n < \frac{1}{2}$ với mọi n

$$u_{n+2} = (1 - q^n)u_{n+1} + u_n \Leftrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = -q^n(u_{n+1} - u_n)$$

hay

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| < \frac{1}{2}|u_{n+1} - u_n| < \ldots < \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_2 - u_1|.$$

Từ đó suy ra $\lim |u_{n+1} - u_n| = 0$. Do đó, tồn tại N đủ lớn để $\forall n > N$ thì $|u_{n+1} - u_n| < \frac{1}{2016 \cdot 2017}$. Khi đó, ta có

$$|u_{n+2017} - u_n| \leq |u_{n+2017} - u_{n+2016}| + |u_{n+2016} - u_{n+2015}| + \cdots + |u_{n+1} - u_n| < \frac{1}{2016}.$$

□

Nhận xét 3. *Ở bài này, để chứng minh* $\lim u_n$ *tồn tại là điều không dễ (và cũng chưa chắc đúng). Tuy nhiên, ta chỉ cần có một kết quả yếu hơn là* $\lim |u_{n+1} - u_n| = 0$ *là đủ.*

Bài toán 4. *Với* $a, b, c > 0$*, đặt* $m = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}, n = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$.

1. *Chứng minh rằng tồn tại bộ* a, b, c *để* $m \to +\infty, n \to +\infty, \frac{m}{n} \to +\infty$.

2. *Tìm tất cả các số* k *để bất đẳng thức sau đúng với mọi* m, n *(với cách đặt như trên)*

$$(m - n)k^2 + (2m + n - 9)k - 15m + 2n + 39 \le 0.$$

Lời giải. 1) Chọn $a = 1, b = x, c = x^2$ với $x > 0$ thì $m = \frac{2}{x} + x^2$ và $n = \frac{1}{x^2} + 2x$.

Khi đó, dễ thấy rằng nếu $x \to +\infty$ thì $m \to +\infty, n \to +\infty, \frac{m}{n} \to +\infty$ và bộ số ở trên thỏa mãn điều kiện.

2) Bất đẳng thức đã cho viết lại là

$$(k^2 + 2k - 15)m + (-k^2 + k + 2)n - 9k + 39 \le 0 \ \ (*).$$

Chia hai vế cho $n > 0$, ta có

$$(k^2 + 2k - 15)\frac{m}{n} + (-k^2 + k + 2) + \frac{-9k + 39}{n} \le 0.$$

Vì $\frac{m}{n} \to +\infty$ nên ta điều kiện cần là $k^2 + 2k - 15 \le 0 \Leftrightarrow -5 \le k \le 3$. Một cách tương tự, rõ ràng nếu cho $a = 1, b = x^2, c = x$ thì có $m \to +\infty, n \to +\infty, \frac{n}{m} \to +\infty$ nên khi chia hai vế cho $m > 0$, ta cũng cần có

$$-k^2 + k + 2 \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \ge 2 \\ k \le -1 \end{array}\right.$$

Kết hợp lại, ta có $k \in [-5; -1] \cup [2; 3]$.

Để chứng minh điều kiện đủ, ta chú ý rằng

$$m = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge 3, n = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \ge 3$$

theo BĐT AM-GM nên ta đưa về $3(k^2 + 2k - 15) + 3(-k^2 + k + 2) - 9k + 39 \le 0$. Tuy nhiên, đây là đẳng thức nên các số k như trên thỏa mãn.

Vậy $k \in [-5; -1] \cup [2; 3]$. □

Nhận xét 4. *Ở bài toán trên, nếu đề thêm điều kiện* $abc = 1$ *và thay*

$$m = a^2c + c^2b + b^2a, n = a^2b + b^2c + c^2a$$

thì ta vẫn chọn được giá trị a, b, c *thỏa mãn các giới hạn. Chẳng hạn* $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{x^2}, c = x^3$*. Từ lời giải trên, ta có thể giải quyết bài toán sau:*

Tìm tất cả các số thực r sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương abc

$$\left(r+\frac{a}{a+b}\right)\left(r+\frac{b}{b+c}\right)\left(r+\frac{c}{c+a}\right)\geq\left(r+\frac{1}{2}\right)^3.$$

Đặt $m=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}, n=\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}$. Bằng cách biến đổi thích hợp, ta đưa về

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}(m-n)r^2-\frac{1}{4}(3m-n-6)\,r-\frac{1}{8}(m+n-6)\geq 0\\&\Leftrightarrow 4(m-n)r^2+2(3m-n-6)r+(m+n-6)\leq 0\end{aligned}.$$

Đến đây, giải quyết tương tự bài toán trên và ta có được

$$\begin{cases}4r^2+6r+1\leq 0\\-4r^2-2r+1\leq 0\end{cases}$$

Bài toán 5. *Tìm số thực k lớn nhất sao cho*

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq k(a^2+b^2+c^2)+(9-k)(ab+bc+ca)$$

đúng với mọi $a,b,c>0$.

Lời giải. Xét $a=x, b=c=\frac{1}{x}$ thì khi $x\to+\infty$, ta có $b,c\to 0, a\to+\infty$.

Ta viết lại bất đẳng thức thành

$$\left(1+\frac{2}{a^2}\right)(b^2+2)(c^2+2)\geq k\left(1+\frac{b^2+c^2}{a^2}\right)+(9-k)\left(\frac{b+c}{a}+\frac{bc}{a^2}\right).$$

Chọn bộ như trên với $x\to+\infty$, ta có

$$(1+0)(0+2)(0+2)\geq k(1+0)+(9-k)(0+0)\Leftrightarrow k\leq 4.$$

Ta sẽ chứng minh $k=4$ thỏa mãn, tức là

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 4(a^2+b^2+c^2)+5(ab+bc+ca)$$

hay

$$a^2b^2c^2+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+8\geq 5(ab+bc+ca).$$

Đặt $ab=x, bc=y, ca=z$ thì

$$xyz+2(x^2+y^2+z^2)+8\geq 5(x+y+z).$$

Bổ đề: Với $x,y,z>0$ thì

$$x^2+y^2+z^2+2xyz+1\geq 2(xy+yz+zx).$$

Khi đó, ta đưa bất đẳng thức đã cho về

$$2xyz+4(x^2+y^2+z^2)+16\geq 10(x+y+z)$$

thì cần có

$$\begin{aligned}&3(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)+15\geq 10(x+y+z)\\&\Leftrightarrow (x+y+z-1)^2+2(x-1)^2+2(y-1)^2+2(z-1)^2\geq 0.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên ta có đpcm. Vậy giá trị lớn nhất của k là 4. □

Nhận xét 5. *Bổ đề trên có thể chứng minh dễ dàng bằng cách áp dụng Dirichlet như sau: Không mất tính tổng quát, giả sử* $(x-1)(y-1) \geq 0$ *thì* $xy \geq x+y-1 \Rightarrow 2xyz \geq 2xz+2yz-2z$. *Suy ra*

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+2xyz+1 &\geq x^2+y^2+z^2+2xz+2yz-2z+1 \\ &\geq 2xy+(z-1)^2+2xz+2yz = 2(xy+yz+zx). \end{aligned}$$

Do đó, bổ đề được chứng minh.

Bài toán 6. *Tìm tất cả các hàm số* $f : [1;+\infty) \to [1;+\infty)$ *và thỏa mãn đồng thời*

i. $f(x) \geq x$ *với mọi* $x \geq 1$.

ii. $f\left(\frac{f(x)}{x}\right) = x^2$ *với mọi* $x \geq 1$.

Lời giải. Trong điều kiện i, thay $x \to \frac{f(x)}{x}$, ta có

$$f\left(\frac{f(x)}{x}\right) \geq \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) \leq x^3.$$

Giả sử ta đã có $f(x) \geq x^a$ thì dễ dàng biến đổi được $f(x) \leq x^{\frac{a+2}{a}}$.

Tương tự, nếu có $f(x) \leq x^b$ thì ta cũng có $f(x) \geq x^{\frac{b+2}{b}}$.

Từ đó, xét dãy số $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 3, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+2}{u_n}, n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$ và bằng quy nạp, ta chứng minh được $x^{u_{2k-1}} \leq f(x) \leq x^{u_{2k}}$ với mọi k nguyên dương.

Hơn nữa, ta chứng minh được $u_n > \frac{3}{2}$ với mọi $n > 1$ nên

$$|u_{n+1}-2| = \frac{|u_n-2|}{u_n} < \frac{2}{3}|u_n-2| < \cdots < \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_1-2|.$$

Từ đây suy ra $\lim u_n = 2$ và theo nguyên lý kẹp, ta phải có $f(x) = x^2$ với mọi $x \geq 1$.

Thử lại ta thấy thỏa, vì chú ý rằng $f(x) = x^2 \geq x$ với mọi $x \geq 1$. □

Nhận xét 6. *Bài toán sau đây vẫn có thể giải quyết tương tự: Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *sao cho* $f\left(\frac{f(n)}{n}\right) = n^2$ *với mọi* n *nguyên dương.*

Bài toán 7. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *thỏa mãn*

$$f\left(\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \text{ với } x, y > 0.$$

Lời giải. Xét phép toán $x * y = \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}}$ thì theo đề bài, với $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$, ta có

$$f\left((x_i * x_j) * (x_k * x_l)\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)}{4}$$

với $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$. Do đó, ta chọn $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a^2, a, a, 1)$ và đặt

$$\begin{cases} g(a) = (a^2 * a) * (a * 1) \\ h(a) = (a^2 * 1) * (a * a) \end{cases}$$

thì dễ thấy $g(a) \neq h(a)$; $f(c \cdot g(a)) = f(c \cdot h(a))$ với mọi $a > 0$ và c là số dương tùy ý.

Vì $g(1) = h(1) = 1$ và $h(2) < g(2)$ nên $\frac{g(2)}{h(2)} = k > 1$. Do tính liên tục của hàm số $\frac{g(a)}{h(a)}$ trên $[1; k]$ nên nó có thể nhận hết các giá trị thuộc $[1; k]$.

Với mọi $u, v > 0$ mà $\frac{u}{v} \in (1; k]$ thì tồn tại $x > 0$ để $\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{u}{v}$, chọn $c = \frac{v}{h(x)}$, ta có

$$f(u) = f\left(v \cdot \frac{g(x)}{h(x)}\right) = f\left(\frac{v}{h(x)} \cdot g(x)\right) = f\left(\frac{v}{h(x)} \cdot h(x)\right) = f(v).$$

Cố định $x_0 \in \mathbb{R}^+$ thì từ khẳng định trên, ta thấy rằng $f(x) = f(x_0)$ với mọi

$$x \in (x_0; kx_0] \cup (kx_0; k^2x_0] \cup \ldots \cup (k^{n-1}x_0; k^n x_0]$$

với n có thể lớn tùy ý.

Cho $n \to +\infty$ thì $f(x) = f(x_0)$ với mọi $x > x_0$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $f(x) = f(x_0)$ với mọi

$$x \in [k^{-1}x_0; x_0) \cup [k^{-2}x_0; k^{-1}x_0) \cup \cdots \cup [k^{-n}x_0; k^{-n+1}x_0$$

với n có thể lớn tùy ý. Cho $n \to +\infty)$ thì $f(x) = f(x_0)$ với mọi $0 < x < x_0$.

Vậy $f(x)$ là hàm hằng, thử lại ta thấy thỏa. □

Nhận xét 7. *Cách thêm biến cho bài này có thể là cách tốt nhất để tiếp cận, vì hầu như không thể lập luận với chỉ hai biến ban đầu. Ý tưởng mấu chốt là xây dựng được hai giá trị có tỉ lệ có thể lớn tùy ý mà f tại chúng bằng nhau, từ đó cố định một số và đưa số còn lại ra vô cực.*

Bài toán 8. *Với mỗi số nguyên dương n, xét phương trình $2n^2x = \log_2(n^2x + 1)$. Tìm điều kiện của $a, b, c > 0$ để với mỗi nghiệm $x_n \neq 0$ của phương trình trên thì ta luôn có*

$$a^{x_n} + b^{x_n} + c^{x_n} \geq 4x_n + 3.$$

Lời giải. Trước hết, với $a, b, c > 0$, ta sẽ chứng minh rằng

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n = \sqrt[3]{abc}.$$

Đặt $y = \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n \Rightarrow \ln y = n\ln\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)$. Do đó theo quy tắc L'Hospital thì

$$\lim_{n\to+\infty}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{a^x\ln a + b^x\ln b + c^x\ln c}{\frac{a^x+b^x+c^x}{3}} = \ln\sqrt[3]{abc}.$$

Từ đây ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} y = \sqrt[3]{abc}$.

Trở lại bài toán, xét phương trình $2n^2x = \log_2(n^2x+1)$. Đặt $t = n^2x$ thì

$$2t = \log_2(t+1) \Leftrightarrow 4^t = t+1.$$

Khảo sát hàm số tương ứng, dễ thấy phương trình này có hai nghiệm là $t = 0, t = -\frac{1}{2}$. Do đó, $x_n = -\frac{1}{2n^2}$. Ta cần có

$$a^{-\frac{1}{2n^2}} + b^{-\frac{1}{2n^2}} + c^{-\frac{1}{2n^2}} \ge -\frac{2}{n^2}+3 \Leftrightarrow \frac{a^{-\frac{1}{2n^2}} + b^{-\frac{1}{2n^2}} + c^{-\frac{1}{2n^2}}}{3} \ge -\frac{2}{3n^2}+1.$$

Nếu lấy giới hạn trực tiếp sẽ không làm phát sinh điều kiện của a, b, c. Ta lấy mũ $2n^2$ hai vế rồi áp dụng bổ đề ở trên

$$\left(\frac{\sqrt[2n^2]{(1/a)}+\sqrt[2n^2]{(1/b)}+\sqrt[2n^2]{(1/c)}}{3}\right)^{2n} \ge \left(-\frac{2}{3n^2}+1\right)^{2n^2}.$$

Điều kiện đã cho đúng với mọi n nên cũng phải đúng khi $n \to +\infty$. Ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[2n^2]{(1/a)}+\sqrt[2n^2]{(1/b)}+\sqrt[2n^2]{(1/c)}}{3}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$$

và

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{3n^2}+1\right)^{2n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{3n^2}\right)^{-\frac{3n^2}{2}\cdot\frac{(-4)}{3}} = e^{-\frac{4}{3}}.$$

Do đó, ta cần có $\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \ge e^{-\frac{4}{3}} \Leftrightarrow abc \le e^4$.

Với $abc \ge e^4$ thì

$$a^{-\frac{1}{2n^2}} + b^{-\frac{1}{2n^2}} + c^{-\frac{1}{2n^2}} \ge 3\left(\sqrt[3]{abc}\right)^{-\frac{1}{2n^2}} \ge 3e^{-\frac{2}{3n^2}}.$$

Ta cần chứng minh điều kiện đủ là $3e^{-\frac{2}{3n^2}} \ge -\frac{2}{n^2}+3$ hay $e^t \ge t+1$ với $t = -\frac{2}{3n^2}$. Khảo sát hàm số này, ta có đpcm.

Vậy điều kiện cần tìm là $abc \le e^4$. $\square$

Nhận xét 8. *Trong bài trên, ta có sử dụng quy tắc L'Hospital là: Nếu hàm số $f(x), g(x)$ thỏa mãn $f(c) = g(c) = 0$ và giới hạn $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ tồn tại thì $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Ta có thể viết quy tắc này theo kiểu sơ cấp hơn như sau:*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\frac{g(x)-g(c)}{x-c}} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bài toán 9. *Cho dãy số (a_n) xác định bởi công thức $\begin{cases} a_1 = \dfrac{2017}{2016}, \\ a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n} + \dfrac{n^2}{a_n}, n \geq 1 \end{cases}$. Hỏi có tồn tại hay không số nguyên dương n để*

$$\left[\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \cdots + \frac{n}{a_n}\right] = 2016,$$

trong đó kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của số thực x?

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $n^2 \leq a_n \leq (n+1)^2$ với mọi n. Xét hiệu

$$\begin{aligned} a_{n+1} - (n+1)^2 &= a_n - n^2 + 2(\sqrt{a_n} - n) + \frac{n^2}{a_n} - 1 \\ &= (a_n - n^2)\left(\frac{a_n - 1}{a_n} + \frac{2}{\sqrt{a_n} + n}\right) \end{aligned}$$

Ngoài ra, $a_1 > 1^2$ nên bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được rằng $a_n > n^2$ với mọi n.

Khi đó

$$a_{n+1} < a_n + 2\sqrt{a_n} + 1 \Rightarrow \sqrt{a_{n+1}} < \sqrt{a_n} + 1.$$

Ta cũng có $a_1 = \frac{2017}{2016} < 2^2$ nên cũng bằng quy nạp, ta có $a_n < (n+1)^2$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó, với mỗi n nguyên dương, ta có

$$n^2 < a_n < (n+1)^2 \text{ nên } \frac{1}{n} > \frac{n}{a_n} > \frac{n}{(n+1)^2} > \frac{1}{4n}.$$

Đặt $s_n = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \cdots + \frac{n}{a_n}$ thì $s_n \geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$ nên $s_n \to +\infty$. Do đó, tồn tại n để $s_n \geq 2016$.

Gọi n là chỉ số đầu tiên để $s_n \geq 2016$ thì $s_{n-1} < 2016$. Ta phải có $s_n < 2017$ vì nếu không thì $\frac{n}{u_n} = s_n - s_{n-1} > 1$, mâu thuẫn. Điều này cho thấy rằng$[s_n] = 2016$.

Vậy tồn tại số nguyên dương n để $[s_n] = 2016$. Ta có đpcm. □

Nhận xét 9. *Ngoài cách đánh giá trên, ta có thể quy nạp để chứng minh $n^2 \leq u_n \leq n(n+1)$ với mọi $n \geq 1$. Nếu thay công thức truy hồi thành*

$$u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n} \text{ và } s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i}$$

thì ta cũng có bài toán tương tự vì $n < u_n < n + 1$.

Bài toán 10. *Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y) \le yf(x) + f(f(x)) \text{ với mọi } x, y.$$

1. *Chứng minh rằng $f(x) \le 0$ với mọi x.*
2. *Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \le 0$.*

Lời giải. 1) Thay $x = 0, y = f(x)$, ta có $f(f(x)) \le f(x)f(0) + f(f(0))$. Kết hợp với giả thiết, ta suy ra

$$f(x+y) \le f(x)(y + f(0)) + f(f(0)) \quad (*)$$

Giả sử tồn tại $c \in \mathbb{R}$ sao cho $f(c) > 0$ thì trong đánh giá trên, thay $x = c, y \to -\infty$, ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Do đó, với x_0 âm đủ nhỏ thì

$$f(x_0)(c - x_0 + f(0)) + f(f(0)) < 0.$$

Tuy nhiên, với khi đó thì

$$0 < f(c) = f(x_0 + c - x_0) \le f(x_0)\left(c - x_0 + f(0)\right) + f(f(0)) < 0, \text{ mâu thuẫn.}$$

Suy ra $f(x) \le 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

2) Trong $(*)$, thay $y = f(0) - x$, ta có

$$f(f(0)) \le f(x)(2f(0) - x) + f(f(0)) \text{ hay } f(x)(2f(0) - x) \ge 0.$$

Khi đó với $x < 2f(0)$ thì $f(x) \ge 0$, theo câu a thì lại có $f(x) \le 0, \forall x$ nên

$$f(x) = 0 \text{ với mọi } x < 2f(0).$$

Ta sẽ chứng minh $f(0) = 0$ để kết thúc bài toán. Trong $(*)$, thay $y = -f(0), x = 3f(0) - 1$ thì

$$f(2f(0) - 1) \le f(f(0)).$$

Mà $f(2f(0) - 1) = 0$ nên $f(f(0)) \ge 0$ hay $f(0) = 0$. Trong giả thiết, thay $y = 0$, ta được $f(x) \le f(f(x))$ nên

$$f(0) \le f(f(0)) \le f(f(f(0))) = f(0).$$

Suy ra $f(0) = f(f(0)) = 0$. Từ đây ta có đpcm. □

Nhận xét 10. *Đây là bài toán rất thú vị trong đề IMO 2011. Ta có thể xây dựng được một hàm số thỏa mãn đề bài như sau:*

Xét $g : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ mà $g(x+y) \ge yg(x)$ với $x, y > 0$ và $f(x) = \begin{cases} g(x), x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}.$

2. Giới hạn trong một số bài toán số học, tổ hợp.

Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ phân tích tiếp một số bài toán tổ hợp, số học cần dùng đến giới hạn để giải quyết.

Bài toán 11. *Cho dãy số nguyên dương (a_n) tăng ngặt thỏa mãn các điều kiện:*

1. *Các số hạng của dãy đều lớn hơn* 1.
2. *Các số hạng của dãy đôi một nguyên tố cùng nhau.*
3. *Tổng* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_i a_{i+1}}} = +\infty$.

Chứng minh rằng trong dãy này có vô hạn số nguyên tố.

Lời giải. Giả sử ngược lại rằng dãy này có hữu hạn số nguyên tố. Khi đó, giả sử với $n \ge N$ thì tất cả các số hạng a_n đều là hợp số. Với mỗi a_n, ta gọi p_n là ước nguyên tố nhỏ nhất của nó thì $a_n \ge p_n^2$ và các số p_n đều phân biệt (do các số hạng của dãy nguyên tố cùng nhau). Do đó

$$\frac{1}{\sqrt{a_i a_{i+1}}} \le \frac{1}{\sqrt{p_i^2 p_{i+1}^2}} = \frac{1}{p_i p_{i+1}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_i^2} + \frac{1}{p_{i+1}^2}\right).$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_i a_{i+1}}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{a_i a_{i+1}}} + \sum_{i=N}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_i a_{i+1}}} = c + \sum_{i=N}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_i a_{i+1}}}$$

trong đó c là hằng số. Thay đánh giá ở trên vào, ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_i a_{i+1}}} \le c + \sum_{i=N}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_i^2} + \frac{1}{p_{i+1}^2}\right) = c + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_N^2} + \frac{1}{p_{n+1}^2}\right) + \frac{1}{p_{N+1}^2} + \frac{1}{p_{N+2}^2} + \ldots + \frac{1}{p_n^2}.$$

Mặt khác, tổng phía sau không vượt quá $s_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ (với n đủ lớn). Nhưng cho dù $n \to +\infty$ thì tổng trên vẫn bị chặn nên tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_i a_{i+1}}}$ bị chặn, mâu thuẫn với tính chất đã cho của dãy.

Do đó, điều giả sử là sai và dãy này chứa vô hạn số nguyên tố. □

Nhận xét 11. *Dãy số đã cho là tồn tại. Thật vậy, ta có thể chọn a_n là số nguyên tố thứ n. Sau đó, dùng kết quả $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots \to +\infty$ với tổng tính trên các số nguyên tố. Tuy nhiên, việc chứng minh này không đơn giản. Ta có thể dùng khai triển Taylor để chứng minh*

$$\sum_{p \le n} \frac{1}{p} \ge \ln\ln n \to +\infty.$$

Các bạn có thể tìm hiểu thêm với từ khóa: "divergence of the sum of the reciprocals of primes".

Ngoài ra, cùng với việc phân bố của số nguyên tố, người ta còn ước lượng được phân bố của các số square-free bằng giới hạn. Một số được gọi là số square-free nếu nó không chia hết cho bình phương của bất kỳ số nguyên tố nào. Gọi s_n là số các số số các số square-free không vượt quá n thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{s_n}{n} = \frac{6}{\pi^2}$. Để chứng minh được điều này, cần biến đổi về $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{s_n}{n} = \prod\limits_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)$ và dùng bổ đề Euler $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} = \prod\limits_{p\ prime}\frac{1}{1-p^{-s}}$. Bổ đề này có thể chứng minh bằng lập luận biến đổi đơn giản như sau

$$\begin{aligned}
&\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots \\
&\Rightarrow \frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{10^s} + \dots \\
&\Rightarrow \left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \dots
\end{aligned}$$

Sau lần nhân đầu tiên, tất cả các số hạng chẵn bị triệt tiêu. Ta tiếp tục với $\left(1-\frac{1}{3^s}\right)$ thì tất cả các số hạng chia hết cho 3 bị triệt tiêu, và cứ như thế. Từ đó, ta suy ra rằng

$$1 = \zeta(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\dots \Rightarrow \zeta(s) = \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_{p\ prime}\frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Bài toán 12. *Trong mặt phẳng tọa độ, tại mỗi điểm mà tung độ và hoành độ đều là các số tự nhiên, có đặt một gốc cây có bán kính là 10^{-6}. Một người đứng tại gốc tọa độ O và nhìn vào góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng theo một hướng cố định. Hỏi tầm nhìn của người này có bị giới hạn bởi gốc cây nào hay không?*

Lời giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh bổ đề quan trọng sau:

Với mỗi số vô tỷ $\alpha > 0$ và số nguyên dương N, tồn tại $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $|q\alpha - p| < \frac{1}{N}$.

Thật vậy,

Xét các phần lẻ $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \dots, \{(N+1)\alpha\}$ và $\left(0; \frac{1}{N}\right), \left(\frac{1}{N}; \frac{2}{N}\right),], \dots, \left(\frac{N-1}{N}; 1\right)$.

Do có N đoạn mà có $N+1$ số nên phải tồn tại hai số thuộc cùng khoảng, giả sử là $\{r\alpha\}, \{s\alpha\}$ với $1 \le r < s \le N+1$. Khi đó

$$|\{r\alpha\} - \{s\alpha\}| < \frac{1}{N} \text{ hay } |(s-r)\alpha - ([s\alpha] - [r\alpha])| < \frac{1}{N}.$$

Đặt $q = s - r, p = [s\alpha] - [r\alpha]$, ta có đpcm.

Trở lại bài toán, giả sử người này nhìn theo hướng của đường thẳng $y = kx$ với $k > 0$.

Khi đó, một điểm có tọa độ $(x_0; y_0)$ cách đường thẳng một khoảng $\frac{|y_0 - kx_0|}{\sqrt{1+k^2}}$. Ta thấy rằng nếu k là số hữu tỷ thì bài toán hiển nhiên vì đường thẳng này luôn đi qua một điểm nguyên nào đó.

Nếu k vô tỷ thì theo bổ đề trên, tồn tại các số p, q để $|qk - p| < \frac{1}{10^6}$. Khi đó, ta chọn

$$x_0 = p, y_0 = q \text{ thì khoảng cách từ điểm } (x_0; y_0) \text{ sẽ nhỏ hơn } \frac{1}{10^6\sqrt{1+k^2}} < 10^{-6}.$$

Do đó, tầm nhìn của người này luôn bị giới hạn bởi một gốc cây nào đó. □

Nhận xét 12. *Trong đề thi THPT của Pháp vừa qua, có một bài toán tương tự như sau: Một nhà thám hiểm đang khám phá một khu rừng và phát hiện ra rằng tất cả các thân cây trong đó đều có cùng bán kính. Đây quả thật là một điều rất thú vị! Tạm thời bỏ qua chiều cao của các cây, ta đặt khu rừng vào trong mặt phẳng tọa độ vuông góc như sau:*

- *Nhà thám hiểm đang đứng tại gốc tọa độ và muốn tìm một góc nhìn xuyên qua khu rừng.*
- *Các thân cây được xem như các vòng tròn có bán kính $R > 0$ và tọa độ tâm đặt tại các điểm nguyên (a, b) với a, b là các số LẺ. Do tính đối xứng nên ta có thể giả sử $a > 0, b > 0$, tức là chỉ xét các điểm thuộc góc phần tư thứ nhất.*

Ta nói rằng nhà thám hiểm có thể "nhìn xuyên qua" khu rừng nếu như có một tia xuất phát từ vị trí đứng của anh ta (tại gốc tọa độ) và đi qua khu rừng mà không cắt bất cứ gốc cây nào (ở đây là các hình tròn).

Xét đường đi của nhà thám hiểm là $y = mx$ với $m > 0$. Ta gọi hàng đầu tiên là tất cả các cây có tâm nằm ở vị trí $(1, \alpha)$ hoặc $(\alpha, 1)$ với α là số lẻ. Chứng minh rằng nếu người quan sát có thể nhìn xuyên qua hàng đầu tiên này thì có thể nhìn xuyên qua cả khu rừng.

Bài toán 13. *Với mỗi số thực $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$, các số nguyên dương n sao cho $[nx]$ là số chẵn được viết thành một dãy tăng $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$*

1. *Hỏi có tồn tại số nguyên dương m để $m, m+1, m+2$ đều không thuộc dãy hay không?*
2. *Chứng minh rằng $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{i+1}^2 - a_i^2} = +\infty$.*

Lời giải. 1) Câu trả lời là phủ định. Thật vậy, giả sử có số m để $[mx], [(m+1)x], [(m+2)x]$ đều là các số lẻ. Khi đó, ta có hai trường hợp:

- Nếu $\{mx\} \geq \frac{1}{2}$ thì $[(m+1)x] = [[mx] + \{mx\} + x] = [mx] + [\{mx\} + x]$. Vì $\{mx\} \geq \frac{1}{2}$ và $x > \frac{1}{2}$ nên ta có $1 < \{mx\} + x < 2$ hay $[\{mx\} + x] = 1$.

  Từ đó suy ra $[(m+1)x]$ là số chẵn, mâu thuẫn.

- Nếu $\{mx\} < \frac{1}{2}$ thì để có $[mx], [(m+1)x]$ đều lẻ, ta phải có $[mx] = [(m+1)x]$, tức là $[\{mx\} + x] = 0$.

  Suy ra $[(m+2)x] = [(m+1)x] + [\{mx\} + x] = [(m+1)x] = [mx]$ nên $[\{mx\} + 2x] = 0$. Tuy nhiên, điều này không đúng vì $2x > 1$.

Do đó, không tồn tại m thỏa mãn.

2) Theo câu a, trong ba số bất kỳ liên tiếp, luôn có ít nhất một số thuộc dãy. Điều này chứng tỏ hai số hạng liên tiếp của dãy hơn kém nhau không quá 3 đơn vị.

Chú ý rằng $a_1 = 1$ vì $[x] = 0$ nên ta có $a_n \le 1 + 3(n-1) = 3n - 2$ với mọi n. Do đó

$$a_{i+1}^2 - a_i^2 = (a_{i+1} - a_i)(a_{i+1} + a_i) \le 3\left[3(i+1) - 2 + 3i - 2\right] = 3(6i - 1) \le 18i.$$

Từ đó ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{i+1}^2 - a_i^2} \ge \frac{1}{18}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right).$$

Đến đây dễ dàng có đpcm. $\square$

Nhận xét 13. *Bài toán tổng quát sau vẫn đúng: Với mỗi số thực $x \in (0;1)$ và số nguyên dương $m > 2$, các số nguyên dương n sao cho $[nx]$ chia hết cho m được viết thành một dãy tăng $a_1 < a_2 < a_3 < ...$ Khi đó, tổng tương tự như trên vẫn tiến được về vô cực.*

Thật vậy, do $(0;1) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k}\right)$ nên với $x \in (0;1)$ thì tồn tại $k > 0$ để $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$. Khi đó, bằng cách tương tự, ta chứng minh được rằng trong không quá $d = f(k,m)$ số nguyên liên tiếp, luôn tồn tại một số thuộc dãy đã cho. Từ đó, có thể xấp xỉ nó với một cấp số cộng và có đánh giá như trên.

Bài toán 14. *Cho các số vô tỷ dương $\alpha, \beta > 1$ sao cho hai dãy số:*

$$[\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \ldots \text{ và } [\beta], [2\beta], [3\beta], \ldots$$

là phân hoạch của tập hợp số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

Lời giải. Với mỗi số nguyên dương k, gọi m, n là các số nguyên dương thỏa mãn

$$[m\alpha] \le k < [(m+1)\alpha] \text{ và } [n\beta] \le k < [(n+1)\beta].$$

Khi đó, đặt $A = \{[i\alpha], 1 \le i \le m\}$ và $B = \{[j\beta], 1 \le j \le n\}$ thì $|A| = m, |B| = n$ và $A \cap B = \varnothing, A \cup B = \{1, 2, 3, ..., k\}$ theo định nghĩa của đề bài.

Do đó $m + n = k$.

Theo bất đẳng thức phần nguyên thì

$$m\alpha - 1 < k < (m+1)\alpha \text{ nên } \frac{m}{k+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{m+1}{k}.$$

Tương tự $\frac{n}{k+1} < \frac{1}{\beta} < \frac{n+1}{k}$. Suy ra

$$\frac{m+n}{k+1} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < \frac{m+n+2}{k+1} \text{ hay } \frac{k}{k+1} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < \frac{k+2}{k+1}.$$

Cho $k \to +\infty$, ta thu được $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. $\square$

Nhận xét 14. *Đây là định lý đảo của định lý Beatty về phân hoạch của tập hợp số nguyên dương. Ở định lý thuận, ta được cho trước đẳng thức $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ với α,β vô tỷ và cần chứng minh sự phân hoạch. Ta có thể chứng minh phản chứng rằng*

1. *Nếu có m,n,k để $[m\alpha]=[n\beta]=k$ thì vô lý.*
2. *Nếu có m,n,k để $[m\alpha]<k<[(m+1)\alpha]$ và $[n\beta]<k<[(n+1)\beta]$ thì cũng vô lý.*

Định lý này có nhiều ứng dụng, chẳng hạn ta có một bài trong đề APMO:

Với mỗi số nguyên dương gọi a_n,b_n là số viết trong hệ nhị phân và hệ 5-phân của 10^n. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương $k\geq 2$ thì có một số có k chữ số xuất hiện ở đúng một trong hai dãy $(a_n),(b_n)$.

Bài toán có thể được giải quyết dễ dàng với chú ý rằng: số chữ số của n viết trong hệ $k-$ phân là $[\log_k n]+1$; ngoài ra $\alpha=\log_2 10,\beta=\log_5 10$ thỏa mãn $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$.

Bài toán 15. *Cho các số nguyên dương a,b sao cho $\gcd(a,b)=1$. Gọi t_n là số cách viết các số nguyên dương $n>ab$ thành dạng $n=au+bv$ với $u,v\in\mathbb{Z}^+$. Chứng minh*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{t_n}{n}=\frac{1}{ab}.$$

Lời giải. Với mỗi số nguyên dương n, tồn tại duy nhất số nguyên dương k sao cho

$$kab<n\leq(k+1)ab.$$

Để có cặp (u,v) thỏa mãn thì phải có số u sao cho

$$\begin{cases} u<\dfrac{n}{a} \\ au\equiv n \pmod b \end{cases}$$

Ta có $kb<\frac{n}{a}\leq(k+1)b$ nên $u<(k+1)b$, số lượng các số u thỏa mãn $\begin{cases} au\equiv n \pmod b \\ u<(k+1)b \end{cases}$ cũng chính là giá trị t_n. Với mỗi m, trong dãy số $ma,(m+1)a,(m+2)a,\dots,(m+b-1)a$ lập thành một hệ thặng dư đầy đủ modulo b vì $\gcd(a,b)=1$ nên nó có chứa đúng một số đồng dư n theo modulo b. Chú ý rằng $u<(k+1)b$ nên

$$u\leq(k+1)b-1\Rightarrow 0<ua\leq[(k+1)b-1]\,a.$$

Ta tiến hành chia các bội của a trong $(0;((k+1)b-1)a]$ thành $k+1$ đoạn là

$$(0,(b-1)a],[ba,(2b-1)a],\cdots,[kba,((k+1)b-1)a].$$

Trong mỗi đoạn, có đúng một số đồng dư n modulo b nên trong k đoạn cuối, sẽ có đúng k số ua, đoạn đầu chưa chắc đã có nên

$$k\leq t_n\leq k+1 \text{ nên } \frac{k}{n}\leq\frac{t_n}{n}\leq\frac{k+1}{n}.$$

Do $kab<n\leq(k+1)ab$ nên ta có $\frac{1}{ab}-\frac{1}{n}<\frac{k}{n}\leq\frac{t_n}{n}\leq\frac{k+1}{n}<\frac{1}{ab}-\frac{1}{n}$. Cho $n\to+\infty$, dễ dàng có được $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{t_n}{n}=\frac{1}{ab}$. □

Bài toán 16. *Cho hai số hữu tỷ dương phân biệt u, v thỏa mãn $u^n - v^n$ là số nguyên với vô hạn giá trị n nguyên dương. Chứng minh rằng u, v là các số nguyên.*

Lời giải. Đặt $u = \frac{x}{z}, v = \frac{y}{z}$ với $\gcd(x, y, z) = 1$. Theo giả thiết thì $x^n - y^n \equiv 0 \pmod{z^n}$ đúng với vô hạn giá trị n.

Nếu $z > 1$ và giả sử z có một ước nguyên tố p lẻ. Gọi r là số nguyên dương nhỏ nhất để $x^r \equiv y^r (\mathrm{mod} p)$ thì $r | n$ hay $n = rk, k \in \mathbb{Z}^+$.

Đặt $a = v_p(n), b = v_p(x^r - y^r)$ thì

$$v_p(x^n - y^n) = v_p\left((x^r)^k - (y^r)^k\right) = v_p(x^r - y^r) + v_p(k) \leq b + v_p(n) = a + b.$$

Tuy nhiên, $v_p(x^n - y^n) \geq v_p(z^n) \geq n$. Do đó, $a + b \geq n$ nên

$$p^n \leq p^{a+b} = p^a p^b \leq np^b,$$

điều này không thể đúng với vô hạn n. Do đó, z không có ước nguyên tố lẻ và nó phải là lũy thừa của 2, suy ra x, y cùng lẻ.

Ta có

$$2^n | \, x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Khi đó, nếu n lẻ thì nhân tử thứ hai của vế phải lẻ, dẫn đến $2^n | \, x - y$ với vô hạn giá trị lẻ của n,không thể xảy ra được.

Suy ra n chẵn, đặt $s = v_2(x^2 - y^2), t = v_2(n)$ thì

$$v_2(x^n - y^n) = c + s - 1 \Rightarrow n \leq c + s - 1 \leq \log_2 n + s - 1.$$

Tuy nhiên, với n đủ lớn thì đánh giá trên sẽ sai. Vậy u, v phải đều là các số nguyên dương. □

Nhận xét 15. *Cách tiếp cận trên cũng khá phổ biến với các bài toán yêu cầu chứng minh một số hữu tỷ thỏa mãn điều kiện cho trước với vô hạn giá trị n thì phải là số nguyên, chẳng hạn:*

- *Một hằng số chia hết cho p^n với vô hạn n.*
- *Dùng định lý LTE với chú ý $v_p(n) \leq \log_p(n)$, ta so sánh n với $\log_p(n)$.*

Bài toán 17. *Hỏi có bao nhiêu bộ số nguyên có tính thứ tự (a, b, c, d, e, f) thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau*

i. Các số $a, b, c, d, e, f \in [-2016, 2016]$ và $abcdef \neq 0$.

ii. $a^n + b^n + c^n + d^n + e^n + f^n = 0$ với vô hạn giá trị n nguyên dương?

Lời giải. Ta thấy ii) chỉ đúng với n lẻ vì nếu n chẵn thì có $a = b = c = d = e = f = 0$, không thỏa mãn.

Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng trong 6 số này sẽ có ba cặp có tổng bằng 0. Thật vậy,

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \le b \le c \le d \le e \le f$ thì rõ ràng $a < 0 < f$. Nếu như $|f| > |a|$ thì

$$\lim_{n\to+\infty} f^n \left[\underbrace{\left(\frac{a}{f}\right)^n + \left(\frac{b}{f}\right)^n + \left(\frac{c}{f}\right)^n + \left(\frac{d}{f}\right)^n + \left(\frac{e}{f}\right)^n + 1}_{>0} \right] = +\infty.$$

Tương tự nếu $|f| < |a|$ thì giới hạn ở trên bằng $-\infty$, cũng không thỏa.

Do đó phải có $|f| = |a|$ hay $a + f = 0$. Còn lại 4 số là b, c, d, e nên thực hiện tương tự, ta có $b + e = c + d = 0$.

Tiếp theo, để đếm số bộ này, ta thấy rằng trong các số, phải có 3 số dương và 3 số âm. Ta xét các trường hợp:

- Nếu có 3 số dương giống nhau thì 3 số âm cũng phải giống nhau, số bộ là $C_{2016}^1 \cdot \frac{6!}{3!3!} = 2016 \cdot C_6^3$.
- Nếu có 3 số dương khác nhau thì 3 số âm cũng phải khác nhau, số bộ là $C_{2016}^3 \cdot 6!$.
- Nếu có 2 số dương giống nhau thì 2 số âm nào đó cũng phải tương ứng giống nhau
$$2 \cdot C_{2016}^2 \cdot \frac{6!}{2!2!} = C_{2016}^2 \cdot 360.$$

Vậy đáp số là
$$2016 \cdot C_6^3 + C_{2016}^3 \cdot 6! + C_{2016}^2 \cdot 360.$$

□

Nhận xét 16. *Kết quả ở trên không chỉ đúng cho số nguyên mà cũng đúng với số thực tùy ý.*

Tài liệu

[1] Nguyễn Đình Toàn, *Các bài toán đề nghị trường Đông TPHCM*, 2012-2013.

[2] Đỗ Minh Khoa, *Các bài toán trên group "Bài toán hay – Lời giải đẹp"*.

[3] Trần Hoàng Anh, Ý tưởng phát triển, mở rộng một số bài toán.

[4] Vũ Văn Tân, *Các bài toán thi Olympic chọn lọc*.

PHÂN TÍCH BÌNH PHƯƠNG BẰNG TAM THỨC BẬC HAI

Nguyễn Văn Huyện
(*Thành phố Hồ Chí Minh*)

GIỚI THIỆU

Bài viết giới thiệu một ứng dụng nhỏ của Maple trong việc biểu diễn các bất đẳng thức thành tổng các đại lượng không âm thông qua tam thức hai.

Trong chương trình giáo khoa Toán 9 chúng ta đã được giới thiệu cách giải phương trình bậc hai một ẩn dạng tổng quát thông qua phân tích

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ca - b^2}{4a}. \tag{1}$$

Ngoài công dụng để tìm nghiệm thì đẳng thức (1) còn có ứng dụng rất lớn trong chứng minh bất đẳng thức. Chẳng hạn như bài toán dưới đây

Bài toán 1. *Với a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$a^2b + b^2c + c^2a \geqslant 3abc. \tag{2}$$

Lời giải. Sẽ là một bài toán đơn giản nếu áp dụng bất đẳng thức AM-GM. Ở đây với ý tưởng sử dụng tam thức bậc hai chúng ta sẽ có một lời giải khá lạ mắt sau

Trước hết viết (2) lại dưới dạng

$$b \cdot a^2 + (c^2 - 3bc)a + b^2c \geqslant 0. \tag{3}$$

Áp dụng (1) ta biến đổi (3) thành

$$b\left(a + \frac{c^2 - 3bc}{2b}\right)^2 + \frac{4b^3c - (c^2 - 3bc)^2}{4b} \geqslant 0.$$

Giả sử $c = \min\{a, b, c\}$ và chú ý

$$\begin{aligned} 4b^3c - (c^2 - 3bc)^2 &= c[b^2(4b - c) - 2bc(4b - c) + c^2(4b - c)] \\ &= c(4b - c)(b - c)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. □

Như vậy nếu một bất đẳng thức có dạng tam thức bậc hai với hệ số $a > 0$ thì ta sẽ tìm cách chỉ ra $4ca - b^2 \geqslant 0$ bằng các đánh giá hoặc nó thành tổng của những đại lượng không âm. Tuy nhiên công việc này không phải lúc nào cũng có thể thực hiện dễ dàng, có những bài toán mà việc phân tích $4ca - b^2$ sẽ vô cùng phức tạp và vất vả, nhưng đối với máy tính thì lại khác, nó chỉ đơn giản là một lệnh `factor()`. Bằng ngôn ngữ lập trình Maple tác giả đã viết một hàm `qratic()` cho phép ta thực hiện công việc một cách nhanh chóng như sau

```
qratic := proc(f, x)
   local a, b, c;
   a := coeff(collect(numer(f), x), x^2);
   b := coeff(collect(numer(f), x), x);
   c := numer(f) - a*x^2 - b*x;
   subs((factor(a*(x + b/(2*a))^2) + factor((4*a*c - b^2)/(4*a)))/denom(f));
end:
```

Có thể viết đoạn mã trên trực tiếp ở Worksheet Mode của Maple hoặc lưu lại vào notepad. Ở đây tác giả lưu ở ổ `C` và đặt tên là `qratic.txt`. Bây giờ hãy xem cách hàm này hoạt động (lệnh **read** `"C:/qratic.txt"` để đọc file `qratic.txt` đã lưu).

> **read** "C:/qratic.txt"
> $qratic(x^2 - 5\cdot x + 3, x)$

$$\frac{1}{4}(2x-5)^2 - \frac{13}{4}$$

> $qratic(x^2 + 4\cdot x + 4, x)$

$$(x+2)^2$$

> $qratic(-3\cdot x^2 + 4\cdot x - 8, x)$

$$-\frac{1}{3}(3x-2)^2 - \frac{20}{3}$$

Áp dụng cho bài toán 1 ở trên

> **read** "C:/qratic.txt"
> $f := a^2\cdot b + b^2\cdot c + c^2\cdot a - 3\cdot a\cdot b\cdot c$

$$f := a^2 b - 3abc + ac^2 + b^2 c$$

> $qratic(f, a)$

$$\frac{1}{4}\frac{(2ab - 3bc + c^2)^2}{b} + \frac{1}{4}\frac{c(4b-c)(b-c)^2}{b}$$

Bài toán 2. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{27a^2}{c} + \frac{(b+c)^2}{a} \geqslant 12b.$$

Lời giải. Dễ thấy bài toán là một tam thức bậc hai theo b điều này gợi ý ta biểu diễn nó thành tổng các biểu thức không âm khi phân tích theo b (gọi tắt là biểu diễn theo b) như sau

```
> read "C:/qratic.txt"
> f := 27·a^2/c + (b + c)^2/a − 12·b
```

$$f := \frac{27\,a^2}{c} + \frac{(b+c)^2}{a} - 12\,b$$

```
> qratic(f, b)
```

$$\frac{c\,(-b+6\,a-c)^2+3\,a\,(3\,a-2\,c)^2}{c\,a}$$

Tức là

$$\frac{27a^2}{c} + \frac{(b+c)^2}{a} - 12b = \frac{c(6a-b-c)^2+3a(3a-2c)^2}{ca} \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $9a = 2b = 6c$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Một điều lưu ý rằng đối với bài toán này và kể cả các bài toán minh họa tiếp theo dưới đây đều tồn tại các lời giải rất đẹp và sơ cấp, chẳng hạn với bài toán này áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và AM-GM, ta có

$$\frac{27a^2}{c} + \frac{(b+c)^2}{a} \geqslant \frac{(3a+b+c)^2}{\frac{c}{3}+a} = \frac{3\,[(3a+c)+b]^2}{3a+c} \geqslant 12b.$$

Những chứng minh và phân tích đôi khi khá cồng kềnh trong bài chỉ là một cách nhìn khác với bất đẳng thức bằng công cụ máy tính do đó hi vọng không làm mất đi vẻ đẹp của bất đẳng thức.

Bài toán 3. *Cho x, y, z là các số thực không âm. Chứng minh rằng*

$$(y+z)^3 + 4xyz + x^2(y+z) \geqslant 2x(y+z)^2 + 3yz(y+z).$$

(Liu Qian Bao)

Lời giải. Biểu diễn hiệu hai vế theo x, ta được

```
> read "C:/qratic.txt"
> f := (y + z)^3 − 3·y·z·(y + z) + 4·x·y·z − 2·x·(y + z)^2 + x^2·(y + z)
```

$$f := (y+z)^3 - 3\,y\,z\,(y+z) + 4\,x\,y\,z - 2\,x\,(y+z)^2 + x^2\,(y+z)$$

```
> qratic(f, x)
```

$$\frac{(x\,y+x\,z-y^2-z^2)^2}{y+z} + \frac{y\,z\,(-z+y)^2}{y+z}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán 4. *Với a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$F = (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - 1 - \frac{24(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} \geqslant 0.$$

(Vasile Cîrtoaje)

Lời giải. Viết bài toán về dạng chuẩn tắc của S.O.S như sau

$$\sum \frac{(a^2+b^2+c^2-6ab+2bc+2ca)(a-b)^2}{ab(a+b+c)^2} \geqslant 0. \tag{4}$$

Chú ý rằng với mọi k ta luôn có

$$\sum k(a-b)^2(b-c)(c-a) = 0.$$

Xét

$$(a^2+b^2+c^2-6ab+2bc+2ca) + k(b-c)(c-a).$$

Biểu diễn theo a ta được

```
> read "C:/qratic.txt"
> f := (a^2 - 6ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2) + k·(b - c)·(c - a)
            f := a^2 - 6ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 + k(b - c)(c - a)
> qratic(f, a)
            1/4 (-bk + ck + 2a - 6b + 2c)^2 - 1/4 (k + 8)(b - c)(bk - ck + 4b)
```

Chọn $k = -8$ thì

$$(a^2+b^2+c^2-6ab+2bc+2ca) - 8(b-c)(c-a) = (a+b-3c)^2.$$

Từ đó có thể biến đổi (4) như sau

$$\sum \frac{[(a^2+b^2+c^2-6ab+2bc+2ca)-8(b-c)(c-a)](a-b)^2 + 8(a-b)^2(b-c)(c-a)}{ab(a+b+c)^2} \geqslant 0,$$

tương đương với

$$\sum \frac{(a+b-3c)^2(a-b)^2 + 8(a-b)^2(b-c)(c-a)}{ab(a+b+c)^2} \geqslant 0,$$

hoặc

$$\sum \frac{(a+b-3c)^2(a-b)^2}{ab(a+b+c)^2} + \sum \frac{8(a-b)^2(b-c)(c-a)}{ab(a+b+c)^2} \geqslant 0. \tag{5}$$

Mà

$$\sum \frac{8(a-b)^2(b-c)(c-a)}{ab(a+b+c)^2} = 0,$$

cho nên (5) tương đương với

$$\sum \frac{(a+b-3c)^2(a-b)^2}{ab(a+b+c)^2} \geqslant 0,$$

tức là

$$F = \sum \frac{(a+b-3c)^2(a-b)^2}{ab(a+b+c)^2} \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = 2b = 2c$ cùng các hoán vị. □

Bài toán 5. *Cho a, b, c, d là bốn số thực bất kỳ. Chứng minh rằng*

$$(a-c)^2(b-d)^2 + 4(a-b)(b-c)(c-d)(d-a) \geqslant 0.$$

Lời giải. Biểu diễn vế trái theo a, ta được

```
> read "C:/qratic.txt"
> f := (a-c)^2·(b-d)^2 + 4·(a-b)·(b-c)·(c-d)·(d-a)
```

$$f := (a-c)^2 (b-d)^2 + 4 (a-b) (b-c) (c-d) (d-a)$$

```
> qratic(f, a)
```

$$(ab - 2ac + ad + bc - 2bd + cd)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a-b)(c-d) + (b-c)(d-a) = 0$. Chứng minh hoàn tất. □

Các bài toán tiếp theo chúng ta sẽ cần đến nhiều hơn một lần phân tích

Bài toán 6. *Với a, b, c là ba số thực. Chứng minh rằng*

$$F = (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) - 3(a+b+c)^2 \geqslant 0.$$

Lời giải. Biểu diễn F theo a, ta được

```
> read "C:/qratic.txt"
> f := (a^2+2)·(b^2+2)·(c^2+2) - 3·(a+b+c)^2
```

$$f := (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) - 3(a+b+c)^2$$

```
> qratic(f, a)
```

$$\frac{(ab^2c^2 + 2ab^2 + 2ac^2 + a - 3b - 3c)^2}{b^2c^2 + 2b^2 + 2c^2 + 1} + \frac{(c^2+2)(b^2+2)(2b^2c^2 + b^2 - 6bc + c^2 + 2)}{b^2c^2 + 2b^2 + 2c^2 + 1}$$

Chú ý rằng

$$2b^2c^2 + b^2 - 6bc + c^2 + 2 = (b-c)^2 + 2(bc-1)^2,$$

Do đó

$$F = \frac{\left[a(b^2c^2 + 2b^2 + 2c^2 + 1) - 3b - 3c\right]^2 + (c^2+2)(b^2+2)\left[(b-c)^2 + 2(bc-1)^2\right]}{b^2c^2 + 2b^2 + 2c^2 + 1}.$$

Dễ thấy biểu thức này không âm nên ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Ta còn một cách để chứng minh $2b^2c^2 + b^2 - 6bc + c^2 + 2 \geqslant 0$ bằng cách biểu diễn nó theo b như sau

```
> qratic(2b^2c^2 + b^2 - 6bc + c^2 + 2, b)
```

$$\frac{(2bc^2 + b - 3c)^2}{2c^2+1} + \frac{2(c-1)^2(c+1)^2}{2c^2+1}$$

Bài toán 7. *Cho bốn số thực a, b, c, d thỏa mãn $ab = c^2 + 4d^2 = 4$. Chứng minh rằng*

$$(a-c)^2 + (b-d)^2 \geqslant \frac{8}{5}.$$

Lời giải. Lời giải sau đây của Ji Chen [1] trên diễn đàn Art of Problem Solving

$$(a-c)^2+(b-d)^2+\frac{7}{20}(c^2+4d^2)-\frac{7}{9}ab = \frac{(5b-12d)^2}{60}+\frac{(20a-27c)^2}{540}+\frac{7(2a-3b)^2}{108} > 0.$$

Thoạt nhìn thì phân tích này trông rất ảo và không biết Ji Chen đã tìm ra nó như thế nào ! Nhưng nếu để ý chúng ta sẽ thấy P là những tam thức bậc theo a, b, c hoặc d và từ đó dự đoán được con đường mà Ji Chen đã tìm ra phân tích trên.

Xét biểu thức

$$P = (a-c)^2 + (b-d)^2 + \frac{7}{20}(c^2+4d^2) - \frac{7}{9}ab.$$

Trước hết biểu diễn P theo d

> **read** "C:/qratic.txt"

> $f := (a-c)^2 + (b-d)^2 - \frac{7}{9}\cdot a\cdot b + \frac{7}{20}\cdot(c^2+4\cdot d^2)$

$$f := (a-c)^2 + (b-d)^2 - \frac{7}{9}ab + \frac{7}{20}c^2 + \frac{7}{5}d^2$$

> $qratic(f, d)$

$$\frac{1}{60}(-12d+5b)^2 + a^2 - \frac{7}{9}ab - 2ca + \frac{7}{12}b^2 + \frac{27}{20}c^2$$

Tiếp đến biểu diễn $a^2 - \frac{7}{9}ab - 2ca + \frac{7}{12}b^2 + \frac{27}{20}c^2$ theo b

> $qratic\left(a^2 - \frac{7}{9}ab - 2ca + \frac{7}{12}b^2 + \frac{27}{20}c^2, b\right)$

$$\frac{7}{108}(-3b+2a)^2 + \frac{1}{540}(-27c+20a)^2$$

Như vậy

$$P = \frac{(5b-12d)^2}{60} + \frac{(20a-27c)^2}{540} + \frac{7(2a-3b)^2}{108},$$

và đây chính là phân tích của Ji Chen. □

Nhận xét. Tùy thuộc vào biến ban đầu được chọn để biểu diễn mà ta có những phân tích khác nhau, ví dụ như bài này vẫn còn nhiều phân tích khác như

$$P = \frac{1}{60}(5b-12d)^2 + \frac{1}{324}(18a-7b-18c)^2 + \frac{7}{1620}(10b-9c)^2,$$

hay

$$P = \frac{1}{324}(18a-7b-18c)^2 + \frac{1}{89100}(275b-324d-126c)^2 + \frac{21}{1100}(3c-8d)^2,$$

và nhiều kết quả khác nữa.

[1] Đại học Ningbo, Trung Quốc.

Bài toán 8. *Cho bốn số thực tùy ý a, b, c, d. Chứng minh rằng*

$$F = 6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + (a + b + c + d)^2 - 12(ab + bc + cd) \geqslant 0.$$

(Vasile Cîrtoaje)

Lời giải. Thực hiện tương tự như bài toán trên, ta có

> **read** "C:/qratic.txt"

> $f := 6\cdot(a^2+b^2+c^2+d^2) + (a+b+c+d)^2 - 12\cdot(a\cdot b+b\cdot c+c\cdot d)$

$$f := 6a^2 + 6b^2 + 6c^2 + 6d^2 + (a+b+c+d)^2 - 12ab - 12bc - 12cd$$

> $qratic(f, a)$

$$\frac{1}{7}(7a-5b+c+d)^2 + \frac{24}{7}b^2 - \frac{60}{7}bc + \frac{24}{7}bd + \frac{48}{7}c^2 - \frac{72}{7}cd + \frac{48}{7}d^2$$

> $qratic\left(\frac{24}{7}b^2 - \frac{60}{7}bc + \frac{24}{7}bd + \frac{48}{7}c^2 - \frac{72}{7}cd + \frac{48}{7}d^2, b\right)$

$$\frac{3}{14}(4b-5c+2d)^2 + \frac{3}{2}(c-2d)^2$$

Vậy

$$F = \frac{1}{7}(7a - 5b + c + d)^2 + \frac{3}{14}(4b - 5c + 2d)^2 + \frac{3}{2}(c - 2d)^2 \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2a = b = c = 2d$. Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét. Một số phân tích khác

$$F = \frac{1}{7}(7a - 5b + c + d)^2 + \frac{3}{28}(5b - 8c + 6d)^2 + \frac{3}{4}(b - 2d)^2,$$

hay

$$F = \frac{1}{7}(7a - 5b + c + d)^2 + \frac{3}{7}(b - 3c + 4d)^2 + 3(b - c)^2.$$

Bài toán 9. *Cho sáu số thực a, b, c, x, y, z thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx \geqslant 0$. Chứng minh rằng*

$$[a(y + z) + b(z + x) + c(x + y)]^2 \geqslant 4(ab + bc + ca)(xy + yz + zx).$$

(Ukraine MO 2001)

Lời giải. Biểu diễn hiệu hai vế theo a, ta được

> **read** "C:/qratic.txt"

> $f := (a\cdot(y+z) + b\cdot(z+x) + c\cdot(x+y))^2 - 4\cdot(a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a)\cdot(x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x)$

$$f := (a(y+z) + b(z+x) + c(x+y))^2 - 4(ab+ac+bc)(xy+xz+yz)$$

> $qratic(f, a)$

$$\frac{(ay^2 + 2ayz + az^2 - bxy - bxz - byz + bz^2 - cxy - cxz + cy^2 - cyz)^2}{(y+z)^2} + \frac{4(bz-cy)^2(xy+xz+yz)}{(y+z)^2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Bài toán được chứng minh. □

Bài toán 10. *Cho x, y, z là các số không âm và a, b, c là ba số thực bất kỳ. Chứng minh rằng*

$$[a(y+z)+b(z+x)+c(x+y)]^2 \geqslant 4(x+y+z)(xbc+yca+zab).$$

(Vasile Cîrtoaje)

Lời giải. Tương tự bài trên biểu diễn hiệu hai vế theo a, ta được

```
> read "C:/qratic.txt"
> f := (a·(y+z) + b·(z+x) + c·(x+y))^2 − 4·(x+y+z)·(x·b·c + y·c·a + z·a·b)
```

$$f := (a(y+z)+b(z+x)+c(x+y))^2 - 4(x+y+z)(abz+acy+bcx)$$

```
> qratic(f, a)
```

$$\frac{(ay^2+2ayz+az^2+bxy-bxz-byz-bz^2-cxy+cxz-cy^2-cyz)^2}{(y+z)^2} + \frac{4xyz(b-c)^2(x+y+z)}{(y+z)^2}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán 11. *Cho x, y, z là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2x^2+yz}} \geqslant \frac{\sqrt{6}(y^2+z^2)}{2(x^2+y^2+z^2)}.$$

Lời giải. Bài này có một chút khác biệt so với các bài toán trước, ta không thể biểu diễn nó theo x, y hay theo z được mà phải biểu diễn theo x^2. Bình phương hai vế và giản ước cho $y^2+z^2>0$ bất đẳng thức trở thành

$$2(x^2+y^2+z^2)^2 \geqslant 3(y^2+z^2)(2x^2+yz).$$

Ta có

```
> read "C:/qratic.txt"
> f := 2·(x^2 + y^2 + z^2)^2 − 3·(y^2 + z^2)·(2·x^2 + y·z)
```

$$f := 2(x^2+y^2+z^2)^2 - 3(y^2+z^2)(2x^2+yz)$$

```
> qratic(f, x^2)
```

$$\frac{1}{2}(2x^2-y^2-z^2)^2 + \frac{3}{2}(y^2+z^2)(y-z)^2$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Từ bài này có thể suy ra

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2z^2+xy}} + \sqrt{\frac{y^2+z^2}{2x^2+yz}} + \sqrt{\frac{z^2+x^2}{2y^2+zx}} \geqslant \sqrt{6}.$$

Bài toán 12. *Cho a, b, c là ba số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng*

$$\frac{bc}{a^2+1} + \frac{ca}{b^2+1} + \frac{ab}{c^2+1} \leqslant 1.$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải. Bài toán này ban đầu được anh Phạm Kim Hùng giới thiệu ở mục bất đẳng thức chưa có lời giải của diễn đàn toán học Mathlinks [2] (hiện nay là Art of Problem Solving) và nhận được một số lời rất *cơ bắp* của các thành viên trên diễn đàn khi đó. Năm 2009, trong quyển sách "*Bất đẳng thức và những lời giải hay*" anh Võ Quốc Bá Cẩn đã đưa ra chứng minh đẹp mắt hơn khi chỉ ra đánh giá

$$\frac{bc}{a^2+1} \leqslant \frac{bc(b+c)}{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}, \tag{6}$$

bằng cách sử dụng bất đẳng thức AM-GM kết hợp với việc chia trường hợp. Tuy nhiên nếu để ý chúng ta sẽ thấy (6) chính là một tam thức bậc hai theo a và do đó ta có thể áp dụng hàm `qratic()` như sau.

Nếu $bc = 0$ thì bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Xét $bc > 0$ thuần nhất hai vế đồng thời giản ước cho bc bất đẳng thức (6) trở thành

$$[4a^2 + (a+b+c)^2](b+c) \geqslant 4[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)].$$

Biểu diễn hiệu hai vế theo a, ta được

> **read** "C:/qratic.txt"

> $f := \left(4 \cdot a^2 + (a+b+c)^2\right) \cdot (b+c) - 4 \cdot (a \cdot b \cdot (a+b) + b \cdot c \cdot (b+c) + c \cdot a \cdot (c+a))$

$$f := \left(4a^2 + (a+b+c)^2\right)(b+c) - 4bc(b+c) - 4ca(a+c) - 4ab(a+b)$$

> $qratic(f, a)$

$$\frac{\left(ab + ac - b^2 + 2bc - c^2\right)^2}{b+c} + \frac{4bc(b-c)^2}{b+c}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$, $c = 0$ cùng các hoán vị. Chứng minh hoàn tất. □

Bài toán 13. *Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Chứng minh rằng*

$$F = \left(1 + \frac{2a^2+bc}{b^2+c^2}\right)\left(1 + \frac{2b^2+ca}{c^2+a^2}\right)\left(1 + \frac{2c^2+ab}{a^2+b^2}\right) - \frac{9}{2} \geqslant 0. \tag{7}$$

(Nguyễn Hoàng Thuận)

Lời giải. Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$ và $r = abc$ đồng thời viết (7) lại như sau

$$2\prod(2a^2 + b^2 + bc + c^2) \geqslant 9(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2),$$

[2] http://artofproblemsolving.com/community/c6h57558

hay là

$$2\left[8r^2 - p(p^2+2q)r + 2p^6 - 10p^4q + 17p^2q^2 - 9q^3\right] \geqslant 9\left[p^2q^2 - 2q^3 - 2p(p^2-2q)r - r^2\right],$$

hoặc

$$25r^2 + 8p(2p^2-5q)r + 4p^6 - 20p^4q + 25p^2q^2 \geqslant 0.$$

Biểu diễn vế trái theo r, ta được

```
> read "C:/qratic.txt"
> f := 25·r^2 + 8·p·(2·p^2 − 5·q)·r + 4·p^6 − 20·p^4·q + 25·p^2·q^2
```

$$f := 25\,r^2 + 8\,p\,(2\,p^2 - 5\,q)\,r + 4\,p^6 - 20\,p^4\,q + 25\,p^2\,q^2$$

```
> qratic(f, r)
```

$$\frac{1}{25}\left(8\,p^3 - 20\,p\,q + 25\,r\right)^2 + \frac{9}{25}\,p^2\left(2\,p^2 - 5\,q\right)^2$$

Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét. Từ lời giải trên thu được

$$F = \frac{\left(8\sum a^3 + 4\sum ab(a+b) + 13abc\right)^2 + 9(a+b+c)^2\left(2\sum a^2 - \sum bc\right)^2}{50(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}.$$

Bài toán 14. *Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$ab + bc + 2ca.$$

Lời giải. Bản chất của bài toán là tìm hằng số k lớn nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant k(ab+bc+2ca).$$

Ta có

```
> read "C:/qratic.txt"
> f := a^2 + b^2 + c^2 − k·(a·b + b·c + 2·c·a)
```

$$f := a^2 + b^2 + c^2 - k\,(a\,b + 2\,a\,c + b\,c)$$

```
> qratic(f, a)
```

$$\frac{1}{4}\left(-b\,k - 2\,c\,k + 2\,a\right)^2 - b\,c\,k + b^2 + c^2 - \frac{1}{4}\,b^2\,k^2 - b\,c\,k^2 - c^2\,k^2$$

```
> qratic(− b c k + b^2 + c^2 − 1/4 b^2 k^2 − b c k^2 − c^2 k^2, b)
```

$$-\frac{1}{4}\,\frac{\left(b\,k^2 + 2\,c\,k^2 + 2\,c\,k - 4\,b\right)^2}{(k-2)\,(k+2)} + \frac{2\,c^2\,(k+1)\,(k^2+2\,k-2)}{(k-2)\,(k+2)}$$

Như vậy ta cần chọn k sao cho hệ phương trình dưới đây có nghiệm

$$\begin{cases} k > 0 \\ k - 2 < 0 \\ k^2 + 2k - 2 = 0 \end{cases}$$

Tức $k = \sqrt{3} - 1$. Bây giờ kiểm tra lại

> **read** "C:/qratic.txt"

> $f := a^2 + b^2 + c^2 - (\sqrt{3} - 1) \cdot (a \cdot b + b \cdot c + 2 \cdot c \cdot a)$

$$f := a^2 + b^2 + c^2 - (\sqrt{3} - 1)(ab + 2ac + bc)$$

> $qratic(f, a)$

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\, b + 2\sqrt{3}\, c - 2a - b - 2c\right)^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\, c - b - c\right)^2$$

Vậy

$$ab + bc + 2ca \leqslant \frac{1}{\sqrt{3} - 1}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi $c = a = \frac{1+\sqrt{3}}{2}b$. Cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ta thu được bài toán ban đầu. □

Bài toán 15. *Cho a, b, c, d là bốn số thực không âm. Chứng minh rằng*

$$(a + b + c)^2(b + c + d)^2 \geqslant 4(a + b)(b + c)^2(c + d).$$

Lời giải. Bài toán này có một chút khác biệt

> **read** "C:/qratic.txt"

> $f := (a + b + c)^2 \cdot (b + c + d)^2 - 4 \cdot (a + b) \cdot (b + c)^2 \cdot (c + d)$

$$f := (a + b + c)^2 (b + c + d)^2 - 4(a + b)(b + c)^2 (c + d)$$

> $qratic(f, d)$

$$\frac{\left(a^2 b + a^2 c + a^2 d + 2abd + 2acd - b^3 - b^2 c + b^2 d + bc^2 + 2bcd + c^3 + c^2 d\right)^2}{(a + b + c)^2} + \frac{4a(b + c)^2 (a + b)\left(ab + b^2 - c^2\right)}{(a + b + c)^2}$$

> $qratic(f, a)$

$$\frac{\left(ab^2 + 2abc + 2abd + ac^2 + 2acd + ad^2 + b^3 + b^2 c - bc^2 + bd^2 - c^3 + cd^2\right)^2}{(b + c + d)^2} - \frac{4d(c + d)(b + c)^2\left(b^2 - c^2 - cd\right)}{(b + c + d)^2}$$

Từ đây dễ thấy

- Nếu $b^2 \geqslant c^2$ thì `qratic(f,d)` $\geqslant 0$.
- Nếu $b^2 \leqslant c^2$ thì `qratic(f,a)` $\geqslant 0$.

Tóm lại, trong mọi trường hợp bài toán đều được chứng minh. □

Để kết thúc bài viết xin giới thiệu một số bài tập để bạn đọc rèn luyện

Bài tập 1. Với a, b, c là ba số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức[3]

$$\frac{13a^2 + 2b^2 + 2017c^2}{ab + bc + ca}.$$

[3] 13/2/2017 là ngày phát hành số báo cuối cùng của Epsilon.

Bài tập 2. Cho $a,\ b,\ c$ là ba số thực không âm sao cho $a+b+c>0$.

a) Chứng minh rằng $\sqrt{\dfrac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} \geqslant \dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$.

(Vasile Cîrtoaje)

b) Chứng minh rằng $\dfrac{a^2}{3a^2+(b+c)^2} \leqslant \dfrac{a}{a+b+c}$.

(Võ Quốc Bá Cẩn)

c) Chứng minh rằng $\dfrac{a^2}{8a^2+(b+c)^2} \leqslant \dfrac{a}{4(a+b+c)}$.

(Nguyễn Văn Huyện)

Bài tập 3. Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực không âm. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây

a) $25x^2(y+z)+(y+z)^3+21yz(y+z) \geqslant 10x(y+z)^2+6xyz$.

b) $(2x^2+y^2+z^2)(y+z)^2 \geqslant 2x(y+z)^3+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(y-z)^2(2x^2+y^2+z^2)$.

(Liu Qian Bao)

Bài tập 4. Với $a,\ b,\ c$ là ba số thực bất kỳ. Hãy chứng minh

$$(a^2+b^2+c^2)^3 \geqslant 2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$

Bài tập 5. Với $a,\ b,\ c$ là ba số thực. Chứng minh rằng

$$(a^2+3)(b^2+3)(c^2+3) \geqslant 4(a+b+c+1)^2.$$

Bài tập 6. Tìm hằng số dương k lớn nhất để bất đẳng thức

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant k(ab+bc+cd),$$

luôn đúng với mọi số thực $a,\ b,\ c,\ d$ bất kỳ.

Bài tập 7. Cho bốn số thực $a,\ b,\ x,\ y$ thỏa mãn điều kiện $ay-bx=1$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+x^2+y^2+ax+by \geqslant \sqrt{3}.$$

(V.N.Murty)

Bài tập 8. Với $a,\ b,\ c,\ d$ là bốn số thực. Đặt $a+b+c+d=4u$, $abc+abd+acd+bcd=4w^3$ $ab+ac+bc+ad+bd+cd=6v^2$ và $abcd=t^4$. Chứng minh rằng

$$3v^2-4uw^3+t^4 \geqslant 0.$$

(Liu Qian Bao)

Bài tập 9. Với a, b, c, d, e là các số thực bất kỳ. Chứng minh rằng

$$\sqrt{5}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + (a + b + c + d + e)^2 \geqslant (5 + \sqrt{5})(ab + bc + cd + de + ed).$$

Bài tập 10. Cho sáu số thực a, b, c, x, y, z bất kỳ. Chứng minh các bất đẳng thức sau

$$4(a^2 + x^2)(b^2 + y^2)(c^2 + z^2) \geqslant 3(xbc + zab + yca)^2.$$

(Titu Andreescu)

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geqslant \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z).$$

(Vasile Cîrtoaje)

DỒN BIẾN BẰNG QUY NẠP

Võ Quốc Bá Cẩn
(Trường Archimedes Academy)

Như chúng ta đã biết, dồn biến là một phương pháp rất hữu hiệu để xử lý các bất đẳng thức đối xứng. Ý tưởng của phương pháp là thiết lập các đánh giá trung gian dạng

$$f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \geqslant f\left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{f(a_1+a_2}{2}, a_3, \ldots, a_n\right)$$

hoặc

$$f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \geqslant f\left(\sqrt{a_1a_2}, \sqrt{a_1a_2}, a_3, \ldots, a_n\right)$$

hoặc các đánh giá tương tự khác, tùy vào giả thiết của bài toán. Từ đó đưa bài toán về xét tại các trường hợp với số biến ít hơn, và dễ dàng hơn trong việc tìm các hướng tiếp cận tiếp theo.

Ý tưởng chính là vậy, tuy nhiên, khi vận dụng vào các ví dụ cụ thể, có lẽ bạn đọc đều thấy rằng phương pháp này hầu như chỉ "dễ" sử dụng trong các trường hợp của các bất đẳng thức hai, ba biến, và dường như rất khó để sử dụng phương pháp khi số biến được nâng lên nhiều hơn ba. Vậy vấn đề đặt ra ở đây là, có cách nào để nâng cao phạm vi ứng dụng của phương pháp dồn biến cho các bất đẳng thức n $(n > 3)$ biến số?

Nội dung bài viết này, giống như tên của nó, chúng tôi muốn chia sẻ cùng bạn đọc cách phối hợp giữa quy nạp (một công cụ quen thuộc, thường được sử dụng để giải các bài toán tổng quát) và dồn biến để tạo ra một phương pháp dồn biến mới.

1. Các bài toán dồn biến về trung bình

Chúng ta sẽ bắt đầu bằng bất đẳng thức cổ điển sau

Bài toán 1 (Bất đẳng thức AM-GM). *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

Đây là một bất đẳng thức nổi tiếng và quan trọng. Nó có khá nhiều cách chứng minh hay và thú vị bằng quy nạp. Dưới đây, ta xét cách tiếp cận sau

Lời giải. Ký hiệu $P(n)$ là mệnh đề cần chứng minh[1]. Dễ thấy $P(1)$ hiển nhiên đúng. Giả sử mệnh đề $P(n-1)$ $(n \geqslant 2)$ đúng, khi đó theo giả thiết quy nạp, ta có

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \geqslant (n-1)\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}. \tag{1}$$

Như vậy, để chứng minh $P(n)$ đúng, ta sẽ chứng minh

$$(n-1)\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} + a_n \geqslant n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}. \tag{2}$$

Đặt $x = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}$ và $y = \sqrt[n]{a_n}$. Ta có

$$\begin{aligned}
\text{VT} - \text{VP} &= (n-1)x^n + y^n - nx^{n-1}y \\
&= nx^{n-1}(x-y) + (y^n - x^n) \\
&= (x-y)\left[nx^{n-1} - (x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1})\right] \\
&= (x-y)\left[x^{n-2}(x-y) + x^{n-3}(x^2-y^2) + \cdots + (x^{n-1} - y^{n-1})\right] \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Nếu đặt $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ thì việc sử dụng đánh giá (1) để đưa bài toán về chứng minh bất đẳng thức (2) tương đương với việc chứng minh

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqslant f\left(\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}, \ldots, \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}, a_n\right) \geqslant 0.$$

Rõ ràng, về bản chất, đây chính là một đánh giá dồn biến (dồn $n-1$ biến về trung bình nhân). Điểm thú vị ở đây chính là thay vì phải đi tìm các đánh giá trung gian thích hợp, ta sử dụng chính bất đẳng thức cần chứng minh tại trường hợp trước của nó để làm đánh giá trung gian dồn biến cho trường hợp sau. Đây cũng là tư tưởng cốt lõi của phương pháp dồn biến bằng quy nạp.

Bài toán 2 (Bất đẳng thức Ky Fan). *Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt[n]{\frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n - x_1 - x_2 - \cdots - x_n}.$$

Lời giải. Dễ thấy $P(1)$ đúng. Bây giờ, giả sử $P(n-1)$ $(n \geqslant 2)$ đúng. Ta sẽ chứng minh $P(n)$ cũng đúng. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x_n = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Đặt

$$t = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$$

thì ta có $0 \leqslant t \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2}$. Theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\sqrt[n-1]{\frac{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_{n-1})}} \leqslant \frac{t}{1-t}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_{n-1})} \leqslant \left(\frac{t}{1-t}\right)^{n-1}.$$

[1] Từ các bài toán sau, ta mặc định $P(n)$ là mệnh đề cần chứng minh.

Như vậy, để chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng, ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt[n]{\left(\frac{t}{1-t}\right)^{n-1}\left(\frac{x_n}{1-x_n}\right)} \leqslant \frac{(n-1)t+x_n}{n-(n-1)t-x_n}.$$

Rõ ràng bất đẳng thức này đúng nếu $t=0$. Do đó, ta chỉ cần xét trường hợp $x_n \geqslant t > 0$. Khi đó, bất đẳng thức trên có thể viết được dưới dạng

$$\sqrt[n]{\left(\frac{1-t}{t}\right)^{n-1}\left(\frac{1-x}{x}\right)} \geqslant \frac{n-(n-1)t-x_n}{(n-1)t+x_n},$$

hay

$$\sqrt[n]{\left(\frac{1-t}{t}\right)^{n-1}\left(\frac{1-x}{x}\right)}+1 \geqslant \frac{n}{(n-1)t+x_n}.$$

Một cách tương đương, ta phải chứng minh

$$\left[\sqrt[n]{\left(\frac{1-t}{t}\right)^{n-1}\left(\frac{1-x}{x}\right)}+1\right]\left[(n-1)t+x_n\right] \geqslant n.$$

Đặt $a=\sqrt[n]{\frac{1-t}{t}}$ và $b=\sqrt[n]{\frac{1-x}{x}}$ thì do $t,\ x \leqslant \frac{1}{2}$ nên $a \geqslant b \geqslant 1$. Bất đẳng thức được viết lại thành

$$(a^{n-1}b+1)\left(\frac{n-1}{a^n+1}+\frac{1}{b^n+1}\right) \geqslant n,$$

hay

$$(a^{n-1}b+1)\left[a^n+(n-1)b^n+n\right] \geqslant n(a^n+1)(b^n+1).$$

Sau khi thu gọn, ta cần chứng minh

$$a^{n-1}b\left[a^n+(n-1)b^n-nab^{n-1}\right]-\left[(n-1)a^n+b^n-na^{n-1}b\right] \geqslant 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{VT}-\mathrm{VP} &\geqslant a^{n-1}b\left[a^n+(n-1)b^n-nab^{n-1}\right]-ab^{n-1}\left[(n-1)a^n+b^n-na^{n-1}b\right]\\
&= ab(a^{2n-2}-b^{2n-2})-(n-1)a^{n-1}b^{n-1}(a^2-b^2)\\
&= ab(a^2-b^2)\left[a^{2n-4}+a^{2n-6}b^2+\cdots+b^{2n-4}-(n-1)a^{n-2}b^{n-2}\right].
\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM cho $n-1$ số, ta có

$$a^{2n-4}+a^{2n-6}b^2+\cdots+b^{2n-4} \geqslant (n-1)a^{n-2}b^{n-2}.$$

Từ đó, với chú ý $a \geqslant b$, ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bất đẳng thức Ky Fan có thể được chứng minh trực tiếp khá đơn giản bằng bất đẳng thức Jensen (chỉ cần chú ý hàm $f(x)=\ln\frac{x}{1-x}$ lõm trên $\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$). Ở đây, chúng tôi muốn giới thiệu cách tiếp cận sơ cấp, sử dụng các biến đổi thuần túy cho bất đẳng thức này. Mục đích chính là để minh họa cho ý tưởng dồn biến bằng quy nạp (cụ thể là dồn biến về trung bình cộng).

Với các bài toán không có điều kiện ràng buộc giữa các biến như hai bài toán trên thì cách dồn biến khá linh hoạt, lúc thì ta có thể dồn biến về trung bình cộng, lúc thì trung bình nhân, làm sao để đơn giản nhất có thể là được. Tuy nhiên, với các bài toán có điều kiện thì ta không được tự do như thế, phép dồn biến phải bám vào điều kiện giả thiết. Vậy lúc này, ta sẽ sử dụng quy nạp như thế nào? Mời bạn đọc cùng theo dõi ví dụ tiếp sau đây

Bài toán 3. *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực dương có tổng bằng n. Chứng minh rằng*

$$(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) + na_1a_2\cdots a_n \geqslant n^2.$$

Lời giải. Rõ ràng $P(1)$ đúng. Giả sử $P(n)$ $(n \geqslant 1)$ đúng, ta sẽ chứng minh $P(n+1)$ cũng đúng. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_{n+1} = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$. Đặt $t = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ và $b_i = \frac{a_i}{t}$ với $i = 1, 2, \ldots, n$ thì ta có $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = n$. Do đó, theo giả thiết quy nạp,

$$(n-1)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{n-1}^2) + nb_1b_2\cdots b_n \geqslant n^2.$$

Bây giờ, chuyển các biến trở lại theo a_i, ta được

$$\frac{(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)}{t^2} + \frac{na_1a_2\cdots a_n}{t^n} \geqslant n^2,$$

hay tương đương

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant \frac{n^2}{n-1}t^2 - \frac{n}{(n-1)t^{n-2}}a_1a_2\cdots a_n. \tag{1}$$

Như vậy, để chứng minh $P(n+1)$ đúng, ta sẽ chứng minh

$$n\left[\frac{n^2}{n-1}t^2 - \frac{n}{(n-1)t^{n-2}}a_1a_2\cdots a_n + a_{n+1}^2\right] + (n+1)a_1a_2\cdots a_na_{n+1} \geqslant (n+1)^2,$$

hay

$$a_1a_2\cdots a_n\left[(n+1)a_{n+1} - \frac{n^2}{(n-1)t^{n-2}}\right] \geqslant (n+1)^2 - \frac{n^3}{n-1}t^2 - na_{n+1}^2. \tag{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$t^na_{n+1} \leqslant \left(\frac{nt + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} = 1,$$

suy ra $t^{n-2}a_{n+1} \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant 1 < \frac{n^2}{n-1}$ (chú ý rằng $t \geqslant 1 \geqslant a_{n+1}$). Do đó

$$(n+1)a_{n+1} - \frac{n^2}{(n-1)t^{n-2}} < 0.$$

Lại có $a_1a_2\cdots a_n \leqslant t^n$ (theo bất đẳng thức AM-GM) nên

$$a_1a_2\cdots a_n\left[(n+1)a_{n+1} - \frac{n^2}{(n-1)t^{n-2}}\right] \geqslant t^n\left[(n+1)a_{n+1} - \frac{n^2}{(n-1)t^{n-2}}\right].$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$t^n \left[(n+1)a_{n+1} - \frac{n^2}{(n-1)t^{n-2}} \right] \geqslant (n+1)^2 - \frac{n^3}{n-1}t^2 - na_{n+1}^2,$$

hay

$$n^2t^2 + na_{n+1}^2 + (n+1)t^n a_{n+1} \geqslant (n+1)^2.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$n^2t^2 + na_{n+1}^2 + (n+1)t^n a_{n+1} \geqslant (nt + a_{n+1})^2,$$

hay

$$(n-1)a_{n+1} + (n+1)t^n \geqslant 2nt.$$

Thay $a_{n+1} = n + 1 - nt$ vào và biến đổi, ta đưa được bất đẳng thức về chứng minh

$$t^n + n - 1 \geqslant nt.$$

Bất đẳng thức này đúng theo bất đẳng thức AM-GM cho n số (áp dụng với t^n và $n-1$ số 1). □

Nhận xét. Ở bài này, để sử dụng được giả thiết quy nạp, ta cần tạo ra n biến có tổng bằng n. Một ý tưởng là đặt ẩn t là trung bình cộng của các số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ rồi đặt $b_i = \frac{a_i}{t}$ thì sẽ có $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = n$. Từ đó mà thiết lập được bất đẳng thức (1).

Bất đẳng thức (1) là một đánh giá trung gian quan trọng trong quá trình giải bài này. Nó giúp đưa bài toán về xét (2), một bất đẳng thức mà việc dồn biến dễ hơn ban đầu rất nhiều. Ta cũng có thể khá yên tâm khi sử dụng (1) vì đánh giá trung gian này "bám theo" dấu bằng $a_1 = \cdots = a_n$, cũng tương thích với ý tưởng dồn n biến về bằng nhau và bằng trung bình cộng t.

Ở đây, xin được nói thêm về nguồn gốc của bài toán này. Gốc của nó là một bài toán được đề xuất trên tạp chí Kvant (tạp chí Toán Lý của Nga) như sau: *Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$ là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + n\sqrt[n]{x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2} \geqslant (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2. \tag{3}$$

Đây là một bất đẳng thức thuần nhất, do đó ta có thể chuẩn hóa $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$. Lúc này, ta cũng có $x_1x_2\cdots x_n \leqslant 1$ nên $\sqrt[n]{x_1^2x_2^2\cdots x_n^2} \geqslant x_1x_2\cdots x_n$. Như vậy, một ý tưởng để tiếp cận bất đẳng thức (3) là xét bất đẳng thức chặt hơn

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + nx_1x_2\cdots x_n \geqslant n^2.$$

Đây chính là cách mà bài toán này được đặt ra.

Bài toán 4. *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ là các số thực có tích bằng 1. Chứng minh rằng*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - n \geqslant \frac{2n}{\sqrt[n]{(n-1)^{n-1}}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n).$$

Lời giải. Rõ ràng ta chỉ cần xét $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ là đủ (vì ta có thể thay $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bởi $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|$, giả thiết và vế trái vẫn giữ nguyên, còn vế phải tăng lên). Để cho đơn giản trong các biến đổi tính toán, ta đặt

$$k_n = \frac{2n}{\sqrt[n]{(n-1)^{n-1}}}.$$

Xét $P(2)$, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$a_1^2 + a_2^2 - 2 \geqslant 4(a_1 + a_2 - 2).$$

Do $a_1^2 + a_2^2 - 2 = (a_1 + a_2)^2 - 2a_1a_2 - 2 = (a_1 + a_2)^2 - 4$ nên

$$\text{VT} - \text{VP} = (a_1 + a_2 - 2)^2 \geqslant 0.$$

Do đó $P(2)$ đúng. Bây giờ, giả sử $P(n-1)$ $(n \geqslant 3)$ đúng, ta sẽ chứng minh $P(n)$ cũng đúng.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a_n = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Đặt $t = \sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}$ thì ta có $t^{n-1}a_n = 1$ và $a_n \leqslant 1 \leqslant t$. Bây giờ, đặt $b_i = \frac{a_i}{t}$ với $t = 1, 2, \ldots, n-1$ thì ta có $b_1b_2\cdots b_{n-1} = 1$ nên theo giả thiết quy nạp,

$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{n-1}^2 - n + 1 \geqslant k_{n-1}(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} - n + 1).$$

Từ đó suy ra

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 - (n-1)t^2 \geqslant k_{n-1}t\big[a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} - (n-1)t\big],$$

hay

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 \geqslant k_{n-1}t\big[a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} - (n-1)t\big] + (n-1)t^2.$$

Như vậy, để chứng minh $P(n)$ đúng, ta sẽ chứng minh

$$k_{n-1}t\big[a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} - (n-1)t\big] + (n-1)t^2 + a_n^2 - n \geqslant k_n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n),$$

hay

$$(k_{n-1}t - k_n)\big[a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} - (n-1)t\big] + (n-1)t^2 + a_n^2 - n \geqslant k_n\big[(n-1)t + a_n - n\big].$$

Chú ý rằng hàm $f(x) = \frac{2x}{(x-1)^{\frac{x-1}{x}}}$ nghịch biến trên $(2, +\infty)$ nên $k_{n-1}t \geqslant k_{n-1} \geqslant k_n$. Lại có $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \geqslant (n-1)t$ (theo bất đẳng thức AM-GM) nên ta chỉ cần chứng minh

$$(n-1)t^2 + a_n^2 - n \geqslant k_n\big[(n-1)t + a_n - n\big].$$

Thay $a_n = \frac{1}{t^{n-1}}$, ta phải chứng minh

$$(n-1)t^2 + \frac{1}{t^{2n-2}} - n - k_n\left[(n-1)t + \frac{1}{t^{n-1}} - n\right] \geqslant 0.$$

Đặt $g(t)$ là vế trái của bất đẳng tên, ta có

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2(n-1)t - \frac{2(n-1)}{t^{2n-1}} - k_n(n-1)\left(1 - \frac{1}{t^n}\right) \\ &= \frac{(n-1)(t^n - 1)(2t^n + 2 - k_n)}{t^{2n-1}}. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM,

$$k_n = \frac{2n}{\sqrt[n]{(n-1)^{n-1}}} \leqslant 2\left[1 + (n-1)\cdot\frac{1}{n-1}\right] = 4 \leqslant 2t^n + 2.$$

Do đó $g'(t) \geqslant 0$. Suy ra $g(t)$ là hàm đồng biến, từ đây ta có $g(t) \geqslant g(1) = 0$. Bất đẳng thức đã cho được chứng minh xong. □

Bài toán 5. *Cho các số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ thỏa mãn*

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}=r\leqslant\frac{n-1}{\left(n+\sqrt{n-1}\right)^2}.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-a_1}+\frac{1}{1-a_2}+\cdots+\frac{1}{1-a_n}\leqslant\frac{n}{1-\sqrt{r}}.$$

Lời giải. Ta chứng minh được $P(2)$ đúng và cách chứng minh tương tự như bất đẳng thức (1) được chứng minh bên dưới. Bây giờ, giả sử $P(n)$ $(n \geqslant 2)$ đúng, ta sẽ chứng minh $P(n+1)$ cũng đúng. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1}$. Khi đó, ta có

$$x=\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}\leqslant\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n+1}^2}{n+1}\leqslant\frac{n}{\left(n+1+\sqrt{n}\right)^2}.$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{n}{\left(n+1+\sqrt{n}\right)^2}\leqslant\frac{n-1}{\left(n+\sqrt{n-1}\right)^2}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{n}{n-1}}\left(n+\sqrt{n-1}\right)\leqslant n+1+\sqrt{n},$$

hay

$$n\sqrt{\frac{n}{n-1}}\leqslant n+1.$$

Bất đẳng thức cuối đúng do ta có $(n+1)^2(n-1)-n^3=n^2-n-1>0$. Như vậy, ta có

$$x=\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}\leqslant\frac{n-1}{\left(n+\sqrt{n-1}\right)^2}$$

nên theo giả thiết quy nạp,

$$\frac{1}{1-a_1}+\frac{1}{1-a_2}+\cdots+\frac{1}{1-a_n}\leqslant\frac{n}{1-\sqrt{x}}.$$

Để chứng minh $P(n+1)$, ta cần chứng minh

$$\frac{n}{1-\sqrt{x}}+\frac{1}{1-a_{n+1}}\leqslant\frac{n+1}{1-\sqrt{r}},\tag{1}$$

hay

$$\frac{1}{1-a_{n+1}}-\frac{1}{1-\sqrt{x}}\leqslant(n+1)\left(\frac{1}{1-\sqrt{r}}-\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right).$$

Một cách tương đương, ta phải chứng minh

$$\left(1-\sqrt{r}\right)\left(a_{n+1}-\sqrt{x}\right)\leqslant(n+1)(1-a_{n+1})\left(\sqrt{r}-\sqrt{x}\right).$$

Chú ý rằng

$$(n+1)\left(\sqrt{r}-\sqrt{x}\right)=\frac{(n+1)r-(n+1)x}{\sqrt{x}+\sqrt{r}}=\frac{a_{n+1}^2-x}{\sqrt{x}+\sqrt{r}}$$

nên bất đẳng thức trên đương đương với

$$\left(1-\sqrt{r}\right)\left(a_{n+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{r}\right)\leqslant\left(1-a_{n+1}\right)\left(a_{n+1}-\sqrt{x}\right)\left(a_{n+1}+\sqrt{x}\right).$$

Nếu $a_{n+1}=\sqrt{x}$ thì bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Xét trường hợp $a_{n+1}>\sqrt{x}$, rút gọn hai vế cho $a_{n+1}-\sqrt{x}$, ta phải chứng minh

$$\left(1-\sqrt{r}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{r}\right)\leqslant\left(1-a_{n+1}\right)\left(a_{n+1}+\sqrt{x}\right),$$

hay

$$\left(a_{n+1}-\sqrt{r}\right)\left(1-a_{n+1}-\sqrt{r}-\sqrt{x}\right)\geqslant 0.$$

Chú ý rằng $a_{n+1}\geqslant\sqrt{r}$. Ngoài ra, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta cũng có

$$\begin{aligned}\sqrt{r}+a_{n+1}+\sqrt{x}&\leqslant\sqrt{r}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(a_{n+1}^2+nx\right)}=\frac{n+1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\sqrt{r}\\&\leqslant\frac{n+1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{n}{\left(n+1+\sqrt{n}\right)^2}}\leqslant 1.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. □

Nhận xét. Trong trường hợp $n=5$ và $r=\frac{4}{49}$, ta thu được bất đẳng thức đẹp và khó sau (đã được điều chỉnh lại tỉ lệ các biến số): *Cho a, b, c, d, e là các số dương thỏa mãn có tổng bình phương bằng 5. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{7-2a}+\frac{1}{7-2b}+\frac{1}{7-2c}+\frac{1}{7-2d}+\frac{1}{7-2e}\leqslant 1.$$

Dấu bằng xảy ra tại hai trường hợp: tất cả các số cùng bằng 1 và 4 số bằng $\frac{1}{2}$, số còn lại bằng 2.

Rõ ràng nếu phải "đối mặt" trường hợp riêng trên, chúng ta sẽ gặp khá nhiều khó khăn. Tuy nhiên, nếu biết bài toán tổng quát thì mọi việc sẽ dễ dàng hơn.

Tư duy tổng quát hóa bài toán rất cần thiết trong những trường hợp như thế này. Ta hãy cùng xét một ví dụ khác như sau

Bài toán 6. *Giả sử a_1, a_2, $\ldots$, a_n là các số dương sao cho $a_1a_2\cdots a_n=1$. Chứng minh rằng*

$$(1+a_1^2)(1+a_2^2)\cdots(1+a_n^2)\leqslant\frac{2^n}{n^{2n-2}}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{2n-2}.$$

Lời giải. Ta sẽ chứng minh kết quả tổng quát hơn: *Cho a_1, a_2, $\ldots$, a_n là các số thực dương có tích bằng 1. Khi đó, với mọi $k_n\in(0,\ 1]$, ta đều có*

$$(k_n+a_1^2)(k_n+a_2^2)\cdots(k_n+a_n^2)\leqslant\frac{(k_n+1)^n}{n^{2n-2}}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{2n-2}.$$

Giả sử $P(n)$ đúng, ta sẽ chứng minh $P(n+1)$ cũng đúng, tức ta phải chứng minh

$$(k_{n+1}+a_1^2)\cdots(k_{n+1}+a_n^2)(k_{n+1}+a_{n+1}^2) \leqslant \frac{(k_{n+1}+1)^{n+1}}{(n+1)^{2n}}(a_1+\cdots+a_n+a_{n+1})^{2n}$$

với mọi $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} > 0$ sao cho $a_1a_2\cdots a_{n+1} = 1$ và $k_n \in (0, 1]$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{n+1}$ và đặt $t = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ thì $t \geqslant 1$. Lại đặt tiếp $b_i = \frac{a_i}{t}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$. Với phép đặt này, ta có $b_1b_2\cdots b_n = 1$ nên áp dụng giả thiết quy nạp cho $k_n' = \frac{k_{n+1}}{t^2} \leqslant k_{n+1} \leqslant 1$, ta được

$$(k_n'+b_1^2)\cdots(k_n'+b_n^2) \leqslant \frac{(k_n'+1)^n}{n^{2n-2}}(b_1+\cdots+b_n)^{2n-2}.$$

Từ đây, ta suy ra

$$(k_{n+1}+a_1^2)\cdots(k_{n+1}+a_n^2) \leqslant \frac{(k_{n+1}+t^2)^n}{n^{2n-2}t^{2n-2}}(a_1+\cdots+a_n)^{2n-2}.$$

Đặt $x = a_1+\cdots+a_n \geqslant nt \geqslant na_{n+1}$. Sử dụng bất đẳng thức trên, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{(k_{n+1}+t^2)^n}{n^{2n-2}t^{2n-2}}x^{2n-2}(k_{n+1}+a_{n+1}^2) \leqslant \frac{(k_{n+1}+1)^{n+1}}{(n+1)^{2n}}(x+a_{n+1})^{2n},$$

hay tương đương

$$\frac{(k_{n+1}+t^2)^n}{n^{2n-2}t^{2n-2}}(k_{n+1}+a_{n+1}^2) \leqslant \frac{(k_{n+1}+1)^{n+1}}{(n+1)^{2n}}\left[\frac{(x+a_{n+1})^n}{x^{n-1}}\right]^2.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{(x+a_{n+1})^n}{x^{n-1}}$, ta có $f'(x) = \frac{(x+a_{n+1})^{n-1}[x-(n-1)a_{n+1}]}{x^n} > 0$ nên $f(x)$ là hàm đồng biến với mọi $x \geqslant nt$, vì thế

$$f(x) \geqslant f(nt) = \frac{(nt+a_{n+1})^n}{(nt)^{n-1}}.$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{(k_{n+1}+t^2)^n}{n^{2n-2}t^{2n-2}}(k_{n+1}+a_{n+1}^2) \leqslant \frac{(k_{n+1}+1)^{n+1}}{(n+1)^{2n}}\left[\frac{(nt+a_{n+1})^n}{(nt)^{n-1}}\right]^2,$$

hay tương đương

$$(k_{n+1}+t^2)^n(k_{n+1}+a_{n+1}^2) \leqslant \frac{(k_{n+1}+1)^{n+1}}{(n+1)^{2n}}(nt+a_{n+1})^{2n}.$$

Thay $a_{n+1} = \frac{1}{t^n}$ vào rồi lấy logarith nêpe hai vế, ta có thể viết lại bất đẳng thức cuối dưới dạng

$$g(t) = \ln\frac{(k_{n+1}+1)^{n+1}}{(n+1)^{2n}} + 2n\ln\left(nt+\frac{1}{t^n}\right) - n\ln(k_{n+1}+t^2) - \ln\left(k_{n+1}+\frac{1}{t^{2n}}\right) \geqslant 0.$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{2n\left(n - \frac{n}{t^{n+1}}\right)}{nt + \frac{1}{t^n}} - \frac{2nt}{t^2 + k_{n+1}} + \frac{\frac{2n}{t^{2n+1}}}{k_{n+1} + \frac{1}{t^{2n}}} \\
&= \frac{2n}{t}\left[\frac{n(t^{n+1}-1)}{nt^{n+1}+1} - \frac{t^2}{t^2+k_{n+1}} + \frac{1}{k_{n+1}t^{2n}+1}\right] \\
&= \frac{2n(t^{n+1}-1)}{t}\left[\frac{n}{nt^{n+1}+1} - \frac{k_{n+1}(t^{n+1}+1)}{(t^2+k_{n+1})(k_{n+1}t^{2n}+1)}\right].
\end{aligned}
$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{k_{n+1}(t^{n+1}+1)}{(t^2+k_{n+1})(k_{n+1}t^{2n}+1)} \leqslant \frac{1}{t^{n+1}+1} \leqslant \frac{n}{nt^{n+1}+1},$$

nên với $t \geqslant 1$, ta dễ thấy $g'(t) \geqslant 0$, suy ra $g(t)$ là hàm đồng biến trên $[1, +\infty)$. Và như thế, ta có $g(t) \geqslant g(1) = 0$, $\forall t \geqslant 1$. Như vậy, nếu $P(n)$ đúng thì $P(n+1)$ cũng đúng. Do đó, để hoàn tất phép chứng minh, ta chỉ cần chứng minh $P(2)$ đúng, hay

$$(k_2 + a_1^2)(k_2 + a_2^2) \leqslant \frac{(k_2+1)^2}{4}(a_1+a_2)^2.$$

Thay $a_2 = \frac{1}{a_1}$ vào rồi biến đổi tương đương, ta thấy bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{(a_1^2-1)^2(k_2-1)^2}{4a_1^2} \geqslant 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh. □

Ta sẽ kết lại phần này bằng bài toán bất đẳng thức hay và khó sau

Bài toán 7. *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. Chứng minh rằng với mọi $k \geqslant 0$, ta đều có*

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^{k+n} + a_1a_2\cdots a_n\sum_{i=1}^{n} a_i^k \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{k+n-1}\right).$$

Lời giải. Rõ ràng $P(1)$ đúng. Giả sử $P(n)$ đúng, ta sẽ chứng minh $P(n+1)$ cũng đúng, tức là

$$n\sum_{i=1}^{n+1} a_i^{k+n+1} + a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} a_i^k \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^{k+n}\right).$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a_{n+1} = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$. Do bất đẳng thức trên có dạng thuần nhất nên ta có thể chuẩn hóa $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$, khi đó ta cũng có $a_{n+1} \leqslant 1$. Bất đẳng thức được viết lại dưới dạng

$$n\sum_{i=1}^{n+1} a_i^{k+n+1} + a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} a_i^k \geqslant (n + a_{n+1})\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^{k+n}\right),$$

hay

$$n\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+n+1}+a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_i^k+a_1a_2\cdots a_na_{n+1}^{k+1}+(n-1)a_{n+1}^{k+n+1}$$
$$\geqslant na_{n+1}^{k+n}+a_{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+n}+n\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+n}.$$

Sử dụng giả thiết quy nạp, ta có

$$n\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+n}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+n}\right)\leqslant(n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+n+1}+a_1a_2\cdots a_n\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+1}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+n+1}+a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_i^k+a_1a_2\cdots a_na_{n+1}^{k+1}+(n-1)a_{n+1}^{k+n+1}$$
$$\geqslant na_{n+1}^{k+n}+a_{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+n}+a_1a_2\cdots a_n\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+1},$$

hay

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+n+1}+a_1a_2\cdots a_n\left(a_{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_i^k-\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+1}\right)-a_{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+n}$$
$$+a_{n+1}^{k+1}\left[a_1a_2\cdots a_n+(n-1)a_{n+1}^n-na_{n+1}^{n-1}\right]\geqslant 0. \tag{1}$$

Do $a_{n+1}\sum_{i=1}^n a_i^k-\sum_{i=1}^n a_i^{k+1}=\sum_{i=1}^n a_i^k(a_{n+1}-a_i)\leqslant 0$ và $a_1a_2\cdots a_n\leqslant 1$ nên

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+n+1}+a_1a_2\cdots a_n\left(a_{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_i^k-\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+1}\right)-a_{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+n}\\
&\quad\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+n+1}+a_{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_i^k-\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+1}-a_{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+n}\\
&\quad=\sum_{i=1}^{n}(a_i^{k+n+1}-a_i^{k+1})+a_{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_i^k-a_{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+n}\\
&\quad\geqslant\sum_{i=1}^{n}(a_i^{k+n}-a_i^k)+a_{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_i^k-a_{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+n}\\
&\quad=(1-a_{n+1})\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+n}-\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right).
\end{aligned}$$

(Đánh giá thứ hai trong dãy biến đổi trên đúng do ta có $x^{k+n+1}-x^{k+1}\geqslant x^{k+n}-x^k$ với mọi $x>0$.). Lại có, theo các bất đẳng thức Chebyshev và bất đẳng thức trung bình lũy thừa thì

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+n}\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^n\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)\geqslant\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}\right)^n\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i^k.$$

Do đó

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{k+n+1} + a_1 a_2 \cdots a_n \left(a_{n+1} \sum_{i=1}^{n} a_i^k - \sum_{i=1}^{n} a_i^{k+1} \right) - a_{n+1} \sum_{i=1}^{n} a_i^{k+n} \geqslant 0. \quad (2)$$

Mặt khác, ta cũng có

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \cdots a_n &= [a_{n+1} + (a_1 - a_{n+1})][a_{n+2} + (a_2 - a_{n+1})] \cdots [a_{n+1} + (a_n - a_{n+1})] \\ &\geqslant a_{n+1}^n + a_{n+1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{n+1}) = n a_{n+1}^{n-1} - (n-1) a_{n+1}^n, \end{aligned}$$

suy ra

$$a_1 a_2 \cdots a_n + (n-1) a_{n+1}^n - n a_{n+1}^{n-1} \geqslant 0. \quad (3)$$

Kết hợp (2) và (3), ta thu được ngay bất đẳng thức (1). Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán trên được tổng quát từ bài toán sau được đề nghị bởi Suranyi trong kỳ thi Miklos Schweitzer năm 1968: *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số dương. Chứng minh rằng*

$$(n-1)(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n) + n a_1 a_2 \cdots a_n \geqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \cdots + a_n^{n-1}).$$

2. Các bài toán dồn biến về biên

Bây giờ, chúng ta sẽ cùng xét các ứng dụng quy nạp trong các bài toán dồn biến về biên. Ở đây, xin được giới thiệu cùng bạn đọc một cách dồn biến về biên độc đáo (dựa trên đạo hàm) như sau

Bài toán 8. *Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 4)$ là các số thực không âm. Chứng minh rằng*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \geqslant 4(x_1 x_2 + x_2 x_3 + \cdots + x_n x_1).$$

Lời giải. Xét $P(4)$, bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \geqslant 4(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_1),$$

hay

$$(x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2 \geqslant 0.$$

Do đó $P(4)$ đúng. Giả sử $P(n)$ $(n \geqslant 4)$ đúng, ta sẽ chứng minh $P(n+1)$ cũng đúng. Không mất tính tổng quát giả sử $x_{n+1} = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$. Đặt

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i \right)^2 - 4 \sum_{i=1}^{n+1} x_i x_{i+1}.$$

Xét hàm số $f(t) = F(t + x_1, t + x_2, \ldots, t + x_{n+1})$ với $t \geqslant -x_{n+1}$, ta có

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2(n+1) \sum_{i=1}^{n+1} (t + x_i) - 4 \left[\sum_{i=1}^{n+1} (x_i + t) + \sum_{i=1}^{n+1} (x_{i+1} + t) \right] \\ &= 2(n-3) \sum_{i=1}^{n+1} (x_i + t) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến, từ đó suy ra $f(0) \geqslant f(-x_{n+1})$, hay

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \geqslant F(x_1 - x_{n+1}, x_2 - x_{n+1}, \ldots, x_n - x_{n+1}, 0).$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh được $F(y_1, y_2, \ldots, y_n, 0) \geqslant 0$ với $y_i = x_i - x_{n+1} \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, hay

$$(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)^2 \geqslant 4(y_1y_2 + y_2y_3 + \cdots + y_{n-1}y_n).$$

Áp dụng giả thiết quy nạp, ta có

$$\text{VT} \geqslant 4(y_1y_2 + y_2y_3 + \cdots + y_{n-1}y_n + y_ny_1) \geqslant \text{VP}.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Nhận xét. Phương pháp đánh giá $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant f(x_1 - t, x_2 - t, \ldots, x_n - t)$ với t thích hợp nào đó được gọi là phương pháp dồn biến toàn miền. Phương pháp này thích hợp để sử dụng giải quyết các bất đẳng thức đa thức dạng thuần nhất (không nên dùng cho các bất đẳng thức có điều kiện ràng buộc giữa các biến vì bộ số được dồn về thường sẽ không thỏa mãn điều kiện ràng buộc đó). Đây là một phương pháp đẩy biến về biên khá đặc biệt, chúng ta hãy cùng xem xét tiếp các ứng dụng của nó qua ví dụ tiếp sau đây

Bài toán 9. *Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 3)$ là các số thực không âm. Chứng minh rằng*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geqslant \min\left\{\frac{n}{3}, \frac{8}{3}\right\} \sum_{i=1}^{n} x_i(x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}).$$

Lời giải. Với $n = 3$, ta có dấu đẳng thức. Với $n = 4$, ta phải chứng minh

$$\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2 \geqslant \frac{4}{3} \sum_{i=1}^{4} x_i(x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}),$$

hay

$$3\sum_{i=1}^{4} x_i^2 \geqslant 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} x_ix_j.$$

Bất đẳng thức này đúng do ta có

$$2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} x_ix_j \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} (x_i^2 + x_j^2) = 3\sum_{i=1}^{4} x_i^2.$$

Với $n = 5$, ta phải chứng minh

$$3\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2 \geqslant 5\sum_{i=1}^{5} x_i(x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}),$$

hay

$$3\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + \sum_{i=1}^{5} x_ix_{i+1} - 4\sum_{i=1}^{5} x_ix_{i+2} \geqslant 0.$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
2\text{VT} &= 6\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{5} x_i x_{i+1} - 8\sum_{i=1}^{5} x_i x_{i+2} \\
&= 4\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + \sum_{i=1}^{5}(x_i + x_{i+1})^2 - 4\sum_{i=1}^{5} x_i(x_{i+2} + x_{i+3}) \\
&= \sum_{i=1}^{5}(2x_i - x_{i+2} - x_{i+3})^2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Với $n = 6$, ta phải chứng minh

$$\left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right)^2 \geqslant 2\sum_{i=1}^{6} x_i(x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}),$$

hay

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{6} x_i x_{i+3}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$(x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2 \geqslant 0.$$

Với $n = 7$, ta phải chứng minh

$$3\left(\sum_{i=1}^{7} x_i\right)^2 \geqslant 7\sum_{i=1}^{7} x_i(x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}),$$

hay

$$3\sum_{i=1}^{7} x_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{7} x_i x_{i+1} + \sum_{i=1}^{7} x_i x_{i+2} + \sum_{i=1}^{7} x_i x_{i+3}.$$

Bất đẳng thức này đúng do ta có

$$\text{VP} \leqslant \sum_{i=1}^{7} \frac{x_i^2 + x_{i+1}^2}{2} + \sum_{i=1}^{7} \frac{x_i^2 + x_{i+2}^2}{2} + \sum_{i=1}^{7} \frac{x_i^2 + x_{i+3}^2}{2} = 3\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = \text{VT}.$$

Với $n = 8$, ta phải chứng minh

$$3\left(\sum_{i=1}^{8} x_i\right)^2 \geqslant 8\sum_{i=1}^{8} x_i(x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}),$$

hay

$$3\sum_{i=1}^{8} x_i^2 + 3\sum_{i=1}^{8} x_i x_{i+4} - 2\sum_{i=1}^{8} x_i x_{i+1} - 2\sum_{i=1}^{8} x_i x_{i+2} - 2\sum_{i=1}^{8} x_i x_{i+3} \geqslant 0.$$

Đặt $a = x_1 + x_5$, $b = x_2 + x_6$, $c = x_3 + x_7$ và $d = x_4 + x_8$. Khi đó, dễ thấy

$$2\sum_{i=1}^{8} x_i x_{i+1} + 2\sum_{i=1}^{8} x_i x_{i+2} + 2\sum_{i=1}^{8} x_i x_{i+3} = 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

và

$$3\sum_{i=1}^{8} x_i^2 + 3\sum_{i=1}^{8} x_i x_{i+4} = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geqslant 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd).$$

Đây chính là trường hợp $n = 4$ ở trên. Bây giờ, giả sử bất đẳng thức đúng với $n \geqslant 8$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $n + 1$, tức là

$$3\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^2 \geqslant 2\sum_{i=1}^{n+1} x_i(x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}).$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_{n+1} = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$. Đặt

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 3\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{n+1} x_i(x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}).$$

Xét hàm số $f(t) = F(t + x_1, t + x_2, \ldots, t + x_{n+1})$ với $t \geqslant -x_{n+1}$, ta có

$$\begin{aligned} f'(t) &= 6(n+1)\sum_{i=1}^{n+1}(x_i + t) - 8\sum_{i=1}^{n+1}(x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} + 3t) - 24\sum_{i=1}^{n+1}(x_i + t) \\ &= 6(n-7)\sum_{i=1}^{n+1}(x_i + t) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến, suy ra $f(0) \geqslant f(-x_{n+1})$, hay

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \geqslant F(x_1 - x_{n+1}, x_2 - x_{n+1}, \ldots, x_n - x_{n+1}, 0).$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh được $F(y_1, y_2, \ldots, y_n, 0) \geqslant 0$ với $y_i = x_i - x_{n+1} \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, hay

$$\frac{3}{8}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n-3} y_i(y_{i+1} + y_{i+2} + y_{i+3}) + y_{n-2}(y_{n-1} + y_n) + y_{n-1}(y_n + y_1) + y_n(y_1 + y_2).$$

Sử dụng giả thiết quy nạp, ta có

$$\text{VP} \leqslant \sum_{i=1}^{n} y_i(y_{i+1} + y_{i+2} + y_{i+3}) \leqslant \frac{3}{8}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Một vấn đề thú vị dành cho bạn đọc là: Dấu đẳng thức xảy ra khi nào? Đây cũng chính là nội dung của đề kiểm tra trường Xuân Toán học miền Nam năm 2013.

Ngoài cách dồn biến như trên, ta cũng có thể sử dụng dồn biến theo lối cổ điển kết hợp với quy nạp để xử lý các bất đẳng thức tổng quát. Chúng ta hãy cùng xem xét các ví dụ sau

Bài toán 10. *Cho các số không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ có tổng bằng 1. Chứng minh rằng*

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^4\sum_{j\neq i}a_j\right) \leqslant \frac{1}{12}.$$

Lời giải. Xét $P(2)$, bất đẳng thức cần chứng trở thành

$$a_1^4a_2 + a_2^4a_1 \leqslant \frac{1}{12}$$

với $a_1 + a_2 = 1$, hay

$$a_1a_2(a_1^3 + a_2^3) \leqslant \frac{1}{12}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\text{VT} = \frac{1}{3}\cdot 3a_1a_2(a_1+a_2)\cdot(a_1^3+a_2^3) \leqslant \frac{1}{12}\left[3a_1a_2(a_1+a_2)+a_1^3+a_2^3\right]^2 = \frac{1}{12}.$$

Do đó $P(2)$ đúng. Giả sử $P(n)$ $(n \geqslant 2)$ đúng, ta sẽ chứng minh $P(n+1)$ cũng đúng, hay

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(a_i^4\sum_{j\neq i}a_j\right) \leqslant \frac{1}{12}$$

với $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} \geqslant 0$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = 1$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{n-1} \geqslant a_n \geqslant a_{n+1}$. Bất đẳng thức trên có thể viết lại dưới dạng

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(a_i^4\sum_{j\neq i}a_j\right) + a_na_{n+1}(a_n^3+a_{n+1}^3) + (a_n+a_{n+1})\sum_{i=1}^{n-1}a_i^4 + (a_n^4+a_{n+1}^4)\sum_{i=1}^{n-1}a_i \leqslant \frac{1}{12}.$$

Ta sẽ chứng minh

$$a_na_{n+1}(a_n^3+a_{n+1}^3) + (a_n^4+a_{n+1}^4)\sum_{i=1}^{n-1}a_i \leqslant (a_n+a_{n+1})^4\sum_{i=1}^{n-1}a_i, \tag{1}$$

hay

$$a_na_{n+1}(a_n^3+a_{n+1}^3) \leqslant 2a_na_{n+1}(2a_n^2+3a_na_{n+1}+2a_{n+1}^2)\sum_{i=1}^{n-1}a_i.$$

Bất đẳng thức trên đúng do ta có

$$(2a_n^2+3a_na_{n+1}+2a_{n+1}^2)\sum_{i=1}^{n-1}a_i \geqslant a_n(2a_n^2+3a_na_{n+1}+2a_{n+1}^2) \geqslant a_n^3+a_{n+1}^3.$$

Sử dụng (1), ta đưa được bài toán về chứng minh

$$\sum_{i=1}^{n}\left(b_i^4\sum_{j\neq i}b_i\right)\leqslant\frac{1}{12}$$

với $b_1=a_1,\ b_2=a_2,\ \ldots,\ b_{n-1}=a_{n-1}$ và $b_n=a_n+a_{n+1}$. Bất đẳng thức này đúng theo giả quyết quy nạp. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 11. *Cho $a_1,\ \ldots,\ a_n$ $(n\geqslant 2)$ là các số không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng*

$$n-1\leqslant\sqrt{\frac{1-a_1}{1+a_1}}+\sqrt{\frac{1-a_2}{1+a_2}}+\cdots+\sqrt{\frac{1-a_n}{1+a_n}}\leqslant n-2+\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Lời giải. Bằng cách sử dụng đánh giá đơn giản

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\geqslant 1-x$$

với mọi $x\in[0,\ 1]$, ta dễ dàng thu được

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1-a_i}{1+a_i}}\geqslant\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)=n-1.$$

Vì thế, bất đẳng thức bên trái được chứng minh, và công việc của ta bây giờ chỉ là chứng minh bất đẳng thức bên phải. Ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp theo n. Giả sử $P(n)$ đúng, ta sẽ chứng minh rằng $P(n+1)$ cũng đúng, tức ta phải chứng minh

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sqrt{\frac{1-a_i}{1+a_i}}\leqslant n-1+\frac{2}{\sqrt{3}}$$

với mọi $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1}$ thỏa mãn $a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}=1$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant a_{n+1}$, khi đó từ giả thiết, ta dễ dàng suy ra được $a_n+a_{n+1}\leqslant\frac{2}{n+1}\leqslant\frac{2}{3}$ (do $n\geqslant 2$). Bây giờ, ta sẽ chứng minh rằng với mọi $a,\ b\geqslant 0$ thỏa mãn $a+b\leqslant\frac{2}{3}$ thì

$$\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\sqrt{\frac{1-b}{1+b}}\leqslant 1+\sqrt{\frac{1-(a+b)}{1+(a+b)}}.\qquad(1)$$

Thật vậy, bình phương hai vế, ta có thể viết lại bất đẳng thức này dưới dạng

$$2\left[\sqrt{\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}}-\sqrt{\frac{1-a-b}{1+a+b}}\right]\leqslant 1+\frac{1-a-b}{1+a+b}-\frac{1-a}{1+a}-\frac{1-b}{1+b}.$$

Ta có

$$\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}-\frac{1-a-b}{1+a+b}=\frac{2ab(a+b)}{(1+a)(1+b)(1+a+b)}\geqslant 0$$

và

$$1 + \frac{1-a-b}{1+a+b} - \frac{1-a}{1+a} - \frac{1-b}{1+b} = \frac{2ab(a+b+2)}{(1+a)(1+b)(1+a+b)}.$$

Bây giờ, để ý rằng với mọi $x \geqslant y \geqslant 0$, ta có $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \frac{x-y}{2\sqrt{y}}$. Do đó

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}} - \sqrt{\frac{1-a-b}{1+a+b}} &\leqslant \frac{\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)} - \frac{1-a-b}{1+a+b}}{2\sqrt{\frac{1-a-b}{1+a+b}}} \\ &= \frac{ab(a+b)}{(1+a)(1+b)(1+a+b)\sqrt{\frac{1-a-b}{1+a+b}}}\end{aligned}$$

nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{2ab(a+b)}{(1+a)(1+b)(1+a+b)\sqrt{\frac{1-a-b}{1+a+b}}} \leqslant \frac{2ab(a+b+2)}{(1+a)(1+b)(1+a+b)},$$

hay là

$$\sqrt{\frac{1-a-b}{1+a+b}} \geqslant \frac{a+b}{a+b+2}.$$

Do $a+b \leqslant \frac{2}{3}$ nên

$$\sqrt{\frac{1-a-b}{1+a+b}} - \frac{a+b}{a+b+2} \geqslant \sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}} - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{4} > 0.$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh. Từ kết quả này, ta được

$$\sqrt{\frac{1-a_n}{1+a_n}} + \sqrt{\frac{1-a_{n+1}}{1+a_{n+1}}} \leqslant 1 + \sqrt{\frac{1-(a_n+a_{n+1})}{1+(a_n+a_{n+1})}}.$$

Mặt khác, áp dụng giả thiết quy nạp với n số không âm $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, (a_n + a_{n+1})$ có tổng bằng 1, ta thu được bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\frac{1-a_i}{1+a_i}} + \sqrt{\frac{1-(a_n+a_{n+1})}{1+(a_n+a_{n+1})}} \leqslant n-2+\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} \sqrt{\frac{1-a_i}{1+a_i}} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\frac{1-a_i}{1+a_i}} + \sqrt{\frac{1-a_n}{1+a_n}} + \sqrt{\frac{1-a_{n+1}}{1+a_{n+1}}} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\frac{1-a_i}{1+a_i}} + \sqrt{\frac{1-(a_n+a_{n+1})}{1+(a_n+a_{n+1})}} + 1 \\ &\leqslant n-2+\frac{2}{\sqrt{3}}+1 = n-1+\frac{2}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Như vậy, nếu $P(n)$ đúng thì $P(n+1)$ cũng đúng. Với lập luận này, ta thấy rằng ta chỉ cần chứng minh $P(2)$ đúng là đủ, tức là chứng minh

$$\sqrt{\frac{1-a_1}{1+a_1}} + \sqrt{\frac{1-a_2}{1+a_2}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$$

với $a_1 + a_2 = 1$, hay

$$\frac{a_1}{a_1+2a_2} + \frac{a_2}{a_2+2a_1} + 2\sqrt{\frac{a_1a_2}{(2a_1+a_2)(2a_2+a_1)}} \leqslant \frac{4}{3}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\text{VT} \leqslant \frac{a_1}{a_1+2a_2} + \frac{a_2}{a_2+2a_1} + \frac{3a_1a_2}{(a_1+2a_2)(a_2+2a_1)} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

3. Một số bài toán tự luyện

Trên đây là một số kinh nghiệm sử dụng quy nạp để dồn biến trong chứng minh bất đẳng thức, phần kiến thức chia sẻ ở đây chắc chắn vẫn còn nhiều thiếu sót. Rất mong nhận ý kiến của bạn đọc gần xa. Sau đây là một số bài toán áp dụng khác, dành cho bạn đọc thử sức.

Bài tập 1. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 3)$ là các số không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$a_1^2a_2 + a_2^2a_3 + \cdots + a_n^2a_1 \leqslant \frac{4}{27}.$$

Bài tập 2. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số dương thỏa mãn $a_1a_2\cdots a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a_1+n-1} + \frac{1}{a_2+n-1} + \cdots + \frac{1}{a_n+n-1} \leqslant 1.$$

Bài tập 3. Tìm hằng số k_n nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{k_nx_1+1}} + \frac{1}{\sqrt{k_nx_2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k_nx_n+1}} \leqslant n-1.$$

đúng với mọi $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ thỏa mãn $a_1a_2\cdots a_n = 1$.

Bài tập 4. Cho các số không âm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$. Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \geqslant \min\left\{\frac{n}{2}, 3\right\} \sum_{i=1}^n x_i(x_{i+1}+x_{i+2}).$$

Tài liệu

[1] Vasile Cirtoaje, *Algebraic Inequalities: Old and New Methods*, GIL publishing house, 2006.

[2] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Bất đẳng thức và những lời giải hay*, NXB ĐHSP Hà Nội, 2009.

[3] Diễn đàn AoPS, http://www.artofproblemsolving.com.

[4] Tạp chí Crux Mathematicorum.

Xây Dựng Dãy Nghiệm Trong Phương Trình Hàm Đa Thức

Kiều Đình Minh
(THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Giới thiệu

Dãy số có nhiều ứng dụng rộng rãi trong Toán học. Việc xây dựng dãy số trong khi giải toán là quan trọng. Bài viết này chúng tôi đề cập đến việc xây dựng dãy nghiệm trong các bài toán giải phương trình hàm đa thức. Hy vọng bạn đọc sẽ tìm thấy nhiều điều bổ ích khi đọc bài viết này. Đặc biệt sẽ giúp ích cho các bạn học sinh chuẩn bị tham dự kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia.

Bài toán 1. *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $P(0) = 0$ và*

$$P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Lập dãy (α_n) xác định bởi: $\alpha_0 = -$, $\alpha_{n+1} = \alpha_n^2 + 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Khi đó (α_n) là dãy tăng. Mặt khác, bằng quy nạp ta chứng minh được $P(\alpha_n) = \alpha_n$. Do đó đa thức $Q(x) = P(x) - x$ có vô số nghiệm α_n. Vậy $Q(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ hay $P(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thỏa mãn. □

Nhận xét. Mấu chốt của bài toán là biết sử dụng tính chất cơ bản của đa thức: Nếu $P(x) = Q(x)$ với vô số x thì $P(x) \equiv Q(x)$ với mọi x. Từ đó xây dựng dãy số vô hạn (α_n) phù hợp.

Bài toán 2. *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $P(0) = 6$ và*

$$P(x) = \sqrt{P(x^2 + 1) - 7} + 6, \forall x \geqslant 0.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $P(x^2 + 1) = (P(x) - 6)^2 + 7, \ \forall x$. Lập dãy (α_n) xác định bởi

$$\alpha_0 = 0, \ \alpha_{n+1} = \alpha_n^2 + 1, \ n = 0, 1, \ldots$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $P(\alpha_n) = \alpha_n + 6, \ \forall n \geqslant 0$. Từ đó suy ra $P(x) = x + 6$. □

Bài toán 3. *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn*

$$P(x)P(x + 1) = P(x^2 + 2), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Nếu $P(x) \equiv c$ thì $c^2 = c$, tức $c = 0$ hoặc $c = 1$. Ta có $P(x) = 0,\ P(x) = 1$.

Xét $P(x) \neq c$, kiểm tra trực tiếp đa thức $P(x) = x^2 - x + 2$ thỏa mãn bài toán. Ta thấy nếu$P(x)$ thỏa mãn thì $(P(x))^n,\ n \in \mathbb{N}^*$ cũng thỏa mãn.

Đặt $\deg P = n$. Khi đó nếu n lẻ thì $P(x)$ có nghiệm x_0 suy ra $P(x_0) = 0$ do đó $P(x_0^2 + 2) = 0$. Do đó dãy số dương $(x_n) : x_{n+1} = x_n^2 + 2,\ \forall n = 0, 1, \ldots$ cũng là nghiệm. Điều này không xảy ra. Vậy $n = 2m$, dễ thấy hệ số cao nhất của $P(x)$ bằng 1.

Đặt $P(x) = (x^2 - x + 2)^m + Q(x),\ \deg Q = q < 2m$, thay vào phương trình ban đầu có

$$(x^2 + x + 2)^m Q(x) + (x^2 - x + 2)^m Q(x+1) + Q(x)Q(x+1) = Q(x^2 + 2),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nếu $Q(x) \neq c$ thì bằng cách so sánh bậc hai vế dẫn đến $q = 2m$ vô lý. Vậy $Q(x) = c$, do đó $P(x) = (x^2 - x + 2)^m$.

Tóm lại $P(x) = 0,\ P(x) = 1$ hoặc $P(x) = (x^2 - x + 2)^m,\ \forall m \in \mathbb{N}^*$. □

Bài toán 4. *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn*

$$P(x)P(x+1) = P(x^2 + x + 1),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Nếu $P(x) \equiv c$ thì $c^2 = c$, tức $c = 0$ hoặc $c = 1$. Ta có $P(x) = 0,\ P(x) = 1$.

Xét $\deg P = n \geqslant 1$. Nếu n lẻ thì $P(x)$ có nghiệm thực x_0. Lập dãy số (α_n) xác định bởi

$$\alpha_1 = x_0,\ \alpha_{n+1} = \alpha_n^2 + \alpha_n + 1,\ n = 1,\ 2, \ldots$$

Bằng quy nạp thì $P(\alpha_n) = 0,\ \forall n = 1, 2, \ldots$ Mà (α_n) tăng thực sự nên $P(x) = 0$ có vô số nghiệm, điều này là vô lý.

Nếu n chẵn $n = 2m$. Đặt $P(x) = Q(x) + (x^2 + 1)^m$. Thay vào phương trình ban đầu và so sánh bậc hai vế, ta được $P(x) = (x^2 + 1)^m$.

Tóm lại $P(x) \equiv 0,\ P(x) = 1$ hoặc $P(x) = (x^2 + 1)^m,\ \forall m \in \mathbb{N}^*$. □

Bài toán 5. *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho*

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Dễ thấy $P(x) = 1,\ P(x) = 1$ thỏa mãn. Xét $\deg P = n \geqslant 1$. Nếu n lẻ thì $P(x)$ có nghiệm x_0. Lập dãy (α_n) xác định bởi

$$\alpha_1 = x_0,\ \alpha_{n+1} = 2\alpha_n^3 + \alpha_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

Ta có $P(\alpha_n) = 0,\ \forall n = 1, 2, \ldots$ Suy ra điều vô lý.

Xét $n = 2m$, đặt $P(x) = Q(x) + x^2 + 1$. Từ đó suy ra $P(x) = x^2 + 1$. □

Bài toán 6. *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho*

$$P(x)P(2x^2) = P(x^3 + x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Dễ có $P(x) = 0,\ P(x) = 1$ thỏa mãn. Nếu deg $P = n \geqslant 1$. Đặt

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0.$$

Cho $x = 0$ thì $P(0) = a_n = 0$ hoặc $P(0) = a_n = 1$.

Nếu $a_n = 0$ thì $P(x) = x^m Q(x),\ Q(x) \neq 0,\ m \in \mathbb{N}^*$. Thay vào phương trình ta có

$$(2x^2)^m Q(x)Q(2x^2) = (x^2+1)^m Q(x^3+x),$$

thì $Q(0) = 0$, trái với giả thiết. Vậy $a_n = 1$, Đồng nhất hệ số cao nhất ta được $a_0 = \frac{1}{2^n}$.

Nếu n lẻ thì $P(x)$ có nghiệm x_0. Lập dãy số (α_n) xác định bởi

$$\alpha_1 = x_0 \neq 0,\ \alpha_{n+1} = \alpha_n^3 + \alpha_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

Thì dãy (α_n) đơn điệu tăng khi $x_0 > 0$ và đơn điệu giảm khi $x_0 < 0$. Từ đó, nếu đa thức đã cho có một nghiệm thực khác 0 thì nó sẽ có vô số nghiệm thực. Điều này không thể xảy ra. Vậy $P(x) \neq 0,\ \forall x \mathbb{R}$. Suy ra $P(x)$ chỉ có nghiệm phức $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$ và $|z_1|\cdot|z_2|\cdots|z_n| = 2^n$. Do đó tồn tại z_k với $|z_k| \geqslant 2$. Điều này dẫn đến $|z_k^2+1| \geqslant |z_k^2| - 1 \geqslant 3$ và vì vậy $|z_k^3 + z_k| \geqslant |z_k|$. Ta thu được $P(x)$ có vô số nghiệm, điều này không thể xảy ra.

Tóm lại $P(x) \equiv 0,\ \ P(x) \equiv 1$. □

Bài toán 7. *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $P(x) = 0$ và*

$$P(x^2 - x + 1) = (P(x))^2 - P(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Thay x bởi $x - 1$ ta được

$$P((x-1)^2 - (x-1) + 1) = (P(x-1))^2 - P(x-1) + 1,$$

tương đương

$$P(x^2 - x + 1) = (P(1-x))^2 - P(x-1) + 1.$$

Theo giả thiết, ta có

$$(P(x))^2 - P(x) + 1 = (P(1-x))^2 - P(x-1) + 1,$$

hay là

$$[P(x-1) + P(x) - 1][P(1-x) - P(x)] = 0.$$

Do đó một trong hai đa thức $P(x-1) + P(x) - 1$ hoặc $P(1-x) - P(x)$ có vô hạn nghiệm hay $P(x-1) + P(x) - 1 = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $P(1-x) - P(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Thay $x = 1$ vào phương trình đã cho, ta có $P(1) = 1$, vậy

$$P(1-x) + P(x) - 1 = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào phương trình trên, ta có $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Chú ý rằng với $x \in (0,1)$ thì $0 < x < x^2 - x + 1 < 1$. Xét dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_0 = \frac{1}{2} \in (0,1),\ x_n = x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 1,\ \forall n \geqslant 1.$$

Bằng quy nạp, ta được $P(x_n) = x_n,\ \forall n \geqslant 0$. Suy ra đa thức $Q(x) = P(x) - x$ có vô số nghiệm. Do đó $Q(x) \equiv 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $P(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. □

Nhận xét. Dãy số $(x_n) : x_0 = 0,\ x_n = x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 1,\ \forall n \geqslant 1$ là tuần hoàn nên ta không thể làm tương tự như các thí dụ trên. Mấu chốt của bài toán này là chỉ ra được $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Bài toán 8. *Xét tập hợp các đa thức $P(x) \neq 0$ có hệ số thực và thỏa mãn*

$$P(x^2 - 1) = P(x)P(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hãy tìm trong tập hợp đó một đa thức có bậc bé nhất nhưng có nghiệm lớn nhất.

Lời giải. Gọi x_0 là một nghiệm của $P(x)$. Khi đó $P(x_0^2 - 1) = P(x_0)P(-x_0)$, suy ra $x_0^2 - 1$ cũng là nghiệm của $P(x)$.

Xét $x_0 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ta có $x_0^2 - x_0 - 1$, thành thử, từ một nghiệm $x_0 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ta xây dựng được một dãy vô hạn các nghiệm phân biệt của $P(x)$. Điều này vô lý vì $P(x)$là một đa thức khác 0 nên có số nghiệm là hữu hạn.

Như vậy nếu x_0 là một nghiệm của $P(x)$ thì $x_0 \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Xét đa thức $P(x) = x^2 - x - 1$, ta có

$$P(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 - (x^2 - 1) - 1 = x^4 - 3x^2 + 1,$$

$$P(x)P(-x) = (x^2 - x - 1)(x^2 + x - 1) = x^4 - 3x^2 + 1.$$

Hơn nữa $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ là một nghiệm của $P(x) = x^2 - x - 1$.

Xét đa thức bậc nhất $P(x) = ax + b,\ (a^2 + b^2 > 0)$ thì $P(x)$ không thỏa mãn đề bài. Tóm lại $P(x) = x^2 - x - 1$. □

Bài toán 9. *Chứng minh rằng nếu đa thức $P(x)$ thỏa mãn*

$$P(2x^2 - 1) = \frac{1}{2}(P(x))^2 - 1,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

thì $P(x)$ phải là hằng số.

Lời giải. Xây dựng dãy $u_1 = 1,\ u_2 = -1,\ u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}+1}{2}},\ \forall n \geqslant 3.$

Ta có $u_n < u_{n+1} < 1,\ \forall n \geqslant 2$ và $P(u_n) = \frac{1}{2}(P(u_{n+1}))^2 - 1,\ \forall n \geqslant 1.$

Chú ý rằng $P(u_n) \neq 0,\ \forall n \geqslant 1$. Vì nếu $P(u_n) = 0$ thì suy ra $P(u_{n-1}),\ P(u_{n-2}),\ \ldots,\ P(u_1)$ là hữu tỷ, nhưng $P(1) = 1 \pm \sqrt{3}$. Lấy đạo hàm hai vế của phương trình đã cho, ta có

$$4x \cdot P^{'}(2x^2 - 1) = P(x)P^{'}(x).$$

Cho $x = 1$ do $P(1) \neq 4$ ta có $P^{'}(u_1) = P'(1) = 0$. Suy ra $0 = P'(u_2) = P'(u_3) = \cdots$ Vì vậy $P'(x)$ là đa thức 0 và vì vậy $P(x)$ là đa thức hằng. □

Bài toán 10. *Cho $P(x),\ Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn*

$$P(1 + x + Q(x) + (Q(x))^2) = Q(1 + x + P(x) + (P(x))^2),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng nếu phương trình $P(x) = Q(x)$ có nghiệm thực thì $P(x) = Q(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Giả sử $a \in \mathbb{R}$ mà $P(a) = Q(a)$. Xét

$$b = 1 + a + Q(a) + (Q(a))^2 = 1 + a + P(a) + (P(a))^2.$$

Từ giả thiết suy ra $P(b) = Q(b)$. Chú ý rằng $b = \frac{3}{4} + a + \left(Q(a) + \frac{1}{2}\right)^2 > a$. Do đó xét dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_0 = a,\ x_{n+1} = 1x_n + Q(x_n) + (Q(x_n))^2,,\ n = 1, 2, \ldots$$

Bằng quy nạp thì (x_n) là dãy số vô hạn tăng. Từ đó $P(x_n) = Q(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Suy ra $P(x) = Q(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. □

Trên đây, chúng tôi đã trình bày một số tình huống khác nhau cơ bản về việc xây dựng dãy nghiệm để giải các bài toán phương trình hàm đa thức. Chúng tôi hy vọng nhận được những trao đổi và góp ý trân thành từ phía bạn đọc để bài viết này đầy đủ hơn nữa. Cuối cùng xin gửi đến các bạn một số bài toán tự luyện tập.

Bài tập 1. Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

- $P(0) = 0,\ P(x^3 + 1) = (P(x))^3 + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- $P(x)P(x-1) = P(x^2),\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- $P(x)P(x+1) = P(x^2 + x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- $P(x)P(3x^2) = P(3x^3 + x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- $P(x)P(2x^2 - 1) = P(x^2)P(2x - 1),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài tập 2. Chứng minh rằng không tồn tại đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ có bậc 998 sao cho

$$(P(x))^2 - 1 = P(x^2 + 1),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 3. Cho $P(x),\ Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ có bậc lẻ và thỏa mãn

$$P(1 + x + (Q(x))^2) = Q(1 + x + (P(x))^2),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $P(x) \equiv Q(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài tập 4. Cho $P(x),\ Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ khác hằng số thỏa mãn

$$P(-1) + P(0) + P(1) = Q(-1) + Q(0) + Q(1),$$

và

$$P(1 + x^2 + (Q(x))^4) = Q(1 + x^2 + (P(x))^4),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $P(x) \equiv Q(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài tập 5. Với mỗi đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, kí hiệu A_p là tập hợp các số thực x sao cho $P(x) = 0$. Tìm số phần tử nhiều nhất có thể có của A_p khi $P(x)$ thuộc tập hợp các đa thức hệ số thực với bậc ít nhất là 1 và thỏa mãn

$$P(x^2 - 1) = P(x)P(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 11. *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ chỉ với các không điểm thực và thỏa mãn .*

$$P(x^2 - 1) = P(x)P(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

SỐ HOÀN HẢO VÀ NHỮNG SỐ BẠN BÈ

Nguyễn Duy Liên
(Trường THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Phát minh ra những con số là một trong những thành tựu to lớn của nhân loại. Những con số xuất hiện ở tất cả các lĩnh vực, từ nghiên cứu khoa học đến kinh tế, tài chính, ... Trong bài viết này tôi muốn đưa đến các bạn một góc nhìn mới về những con số, một số ít bài toán xung quanh nó để các bạn thích và sắp thích những con số này để trải nghiệm.

Để nhìn nhận một cách đơn giản hơn về các con số này, tôi xin bổ sung một chút kiến thức nền cơ sở về số các ước, tổng các ước nguyên dương của một số nguyên dương.

Định nghĩa 1. *Hàm tổng các ước số của sô nguyên dương n, kí hiệu là σ được xác định bởi $\sigma(n)$ bằng tổng mọi ước dương của n.*

Ví dụ $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$.

Định nghĩa 2. *Hàm số các ước số của số nguyên dương n, kí hiệu là τ được xác định bởi $\tau(n)$ bằng số các ước dương của n.*

Ví dụ $\tau(1) = 1,\ \tau(2) = 2,\ \tau(12) = 6$.

Ta có thể biểu diễn các hàm $\tau(n), \sigma(n)$ dưới dạng: $\sigma(n) = \sum\limits_{d\,|\,n} d$ và $\tau(n) = \sum\limits_{d\,|\,n} 1$.

Định lý 1. *Với m, n là hai số nguyên dương thỏa mãn $(m,n) = 1$ thì $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$.*

Chứng minh. Nếu d là ước của mn thì theo định lý cơ bản của số học, d có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tích của một ước số của của m với một ước số của n (vì n và m không có ước số chung khác 1). Có nghĩa là mọi số hạng của $\sigma(mn)$ đều xuất hiện đúng một lần trong tích $\sigma(m)\sigma(n)$ (tích của tất cả các ước số của n và m). Điều ngược lại cũng đúng, mọi tích như vậy đều là ước của mn, như vậy hai tích bằng nhau. Định lý được chước minh. □

Tương tự ta chứng minh cho hàm $\tau(n)$. Từ định lý trên đây suy ra rằng các hàm $\tau(n), \sigma(n)$ có tính chất nhân. Vì thế ta có thể viết công tức của chúng khi biết phân tích thành thừa số nguyên tố của n.

Định lý 2. *Giả sử p là số nguyên tố, a là số nguyên dương. Khi đó*

$$\sigma(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1},$$

và $\tau(p^\alpha) = \alpha + 1$.

Chứng minh. Các ước của p^α là $1,\ p,\ p^2, \dots,\ p^\alpha$. Do đó p^α có đúng $\alpha+1$ ước dương. Cho nên ta có $\tau\left(p^\alpha\right)=\alpha+1$. Mặt khác

$$\sigma\left(p^\alpha\right)=1+p+p^2+\cdots+p^\alpha=\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}.$$

Định lý được chứng minh. □

Định lý 3. *Giả sử số nguyên dương n có phân tích ra thừa số nguyên tố $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$, khi đó ta có đẳng thức sau*

$$\sigma(n)=\prod_{j=1}^{s}\frac{p_j^{\alpha_j+1}-1}{p_j-1}=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdots\frac{p_s^{\alpha_s+1}-1}{p_s-1},$$

và

$$\tau(n)=\prod_{j=1}^{s}\left(\alpha_j+1\right)=\left(\alpha_1+1\right)\left(\alpha_2+1\right)\cdots\left(\alpha_s+1\right).$$

Chứng minh. Do hai hàm $\tau(n)$, $\sigma(n)$ đều có tính chất nhân nên ta có

$$\sigma(n)=\sigma\left(p_1^{\alpha_1}\right)\cdot\sigma\left(p_2^{\alpha_2}\right)\cdots\sigma\left(p_s^{\alpha_s}\right),\ \ \tau(n)=\tau\left(p_1^{\alpha_1}\right)\cdot\tau\left(p_2^{\alpha_2}\right)\cdots\tau\left(p_s^{\alpha_s}\right).$$

Chứng minh hoàn tất. □

Định lý 4. *Nếu N' là ước của N thì $\frac{\sigma(N')}{N'}\leqslant\frac{\sigma(N)}{N}$, dấu bằng khi và chỉ khi $N'=N$.*

Chứng minh. Chú ý rằng nếu $d\mid N$ thì $kd=N$ với k nào đó, vì thế $k=\frac{N}{d}\mid N$, lập luận này cũng đúng cho điều ngược lại, vì thế $d\mid N$ khi và chỉ khi $\frac{N}{d}\mid N$, từ đó suy ra

$$\sigma(N)=\sum_{d\mid N}d=\sum_{d\mid N}\frac{N}{d}=N\sum_{d\mid N}\frac{1}{d}.$$

Do đó nếu N' là ước thực sự của N thì ta có

$$\frac{\sigma(N)}{N}=\sum_{d\mid N}\frac{1}{d}>\sum_{d\mid N'}\frac{1}{d}=\frac{\sigma(N')}{N'}.$$

Định lý được chứng minh. □

Từ đó ta có hệ quả

Định lý 5. *Số N là hoàn hảo khi và chỉ khi* $\sum_{d\mid N}\frac{1}{d}=2$.

1. Số hoàn hảo và số Mersenne

Định nghĩa 3. *Số nguyên dương n được gọi là số hoàn hảo (perfect) nếu $2n = \sigma(n)$.*

Ví dụ $2 \cdot 6 = 1 + 2 + 3 + 6$ nên 6 là số hoàn hảo, hoặc $2 \cdot 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28$ nên 28 là số hoàn hảo.

Sáu số hoàn hảo đầu tiên là 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056.

Từ định nghĩa trên và công thức thu được trong quá trình chứng minh định lý 4, ta suy ra

Định lý 6. *Số N là hoàn hảo khi và chỉ khi $\sum\limits_{d \mid N} \frac{1}{d} = 2$.*

Định lý sau mô tả toàn bộ các số hoàn hảo chẵn

Định lý 7. *Số nguyên dương chẵn n là số hoàn hảo nếu và chỉ nếu $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$ trong đó m là số nguyên dương sao cho $2^m - 1$ là số nguyên tố.*

Chứng minh. Trước tiên, giả sử $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$, trong đó $2^m - 1$ là số nguyên tố. Vì $2^m - 1$ là số lẻ nên ta có $\left(2^{m-1},\ 2^m - 1\right) = 1$. Do σ là hàm có tính chất nhân nên $\sigma\left(2^{m-1}\right) = 2^m$, $\sigma(2^m - 1) = 2^m$ vì $2^m - 1$ là số nguyên tố.

Vậy $\sigma(n) = 2^m(2^m - 1) = 2n$ và n là số hoàn hảo. Ngược lại, giả sử n là số hoàn hảo chẵn. Ta viết $n = 2^s t,\ \left(s, t \in \mathbb{Z}^+, (t, 2) = 1\right)$. Vì $(2^s, t) = 1$, theo định lý 5 ta được

$$\sigma(n) = \sigma(2^s t) = \sigma(2^s)\,\sigma(t) = \left(2^{s+1} - 1\right)\sigma(t).$$

Do n là số hoàn hảo nên $\sigma(n) = 2n = 2^{s+1}t$. Từ đó ta có

$$\left(2^{s+1} - 1\right)\sigma(t) = 2^{s+1}t \tag{1}$$

Do $\left(2^{s+1} - 1, 2^{s+1}\right) = 1$, từ (1) suy ra $2^{s+1} \mid \sigma(t)$. Như vậy tồn tại số nguyên q sao cho $\sigma(t) = 2^{s+1}q$.

Do đó từ (1) ta được $\left(2^{s+1} - 1\right)2^{s+1}q = 2^{s+1}t$ suy ra $\left(2^{s+1} - 1\right)q = t$. Vậy $q \mid t$ và $q \neq t$. Từ đó ta có

$$t + q = \left(2^{s+1} - 1\right)q + q = 2^{s+1}q = \sigma(t)$$

Nếu $q \neq 1$ thì tồn tại ít nhất ba ước nguyên tố khác nhau của t cụ thể là $1, q, t$. Khi đó $\sigma(t) \geqslant 1 + q + t$, mâu thuẫn. Vậy $q = 1$, và $t = 2^{s+1} - 1$ suy ra $\sigma(t) = t + 1$, nên t là số nguyên tố, vì t không có ước dương nào ngoài 1 và t. Vậy $n = 2^s\left(2^{s+1} - 1\right)$ trong đó $2^{s+1} - 1$ là số nguyên tố. □

Từ định lý này ta thấy rằng, để tìm các số hoàn hảo chẵn, ta tìm các số nguyên tố dạng $2^m - 1$. Trước tiên ta có nhận xét rằng nếu số có dạng như trên là số nguyên tố, thì số mũ m phải là số nguyên tố.

Định lý 8. *Nếu $2^m - 1$ là số nguyên tố thì m là số nguyên tố.*

Chứng minh. Giả sử ngược lại $m = ab$, trong đó $1 < a < m$, $1 < b < m$ khi đó

$$2^m - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a - 1)\left[2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \cdots + 2^a + 1\right].$$

Vì mỗi nhân tử ở vế phải đều lớn hơn 1, nên $2^m - 1$ là hợp số (mâu thuẫn). □

Định lý 9. *Nếu n là số nguyên dương thì $M_n = 2^n - 1$ được gọi là số Mersenne thứ n. Đặc biệt nếu p là số nguyên tố và $M_p = 2^p - 1$ cũng là số nguyên tố thì M_p được gọi là số nguyên tố Mersenne.*

Ví dụ $M_7 = 2^7 - 1$ là một số nguyên tố Mersenne, trong khi $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ là hợp số.

Các số Mersenne có vai trò quan trọng trong việc tìm ra những số nguyên tố lớn (vấn đề có nhiều ứng dụng trong lý thuyết thông tin, mật mã, ... Vì thế người ta nghiên cứu rất nhiều thuật toán để xác định xem một số Mersenne có phải là số nguyên tố hay không.

Định lý 10. *Giả sử p là một số nguyên tố lẻ. Khi đó mọi ước của số Mersenne $M_p = 2^p - 1$ đều có dạng $2kp + 1$, trong đó k là số nguyên dương.*

Chứng minh. Giả sử q là một ước nguyên tố của $M_p = 2^p - 1$. Theo định lý Fermat ta có $q \mid \left(2^{q-1} - 1\right)$, ta có $\left(2^{q-1} - 1, 2^p - 1\right) = 2^{(p,q-1)} - 1$. Vì q ước chung lớn của $2^p - 1$ và $2^{q-1} - 1$ nên $\left(2^{q-1} - 1, 2^p - 1\right) > 1$.

Vậy $(p, q-1) = p$ (ngược lại $(p, q-1) = 1$ suy ra $\left(2^p - 1, 2^{q-1} - 1\right) = 1$). Do đó $p \mid q - 1$. Tức là tồn tại số nguyên dương m để $q - 1 = mp$. Vì q lẻ nên m chẵn, giả sử $q = mp + 1 = 2kp + 1$. Vậy $q = mp + 1 = 2kp + 1$. □

Nhờ định lý này để kiểm tra số Mersenne M có phải là số nguyên tố hay không, ta không cần chia nó cho mọi số nguyên tố bé hơn $\sqrt{M}$, mà chỉ cần chia cho các số nguyên tố có dạng đã nói trong định lý và nhỏ hơn $\sqrt{M}$.

Ví dụ $M_{13} = 2^{13} - 1 = 8191$, để xem 8191 có phải là số nguyên tố hay không, ta chỉ cần xem 8191 có ước nguyên tố nào dạng $26k + 1$ và bé hơn $\sqrt{8191} = 90, 50, \ldots$ hay không.

Như vậy chỉ cần làm phép chia 8191 cho 53 và 79 suy ra 8191 là số Mersenne.

$M_{23} = 2^{23} - 1 = 8388607$, $\sqrt{M} = 2896.309\ldots$ số nguyên tố bé nhất có dạng $46k + 1$ là 47. Làm phép chia 8388607 cho 47 ta được $8388607 = 47 \cdot 178481$. Vậy số Mersenne M_{23} không phải là số nguyên tố.

Ví dụ 1. *Cho a, b là hai số hoàn hảo chẵn. Chứng minh $a^2 + b^2$ không là số chính phương.*

Lời giải. Vì a, b là hai số hoàn hảo chẵn nên $a = 2^{p-1}\left(2^p - 1\right)$, $b = 2^{q-1}\left(2^q - 1\right)$ trong đó p, q, $2^p - 1$, $2^q - 1$ là các số nguyên tố. Giả sử rằng $p > q \geqslant 2$ và $a^2 + b^2$ là số chính phương, cho nên

$$c^2 = a^2 + b^2 = 2^{2(q-1)}\left[2^{2(p-q)}(2^p - 1)^2 + (2^q - 1)^2\right], \; c \in \mathbb{Z}^+.$$

Từ đây suy ra

$$2^{2(p-q)}(2^p - 1)^2 + (2^q - 1)^2 = d^2, \; d \in \mathbb{Z}^+. \tag{2}$$

Từ đây thấy rằng

- Nếu $p,\ q$ cùng lẻ từ (2) suy ra $2 \equiv d^2 \pmod 3$, vô lý.
- Nếu $p,\ q$ khác tính chẵn lẻ vậy $q = 2,\ p \geqslant 3,\ p$ lẻ. Đẳng thức (2) trở thành
$$2^{2(p-2)}(2^p - 1)^2 + 9 = d^2. \tag{3}$$
Suy ra $(d, 3) = 1$ với d lẻ. Khi đó từ (3) ta được
$$(d - 3)(d + 3) = \left[2^{p-2}(2^p - 1)\right]^2 \tag{4}$$
mà $(d - 3\,, d + 3) = 2$ nên
$$\begin{cases} d - 3 = 2x^2 \\ d + 3 = 2y^2 \end{cases} \left(x, y \in \mathbb{Z}^+,\ x > y\right)$$
Suy ra $y^2 - x^2 = 3 \Rightarrow y = 2, x = 1 \Rightarrow d = 5$. Thay vào (4) ta được
$$16 = \left[2^{p-2}(2^p - 1)\right]^2 \Leftrightarrow 4 = 2^{p-2}(2^p - 1)\,,$$
vô lý.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Mặc dù các số hoàn hảo và số Mersenne đã được nghiên cứu hàng trăm năm nay, nhưng còn vẫn tồn tại nhiều giả thuyết chưa được chứng minh.

- Không tồn tại số tự nhiên lẻ nào là số hoàn hảo.
- Tồn tại vô hạn số nguyên tố Mersenne.

2. Số thừa và số thiếu

Định nghĩa 4. *Số nguyên dương n được gọi là số thừa (abundant) nếu $\sigma(n) > 2n$, và được gọi là số thiếu (deficient) nếu $\sigma(n) < 2n$.*

Sáu số nguyên dương thừa đầu tiên là $12,\ 18,\ 20,\ 24,\ 30,\ 36$.

Sáu số nguyên dương thiếu đầu tiên là $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7$.

Ví dụ 2. *Chứng minh rằng mọi lũy thừa của số nguyên tố là số thiếu.*

Lời giải. Gọi p là số nguyên tố, k là số nguyên dương thì
$$n = p^k \Rightarrow \sigma(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}.$$
Ta có $2p^k - 1 < p^{k+1}$ vì $p \geqslant 2$ suy ra
$$p^{k+1} - 1 < 2\left(p^{k+1} - p^k\right) = 2p^k(p - 1) \Leftrightarrow \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} < 2p^k = 2n.$$
Vậy n là số thiếu. □

Ví dụ 3. *Chứng minh rằng mọi bội của một số thừa hoặc số hoàn hảo mà khác chính nó là một số thừa.*

Lời giải. Gọi n là số thừa (hoặc số hoàn hảo) theo định nghĩa $\frac{\sigma(n)}{n} \geqslant 2$.

Xét một bội của n là N $(N \neq n)$ suy ra n là ước thực sự của N. Theo định lý 4 ta có

$$\frac{\sigma(N)}{N} > \frac{\sigma(n)}{n} \geqslant 2 \Leftrightarrow \sigma(N) > 2N,$$

suy ra N là số thừa. □

Ví dụ 4. *Chứng minh rằng nếu $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$ với m là số nguyên dương thỏa mãn $2^m - 1$ là hợp số thì n là số thừa.*

Lời giải. Ta có

$$\sigma(n) = \sigma\left(2^{m-1}(2^m - 1)\right) = \sigma\left(2^{m-1}\right)\sigma(2^m - 1) > \left(\frac{2^m - 1}{2 - 1}\right)(2^m - 1 + 1) = 2n,$$

do đó n là số thừa. □

3. Cặp số bạn bè

Định nghĩa 5. *Hai số nguyên dương m, n được gọi là cặp số bạn bè (amicable pair) nếu*

$$\sigma(m) = \sigma(n) = m + n.$$

Ví dụ 5. *Chứng minh rằng mỗi cặp số nguyên dương sau đây là cặp số bạn bè.*

- $220,\ 284.$
- $1184,\ 1210.$
- $79750,\ 8873.$

Lời giải. Ta có

$$\sigma(220) = 504 = \sigma(284),$$
$$\sigma(1184) = 2394 = \sigma(1210),$$
$$\sigma(79750) = 168480 = \sigma(88730).$$

Từ đó thu được điều phải chứng minh. □

Ví dụ 6. *Cho $n \geqslant 2$ là số nguyên dương sao cho $3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $3 \cdot 2^n - 1$ và $3^2 \cdot 2^{2n-1} - 1$ đều là các số nguyên tố. Chứng minh rằng $2^n\left(3 \cdot 2^{n-1} - 1\right)(3 \cdot 2^n - 1)$ và $2^n\left(3^2 \cdot 2^{2n-1} - 1\right)$ là cặp số bạn bè.*

Lời giải. Đặt $x = 2^n\left(3\cdot 2^{n-1}-1\right)(3\cdot 2^n-1)$, $y = 2^n\left(3^2{\cdot}2^{2n-1}-1\right)$. Ta có

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= \sigma\left(2^n\left(3\cdot 2^{n-1}-1\right)(3\cdot 2^n-1)\right)\\ &= \sigma(2^n)\,\sigma\left(3\cdot 2^{n-1}-1\right)\sigma(3\cdot 2^n-1)\\ &= \left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right)\left(3\cdot 2^{n-1}-1+1\right)(3\cdot 2^n-1+1)\\ &= 3^2{\cdot}2^{2n-1}\left(2^{n+1}-1\right).\\ \sigma(y) &= \sigma\left(2^n\left(3^2{\cdot}2^{2n-1}-1\right)\right)\\ &= \sigma(2^n)\,\sigma\left(3^2{\cdot}2^{2n-1}-1\right)\\ &= \left(2^{n+1}-1\right)\left(3^2{\cdot}2^{2n-1}-1+1\right)\\ &= 3^2{\cdot}2^{2n-1}\left(2^{n+1}-1\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x+y &= 2^n\left(3\cdot 2^{n-1}-1\right)(3\cdot 2^n-1)+2^n\left(3^2{\cdot}2^{2n-1}-1\right)\\ &= 2^n\left(3^2{\cdot}2^{2n}-3^2{\cdot}2^{n-1}\right)\\ &= 3^2{\cdot}2^{2n-1}\left(2^{n+1}-1\right).\end{aligned}$$

Vậy $\sigma(x) = \sigma(y) = x+y$, nên ta có $x,\ y$ là cặp số bạn bè. □

Ví dụ 7. *Cho $n,\ s > 1$ là các số nguyên dương. Chứng minh rằng n và $(2^s-1)\,n+1$ không phải là cặp số bạn bè.*

Lời giải. Đặt $m = (2^s-1)\,n+1$ giả sử $m,\ n$ là cặp số bạn bè

- Nếu n lẻ thì m chẵn, ta có $\sigma(n) = m+n$ lẻ suy ra n là số chính phương, $\sigma(n) = m+n$ lẻ suy ra $m = 2^k a^2$ với $a,\ k \in \mathbb{Z}^+,\ (a,2) = 1$

  $$\sigma(m) = \sigma\left(2^k\right)\sigma\left(a^2\right) = 2^s n+1 = m+n.$$

  Ta có

  $$\sigma(m) \geqslant 1+\frac{m}{2}+m \Leftrightarrow 2^s n+1 \geqslant \frac{3}{2}\left[(2^s-1)\,n+1\right]+1. \tag{5}$$

  Vì $s > 1$ nên $\frac{(2^s-1)n+1}{2} \geqslant n$. Từ (5) suy ra

  $$2^s n+1 \geqslant (2^s-1)\,n+1+n+1 = 2^s n+2,$$

  vô lý.

- Nếu n chẵn thì m lẻ, từ đó $\sigma(m) = m+n$ lẻ suy ra $m = (2^s-1)\,n+1 = a^2$ với $a \in \mathbb{Z}^+,\ (a,2) = 1$, $\sigma(n) = m+n$ lẻ suy ra $n = 2^k b^2$ với $b,\ k \in \mathbb{Z}^+,\ (b,2) = 1$.

Ta có $2^k \mid n$ suy ra $\sigma\left(2^k\right) \mid \sigma(n) \Leftrightarrow 2^{k+1}-1 \mid a^2+2^k b^2$, do đó

$$2^{k+1}-1 \mid 2a^2+2^{k+1}b^2 = 2a^2+b^2+\left(2^{k+1}-1\right)b^2.$$

Suy ra tiếp $2^{k+1}-1 \mid 2a^2+b^2$. Giả sử p là số nguyên tố $p \mid 2^{k+1}-1 \Rightarrow p \mid 2a^2+b^2$, do

$$(m,n) = 1 \Rightarrow (a,b) = 1 \Rightarrow p \nmid a,\ p \nmid b.$$

Mà $2a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow b^2 \equiv (-2)\, a^2 \pmod{p}$

$$\left(\frac{-2}{p}\right) = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} p \equiv 1 & \pmod{8} \\ p \equiv 3 & \pmod{8} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} 2^{k+1} - 1 \equiv 1 & \pmod{8} \\ 2^{k+1} - 1 \equiv 3 & \pmod{8} \end{array}\right.$$

mà $4 \mid n$ suy ra $k \geqslant 2$ (vô lý). Vậy n và $(2^s - 1)\, n + 1$ không phải là cặp số bạn bè. □

4. k-hoàn hảo và k-thừa

Định nghĩa 6. *Một số nguyên dương n được gọi là $k-$hoàn hảo ($k-$perfect) nếu $\sigma(n) = kn$, chú ý số hoàn hảo được gọi là $2-$hoàn hảo.*

Một số nguyên dương n được gọi là $k-$thừa ($k-$abundant) nếu $\sigma(n) > (k+1)\, n$.

Ví dụ số $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ là số $3-$hoàn hảo do $\sigma(120) = 360 = 3 \cdot 120$.

Số $30240 = 2^5 {\cdot} 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ là số $4-$hoàn hảo do $\sigma(30240) = 120960 = 4 \cdot 30240$.

Số 908107200 là số $4-$thừa do $\sigma(908107200) > 5 \cdot 908107200$.

Ví dụ 8. *Tìm tất cả các số $3-$hoàn hảo có dạng $n = 2^k \cdot 3 \cdot p$, với p là số nguyên tố lẻ và k là số nguyên dương.*

Lời giải. Nếu $k = 1$ từ $\sigma(n) = 3n \Leftrightarrow \sigma(2 \cdot 3 \cdot p) = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot p \Rightarrow p = 2$ (loại).

Nếu $k = 2$ từ $\sigma(n) = 3n \Leftrightarrow \sigma\left(2^2 \cdot 3 \cdot p\right) = 3 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot p \Rightarrow 2p = 7$ (loại).

Nếu $k > 2$, ta có $3n = 3 \cdot 2^k \cdot 3 \cdot p$

$$\sigma(n) = \sigma\left(2^k \cdot 3 \cdot p\right) = \left(2^{k+1} - 1\right) \cdot 4 \cdot (p+1)\,.$$

Mà $3n = \sigma(n)$, dẫn đến $3 \cdot 2^k \cdot 3 \cdot p = \left(2^{k+1} - 1\right) \cdot 4 \cdot (p+1)$, hay là $9 \cdot 2^{k-2} \cdot p = \left(2^{k+1} - 1\right) \cdot (p+1)$, dẫn đến

$$p \cdot \left(2^{k-2} + 1\right) = 2^{k+1} - 1 \tag{6}$$

từ (6) ta thấy $p < 8$.

- Nếu $p = 3$ thì (6) $\Leftrightarrow 5 \cdot 2^{k-2} = 4$ (vô lý do vế trái chia hết cho 5).
- Nếu $p = 5$ thì (6) $\Leftrightarrow 3 \cdot 2^{k-2} = 6 \Leftrightarrow k = 3 \Rightarrow n = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ thỏa mãn.
- Nếu $p = 7$ thì (6) $\Leftrightarrow 2^{k-2} = 8 \Leftrightarrow k = 5 \Rightarrow n = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 = 672$ thỏa mãn.

Vậy có hai số $3-$hoàn hảo thỏa mãn là 120 và 672. □

Ví dụ 9. *Chứng minh rằng nếu n là số $3-$hoàn hảo và 3 không là ước của n thì số $3n$ là số $4-$hoàn hảo.*

Lời giải. Theo giả thiết ta có $\sigma(n) = 3n$ và $(n, 3) = 1$, nên ta có

$$\sigma(3n) = \sigma(3)\sigma(n) = 4(3n),$$

hay số $3n$ là số $4-$hoàn hảo. □

5. Số siêu hoàn hảo

Định nghĩa 7. *Số nguyên dương n được gọi là iêu hoàn hảo (superperfect) nếu $\sigma(\sigma(n)) = 2n$.*

Số 16 là số Siêu hoàn hảo bởi vì $\sigma(\sigma(16)) = 32 = 2 \cdot 16$

Ví dụ 10. *Chứng minh rằng nếu $n = 2^q$, $\left(q \in \mathbb{Z}^+\right)$ và $2^{q+1} - 1$ là số nguyên tố thì n là số siêu hoàn hảo.*

Lời giải. Vì $\sigma(2^q) = 2^{q+1} - 1 = m$ là một số nguyên tố, suy ra $\sigma(m) = m + 1 = 2^{q+1} = 2n$, do đó $\sigma(\sigma(n)) = 2n$.

Vậy nếu $n = 2^q$, $\left(q \in \mathbb{Z}^+\right)$ và $2^{q+1} - 1$ là số nguyên tố thì n là số siêu hoàn hảo. □

Ví dụ 11. *Chứng minh rằng mọi số siêu hoàn hảo chẵn có dạng $n = 2^q$, $\left(q \in \mathbb{Z}^+\right)$ với $2^{q+1} - 1$ là một số nguyên tố.*

Lời giải. Nhận xét nếu $r, s \in \mathbb{Z}^+$ thì $\sigma(rs) \geqslant 1 + r + s + rs$.

Giả sử rằng $n = 2^q t$ là siêu hoàn hảo với t là số nguyên dương lẻ và $t > 1$. Ta có

$$\begin{aligned} 2n = 2^{q+1}t = \sigma\left(\sigma\left(2^q t\right)\right) &= \sigma\left(\left(2^{q+1} - 1\right)\sigma(t)\right) \\ &\geqslant \left(2^{q+1} - 1\right)\sigma(t) + \left(2^{q+1} - 1\right) + \sigma(t) + 1 \\ &> 2^{q+1}\sigma(t) \geqslant 2^{q+1}(t + 1), \end{aligned}$$

dẫn đến $t > t + 1$, vô lí. Vậy điều giả sử là sai, ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 12. *Chứng minh rằng nếu $n = p^2$, p là số nguyên tố lẻ thì n không là số siêu hoàn hảo.*

Lời giải. Giả sử rằng n là số siêu hoàn hảo. Ta có

$$2n = \sigma(\sigma(n)) \Leftrightarrow 2p^2 = \sigma\left(p^2 + p + 1\right).$$

Giả sử rằng $q = p^2 + p + 1 = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ và p_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ là số nguyên tố lẻ

$$2p^2 = \sigma\left(p^2 + p + 1\right) = \prod_{i=1}^{k} \sigma\left(p_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i + 1} - 1}{p_i - 1}. \tag{7}$$

Nếu α_i lẻ khi đó

$$v_2\left(\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}\right) = v_2\left(p_i^{\alpha_i} + p_i^{\alpha_i-1} + \cdots + p_i + 1\right) \geqslant 1,$$

và $v_2\left(2p^2\right) = 1$ nên có duy nhất một α_i lẻ chẳng hạn α_1 từ đó suy ra

$$q = p_1^{\alpha_1} \cdot t^2, \tag{8}$$

với t là số nguyên dương lẻ và $(t, p_1) = 1$.

Ta có (7) tương đương với

$$2p^2 = \sigma(q) = \sigma\left(p_1^{\alpha_1}t^2\right) = \left(1 + p_1 + \cdots + p_1^{\alpha_1}\right)\sigma\left(t^2\right),$$

tức là

$$\begin{cases} 1 + p_1 + \cdots + p_1^{\alpha_1} = 2p \\ \sigma\left(t^2\right) = p \end{cases} \tag{9}$$

hoặc

$$\begin{cases} 1 + p_1 + \cdots + p_1^{\alpha_1} = 2p^2 \\ t = 1 \end{cases} \tag{10}$$

Trường hợp (9): Do α_1 lẻ suy ra $2p \vdots (p_1 + 1)$ do đó $2p = 1 + p_1$ hay $\alpha_1 = 1$. Từ (8) ta có $p^2 + p + 1 = (2p-1)\,t^2$. Suy ra

$$p^2 + \left(1 - 2t^2\right)p + t^2 + 1 = 0,$$

$$\Rightarrow \Delta_p = \left(1 - 2t^2\right)^2 - 4\left(t^2 + 1\right) = 4\left(t^2 - 1\right)^2 - 7 = a^2,\ a \in \mathbb{Z}^+,$$

$$\Leftrightarrow \left(2t^2 - 2 + a\right)\left(2t^2 - 2 - a\right) = 7.$$

Suy ra $t^2 = 3$, vô lý.

Trường hợp (10): Ta có

$$\begin{cases} 2p^2 \vdots (p_1 + 1) \\ q = p_1^{\alpha_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 + 1 = 2p \ \vee p_1 + 1 = 2p^2 \\ q = p_1^{\alpha_1} \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

- $p_1 + 1 = 2p \Rightarrow \alpha_1 = 1 \Rightarrow q = p_1 = 2p - 1$. Từ (8) ta có $p^2 + p + 1 = (2p-1)$, hay $p^2 - p + 2 = 0$, vô lý.
- $p_1 + 1 = 2p^2 \Rightarrow q = 2p^2 - 1$. Từ (8) ta có

  $$p^2 + p + 1 = \left(2p^2 - 1\right) \Leftrightarrow p^2 - p - 2 = 0 \Rightarrow p = 2,$$

  vô lý.

Vậy điều giả sử là sai từ đó ta có điều phải chứng minh. $\square$

6. Bài tập tự luyện

Bài tập 1. Tìm số hoàn hảo thứ 7 và thứ 8.

Bài tập 2. Tìm số nguyên dương thừa lẻ nhỏ nhất.

Bài tập 3. Chứng minh rằng mọi ước của một số thiếu hoặc số hoàn hảo là số thiếu.

Bài tập 4. Chứng minh rằng $n, \varphi(n)$ không là cặp số thân thương (với $n \in \mathbb{Z}^+$ và $\varphi(n)$ là hàm Euler của n).

Bài tập 5. Chứng minh rằng số $141824339040 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 17 \cdot 19$ là 5—hoàn hảo.

Bài tập 6. Tìm một số nguyên 3—thừa.

Bài tập 7. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k tồn tại vô hạn số nguyên k—thừa.

Bài tập 8. a) Chứng minh rằng nếu n là số hoàn hảo lẻ thì $n = p^a m$ với p là số nguyên tố lẻ a, m là các số nguyên dương sao cho $p \equiv a \pmod 4$.

b) sử dụng giả thiết phần a) chứng minh rằng nếu n là số hoàn hảo lẻ thì $n \equiv \pmod 4$.

Bài tập 9. Chứng minh rằng nếu $n = p^a m^2$ (với p là số nguyên tố lẻ a, m là các số nguyên dương) là số hoàn hảo lẻ thì $p \equiv n \pmod 8$.

Bài tập 10. Cho n là số nguyên dương. Xét dãy số nguyên dương $n_1, n_2, n_3, \ldots$ xác định bởi $n_1 = \sigma(n) - n, \ n_{k+1} = \sigma(n_k) - n_k$ với $k = 1, 2, 3, \ldots$

a) Chứng minh rằng nếu n là số hoàn hảo thì $n = n_1 = n_2 = n_3 = \cdots$

b) Chứng minh rằng nếu n và m là cặp số thân thương thì $n_1 = m$, $n_2 = n$, $n_3 = m$, $n_4 = n$, ... và hơn nữa tuần hoàn với chu kỳ 2.

c) Tìm dãy số nguyên được tạo thành nếu $n = 12496 = 2^4 \cdot 11 \cdot 71$.

Tài liệu

[1] *Elementary Number Theory And Its Applicatión*, KennethH.Rosen.

[2] *Số học*, Hà Huy Khoái

[3] Tạp chí Epsilon số 7 năm 2016.

TUỔI TRẺ CỦA MỘT NGƯỜI PHỤ NỮ ĐOẠT HUY CHƯƠNG FIELDS

Michael Joswig
Lê Nam Trường dịch từ bản tiếng Đức

GIỚI THIỆU

Michael Joswig (ông là một trong những "*Giáo sư Einstein*" [a]) nghiên cứu về toán rời rạc và hình học tại trường đại học kỹ thuật Berlin. Ông đã tham gia viết phần mềm "*polymake*" mà ngày nay là chương trình tiêu chuẩn trong việc nghiên cứu hình học rời rạc.[b]

[a] http://www.einsteinfoundation.de/de/personen-projekte/einstein-professoren/
[b] spektrum.de/artikel/1420974

Chân thành cám ơn GS.Đàm Thanh Sơn đã giới thiệu bài viết với độc giả.

Đóng góp của Mirzakhanis cho Toán học đã bắt đầu bằng một công trình liên quan đến bài toán bốn màu: Với bốn màu, có thể tô màu cả các nước trên một bản đồ bất kỳ sao cho không có hai nước có chung biên giới được tô cùng màu? "*Biên giới chung*" ở đây được hiểu là phải có hơn một điểm chúng.

Để giải bài toán này, trước tiên ta hãy đặt lại vấn đề theo một cách khác. Thay các nước bằng một điểm (một đỉnh) và nối hai đỉnh với nhau bằng một đường thẳng (một cạnh) khi và chỉ khi hai nước đó có cùng biên giới. Qua đó một bản đồ trở thành một "*đồ thị*".

Lý thuyết đồ thị trong Toán học được ứng dụng rất nhiều, bởi vì các thành phần của nó rất tổng quát nên được ứng dụng ở nhiều lĩnh vực: Đỉnh và cạnh trước hết không có một tính chất nào cả ngoại trừ chúng được kết nối với nhau. Hơn nữa, trong nhiều ứng dụng, bỏ qua những tính chất không quan trọng và chỉ tập trung vào sự kết nối giúp ta giải quyết được các vấn đề.

Bài toán nêu trên không chỉ thiết thực với những nhà sản xuất bản đồ mà còn được ứng dụng vào những lĩnh vực khác. Ví dụ như, trong mạng viễn thông hai máy phát sóng mà lưu vực hoạt động phủ lên nhau thì không được dùng cùng tần số để tránh hiện tượng giao thoa. Những sự xung đột như thế người ta cũng gặp phải khi thiết kế các chương trình máy tính, tài nguyên có hạn ở đây là các thanh ghi, bộ nhớ cực nhanh trong các vi xử lý.

Bản đồ, mạng viễn thông hoặc các hệ thống tương tự là những đồ thị đơn giản. Tức là, đồ thị chứa hữu hạn các đỉnh, không có cạnh nào nối một đỉnh với chính nó, giữa hai đỉnh có nhiều nhất là một cạnh, và các cạnh không có thêm những tính chất khác như trọng số hay hướng.

Trong bài toán tô màu bản đồ và các bài toán tương tự, nhiệm vụ là ta phải gán một tính chất nào đó cho mỗi đỉnh, mà ở đây là màu. Tại mỗi đỉnh, một số các màu đã được cho trước và ta phải chọn một màu, sao cho không có hai đỉnh mà được nối với nhau bởi một cạnh được tô cùng một màu.

Một trong số những định lý quan trong ở trong lĩnh vực này được Kenneth Appel và Wolfgang Haken (cùng với John B. Koch) chứng minh vào năm 1976/77. Định lý này nói rằng, tất cả các đồ thị phẳng (biểu diễn được trên một mặt phẳng mà các cạnh không chéo nhau) đều có thể được tô đúng cách bằng 4 màu (tại tất cả các đỉnh ta đều được lựa chọn một trong 4 màu giống nhau cho trước). Bởi vì việc chứng minh định lý này có một phần lớn được dựa vào tính toán trên máy tính, đã có một số tranh luận về sự chính xác của nó. Cuối cùng vào năm 2005 mọi việc được rõ ràng khi mà Georges Gonthier và Benjamin Werner đưa ra một lời giải chính thức cho định lý bốn màu trong ngôn ngữ lập trình Coq.

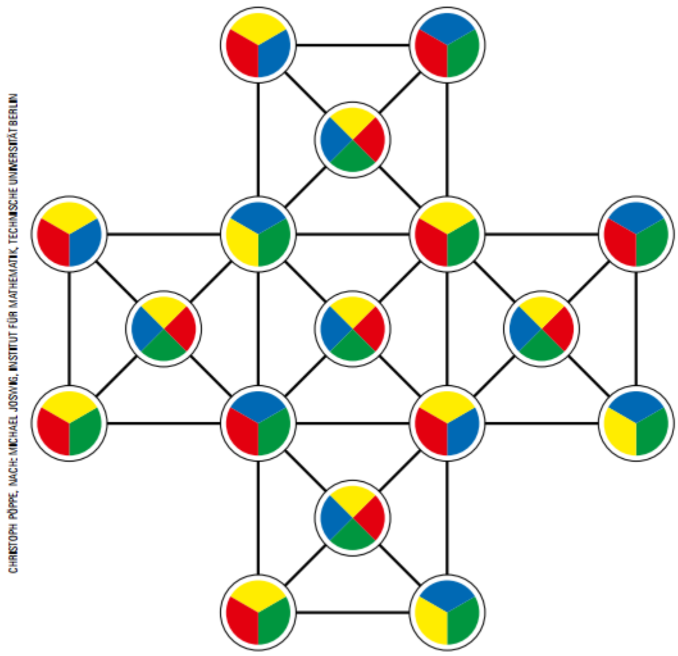
Maryam Mirzakhani

Nước cộng hoà hồi giáo không chủ trương hỗ trợ cho các nghiên cứu khoa học và nhất là với các phụ nữ. Tuy nhiên Maryam Mirzakhani, sinh năm 1977 tại Teheran, không xem mình là nạn nhân của hệ thống đó. Hơn nữa sự kết thúc của cuộc chiến với Irac vào năm 1988 là một thời điểm thuận lợi cho cô. Cô học sinh Mirzakhani đã tham gia IMO 1994 và 1995, cả hai lần cô đều dành được huy chương vàng. Cô tốt nghiệp đại học vào năm 1999 tại Iran, tại trường đại học công nghệ Scharif. Sau đó cô sang Harvard để làm tiến sĩ dưới sự hướng dẫn của Curtis McMullen, người đã nhận huy chương Fields vào năm 1998. Trong bài luận văn của cô vào năm 2004 cô đã trả lời được các câu hỏi được bỏ ngỏ bởi Edward Witten (cũng từng được Fields) và Maxim Kontsevich. Sau một thời gian làm việc ở viện toán học Clay và Princeton thì từ năm 2008 cô là giáo sư tại trường đại học Standford. Trong hội nghị toán học ở Seoul vào năm 2014 cô nhận được huy chương Fields, được coi là giải Nobel cho toán học.

Mirzakhani đã nghiên cứu về bài toán bốn màu trong những công trình đầu tiên của cô. Có thể tìm được cách tô màu đúng nếu như tại các đỉnh sự lựa chọn màu là không như nhau? Bài toán như là một trò chơi giữa hai đối thủ: Người thợ muốn tô màu đúng từ những màu anh có tại các đỉnh, người cung cấp đưa màu đến các đỉnh với mục đích ngăn cản người thợ tìm được một cách tô màu đúng (không có hai đỉnh láng giềng nào được tô cùng một màu). Ai thắng phụ thuộc vào cấu trúc của đồ thi. Một đồ thị gọi là k-list-color nếu người thợ luôn luôn thắng khi tại mỗi đỉnh người cung cấp đưa đến đúng k màu.

Mọi đồ thị k-list-color đều là là k-color, bởi vì đó là một trường hợp đặc biết khi tại các đỉnh ta đều có k màu giống nhau. Chiều ngược lại thì không đúng: Ví dụ như ở hình: Đồ thị hai phía $K2$, 4 là 2-color (ta tô màu bên trái vàng và bên phải xanh) nhưng không phải là 2-list-color, bởi vì không có cách tô màu đúng nào cả từ những màu đã cho trong hình.

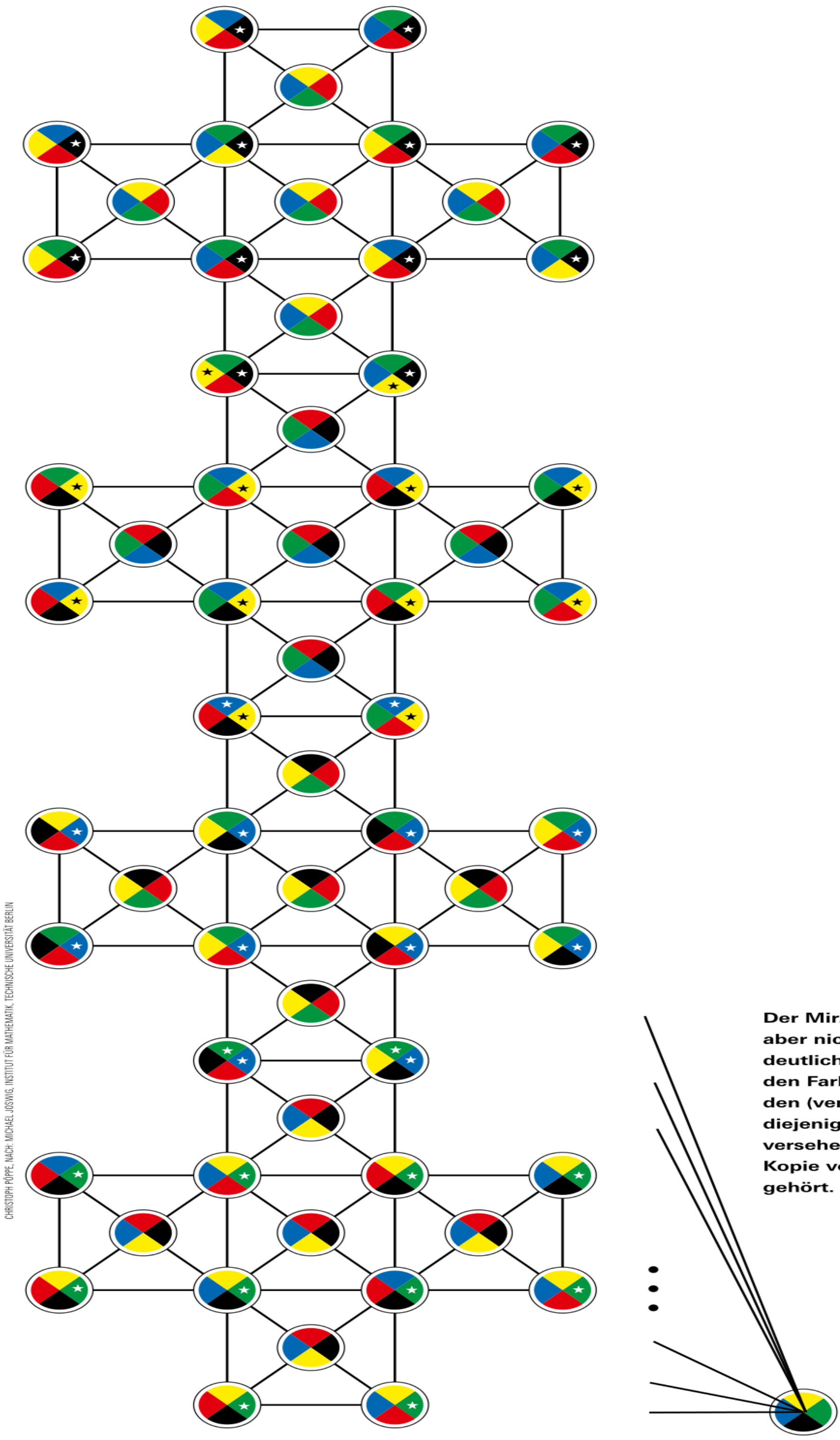
Trong công trình của cô vào năm 1996 Maryam Mirzakhani đã công bố một đồ thị phẳng – theo định lý của Appel và Haken thì hiển nhiên đồ thị này là 4-color – với 63 đỉnh là một đồ thị không 4-list-color. Sự tồn tại của những đồ thị như thế đã được dự đoán bởi Paul Erdos, Arthur L. Rubin và Herbert Taylor vào năm 1979. Vào năm 1993 Margit Voigt, bây giờ là nữ giáo sư tại trường đại học kỹ thuật và kinh tế Dresden, đã chứng minh điều đó với một đồ thị có 238 đỉnh. Công trình của Mirzakhanis đã mang đến một sự cải thiện khi vì cô dùng ít đỉnh hơn. Đặc sắc hơn là ở đồ thị của Mirzakhanis, ngược lại với đồ thị của Voigts, là đồ thị 3-color. Và điều này đã trả lời được vấn đề đang bỏ ngỏ vào thời điểm đó. Ngay sau đó Carsten Thomassen ở đại học kỹ thuật Đan Mạch ở Lyngby đã chứng minh rằng mọi đồ thị đều là 5-list-color.



Der Graph *B* mit einer Listenfärbungsaufgabe ohne Lösung.

Bằng cách nào Mirzakhani đã tìm được một đồ thị 3-color mà không phải là 4-list-color. Yếu tố quyết định ở đây là một đồ thị nhỏ hơn, ta gọi là B (xem hình bên trái, dưới). 17 đỉnh của đồ thị thuộc về hai nhóm khác nhau: "*Trong*" với bốn đỉnh kề và bốn màu lựa chọn, là tất cả những màu có trong đồ thị, và "*ngoài*" với ba màu và có ba hoặc bảy đỉnh kề.

Từ một việc không thể tìm được cách tô màu đúng cho một đồ thị nhỏ, Mirzakhani đã tìm được lời giải cho một đồ thị lớn hơn. Việc B là một đồ thị 3-color ta có thể dễ dàng thấy được: Tô màu đỏ tất cả các đỉnh "*trong*" và với các đỉnh "*ngoài*" ta tô màu vàng và xanh đậm luân phiên. Tuy nhiên, với những màu đã cho trong hình thì ta không thể tìm được một cách tô màu đúng nào. Để chứng minh được điều đó, ta phải thử hết tất cả các cách tô màu. Nhưng việc đó cũng rất dễ dàng do tính đối xứng của đồ thị và sự tổng quát của các màu.



Der Mirzakhani-Graph *M* ist 3-färbbar, aber nicht 4-listenfärbbar. Zur Verdeutlichung der Konstruktion sind in den Farblisten der äußeren Knoten in den (verschmolzenen) Kopien von *B* diejenigen Farben mit Sternchen versehen, die festlegen, zu welcher Kopie von *B* der jeweilige Knoten gehört.

Ta sẽ dẫn dắt tới lời giải từ đồ thị B này. Ta sẽ dựng một đồ thị mới từ bốn bản sao của B và một đỉnh thêm. Ta nối đỉnh thêm với tất các các đỉnh ngoài. Tiếp theo ta lấy thêm bốn màu mới a, b, c và d, sao cho tổng cộng ta có 8 màu. Trong bản sao đầu tiên của B ta thêm màu a vào tất cả các đỉnh ngoài làm màu thứ tư, và với các bản sao tiếp theo ta sẽ thêm màu b, c và d. Còn ở đỉnh ta đã lấy thêm ta sẽ cung cấp bốn màu a, b, c và d. Như thế ta sẽ có được một đồ thị phẳng với $4 \cdot 7 + 1 = 69$ đỉnh và mỗi đỉnh có 4 màu.

Sử dụng các màu đã cho ta sẽ không thể tìm được một cách tô màu đúng. Lý do nằm ở vai trò đặc biệt của đỉnh mà ta đã lấy thêm. Không mất tính tổng quát giả sử ta tô màu đỉnh đó là a. Như vậy trong tất cả các bản sao của B, các đỉnh ngoài không thể được tô màu a. Với bản sao mà đã được thêm màu a vào các đỉnh ngoài khi ta xây dựng đồ thị mới, sẽ không tồn tại một cách tô màu đúng (đã được chứng minh cho đồ thị B). Như vậy đồ thị mới này với 69 đỉnh là không 4-list-color.

Mặt khác, ta dễ dàng chứng minh nó là 3-color: Ta tô màu đỏ đỉnh thêm giống như các đỉnh "*trong*" và tô các đỉnh còn lại ở các bản sao như cách đã mô tả ở trên cho đồ thị B.

Như vậy là việc chứng minh đã hoàn thành. Với một ít tinh chỉnh ta có thể ghép bốn bản sao lại với nhau, qua đó ta bỏ đi được sáu đỉnh (xem hình bên trái). Để làm được điều đó ta cũng phải sửa một số màu trong các bản sao như trong hình. Cuối cùng ta có một đồ thị với năm màu mà ta gọi là đồ thị M với $63 = 69 - 6$ đỉnh.

Lời giải ngắn gọn và xúc tích của Mirzakhanis đã nói lên vẻ đẹp của toán học. Kết quả của cô vẫn là tốt nhất cho tới ngày nay. Không ai có thể tìm ra một đồ thị 3-color nào nhỏ hơn mà không phải là 4-list-color. Ta dễ dàng thấy được tài năng của Maryam Mirzakhanis qua điều này, việc xây dựng lên lời giải thật quá đơn giản.

Tài liệu

[1] Gonthier, G.: Formal Proof – the Four-Color Theorem. In: Notices of the American Mathematical Society 55, S. 1382–1393, 2008.

[2] Mirzakhani, M.: A Small Non-4-Choosable Planar Graph. In: Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications 17, S. 15–18, 1996.

[3] Thomassen, C.: Every Planar Graph Is 5-Choosable. In: Journal of Combinatorial Theory Series B 62, S. 180–181, 1994.

[4] Voigt, M.: List Colourings of Planar Graphs. In: Discrete Mathematics 120, S. 215–219, 1993.

MYTS - CUỘC THI TÌM KIẾM TÀI NĂNG TOÁN HỌC

Phạm Văn Thuận, Ban tổ chức cuộc thi MYTS

LỜI BAN BIÊN TẬP

Kỳ thi tìm kiếm Tài năng Toán học trẻ (MYTS) giành cho thí sinh từ 10 đến 16 tuổi, được Hội Toán học Việt Nam và Hexagon of Maths & Science tổ chức thường niên nhằm tạo sân chơi khuyến khích học sinh yêu mến môn toán học.

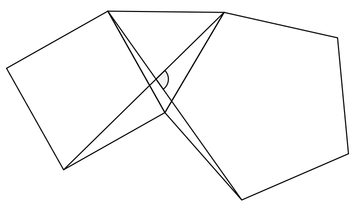
Kỳ thi có hai vòng và được tổ chức lần đầu tiên vào năm 2016 dành cho các khối lớp từ 4 đến 8 tại Hà Nội. Năm nay, Ban tổ chức đã quyết định bổ sung thêm hai khối lớp là 9 và 10, ngoài ra thêm địa điểm thi ở TP.HCM. Kỳ thi sẽ diễn ra vào ngày 26/03/2017 sắp tới.

Các thông tin về cuộc thi có thể xem thêm tại trang web: `http://www.hexagon.edu.vn/myts.html`

Dưới đây chúng tôi xin giới thiệu đề thi và đáp án đề vòng 2 của khối lớp 7, 8 của MYTS lần 1.

1. Đề thi khối lớp 7

Bài toán 1. *Một hình vuông và một hình ngũ giác đều được vẽ ra phía ngoài của một tam giác đều. Tính số đo góc được đánh dấu.*

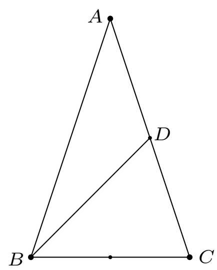


Bài toán 2. *Ba số thực x, y, z thỏa mãn*

$$|x| - 3 = |y| + 4 = 10 - |z|.$$

Tìm giá trị lớn nhất của $K = y(x + z)$.

Bài toán 3. *Tam giác ABC cân có $AB = AC = 8$ cm. Đường trung tuyến $BD = 6$ cm. Nếu $BC^2 = x$ cm, tính giá trị của x.*



Bài toán 4. *Trong một căn phòng có 26 người gồm những người là người thật thà (là người luôn nói thật) và những người là người dối trá (là người luôn nói dối).*

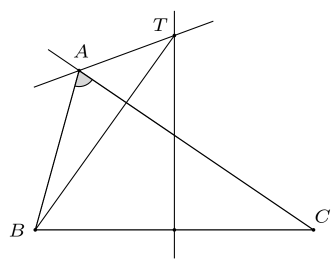
Người đầu tiên nói	:	*"Trong phòng không có ai là người thật thà".*
Người thứ hai nói	:	*"Trong phòng có không quá một người thật thà".*
Người thứ ba nói	:	*"Trong phòng có không quá hai người thật thà".*
	⋮	
Người cuối cùng nói	:	*"Trong phòng không có quá 25 người thật thà".*

Hỏi trong phòng có tất cả bao nhiêu người thật thà?

Bài toán 5. *Giả sử K là một bộ số gồm mười số (không nhất thiết khác nhau) sao cho mỗi số trong K đều bằng tổng bình phương của tất cả chín số còn lại. Hãy tìm tất cả những bộ số K như vậy.*

Bài toán 6. *Ở xứ sở Magic Wood chỉ có ba loài vật: có 12 con rắn, 23 con chuột và 31 con mèo. Hễ khi con rắn ăn con mèo, thì nó biến thành con chuột, nhưng khi con mèo ăn con chuột thì nó biến thành con rắn. Hơn nữa, khi con rắn ăn con chuột, nó biến thành con mèo. Hỏi nhiều nhất có bao nhiêu con vật ở Magic Wood khi không con nào ăn con nào nữa?*

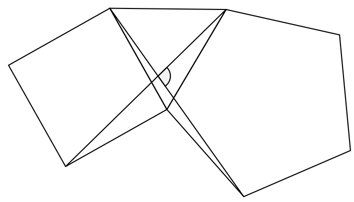
Bài toán 7. *Tam giác ABC có góc $\angle BAC = 70^\circ$. Đường trung trực của cạnh BC cắt phân giác ngoài của góc A tại T. Biết rằng góc $\angle BAT$ tù, còn góc $\angle CAT$ nhọn, hãy tính số đo góc $\angle TBC$.*



Bài toán 8. *Xung quanh một bờ hồ hình tròn có trồng 5 cây dừa. Người ta nhận thấy rằng các độ lệch chiều cao giữa hai cây liên tiếp bất kỳ luôn bằng nhau. Chứng minh rằng cả năm cây đều có cùng chiều cao.*

2. Đáp án Khối lớp 7

Bài toán 1. *Một hình vuông và một hình ngũ giác đều được vẽ ra phía ngoài của một tam giác đều. Tính số đo góc được đánh dấu.*



Lời giải.. Dễ thấy tam giác CAF cân tại A vì $AC = AF$. Mỗi góc trong của ngũ giác đều là 108°, nên $\angle CAF = 60^\circ + 108^\circ = 168^\circ$. Do đó,

$$\angle CFA = \angle FCA = \frac{180^\circ - 168^\circ}{2} = 6^\circ.$$

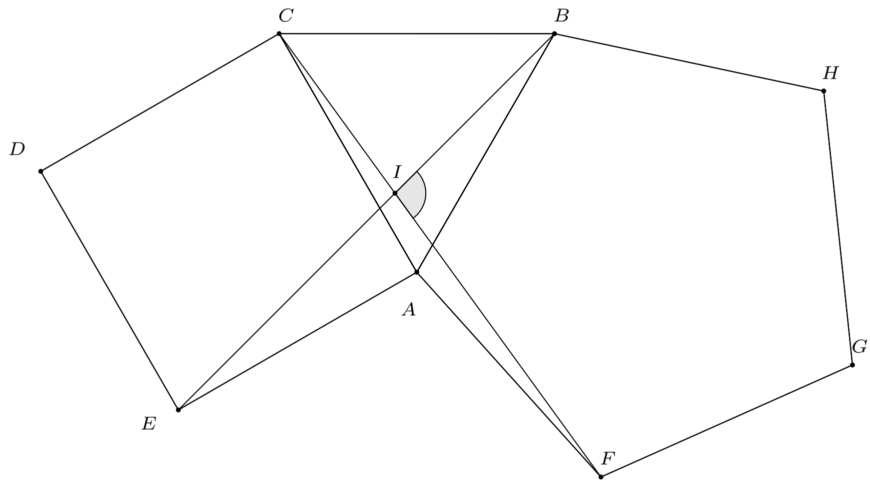
Thành ra, $\angle BCI = 60^\circ - 6^\circ = 54^\circ$.

Tương tự, ta tính được góc $\angle EBA$ của tam giác cân ABE.

$$\angle ABE = \angle AEB = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Từ đó, $\angle CBI = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$. Vậy, góc cần tìm (đánh dấu) chính là góc ngoài của tam giác CBI tại đỉnh I. Thành ra,

$$\angle BIF = 45^\circ + 54^\circ = 99^\circ.$$



□

Bài toán 2. *Ba số thực x, y, z thỏa mãn*

$$|x| - 3 = |y| + 4 = 10 - |z|.$$

Tìm giá trị lớn nhất của $K = y(x + z)$.

Chứng minh. Từ giả thiết suy ra $|x| + |z| = 13$. Lưu ý rằng

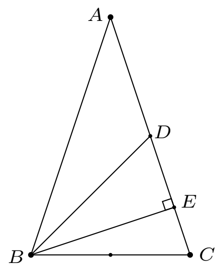
$$x + z \leq |x| + |z| = 13, \quad \text{với moi } x, z \in \mathbb{R}.$$

Lại vì $|y| + 4 = 10 - |z| \leq 10$ nên $|y| \leq 6$. Thành ra

$$K \leq 13 \times 6 = 78.$$

Có thể chọn $x = 13$, $y = 6$, $z = 0$. Đáp số: 78. □

Bài toán 3. *Tam giác ABC cân có $AB = AC = 8$ cm. Đường trung tuyến $BD = 6$ cm. Nếu $BC^2 = x$ cm, tính giá trị của x.*



Lời giải.. Hạ đường cao BE, và gọi $DE = k$. Áp dụng định lý Pythagore cho hai tam giác vuông ABE và BDE ta được

$$BE^2 = AB^2 - AE^2, \quad \text{và} \quad BE^2 = BD^2 - DE^2.$$

Thay các giá trị độ dài cho ta

$$BE^2 = 8^2 - (4+k)^2, \quad \text{và} \quad BE^2 = 6^2 - k^2.$$

Trừ từng vế ta được

$$8^2 - 6^2 - (4+k)^2 + k^2 = 0.$$

Khai triển và tính toán ta được $k = 3/2$. Từ đó,

$$BE^2 = \frac{135}{4}, \quad EC^2 = \frac{25}{4}.$$

Do đó,

$$BC^2 = \frac{135+25}{4} = \frac{160}{4} = 40.$$

Đáp số: $x = 40$. □

Bài toán 4. *Trong một căn phòng có 26 người gồm những người là người thật thà (là người luôn nói thật) và những người là người dối trá (là người luôn nói dối).*

Người đầu tiên nói : "Trong phòng không có ai là người thật thà".
Người thứ hai nói : "Trong phòng có không quá một người thật thà".
Người thứ ba nói : "Trong phòng có không quá hai người thật thà".
⋮
Người cuối cùng nói : "Trong phòng không có quá 25 người thật thà".

Hỏi trong phòng có tất cả bao nhiêu người thật thà?

Lời giải.. Ta có những nhận xét sau:

Nếu một ai đó nói dối, thì tất cả những người trước đó cũng nói dối.

Trong phòng chắc chắn có người dối trá, vì nếu người đầu tiên nói thật thì theo đúng lời anh ta, trong phòng không có người nói thật (mâu thuẫn).

Tương tự, ta cũng kết luận được trong phòng có người thật thà.

Giả sử trong phòng có x người dối trá. Người cuối cùng nói dối đã nói: "Trong phòng không có quá $x-1$ người thật thà", nghĩa là trong phòng có ít nhất x người thật thà. Mặt khác người thứ $x+1$ là người thật thà và từ lời anh ta nói suy ra có không quá x người thật thà. Tóm lại, có tất cả x người thật thà. Như vậy $x+x=26$ hay $x=13$.

Vậy trong phòng có tất cả 13 người thật thà. □

Bài toán 5. *Giả sử K là một bộ số gồm mười số (không nhất thiết khác nhau) sao cho mỗi số trong K đều bằng tổng bình phương của tất cả chín số còn lại. Hãy tìm tất cả những bộ số K như vậy.*

Hướng dẫn. Không mất tính tổng quát có thể giả sử mười số trong tập K có thứ tự như sau

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{10}.$$

Từ giả thiết rằng mỗi số a_j đều có thể viết dưới dạng tổng bình phương của chín số còn lại nên ta có thể chọn $j=1$ và $j=10$. Thành ra

$$a_1 = a_2^2 + a_3^2 + \cdots a_{10}^2, \text{ và } a_{10} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_9^2.$$

Từ đây có thể suy ra ngay rằng tất cả các số trong K đều không âm. Vì $a_1 \leq a_{10}$ nên suy ra

$$a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{10}^2 \leq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_9^2.$$

Tức là $a_{10}^2 \leq a_1^2$. Suy ra $a_{10} \leq a_1$ vì các số đều không âm. Tức là có thể suy ra tất cả các số trong tập K bằng nhau. Cho nên $a_j = 9a_j^2$, hay $a_j = 0$ hoặc $a_j = \frac{1}{9}$. Đáp số:

$$K = \left\{ (0, 0, \ldots, 0), \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{9}\right) \right\}.$$

□

Bài toán 6. *Ở xứ sở Magic Wood chỉ có ba loài vật: có 12 con rắn, 23 con chuột và 31 con mèo. Hễ khi con rắn ăn con mèo, thì nó biến thành con chuột, nhưng khi con mèo ăn con chuột thì nó biến thành con rắn. Hơn nữa, khi con rắn ăn con chuột, nó biến thành con mèo. Hỏi nhiều nhất có bao nhiêu con vật ở Magic Wood khi không con nào ăn con nào nữa?*

Lời giải.. Nhiều nhất là một loài sẽ tồn tại. Đó không thể là loài mèo, vì tính chẵn lẻ của mèo và chuột luôn giống nhau. vì vậy, tất cả số mèo sẽ biến mất, tức là cần 31 lần ăn. Kéo theo 35 con vật sẽ tồn tại. Mặt khác, nếu 23 con mèo ăn 23 con chuột, biến thành con rắn, thfi sẽ có 35 con rắn và 8 con mèo. Tiếp theo, 4 con rắn sẽ ăn 4 con mèo, biến thành con chuột, và sẽ bị 4 con mèo ăn nốt. Tức là sẽ còn đúng 35 con rắn. □

Lời giải 2.. Gọi số lần rắn ăn mèo là a, mèo ăn chuột là b và rắn ăn chuột là c. Gọi x, y, z lần lượt là số rắn, số mèo, và số chuột. Ta có

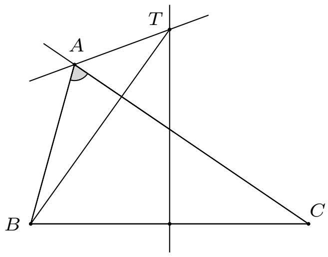
$$\begin{cases} 12 - a - c + b = & x, \\ 31 - a - b + c = & y, \\ 23 - b - c + a = & z. \end{cases} \tag{1}$$

Không con nào ăn con nào khi trong ba số x, y, z có hai số bằng 0. Do y, z cùng tính chẵn lẻ, và x thì khác tính chẵn lẻ với y, z nên suy ra

$$31 - a - b + c = 0, \quad \text{và} \quad 23 - b - c + a = 0.$$

Giải hệ này cho ta $b = 27$. Do đó, $a - c = 4$. Số rắn là $12 + 27 - a - c = 39 - a - c$. Để số lượng rắn là lớn nhất thì $a + c$ phải nhỏ nhất. Tức là $a + c = a - c + 2c = 4 + 2c$ nhỏ nhất, tức là $c = 0$. Vậy nên, đáp số là $39 - 4 = 35$. □

Bài toán 7. *Tam giác ABC có góc $\angle BAC = 70°$. Đường trung trực của cạnh BC cắt phân giác ngoài của góc A tại T. Biết rằng góc $\angle BAT$ tù, còn góc $\angle CAT$ nhọn, hãy tính số đo góc $\angle TBC$.*



Lời giải.. Kẻ TH,TK lần lượt vuông góc với AB, AC. Do góc $\angle BAT$ tù và $\angle AHT = 90°$ nên H thuộc tia đối của tia AB.

Vì $\angle CAT$ nhọn và $\angle TKC$ vuông nên K thuộc tia AC. Vậy nên, $\angle HAT = \angle TAK$.

Suy ra, hai tam giác bằng nhau $\Delta TAH = \Delta TAK$. Dẫn đến, $TH = TK$, mà $TB = TC$ nên suy ra hai tam giác bằng nhau TBH và TCK. Suy ra

$$\angle TBH = \angle TCK,$$

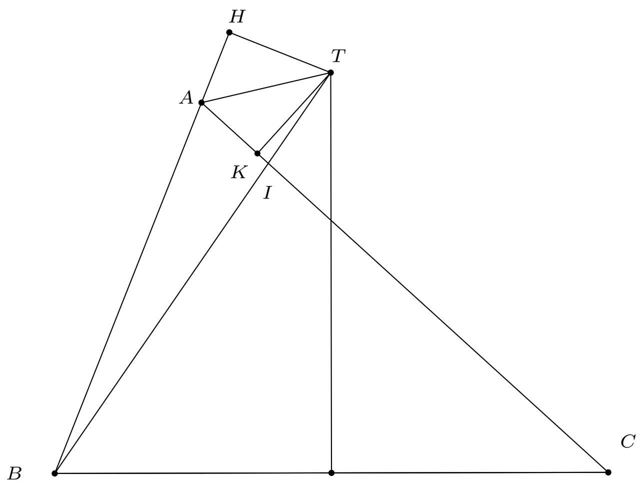
thành ra $\angle TBA = \angle TCA$.

Do $\angle CAT$ nhỏ hơn góc BAT nên T, B thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AC. Đoạn BT cắt AC tại I. Do $\angle AIB = \angle TIC$ và $\angle ABI = \angle TCI$, suy ra $\angle BAI = \angle CTI$.

Suy ra, $\angle BTC = \angle BAC = 70°$, suy ra $\angle TBC = \frac{180° - 70°}{2} = 55°$.

Do $\angle CAT$ nhỏ hơn góc BAT nên T, B thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AC. Đoạn BT cắt AC tại I. Do $\angle AIB = \angle TIC$ và $\angle ABI = \angle TCI$, suy ra $\angle BAI = \angle CTI$.

Suy ra, $\angle BTC = \angle BAC = 70°$, suy ra $\angle TBC = \frac{180° - 70°}{2} = 55°$.



□

Bài toán 8. *Xung quanh một bờ hồ hình tròn có trồng 5 cây dừa. Người ta nhận thấy rằng các độ lệch chiều cao giữa hai cây liên tiếp bất kỳ luôn bằng nhau. Chứng minh rằng cả năm cây đều có cùng chiều cao.*

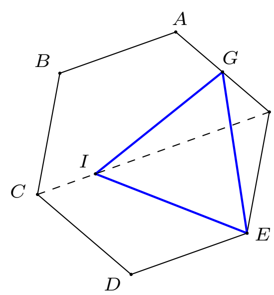
Chứng minh. Đặt $|a-b| = |b-c| = |c-d| = |d-e| = |e-a| = k \geq 0$, thì ta có $a - b = \epsilon_1 k$, $b - c = \epsilon_2 k$, $c - d = \epsilon_3 k$, $d - e = \epsilon_4 k$, $e - a = \epsilon_5 k$, với $\epsilon_j = \pm 1$. Cộng từng vế cho ta

$$0 = k(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5).$$

Do tổng các ϵ_j trên là số lẻ nên từ đó suy ra $k = 0$, kéo theo $a = b = c = d = e$. □

3. Đề thi khối lớp 8

Bài toán 2. *Cho lục giác đều $ABCDEF$, với G là trung điểm của FA, còn I là điểm trên đường chéo CF sao cho $IC = \frac{1}{3} IF$. Chứng minh rằng tam giác IGE đều.*



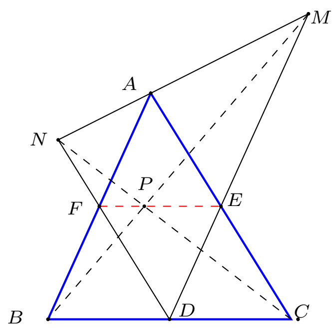
Bài toán 3. *Biết rằng α là nghiệm duy nhất của đa thức $P(x) = x^3 + 9x - 5$; và β là nghiệm thực duy nhất của đa thức $Q(x) = x^3 - 15x^2 + 84x - 165$. Chứng minh rằng $\alpha + \beta = 5$.*

Bài toán 4. *Bác Dư chép lên bảng các số tự nhiên từ 1 đến n. Do sơ suất, bác Dư quên viết một số tự nhiên nên trung bình cộng của các số trên bảng là $\frac{599}{17}$. Hỏi bác Dư đã quên viết số nào?*

Bài toán 5. *Ở xứ sở Magic Wood chỉ có ba loài vật: có 12 con rắn, 23 con chuột và 31 con mèo. Hễ khi con rắn ăn con mèo, thì nó biến thành con chuột, nhưng khi con mèo ăn con chuột thì nó biến thành con rắn. Hơn nữa, khi con rắn ăn con chuột, nó biến thành con mèo. Hỏi nhiều nhất có bao nhiêu con vật ở Magic Wood khi không con nào có thể ăn con nào nữa?*

Bài toán 6. *Giả sử K là một bộ số gồm mười số (không nhất thiết khác nhau) sao cho mỗi số trong K đều bằng tổng bình phương của tất cả chín số còn lại. Hãy tìm tất cả những bộ số K như vậy.*

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC với D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA và AB. Một đường thẳng đi qua A cắt DE, DF tại M, N tương ứng. Gọi P là giao điểm của BM, và CN. Chứng minh rằng ba điểm E, F, P thẳng hàng.*



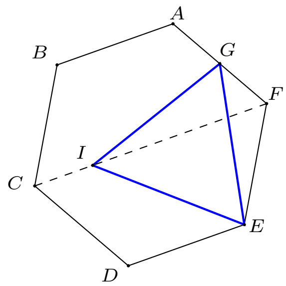
Bài toán 8. *Xung quanh một bờ hồ hình tròn có trồng 5 cây dừa. Người ta nhận thấy rằng các độ lệch chiều cao giữa hai cây liên tiếp bất kỳ luôn bằng nhau. Chứng minh rằng cả năm cây đều có cùng chiều cao.*

Bài toán 9. *Xác định tất cả các số nguyên dương n sao cho*

$$\frac{7n-12}{2^n}+\frac{2n-14}{3^n}+\frac{24n}{6^n}=1.$$

4. Đáp án Khối lớp 8

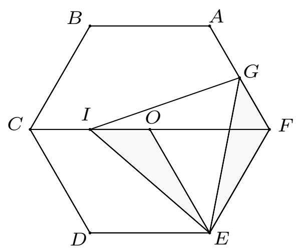
Bài toán 2. *Cho lục giác đều $ABCDEF$, với G là trung điểm của FA, còn I là điểm trên đường chéo CF sao cho $IC = \frac{1}{3}IF$. Chứng minh rằng tam giác IGE đều.*

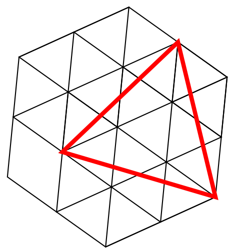


Lời giải.. Gọi O là trung điểm của CF. Vì lục giác $ABCDEF$ đều và tính đối xứng nên O cũng là tâm của lục giác. Ta sẽ chứng minh hai tam giác IOE, GFE bằng nhau.

Ta có $OE = OF$. Lại có $OI = OC/2 = AF/2 = GF$. Mặt khác, $\angle EFG = \angle EOI = 120°$. Suy ra hai tam giác EFG và EOI bằng nhau. Suy ra $EG = EI$, và $\angle GEF = \angle IEO$. Suy ra $\angle GEI = \angle FEO = 60°$. Vậy nên, tam giác IGE đều.

Các khác là vẽ lưới tam giác đều.





Người đề xuất: Phạm Văn Thuận. □

Bài toán 3. *Biết rằng α là nghiệm duy nhất của đa thức $P(x) = x^3 + 9x - 5$; và β là nghiệm thực duy nhất của đa thức $Q(x) = x^3 - 15x^2 + 84x - 165$. Chứng minh rằng $\alpha + \beta = 5$.*

Chứng minh. Vì α là nghiệm của đa thức $P(x)$ nên ta có $\alpha^3 + 9\alpha - 5 = 0$. Lưu ý rằng là β là nghiệm của $Q(x)$ nên

$$Q(\beta) = \beta^3 - 15\beta^2 + 84\beta - 165 = 0.$$

Ta sẽ chứng minh $5 - \alpha$ cũng là nghiệm của $Q(x)$. Thực vậy, ta có

$$Q(5-\alpha) = (5-\alpha)^3 - 15(5-\alpha)^2 + 84(5-\alpha) - 165 = -\alpha^3 - 9\alpha + 5 = 0.$$

Tức là $5-\alpha$ là nghiệm của $Q(x)$, mà β cũng là nghiệm của $Q(x)$. Vì tính duy nhất nghiệm thực, suy ra $5 - \alpha = \beta$, tức là $\alpha + \beta = 5$. Người đề xuất: Nguyễn Tiến Lâm, Phạm Văn Thuận. □

Bài toán 4. *Bác Dư chép lên bảng các số tự nhiên từ 1 đến n. Do sơ suất, bác Dư quên viết một số tự nhiên nên trung bình cộng của các số trên bảng là $\frac{599}{17}$. Hỏi bác Dư đã quên viết số nào?*

Chứng minh. Giả sử số bỏ sót là d. Khi đó, tổng S các số tự nhiên còn lại là

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n - d = \frac{n(n+1)}{2} - d.$$

Vì trung bình cộng của các số trên bảng là $599/17$ nên ta có $S = \frac{599}{17}(n-1)$. Vậy nên

$$\frac{n(n+1)}{2} - d = \frac{599}{17}(n-1).$$

Lưu ý $d \leq n$ nên

$$\frac{599}{17}(n-1) \geq \frac{n(n+1)}{2} - n.$$

Bất đẳng thức này cho ta $n \leq 70$. Lại có $\frac{599}{17}(n-1) \leq \frac{n(n+1)}{2} - 1$. Bất đẳng thức này cho ta $n \geq 69$. Để S là số tự nhiên thì $n-1$ phải chia hết cho 17. Nghĩa là $n = 69$. Từ đó suy ra $d = 19$. Đáp số: 19. □

Bài toán 5. *Ở xứ sở Magic Wood chỉ có ba loài vật: có 12 con rắn, 23 con chuột và 31 con mèo. Hễ khi con rắn ăn con mèo, thì nó biến thành con chuột, nhưng khi con mèo ăn con chuột thì nó biến thành con rắn. Hơn nữa, khi con rắn ăn con chuột, nó biến thành con mèo. Hỏi nhiều nhất có bao nhiêu con vật ở Magic Wood khi không con nào ăn con nào nữa?*

Lời giải.. Nhiều nhất là một loài sẽ tồn tại. Đó không thể là loài mèo, vì tính chẵn lẻ của mèo và chuột luôn giống nhau. vì vậy, tất cả số mèo sẽ biến mất, tức là cần 31 lần ăn. Kéo theo 35 con vật sẽ tồn tại.

Mặt khác, nếu 23 con mèo ăn 23 con chuột, biến thành con rắn, thfi sẽ có 35 con rắn và 8 con mèo. Tiếp theo, 4 con rắn sẽ ăn 4 con mèo, biến thành con chuột, và sẽ bị 4 con mèo ăn nốt. Tức là sẽ còn đúng 35 con rắn.

□

Lời giải 2.. Gọi số lần rắn ăn mèo là a, mèo ăn chuột là b và rắn ăn chuột là c. Gọi x, y, z lần lượt là số rắn, số mèo, và số chuột. Ta có

$$\begin{cases} 12 - a - c + b = & x, \\ 31 - a - b + c = & y, \\ 23 - b - c + a = & z. \end{cases} \tag{2}$$

Không con nào ăn con nào khi trong ba số x, y, z có hai số bằng 0. Do y, z cùng tính chẵn lẻ, và x thì khác tính chẵn lẻ với y, z nên suy ra

$$31 - a - b + c = 0, \quad \text{và} \quad 23 - b - c + a = 0.$$

Giải hệ này cho ta $b = 27$. Do đó, $a - c = 4$. Số rắn là $12 + 27 - a - c = 39 - a - c$. Để số lượng rắn là lớn nhất thì $a + c$ phải nhỏ nhất. Tức là $a + c = a - c + 2c = 4 + 2c$ nhỏ nhất, tức là $c = 0$. Vậy nên, đáp số là $39 - 4 = 35$. □

Người đề xuất: Dusan Djukic.

Bài toán 6. *Giả sử K là một bộ số gồm mười số (không nhất thiết khác nhau) sao cho mỗi số trong K đều bằng tổng bình phương của tất cả chín số còn lại. Hãy tìm tất cả những bộ số K như vậy.*

Hướng dẫn. Không mất tính tổng quát có thể giả sử mười số trong tập K có thứ tự như sau

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{10}.$$

Từ giả thiết rằng mỗi số a_j đều có thể viết dưới dạng tổng bình phương của chín số còn lại nên ta có thể chọn $j = 1$ và $j = 10$. Thành ra

$$a_1 = a_2^2 + a_3^2 + \cdots a_{10}^2, \text{ và } a_{10} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_9^2.$$

Từ đây có thể suy ra ngay rằng tất cả các số trong K đều không âm. Vì $a_1 \le a_{10}$ nên suy ra

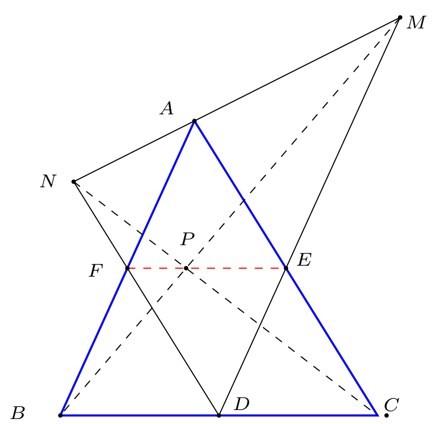
$$a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{10}^2 \le a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_9^2.$$

Tức là $a_{10}^2 \le a_1^2$. Suy ra $a_{10} \le a_1$ vì các số đều không âm. Tức là có thể suy ra tất cả các số trong tập K bằng nhau. Cho nên $a_j = 9a_j^2$, hay $a_j = 0$ hoặc $a_j = \frac{1}{9}$. Đáp số:

$$K = \left\{(0, 0, \ldots, 0),\ \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{9}\right)\right\}.$$

Người đề xuất: Nguyễn Tiến Lâm. □

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC với D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA và AB. Một đường thẳng đi qua A cắt DE, DF tại M, N tương ứng. Gọi P là giao điểm của BN, và CM. Chứng minh rằng ba điểm E, F, P thẳng hàng.*



Chứng minh. Nếu MN song song với BC thì dễ thấy $AMDB$, $ANDC$ là hai hình bình hành. Suy ra $MN = BC$, dẫn đến $MNBC$ cũng là hình bình hành. Nên hai đường chéo BM, CN cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Suy ra $PM = PB$, lại có F là trung điểm AB nên FP song song với AM, dẫn đến song song với CD. Tương tự ta cũng có PE song song với CD. Từ đây kết luận được P, E, F là ba điểm thẳng hàng.

Nếu MN không song song với BC thì K là giao điểm của MN với EF (kéo dài). Gọi P' là giao điểm của BM với EF. Theo định lý Thales áp dụng cho hai tam giác đồng dạng KAF và KME, ta có

$$\frac{KE}{KF} = \frac{ME}{AF} = \frac{ME}{BF} = \frac{P'E}{P'F}.$$

Lại có $\frac{CE}{NF} = \frac{AE}{NF} = \frac{KE}{KF}$, suy ra

$$\frac{CE}{NF} = \frac{P'E}{P'F},$$

tức là P', N, C thẳng hàng. Suy ra P' trùng với P. Vậy nên P, E, F thẳng hàng.

Người đề xuất: Nguyễn Lê Phước, Trần Quang Hùng. □

Bài toán 8. *Xung quanh một bờ hồ hình tròn có trồng 5 cây dừa. Người ta nhận thấy rằng các độ lệch chiều cao giữa hai cây liên tiếp bất kỳ luôn bằng nhau. Chứng minh rằng cả năm cây đều có cùng chiều cao.*

Chứng minh. Đặt $|a-b| = |b-c| = |c-d| = |d-e| = |e-a| = k \geq 0$, thì ta có $a - b = \epsilon_1 k$, $b - c = \epsilon_2 k$, $c - d = \epsilon_3 k$, $d - e = \epsilon_4 k$, $e - a = \epsilon_5 k$, với $\epsilon_j = \pm 1$. Cộng từng vế cho ta

$$0 = k(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5).$$

Do tổng các ϵ_j trên là số lẻ nên từ đó suy ra $k = 0$, kéo theo $a = b = c = d = e$.

Người đề xuất: Nguyễn Tiến Lâm. □

Bài toán 9. *Xác định tất cả các số nguyên dương n sao cho*

$$\frac{7n-12}{2^n} + \frac{2n-14}{3^n} + \frac{24n}{6^n} = 1.$$

Chứng minh. Rõ ràng, nghiệm của phương trình phải là một số nguyên dương. Viết lại phương trình dưới dạng

$$(7n-12)3^n + (2n-14)2^n + 24n = 6^n,$$

sau khi biến đổi ta được

$$(2^n - n^2)(3^n - 2n + 14) = (3^n - 2n)(3-n)(n-4).$$

Giả sử $n \in \mathbb{N}$. Thì $3^n = (1+2)^n \geq 1 + 2n$ sao cho $3^n - 2n$ và $3^n - 2n + 14$ đều dương.

Vì $2^n > n^2$ đúng với mọi n, trừ với $n = 2, 3$, và 4. Suy ra rằng nếu n lớn hơn 4 hoặc $n = 1$ thì hai vế trái dấu (vế trái dương, vế phải âm). Vậy nên ta chỉ cần xét các trường hợp $n = 2, 3, 4$. Thử trực tiếp cho ta $n = 4$ là nghiệm duy nhất. Đáp số: $n = 4$.

Người đề xuất: Michel Bataille. □

BA LAN VÀ CÁC KỲ THI TOÁN KHU VỰC

Nguyễn Hùng Sơn

GIỚI THIỆU

Ba Lan là một trong các nước có truyền thống lâu năm về tổ chức các kỳ thi toán dành cho học sinh. Lâu đời nhất là kỳ thi olympic toán quốc gia (OM) được tổ chức lần đầu vào năm 1950. Ba Lan cũng là một trong 8 nước đồng sáng lập ra kỳ thi Olympic Toán Quốc Tế (IMO) vào năm 1959. Trong bài báo này tôi xin giới thiệu tới bạn đọc một số kỳ thi toán thường niên mà Ba Lan cùng tổ chức với các nước láng giềng trong khu vực Trung Âu và Bắc Âu.

1. Kỳ thi Toán học Áo–Ba Lan

Đây là kỳ thi toán học dành cho học sinh do hai nước Áo và Ba Lan lần lượt thay nhau tổ chức vào khoảng cuối tháng sáu đầu tháng bảy hàng năm.

Ý tưởng tổ chức cuộc thi Áo–Ba Lan được đề xuất lần đầu tiên trong thời gian tổ chức cuộc thi IMO lần thứ 18 tại thủ đô Viên vào năm 1976. Ngày 16 tháng 5 năm 1977 Bộ trưởng Giáo dục hai nước Áo và Ba Lan đã ký công hàm quyết định tổ chức cuộc thi hàng năm cho học sinh hai nước và kỳ thi đầu tiên sẽ diễn ra vào năm 1978 tại Ba Lan. Một trong những người trực tiếp chỉ đạo thực hiện và đã liên tục gắn bó với cuộc thi này là giáo sư Gerd Baron, trưởng ban giám khảo kỳ thi Toán Quốc tế IMO 1976.

Tham gia cuộc thi là đội hình "dự bị" của hai nước. Mỗi đội gồm 6 thí sinh (các thí sinh đều chưa quá 17 tuổi và không phải là thành viên đội tuyển quốc gia thi IMO trong năm học đó).

Các thí sinh tham gia hai vòng thi cá nhân (viết trong 2 ngày, mỗi ngày phải giải 3 bài toán) và một vòng thi đồng đội (gồm từ 3 đến 4 bài toán). Các thí sinh viết lời giải bằng ngôn ngữ của nước mình. Mỗi năm ban tổ chức trao từ 5 đến 9 giải thưởng cá nhân cho các thí sinh có điểm cao nhất và giải thưởng đồng đội cho đội thắng cuộc ở kỳ thi đồng đội. Ở giải đồng đội, khi hai đội có cùng số điểm thì sẽ xét thắng thua tùy theo thời gian làm bài của mỗi đội.

Cần phải nhắc lại một chút về bối cảnh lịch sử lúc bấy giờ. Khi đó Áo và Ba Lan đại diện hai phía của "bức màn sắt": Ba Lan đại diện cho khối Đông Âu trong khi Áo là đại diện của phía Tây Âu. Vì vậy cuộc thi này cũng là một trong số ít các cơ hội để các nhà toán học có dịp giao lưu và tìm hiểu lẫn nhau. Các cựu thí sinh (hiện là các giáo sư của ĐHTH Warszawa) cho tôi biết rằng chương trình của các kỳ thi đầu tiên thường phong phú hơn rất nhiều so với các kỳ thi

IMO cùng năm. Ngoài 3 ngày thi, các thí sinh còn được đi tham quan rất nhiều nơi và thường được các vị lãnh đạo cao cấp cỡ bộ trưởng của nước chủ nhà đón tiếp.

Một số thống kê về kỳ thi Áo–Ba Lan

Kỳ thi	năm	Nơi tổ chức (quốc gia, thành phố)	Số thí sinh được giải		Giải đồng đội
			Áo	Balan	
I	1978	Ba Lan, Koszalin	3	4	Áo
II	1979	Áo, Graz	6	2	Ba Lan
III	1980	Ba Lan, Krakow	3	4	Áo
IV	1981	Áo, Salzburg	2	5	Ba Lan
V	1982	Ba Lan, Torun	3	4	Áo
VI	1983	Áo, Klagenfurt	2	4	Ba Lan
VII	1984	Ba Lan, Poznan	3	2	Áo
VIII	1985	Áo, Hollabrunn	4	3	Ba Lan
IX	1986	Ba Lan, Wroclaw	3	2	Ba Lan
X	1987	Áo, Obsteig	3	4	Áo
XI	1988	Ba Lan, Koszalin	2	4	Ba Lan
XII	1989	Áo, Eisenstadt	3	4	Áo
XIII	1990	Ba Lan, Poznan	2	6	Áo
XIV	1991	Áo, Bad Ischl	2	5	Ba Lan
XV	1992	Ba Lan, Nowy Sacz	1	6	Ba Lan
XVI	1993	Áo, Graz	3	5	Ba Lan
XVII	1994	Ba Lan, Pogorzel Warszawska	3	5	Ba Lan
XVIII	1995	Áo, Hollabrunn	1	6	Áo
XIX	1996	Ba Lan, Zajaczkowo	2	5	Ba Lan
XX	1997	Áo, Salzburg	1	5	Áo
XXI	1998	Ba Lan, Przysiek	3	4	Ba Lan
XXII	1999	Áo, Spittal	2	5	Ba Lan
XXIII	2000	Ba Lan, Baranow Sandomierski	3	5	Ba Lan
XXIV	2001	Áo, St. Georgen im Attergau	3	6	Ba Lan
XXV	2002	Ba Lan, Pultusk	1	6	Ba Lan
XXVI	2003	Áo, Graz	2	5	Ba Lan
XXVII	2004	Ba Lan, Wladyslawowo	2	5	Áo
XXVIII	2005	Áo, Ötz	4	4	Ba Lan
XXIX	2006	Ba Lan, Brok nad Bugiem	1	5	Ba Lan

Kỳ thi Áo–Ba Lan được tổ chức 29 lần liên tục từ năm 1978 đến 2006. Hình thức lẫn nội dung của kỳ thi này được các nước khác trong khu vực đánh giá rất cao. Đây có thể coi là một cuộc thi cọ xát mang tính quốc tế cho các thành viên tương lai của đội tuyển quốc gia. Rất nhiều thí sinh, sau khi tham gia kỳ thi Áo–Ba Lan đã được chọn vào đội tuyển quốc gia đi thi IMO vào những năm sau đó. Trong số rất nhiều thí sinh đó có thể kể ra một số tên tuổi nổi tiếng của IMO. Trong số họ có thể liệt kê một số thí sinh có thành tích cao nhất của Ba Lan như: Grzegorz Bobinski và Tomasz Schreiber (cả hai đều được 42/42 tại IMO'1994), Michal Pilipczuk, Tomasz Hrycak, Marcin Stefaniak (cả 3 đều 3 lần tham gia IMO và đạt tất cả các màu huy chương: Vàng, Bạc, Đồng), Marcin Pilipczuk (2 lần tham gia IMO đạt 2 huy chương:

Vàng và Bạc), Eryk Kopczynski (Huy chương vàng IMO). Nhiều thí sinh của Áo tham gia cuộc thi Áo-Ba Lan sau đó cũng giàng được các thành tích đáng nể tại IMO như Josef Schico (2 Huy chương Vàng và Bạc), Guenter Pollak (1 Vàng, 1 Đồng).

Ngoài ra còn có rất nhiều thí sinh đã từng tham gia cuộc thi Áo-Ba Lan và sau này đã trở thành các nhà khoa học nổi tiếng thế giới.

Vì vậy kể từ năm 2007 tới nay, kỳ thi này được mở rộng để nhiều quốc gia tham gia và được đổi tên thành Olympic Toán các nước Trung Âu (MEMO – Midle Europe Mathematical Olympiad).

2. MEMO

Kỳ thi Olympic Toán các nước Trung Âu (MEMO), được tổ chức lần đầu tiên tại thành phố Eisenstadt (Áo) với sự tham gia của các nước: Áo, Ba Lan, Croatia, Séc, Slovenia, Slovakia và Thụy sỹ. Thể thức của cuộc thi không thay đổi: mỗi nước được cử một đội tuyển 6 người gồm các thí sinh trẻ (năm học sau đó vẫn phải là học sinh phổ thông) và là các thí sinh không tham dự kỳ thi IMO cùng năm. Số lượng bài thi có một chút thay đổi. Các thí sinh thi 2 ngày, ngày thứ nhất là ngày thi cá nhân, các thí sinh phải giải 4 bài toán trong thời gian 5 giờ. Ngày thứ hai là kỳ thi đồng đội cũng gồm 4 bài toán. Các thí sinh được quyền viết bài giải bằng ngôn ngữ mẹ đẻ. Mỗi bài thi được đánh giá từ 0 đến 8 điểm.

Từ năm 2008 tham gia MEMO còn có Đức và Hungary. Sau đó Litva cũng tham gia MEMO kể từ năm 2009. Cũng kể từ năm 2009, số bài toán trong phần thi đồng đội được tăng lên 8 bài.

Tiếp tục truyền thống của cuộc thi Áo–Ba Lan, các thí sinh của MEMO thường được tham gia vào đội tuyển quốc gia ở những năm sau đó. Trên trang web (https://skmo.sk/poradia.php?jazyk=en&rocnik=59&sutaz=_MEMO) ta có thể theo dõi thành tích của các thí sinh tham gia MEMO 2010 trong các kỳ thi IMO vào những năm sau đó. Họ đã đạt được tổng số 23 huy chương trong các kỳ thi IMO 2011, IMO 2012 và IMO 2013. Trong số các thí sinh này có lẽ cần phải nhắc đến Domagoj Ćevid (Croatia), người đã đạt 2 huy chương vàng và 1 huy chương bạc tại 3 kỳ thi IMO. Wojciech Nadara (Ba Lan) tham dự MEMO 2010 và MEMO 2011. Tại MEMO 2011, anh đã đạt điểm tuyệt đối (32/32) và năm 2012, anh đã đạt 2 huy chương bạc tại IMO 2012 và IOI 2012 (Olympic Tin học quốc tế). Năm 2016, Wojciech Nadara là thành viên của đội tuyển trường Đại học Tổng hợp Warszawa đạt huy chương bạc (đứng thứ 5 trên thế giới) tại kỳ thi vô địch thế giới về lập trình ACM ICPC (International Colegiate Programming Contest (https://icpc.baylor.edu/).

3. Baltic Way

Baltic Way là cuộc thi toán đồng đội được tổ chức lần đầu tiên vào năm 1990 với sự tham gia của 3 nước cộng hòa Xô Viết cũ là Litva, Latvia và Estonia. Tên cuộc thi có xuất xứ từ sự kiện mang tên "Con đường Baltic" diễn ra vào ngày 23 tháng 8 năm 1989 khi xấp xỉ hai triệu người cùng nắm tay tạo thành một chuỗi dài hơn sáu trăm cây số trải qua ba nước vùng Baltic là Latvia, Litva và Estonia để đòi độc lập.

Một số thống kê về kỳ thi Baltic Way

Baltic Way	Tổ chức			Số đội tham gia	3 đội đứng đầu
	Năm	Quốc gia	Thành phố		
III	1992	Litva	Wilno	8	Dan mạch, Petersburg, Ba Lan
IV	1993	Latvia	Ryga	8	Ba Lan, Latvia, Estonia
V	1994	Estonia	Tartu	9	Petersburg, Latvia, Ba Lan
VI	1995	Thụy Điển	Västerås	9	Ba Lan, Latvia, Thụy Điển
VII	1996	Phần Lan	Valkeakoski	10	Ba Lan, Latvia, Thụy Điển
VIII	1997	Đan Mạch	Kopenhaga	11	Ba Lan, Đức, Estonia i Thụy Điển
IX	1998	Ba Lan	Warszawa	11	Latvia, Estonia, Ba Lan
X	1999	Iceland	Reykjavik	10	Estonia, Thụy Điển, Na Uy
XI	2000	Na Uy	Oslo	10	Ba Lan, Latvia, Estonia
XII	2001	Đức	Hamburg	11	Izrael, Estonia, Latvia
XIII	2002	Estonia	Tartu	11	St.Petersburg, Na Uy, Litva
XIV	2003	Latvia	Ryga	11	St.Petersburg, Ba Lan, Estonia
XV	2004	Litva	Wilno	12	Petersburg, Ba Lan, Belarus
XVI	2005	Thụy Điển	Sztokholm	12	Ba Lan, Phần Lan, St.Petersburg
XVII	2006	Phần Lan	Turku	11	St.Petersburg, Ba Lan, Litva
XVIII	2007	Đan Mạch	Kopenhaga	11	Ba Lan, St.Petersburg, Đức
XIX	2008	Ba Lan	Gdańsk	11	Ba Lan, Đức, St.Petersburg
XX	2009	Na Uy	Trondheim	11	St.Petersburg, Ba Lan, Phần Lan
XXI	2010	Iceland	Reykjavík	10	Ba Lan, Latvia, Đức
XXII	2011	Đức	Greifswald	11	Ba Lan, Latvia, Đức
XXIII	2012	Estonia	Tartu	11	St.Petersburg, Ba Lan, Litva
XXIV	2013	Latvia	Ryga	11	Latvia, St.Petersburg, Ba Lan
XXV	2014	Litva	Vilnius	12	St.Petersburg, Đức, Ba Lan
XXVI	2015	Thụy Điển	Stockholm	12	St.Petersburg, Ba Lan, Estonia
XXVII	2016	Phần Lan	Oulu	11	Ba Lan, St.Petersburg, Thụy Điển

Kể từ năm 1992, khi tình hình chính trị ở châu Âu đã thay đổi, cuộc thi được mở rộng với sự tham gia của cá nước cộng hòa xung quanh biển Baltic như Ba Lan, Đan Mạch, Đức (các land phía bắc), Na Uy, Phần Lan, Thụy Điển (đúng theo ý nghĩa tên gọi của nó). Ngoài ra còn có đội Iceland (vì Iceland là nước đầu tiên công nhận độc lập của 3 nước Latvia, Litva và Estonia) và đội tuyển của thành phố Saint Petersburg (Liên bang Nga). Ngoài ra, để thay đổi không khí, thỉnh thoảng ban tổ chức của nước chủ nhà có thể mời thêm một quốc gia ngoài vùng Baltic tham gia cuộc thi.

Cuộc thi Baltic Way được tổ chức vào đầu tháng 11 hàng năm. Mỗi quốc gia cử một đội tuyển 5 người gồm các thí sinh là học sinh tiểu học hoặc trung học trong thời điểm diễn ra cuộc thi. Các đội phải giải trong thời gian 4 giờ 30 phút 20 bài toán (gồm 5 bài đại số, 5 bài hình, 5 bài tổ hợp và 5 bài lý thuyết số). Mỗi bài đều có điểm số là 5 điểm nên các đội có thể đạt tối đa là 100 điểm. Trong lịch sử cuộc thi, chỉ duy nhất có một lần có đội đạt điểm tối đa 100/100. Đó là tại cuộc thi Baltic Way tổ chức vào năm 2001 tại Hamburg (Đức), đội tuyển khách Israel đã lập nên kỳ tích này.

Đội vô địch cuộc thi sẽ được giữ cúp luân lưu (sẽ phải trao lại cho đội vô địch lần thi năm sau). Ban giám khảo cũng có thể trao giải đặc biệt cho những lời giải sáng tạo.

4. CZE-POL-SVK

Sau khi khối Đông Âu tan rã, nhiều nước liên bang thuộc khối Đông Âu như Liên Xô, Nam Tư, Tiệp Khắc cũng tan rã theo. Ngày 1 tháng 1 năm 1993, Tiệp Khắc phân chia trong hòa bình thành 2 nước là Cộng hòa Séc và Slovakia. Cùng với sự phân chia đó, kỳ thi Olympic Toán Tiệp Khắc (Czechoslovak Mathematical Olympiad) cũng bị thay đổi theo, tuy nhiên sự thay đổi này không sâu sắc như chúng ta tưởng. Tuy là có hai kỳ thi toán quốc gia mới là "Czech Mathematical Olympiad" và "Slovak Mathematical Olympiad" nhưng thực ra ban tổ chức các cuộc thi này vẫn làm việc chung và các học sinh của Cộng hòa Séc và Slovakia vẫn giải các bài toán như nhau (chỉ khác là viết bằng ngôn ngữ của nước mình và kết quả thi được đánh giá riêng cho từng nước).

Ngoài ra, với mục đích thắt chặt tình hữu nghị giữa 2 nước, ban tổ chức toán quốc gia của hai nước còn tổ chức "trận thi đấu toán học" hàng năm (kể từ 1995) giữa hai đội tuyển quốc gia của Séc và Slovakia với mục đích chuẩn bị cho kỳ thi toán quốc tế IMO. Cuộc thi này thường được tổ chức vào cuối tháng 6 và được coi là lễ tổng kết trại luyện thi toán quốc tế của hai nước (thường tổ chức vào 2 tuần đầu của tháng 6).

Tuy nhiên Ba Lan cũng tổ chức trại luyện thi toán quốc tế cho các học sinh được giải vào cùng thời gian tại thành phố Zwardon (cách biên giới Slovak khoảng 200m và cách biên giới Séc khoảng 9km). Vì vậy, nhờ có sự kết nối của giáo sư Jaroslav Švrček (Slovakia) và Józef Kalinowski (Ba Lan), trận đấu tay đôi Séc-Slovakia đã chuyển thành trận đấu toán học tay ba Séc–Ba Lan–Slovakia và được viết tắt là (CZE-POL-SLO).

Khác với các kỳ thi khu vực khác như MEMO hoặc Baltic Way, kỳ thi CZE-POL-SLO đảm nhiệm vai trò tương tự như các trận đấu giao hữu của các đội bóng trước khi tham gia các cuộc thi đấu quốc tế. Với thể thức tương tự như IMO, tại kỳ thi này các thí sinh phải làm bài trong 2 ngày, mỗi ngày 3 bài trong thời gian 4 giờ 30 phút. Các bài cũng được chấm từ 0 đến 7 điểm, giống như tại IMO.

5. Phần kết

Mục đích chính của kỳ thi Olympic toán học của Ba lan là khích lệ phong trào học toán ở các trường phổ thông cũng như các trường năng khiếu và tìm ra những nhà toán học trẻ. Tham gia kỳ thi Olympic toán là tự nguyện vì vậy, chỉ số quan trọng nhất đối với ủy ban Olympics toán học của Ba Lan là số lượng học sinh tham gia olympic và số học sinh chọn ngành Toán/Tin ở Đại học. Hàng năm con số này thường dao động trên dưới 5000 học sinh.

Phần thưởng để khích lệ các học sinh tham gia olympic toán học chính là các giải quốc gia, các giải khu vực và các giải quốc tế. Các học sinh được giải quốc gia sẽ được tuyển thẳng vào các trường đại học (không nhất thiết chỉ là khoa Toán). Tại Việt Nam đội tuyển Quốc gia chỉ gồm 6 thành viên và mục đích duy nhất của họ là tham gia thi IMO. Các học sinh không được chọn vào đội tuyển quốc gia (đứng thứ 7 trở đi) cũng là những nhân tài toán học nhưng họ thường có cảm giác chán nản và chuyển sang làm việc khác. Khác với Việt nam, hàng năm Ba lan chọn đội tuyển Quốc gia gồm 17 thành viên tham gia IMO, MEMO và Baltic Way. Ngoài ra, trong những năm gần đây có 4 học sinh nữ được chọn tham gia EGMO (European Girls' Mathematical Olympiad). Theo tôi đây là một hướng đi đáng quan tâm cho nền Toán học Việt Nam nhằm giảm bớt nạn chảy máu nhân tài Toán học.

Đề thi và lời giải của 16 kỳ thi đầu tiên của cuộc thi Áo-Ba Lan được đăng trong cuốn sách: "144 problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition, 1978-1993" do tiến sỹ Marcin Kuczma làm tác giả (xuất bản năm 1994). Các đề thi hàng năm của các kỳ thi trên có thể tìm thấy dễ dàng tren các trang web của cuộc thi hoặc tại (https://www.artofproblemsolving.com/community/c14_international_contests).

Mời các bạn đọc thử sức với đề thi Áo–Ba Lan lần thứ 27 năm 2004.

Phần thi cá nhân

Bài 1. Gọi $S(n)$ là tổng các chữ số của n trong hệ thập phân. Gọi

$$N = \sum_{k=10^{2003}}^{10^{2004}-1} S(k)$$

Hãy tính giá trị của $S(N)$.

Bài 2. Cho tam giác ABC. Gọi D là giao điểm của phân giác trong của góc C với cạnh AB và gọi π là diện tích tam giác ABC. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đây luôn luôn đúng

$$\pi \cdot \left(\frac{1}{AD} - \frac{1}{BD}\right) \leq AB$$

Bài 3. Hãy tìm các số thực x, y, z, t thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - \sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-z^2} = t \\ y - \sqrt{1-z^2} + \sqrt{1-t^2} = x \\ z - \sqrt{1-t^2} + \sqrt{1-x^2} = y \\ t - \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = z \end{cases}$$

Bài 4. Hãy tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^{10} + n^5 + 1$ là số nguyên tố.

Bài 5. Hãy tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho hệ phương trình sau đây:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots x_n = 27 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \left(\frac{3}{2}\right)^2 4 \end{cases}$$

có nghiệm $x_1, ..., x_n$ trong tập số thực dương.

Bài 6. Cho $n = 2^m$ (với m là số nguyên dương). Chứng minh rằng các phần tử của tập $M(n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ có thể sắp xếp thành chuỗi $a_1, a_2, , \ldots, a_n$ sao cho với mọi i, j, k sao cho $1 \leq i < j < k \leq n$ ta luôn có $a_j - a_i \neq a_k - a_j$.

Phần thi đồng đội:

Bài 7. Hãy tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = f(x+1) + f(y+1)$$

với mọi cặp số x, y nguyên tố cùng nhau.

Bài 8.

a) Chứng minh rằng với $n = 4$ hoặc $n \geq 6$, mọi tam giác ABC đều có thể cắt thành n tam giác đồng dạng với ABC.

b) Chứng minh rằng tam giác đều không thể cắt ra thành 3 hoặc 5 tam giác đều.

c) Hãy xác định xem có tồn tại hay không tam giác ABC sao cho có thể cắt nó thành 3 cũng như thành 5 tam giác đồng dạng với ABC.

Bài 9. Cho các dãy số 2 chiều với các số hạng dương:

$$\langle \ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle, \langle \ldots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \ldots \rangle, \langle \ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots \rangle$$

thỏa mãn điều kiện: với mọi số nguyên n ta có:

$$a_n \geq \frac{b_{n+1} + c_{n-1}}{2}; \quad b_n \geq \frac{c_{n+1} + a_{n-1}}{2}; \quad c_n \geq \frac{a_{n+1} + b_{n-1}}{2};$$

Hãy xác định giá trị của $a_{2005}, b_{2005}, c_{2005}$ biết rằng $a_5 = 26, b_0 = 6, c_0 = 2004$.

Bài 10. Với mỗi đa thức $Q(n)$ ta gọi $M(Q)$ là tập các số nguyên không âm x sao cho $0 < Q(x) < 2004$. Ta hãy xét các đa thức $P_n(x)$ dạng:

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_{n-1} x + 1$$

trong đó $a_i = \pm 1$ với $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Với mọi số tự nhiên dạng $n = 3^k, k > 0$ hãy tìm:

a) $m_n =$ giá trị lớn nhất của số phần tử của tập $M(P_n)$ với mọi đa thức P_n;

b) Tất cả các đa thức P_n sao cho $|M(Q)| = m_n$.

BÀI TOÁN HAY LỜI GIẢI ĐẸP

Ban biên tập

GIỚI THIỆU

Chuyên mục này được lấy cảm hứng từ bài viết của thầy Nguyễn Duy Liên ở số báo thứ 3 về bài toán số 6 trong kỳ thi IMO 2001 với 5 cách giải khác nhau. Mục này sẽ để dành viết về những bài toán hay, lời giải đẹp và những câu chuyện thú vị xung quanh những bài toán và lời giải đó.

Tên của chuyên mục được mượn từ tên của một nhóm những người yêu toán trên Facebook do anh Nguyễn Văn Lợi sáng lập "*Bài toán hay – Lời giải đẹp – Đam mê toán học*". Chuyên mục ghi nhận các đề cử của bạn đọc và sẽ chọn đăng mỗi kỳ 1, 2 bài toán.

Số này chúng tôi xin giới thiệu với bạn đọc một bất đẳng thức của nhà toán học người Mỹ Jack Garfunkel và bài toán về tổng kép cùng với những lời giải thú vị.

1. Bất đẳng thức Jack Garfunkel

Bài toán 1. *Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca > 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant 2. \qquad (1)$$

Lời giải 1. Trước hết ta có nhận xét nếu $A \geqslant B > 0$ và $C \geqslant 0$ thì $\frac{A}{B} \geqslant \frac{A+C}{B+C}$.

Giả sử $c = \min\{a, b, c\}$, từ nhận xét trên ta thấy

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2+c^2}{ab+bc+ca+c^2} = \frac{a^2+b^2+2c^2}{(c+a)(c+b)}.$$

Do đó chỉ cần chứng minh

$$\frac{a^2+b^2+2c^2}{(c+a)(c+b)} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant 2,$$

tương đương với

$$\frac{[a^3+b^3-ab(a+b)] + (4abc - 2a^2c - 2b^2c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant 0,$$

hoặc

$$\frac{(a-b)^2(a+b-2c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant 0.$$

Hiển nhiên đúng theo giả thiết của c. □

Lời giải 2. Giả sử $a \geqslant b \geqslant c$ khi đó

$$\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} - \frac{4ca}{(c+a)^2} = \frac{4ca(a-b)(b-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)^2} \geqslant 0.$$

Vậy ta cần chỉ ra được

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{4ca}{(c+a)^2} \geqslant 2,$$

bất đẳng thức này có thể thu gọn thành

$$\frac{(a^2-ab-bc+c^2)^2}{(ab+bc+ca)(c+a)^2} \geqslant 0.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Lời giải 3. Từ các đẳng thức cơ bản

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = \sum (a-b)^2,$$

$$(a+b)(b+c)(a+c) - 8abc = \sum a(b-c)^2.$$

Ta có thể viết (1) lại như sau (dạng chuẩn tắc của S.O.S)

$$\sum \left[\frac{1}{2(ab+bc+ca)} - \frac{c}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right](a-b)^2,$$

tương đương với

$$\frac{\sum (a-b)^2\left[(a+b)(b+c)(c+a) - 2c(ab+bc+ca)\right]}{(ab+bc+ca)(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant 0,$$

hay là

$$\frac{\sum (a-b)^2\left[c(a+b-c)^2 + (a+b-2c)(b-c)(c-a)\right]}{(ab+bc+ca)(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant 0,$$

hoặc

$$\frac{\sum c(a+b-c)^2(a-b)^2 + \sum (a+b-2c)(a-b)^2(b-c)(c-a)}{(ab+bc+ca)(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant 0, \tag{2}$$

Chú ý rằng

$$\sum (a+b-2c)(a-b)^2(b-c)(c-a) = 0,$$

nên (2) tương đương với

$$\frac{\sum c(a+b-c)^2(a-b)^2}{(ab+bc+ca)(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant 0. \tag{3}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Ý tưởng thay thế bằng các đánh giá trung gian trong lời giải 1 và 2 là khá tự nhiên: Nếu ta để nguyên các mẫu số như vậy thì do $ab + bc + ca$ "*nguyên tố cùng nhau*" với $(a+b)(b+c)(c+a)$ nên mẫu số chung sẽ có bậc 5, và như vậy sẽ được một bất đẳng thức bậc cao. Sử dụng hằng đẳng thức $c^2 + ab + bc + ca = (c+a)(c+b)$ và một tính chất cơ bản của phân số, ta đã tìm được cách thay thế phân số $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$ bằng phân số "*tốt hơn*" $\frac{a^2+b^2+2c^2}{(c+a)(c+b)}$. Cách giải 2 cũng có ý tưởng tương tự, nhưng không tự nhiên bằng cách giải 1.

Bất đẳng thức này thú vị bởi nó đã ghép một biểu thức $\geqslant 1$ với một biểu thức $\leqslant 1$ để được một tổng $\geqslant 2$. Với những bài toán như thế, S.O.S cũng là một phương pháp hiệu quả để xử lý. Trong lời giải 3, sau khi nhận được dạng SOS $\sum S_a(b-c)^2 \geqslant 0$, chúng ta đã tiếp tục biến đổi để đưa về dạng tổng các biểu thức hiển nhiên dương. Nếu không đi theo hướng đó mà sử dụng trường hợp cơ bản của định lý S.O.S, ta sẽ chỉ cần kiểm tra $S_a + S_b \geqslant 0$ mà điều này thì tương đương với bất đẳng thức $\frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{1}{(a+c)(b+c)} \geqslant 0$ hiển nhiên đúng.

Lưu ý rằng bất đẳng thức Jack Garfunkel là "*tốt nhất*" theo nghĩa sau: *Nếu bất đẳng thức sau*

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8kabc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant 1 + k,$$

đúng với mọi $a,\ b,\ c$ dương thì $k \leqslant 1$.

2. Bài toán về tổng kép

Với một bộ số nguyên $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ với $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, ta lập bộ các tổng $a_i + a_j$ với $1 \leqslant i < j \leqslant n$ và xếp theo thứ tự tăng dần thì được một bộ mới, ký hiệu là $A^{(2)}$. Một câu hỏi thú vị đặt ra là nếu biết $A^{(2)}$ ta có thể xác định được A hay không? Xét vài trường hợp nhỏ ta thấy với $n = 2$ rõ rà không được, với $n = 3$ ta luôn xác định được (đây là một bài toán đơn giản nhưng có nhiều ứng dụng), với $n = 4$, ta lại tiếp tục không xác định được (ví dụ với $A = (1,4,4,5)$, $B = (2,3,3,6)$ thì $A^{(2)} = B^{(2)} = (5,5,6,8,9,9)$), với $n = 5$ ta luôn xác định được (bài này rất thú vị, mời bạn đọc thử sức) ... Từ những nghiên cứu sơ bộ ban đầu như vậy, ta có thể đi đến hai kết quả yếu hơn so với bài toán đặt ra ban đầu như sau:

Bài toán 2. *Nếu $n = 2^k$ thì tồn tại $A \neq B$, A và B đều có n số hạng sao cho $A^{(2)} = B^{(2)}$.*

Bài toán này có thể chứng minh khá dễ dàng bằng quy nạp toán học. Kết quả này cho chúng ta câu trả lời phủ định trong cho câu hỏi đặt ra ở trên, theo nghĩa với $n = 2^k$ thì nếu biết $A^{(2)}$ ta không thể xác định được A một cách duy nhất.

Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là phải chăng mệnh đề đảo cũng đúng? Đúng là mệnh đề đảo đúng, và đó cũng chính là bài toán với lời giải độc đáo mà chúng tôi muốn gửi đến bạn đọc.

Bài toán 3. *Cho n là số nguyên dương. Biết rằng tồn tại các bộ A, B gồm n số nguyên sao cho $A \neq B$ nhưng $A^{(2)} = B^{(2)}$. Chứng minh rằng $n = 2^k$.*

Lời giải. Bằng cách cộng vào tất cả các số một hằng số, ta có thể giả sử tất cả các số thuộc A, B đều nguyên dương. Xét các đa thức

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{a_i},\ g(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{b_i}.$$

Ta có

$$(f(x))^2 = \sum_{i=1}^{n} x^{2a_i} + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n} x^{a_i+a_j} = f(x^2) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n} x^{a_i+a_j},$$

$$(g(x))^2 = \sum_{i=1}^{n} x^{2b_i} + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n} x^{b_i+b_j} = g(x^2) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n} x^{b_i+b_j}.$$

Từ điều kiện $A^{(2)} = B^{(2)}$ ta suy ra $(f(x))^2 - f(x^2) = (g(x))^2 - g(x^2)$, hay là

$$(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = f(x^2) - g(x^2). \tag{4}$$

Để ý rằng $f(x)$, $g(x)$ đều là tổng của n đơn thức với hệ số bằng 1 nên ta có $f(1) = g(1) = n$. Từ đó suy ra đa thức $f(x) - g(x)$ có nghiệm là 1. Tức là $f(x) - g(x)$ chia hết cho $x - 1$. Đặt $f(x) - g(x) = k(x-1)h(x)$ với $h(1) \neq 0$. Thay vào (4), ta có

$$(x-1)^k h(x)(f(x) + g(x)) = (x^2-1)^k h(x^2).$$

Rút gọn hai vế cho $k(x-1)$, ta được

$$h(x)(f(x) + g(x)) = (x+1)^k h(x^2).$$

Thay $x = 1$ và chú ý $h(1) \neq 0$ và $f(1) = g(1) = n$ ta có $2n = 2^k$ hay $n = 2^{k-1}$. □

Một lời giải rất ấn tượng! Tất cả các bước từ xét $f(x)$, $g(x)$ đến việc sử dụng điều kiện $A^{(2)} = B^{(2)}$ để suy ra (4) đều rất bất ngờ. Và bước cuối cùng, sử dụng (4) để suy ra kết quả cuối cùng, cho dù là một kỹ thuật quen thuộc trong các bài toán đa thức (kỹ thuật tách thành phần nghiệm), cũng thật huyền ảo. Đây là một bài học tuyệt vời về cách sử dụng đa thức để giải các bài toán liên quan đến các tổng.

Kết quả bài toán 3 cho ta thấy với $n \neq 2^k$ nếu cho trước bộ B gồm $\frac{n(n-1)}{2}$ số hạng thì chỉ có nhiều nhất một bộ số A sao cho $A^{(2)} = B$. Tuy nhiên, điều đó không có nghĩa là ta đã chứng minh được nếu biết $A^{(2)}$ thì có thể tìm được A. Người ta cũng đã chứng minh được tính chất này, nhưng chứng minh là khá kỹ thuật và nằm ngoài phạm vi bài viết này.

Tri Ân

Epsilon sẽ không thể là Epsilon nếu thiếu các đọc giả thân yêu, và hơn hết, các tác giả và các cộng tác viên đã cống hiến những bài viết hay nhất cho tạp chí với một tinh thần vì cộng đồng, không màn đến lợi ích cá nhân.

Chúng tôi, Ban Biên tập Epsilon, xin được một lần nữa cảm ơn những tác giả, dịch giả, và cộng tác viên đã đồng hành sát cánh với chúng tôi trong suốt 800 ngày qua.

Xin được tri ân cùng 92 tác giả, dịch giả:

Vandanjav Adiyasuren
Nguyễn Vũ Anh
Đỗ Xuân Anh
Nguyễn Quốc Anh
Huỳnh Công Bằng
Nguyễn Đức Bảo
Võ Quốc Bá Cẩn
Ngô Bảo Châu
Nguyễn Chương Chí
Trịnh Đào Chiến
Nguyễn Tài Chung
Lê Xuân Đại
Nguyễn Hải Đăng
Enkhee Davaadulam
Trần Nam Dũng
Nguyễn Tiến Dũng
Trung Dũng
Lê Anh Dũng
Ngô Quang Dương
Chuyên san EXP
Richard Fitzpatrick
Nguyễn Ngọc Giang
Phùng Hồ Hải
Trần Thanh Hải
Trần Minh Hiền
Đinh Trung Hòa
Nguyễn Đình Hoàng
Trần Quang Hùng
Ngô Quang Hưng
Nguyễn Hữu Việt Hưng
Nguyễn Đức Hưng
Võ Hoàng Hưng
Đỗ Trần Nguyên Huy
Nguyễn Đặng Minh Huy
Nguyễn Văn Huyện
Lương Văn Khải
Nguyễn Thành Khang
Nguyễn Quốc Khánh
Nguyễn Dzuy Khánh
Lê Tạ Đăng Khoa
Đỗ Minh Khoa
Hà Huy Khoái
Võ Anh Kiệt
Nguyễn Tiến Lâm
Dương Đức Lâm
Nguyễn Duy Liên
Nguyễn Văn Linh
Nguyễn Vũ Duy Linh
Hảo Linh
Nguyễn Văn Lợi
Lê Phúc Lữ
Nguyễn Hồng Lữ
Lưu Trọng Luân
Hoàng Mai
Trịnh Xuân Minh
Kiều Đình Minh
Nguyễn Bảo Ngọc
Dương Ánh Ngọc
Trần Minh Ngọc
Bình Nguyễn
Đào Thanh Oai
Lê Phong
Hoàng Cao Phong
Phan Anh Quân
Bold Sanchir
Nguyễn Hùng Sơn
Đàm Thanh Sơn
Đỗ Thanh Sơn
Hoàng Đức Tân
Dương Trọng Tấn
Trần Tất Thắng
Lưu Bá Thắng
Trần Ngọc Thắng
Lê Tự Quốc Thắng
Lê Thị Minh Thảo
Nguyễn Văn Thế
Nguyễn Trần Hữu Thịnh
Nguyễn Tất Thu
Phạm Văn Thuận
Đặng Nguyễn Đức Tiến
Huỳnh Xuân Tín
Henry Trần
Võ Hoàng Trọng
Lê Nam Trường
Nguyễn Văn Tuấn
Đặng Minh Tuấn
Lý Ngọc Tuệ
Vũ Thanh Tùng
Vũ Hà Văn
Nguyễn Ái Việt
Võ Nhật Vinh
Trịnh Huy Vũ

Trân trọng.

Đinh Dậu, 13/2/2017,

Ban Biên tập Epsilon.