Số 12

# Epsilon

Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

DEC 2016

"TRÍ TƯỞNG TƯỢNG quan trọng hơn TRI THỨC."

**ALBERT EINSTEIN**

"Một hạn chế của các đề thi trắc nghiệm là nó thất bại trong việc chuẩn bị cho học sinh đối diện với phương thức giải quyết vấn đề mà họ sẽ bắt gặp trong các lớp toán, khoa học và trong những nghề nghiệp tương lai."

**(Thi trắc nghiệm gây nhiều tranh cãi ở Mỹ - Neal Koblitz)**

GIẢ THUYẾT KEPLER VÀ BÀI TOÁN XẾP CAM - Dương Đức Lâm

CHỨNG MINH CÔNG THỨC EULER CHO ĐA DIỆN BẰNG VẬT LÝ - Đàm Thanh Sơn

BÀI TOÁN CHỨNG MINH TRUNG ĐIỂM VÀ CÁC MỞ RỘNG - Trần Quang Hùng

XẤP XỈ DIOPHANTINE -

DÀN, CẦU NỐI ĐẾN VỚI ĐỘNG HỌC THUẦN NHẤT - Lý Ngọc Tuệ

VÀ CÁC CHUYÊN MỤC KHÁC

Số 12

Epsilon

Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

DEC 2016

# LỜI NGỎ

Hai mươi bốn tháng, 12 số báo ra đều đặn vào ngày 13 của các tháng chẵn. Cũng có lúc được mong chờ, cũng có lúc bị đôi chút lãng quên. Nhưng với những người đã trực tiếp xây dựng nên từng số báo thì đó là những kỷ niệm, những trải nghiệm không thể nào quên.

Có thể nói, với những gì đã làm được, Epsilon đã tạm hoàn thành sứ mệnh của mình, sứ mệnh mà như GS Ngô Bảo Châu có nói đến "làm một cuộc thử nghiệm đầy dũng cảm", để chứng minh "tính khả thi" của một tờ báo xây dựng bởi cộng đồng và cho cộng đồng.

Trong hành trình của mình, Epsilon đã nhận được sự ủng hộ nhiệt tình của đông đảo bạn đọc, của các tác giả, các cộng tác viên. Tất cả đều làm việc trên tinh thần vì cộng đồng.

Với một mục tiêu vô tư, chúng tôi đã nhận được sự ủng hộ và đóng góp vô tư như vậy. Ban biên tập Epsilon xin trân trọng sự ủng hộ đó.

Số 12 mà các bạn cầm trên tay sẽ chưa phải là số cuối cùng của Epsilon. Đó chỉ là số cuối cùng của năm 2016, năm thứ hai của Epsilon. Chúng tôi sẽ ra số báo cuối cùng của phiên bản 2015-2017 của Epsilon vào ngày 13 tháng 2 năm 2017.

Còn bây giờ, hãy thoải mái lật từng trang Epsilon và thưởng thức.

Và lại cùng chúng tôi lên đường. Đi nhiều người ta mới có thể đi xa.

Epsilon
Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

# MỤC LỤC

# TOÁN HỌC VÀ PHÁT HIỆN ẢNH GIẢ MẠO

Đặng Nguyễn Đức Tiến
(DCU, Ireland)

## GIỚI THIỆU

Cùng với sự phát triển vượt bậc của kỹ thuật, việc chỉnh sửa một bức ảnh ngày nay có thể được thực hiện khá dễ dàng chỉ bởi vài thao tác đơn giản trên máy tính hay điện thoại. Điều này giúp cho ảnh đẹp hơn, thể hiện tốt hơn chủ đề mà người chụp ảnh muốn lưu lại ... nhưng nó cũng dẫn đến một hệ quả không thể chối bỏ: khái niệm "thấy mới tin" đã không còn đứng vững thông qua ảnh! Với công nghệ hiện nay, ảnh giả mạo đã xuất hiện khắp mọi nơi, trong mọi lĩnh vực. Vậy làm thế nào để có thể kiểm chứng một tấm ảnh là thật hay giả? Và toán học thì có liên quan gì đến việc này? Epsilon sẽ gửi đến bạn đọc giải đáp cho các câu hỏi này qua một bài viết 2 kỳ được đăng ở số này và số tiếp theo.

Trong bài viết đầu tiên này, chúng tôi gửi đến bạn đọc cái nhìn tổng quát về ảnh giả mạo cũng như sự liên quan của nó với đời sống thông qua một phóng sự ảo, được tổng hợp chủ yếu từ các câu hỏi mà người viết bài nhận được từ các bạn bè và đồng nghiệp. Để tiện trình bày, chúng tôi tạo ra hai nhân vật ảo là phóng viên (PV) và người trả lời là một người làm nghề giám định ảnh (GĐA) cùng với một đoạn hỏi đáp ảo giữa họ.

## Thế nào là ảnh giả mạo và làm sao để phát hiện ra chúng?

**Phóng viên (PV): Chào người giám định ảnh, chủ đề của chúng ta hôm nay nói về ảnh giả mạo, vậy trước tiên tôi muốn hỏi thế nào là ảnh giả mạo?**

Người giám định ảnh (GĐA): Cảm ơn câu hỏi của anh. Trả lời một cách đơn giản thì ảnh giả mạo là ảnh không phản ảnh sự thật khi ảnh được chụp. Tuy vậy, để giải thích chi tiết hơn thì cần phải trình bày hơi dài dòng một chút. Trước tiên tôi muốn giới thiệu khái niệm ảnh gốc và ảnh đã chỉnh sửa. Ảnh gốc là ảnh được lấy trực tiếp từ máy ảnh và chưa qua bất cứ một thao tác can thiệp nào. Phần lớn các máy ảnh hiện nay đều hỗ trợ người dùng trích xuất ảnh gốc. Ngắn gọn hơn, anh chụp ảnh xong, ảnh ở thẻ nhớ của anh và chưa làm gì, thì đó là ảnh gốc! Sau khi trích ảnh ra khỏi máy ảnh, bất kỳ thao tác nào tác động lên ảnh thì ảnh đó đều được xem là đã chỉnh sửa.

Về cơ bản có thể gom nhóm các kiểu thao tác chỉnh sửa vào 3 nhóm: Nhóm đầu tiên là nhóm chỉnh sửa mà về mặt thị giác, gần như mắt người không thể phát hiện ra thay đổi trên ảnh. Ví dụ như anh chỉ thay đổi kích thước ảnh, thu nhỏ ảnh lại, hoặc anh nén ảnh lại cho kích thước tập tin nhỏ hơn. Đây là nhóm phổ biến nhất và gần như mọi người vẫn luôn làm. Ví dụ anh đăng tải ảnh lên mạng xã hội, thì ảnh này sẽ bị nén đi hoặc thu nhỏ lại.

**PV: Xin lỗi tôi tạm ngắt lời, như vậy là nén ảnh Jpeg cũng bị tính là chỉnh sửa? Điện thoại của tôi chụp ảnh chỉ lưu ở dạng này, vậy ảnh chụp xong có phải là ảnh đã chỉnh sửa?**

GĐA: Phải phân biệt nén ở đây là nén lần thứ mấy và nén từ nguồn nào.

Các máy ảnh trung cấp trở lên và ở cả một số điện thoại hiện nay cho phép lưu ảnh gốc ở dạng không nén, gọi là ảnh raw. Nói nôm na là cảm biến sau khi nhận ánh sáng đo được như thế nào thì lượng hoá và ghi xuống như vậy. Nếu các ảnh raw này sau khi chép từ thẻ nhớ được nén (có thể theo Jpeg, Jpeg 2000 hay các kiểu nén khác) bằng phần mềm trên máy tính hay điện thoại, thì các ảnh này trở thành ảnh chỉnh sửa.

Ở các máy ảnh hay điện thoại lưu trực tiếp ảnh ở dạng nén, thì đây vẫn được xem là ảnh gốc. Nhưng nếu các ảnh nén này được nén lại bằng các phần mềm khác (tức là nén 2 lần) thì chúng trở thành ảnh đã chỉnh sửa. Hay nói cách khác, ảnh nén chỉ được xem là ảnh gốc khi nó nén tối đa 1 lần và việc nén này phải được thực hiện bởi chính phần mềm ở máy ảnh. Cũng chính vì điều này, mọi ảnh được nén từ 2 lần trở lên đều chắc chắn là ảnh đã chỉnh sửa, nhưng ngược lại, một tấm ảnh không nén vẫn chưa hẳn là ảnh gốc! Vì vậy, trong nghề của chúng tôi, việc phân tích xem một tấm ảnh bị nén bao nhiêu lần rất quan trọng!

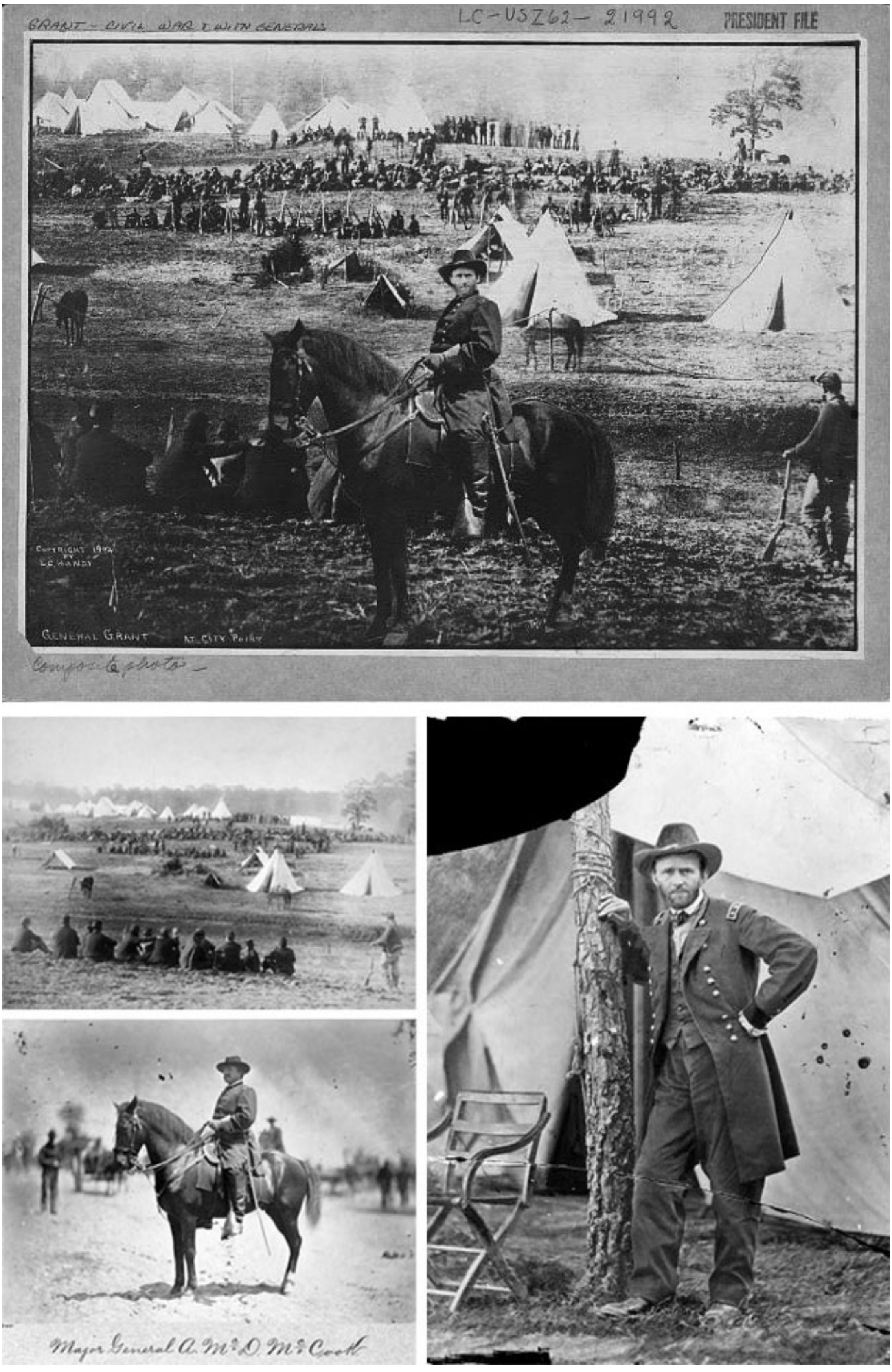
**PV: Cảm ơn anh, vậy còn hai kiểu chỉnh sửa còn lại?**

GĐA: Tôi đi tiếp đến nhóm 2, đây là nhóm chỉnh sửa thông thường với mục đích làm đẹp ảnh (theo thẩm mỹ của người chỉnh). Ví dụ như ảnh chụp tối quá, anh tăng độ sáng lên, hoặc anh muốn cân bằng sáng lại cho ảnh, ... miễn sao nội dung bức ảnh vẫn như vậy. Các phần mềm hay ứng dụng chỉnh sửa ảnh, đa số là ở nhóm này.

Cuối cùng là nhóm 3 là nhóm chỉnh sửa nhiều nhất, cơ bản là làm thay đổi nội dung bức ảnh. Thường thấy nhất là anh muốn xoá đi một số đối tượng anh không muốn xuất hiện. Hoặc đôi khi anh muốn ghép thêm chi tiết gì đó. Chỉnh sửa nhóm này thông thường sẽ làm bức ảnh khác đi khá rõ với thị giác con người (nếu như anh có 2 bức ảnh để so sánh).

Quay lại với câu hỏi chính, với đa số người dùng phổ thông, ảnh giả mạo, tôi gọi tắt là ảnh giả, chính là ảnh ở nhóm 2 và nhóm 3, trong đó nhóm 3 thường được đánh giá là nhóm nghiêm trọng hơn. Tôi cũng muốn nhấn mạnh là việc anh chấp nhận ảnh đã chỉnh sửa, tôi gọi tắt là ảnh sửa, tới mức nào cũng tuỳ theo lĩnh vực. Gần như nhóm 1 thì ở đâu cũng chấp nhận, vì cơ bản với thị giác con người, ảnh gốc và ảnh sửa lúc này gần như không khác nhau. Chỉnh sửa ở nhóm 3 thì ngược lại, đa số hầu như không có ai chấp nhận ảnh cắt ghép cả. Tuy vậy vẫn có ngoại lệ, ví dụ như một số cuộc thi nhiếp ảnh chỉ chấp nhận ảnh gốc, nên kể cả việc chỉnh sửa ở nhóm 1 cũng không được chấp nhận, và việc kiểm chứng đòi hỏi rất nhiều công sức. Một số cuộc thi khác thì chấp nhận chỉnh sửa ở mức 2 nhưng chỉ trong khuôn khổ một số thao tác nhất định, ví dụ nếu như nước hồ phù sa mà anh đổi thành trong vắt là không được. Nhóm 3, tuy là không được chấp nhận ở nhiều lĩnh vực, nhưng trong quảng cáo thì lại được áp dụng hết sức phổ biến.

Như vậy, có thể tóm gọn lại là ảnh thật thì bắt buộc phải là ảnh gốc còn ảnh giả thì chỉ là một phần của ảnh sửa. Và để kết thúc câu trả lời thì tôi cũng muốn đề cập là ảnh thật ở đây, chưa chắc đã phản ảnh ... sự thật, vì hiện trường có thể dàn dựng, người có thể hoá trang...




Hình 1: Một trong những bức ảnh giả đầu tiên trong lịch sử, ảnh chụp tướng Grant vào năm 1864 thật ra là được ghép từ 3 tấm ảnh khác nhau.

Hình 2: Một ví dụ về chỉnh sửa ảnh ở nhóm 3. Hãng The Associated Press đã không làm việc với nhiếp ảnh gia tự do Narciso Contreras sau khi phát hiện ra người này đã xoá đi chiếc máy quay phim trong bức ảnh chụp vào năm 2013. Nguồn ảnh: Associated Press.

**PV: Vậy nếu tôi có một bức ảnh thì làm thế nào để phát hiện và kết luận thật/giả?**

GĐA: Tôi có thể tóm tắt là có 3 cách để làm được điều này. Cách thức cơ bản nhất là kiểm tra thông tin về ảnh và tính nhất quán của nó. Phần lớn các thiết bị ghi nhận hình ảnh và phần mềm chỉnh sửa ảnh đều có lưu lại thông tin của thao tác cũng như các tham số tạo ra bức ảnh. Ví dụ khi anh chụp ảnh, máy ảnh của anh sẽ lưu lại thông tin ngày giờ chụp, dòng máy, kích thước ảnh, độ cảm sáng, độ mở khẩu ... còn khi anh dùng phần mềm chỉnh sửa ảnh thì phần mềm sẽ lưu lại tên phần mềm, phiên bản, ... Tất cả các thông tin này cơ bản được lưu ở đầu file ảnh và được gọi là Exif (viết tắt của Exchangeable image file format). Căn cứ vào thông tin này, anh có thể xác định một bức ảnh có phải là ảnh sửa hay không. Còn để kết luận là giả hay không thì như tôi nói ở trên, còn tuỳ thuộc vào mức độ chỉnh sửa mà anh muốn xem xét. Tôi lấy ví dụ như thế này, nếu trong Exif của anh có tên phần mềm sửa ảnh (ví dụ Adobe Photoshop) thì bức ảnh đó đã bị xem là ảnh sửa, không thể khác được! Hoặc nếu như thông tin Exif trên bức ảnh cho thấy tỉ lệ của bức ảnh là 4:3 mà tỉ lệ của anh đang có là 16:9 thì điều này cũng cho thấy đây là ảnh sửa, vì nó không nhất quán. Đây là cách kiểm tra đơn giản nhất nhưng hiệu quả rất cao. Tuy vậy, cần lưu ý thêm là các thông tin này có thể can thiệp và hiệu chỉnh, nên nếu người sửa ảnh biết cách chỉnh sửa thì có thể qua mắt được các kiểu kiểm tra này.

Cách thứ hai để kết luận là dựa trên việc bắt lỗi. Việc sửa ảnh tuy rất dễ với công cụ hiện nay, nhưng để tạo ra một ảnh chỉnh sửa "như thật" vẫn đòi hỏi rất nhiều công sức. Do vậy, đa số ảnh giả thường hay mắc lỗi. Những lỗi thường gặp nhất là lỗi ánh sáng và tỉ lệ vật lý do con người quen làm việc với ảnh 2 chiều trong khi để ghép ảnh cho tốt thường phải có mô hình 3 chiều. Cũng tương tự như cách thứ 1, chỉ cần phát hiện ra 1 lỗi thì có thể khẳng định đó là ảnh sửa.

Cách thức cuối cùng là giám định ảnh. Thật ra giám định ảnh bao gồm cả 2 cách trên, nhưng chúng tôi muốn tách riêng ra để nhấn mạnh những điều mà chỉ có kỹ thuật giám định mới làm được. Toàn bộ quá trình tạo ra một bức ảnh đều để lại những dấu vết nhất định. Dấu vết đó là thông tinh ảnh ở Exif, có thể là lỗi trong việc chỉnh sửa ảnh, là nhiễu ảnh từ cảm biến, ảnh hưởng quang học từ ống kính, dấu vết về giá trị lượng hoá trong quá trình nén ảnh, dấu vết của lọc ảnh, tỉ lệ vật lý, phản xạ … căn cứ vào các dấu vết này, chúng tôi (những người giám định ảnh) có thể tái dựng (về mặt lý thuyết) toàn bộ quá trình tạo ra bức ảnh, từ loại máy ảnh nào, chỉ số chụp ra sao, nén ảnh kiểu gì, ... cho đến các thao tác nào được áp dụng lên bức ảnh cuối. Một bức ảnh ghép có thể không có bất cứ lỗi nào, nhưng không thể ghép mà không để lại bất cứ một dấu vết nào. Do vậy, từ dấu vết để lại, chúng tôi có thể đưa ra kết luận kèm với độ xác thực một bức ảnh có phải là ảnh sửa hay không, hay thậm chí là có thể chỉ ra tấm ảnh đó được chụp bởi một máy ảnh cụ thể nào. Trong số tới ở Epsilon, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc một vài cách thức giám định ảnh cơ bản!

**PV: Như vậy tôi có thể tóm tắt là nếu tìm ra bằng chứng bất kỳ, thì một bức ảnh sẽ bị xem là ảnh sửa. Nhưng nếu như tôi có một bức ảnh được xem là thật thì nó vẫn có thể là ảnh giả vì có thể kỹ thuật giám định hiện tại chưa phát hiện được dấu vết sửa ảnh? Hay nói cách khác, mọi ảnh đều có thể là giả nên không thể tin cậy vào ảnh nữa?**

GĐA: Với một góc nhìn đầy bi quan và tiêu cực, điều đó không sai, nhưng với một cái nhìn lạc quan và cả khách quan hơn, thì cần nói rằng: Mọi ảnh giả đều sẽ bị phát hiện! Và rất đơn giản như luật pháp đối với quyền con người, một tấm ảnh nếu như không tìm được bằng chứng giả mạo, thì nó vẫn luôn được xem là ảnh thật!


Hình 3: Đây là một dạng khác của ảnh. Ảnh của căn phòng tuyệt đẹp này không phải là ảnh giả, nhưng cũng không phải là ảnh thật. Đây là ảnh được hoàn toàn tạo dựng bởi máy tính. Đây cũng là một trong những vấn đề hóc búa bên cạnh việc phát hiện ảnh giả. Tác phẩm này được tạo bởi nghệ sĩ Mateusz Wielgus.

**PV: Tôi gặp khá nhiều nhiếp ảnh gia hay chuyên viên chỉnh sửa ảnh phát biểu: "Vì tôi làm nghề này, nên nhìn vào ảnh nào chỉnh sửa là tôi biết ngay," điều này có đúng hay không?**

GĐA: Đây là một ngộ nhận thường gặp ở những người làm các nghề liên quan tới ảnh, đặc biệt là ảnh số. Thực tế không thể phủ nhận kinh nghiệm chụp hay chỉnh sửa ảnh sẽ giúp ích trong một số tình huống, nhưng để có thể thật sự xác định ảnh sửa thì bắt buộc phải có kiến thức về giám định ảnh. Nói nôm na, điều này cũng giống như trong … kiếm hiệp, cao thủ có thể phán đoán về "chiêu thức" khi xem qua thi thể nạn nhân, nhưng để đi đến kết luận, trong phần lớn trường hợp bắt buộc phải có giám định pháp y! Kiến thức giám định ảnh, trong thực tế, liên quan mật thiết và chặt chẽ với toán học nhiều hơn là với kiến thức nhiếp ảnh.

Như tôi trả lời ở trên trong 3 cách tìm ra ảnh sửa thì cách đầu tiên gần như ai cũng làm được (đọc Exif), cách thứ hai (tìm lỗi) là cách mà kinh nghiệm nhiếp ảnh sẽ đem lại lợi thế so với người không có kinh nghiệm. Tuy vậy, với ảnh giả được đầu tư, hay gọi là "giả y như thật" thì hai cách kiểm tra này không hiệu quả, cần phải áp dụng giám định ảnh.

Một ví dụ phổ biến là nhiều nhiếp ảnh gia sau khi xem một bức ảnh có tông màu quen thuộc với một số bộ lọc trên Photoshop mà họ hay dùng thì đưa ra kết luận ảnh đang xem xét cũng phải qua bộ lọc đó, nên khẳng định đó là ảnh sửa. Điều này có thể đúng, nhưng hoàn toàn chưa đủ, vì đó chỉ mới là giả thiết, một giả thiết phải có kiểm chứng thì mới có thể kết luận. Và kiểm chứng thì phải có độ xác thực, đây chính là thiếu sót phổ biến của những người không phải làm nghề giám định. Mỗi con số, ví dụ như "84% ảnh này đã bị cắt ghép," đều phải được đưa ra dựa trên cơ sở khoa học.

# Có thể sử dụng ảnh làm bằng chứng?

**PV: Liệu một tấm ảnh hay một đoạn video không có dấu hiệu gì của chỉnh sửa có thể được dùng làm bằng chứng?**

GĐA: Chúng tôi chủ yếu làm về mặt khoa học và không trực tiếp làm việc với toà án, tuy vậy, với những hiểu biết và thông tin của mình, chúng tôi có thể trả lời là tuỳ theo luật pháp của từng nơi mà điều này khác nhau. Có thể trả lời rằng ảnh và video vẫn đang là những bằng chứng quan trọng, nhưng không thể chỉ dựa vào đó mà đi đến kết luận. Hơn nữa, kết luận giám định ảnh không phải dạng đúng hoặc sai, nghĩa là giám định viên sẽ không kết luận "đây là ảnh giả" hoặc "đây là ảnh thật", mà sẽ có dạng: "ảnh có kiểm định đạt độ tin cậy X% dựa trên kỹ thuật giám định A, Y% dựa trên kỹ thuật giám định B,..." và căn cứ vào đó mà toà sẽ xem xét và đưa ra phán quyết khi kết hợp với các bằng chứng và lập luận khác.

Thực tế dùng ảnh làm bằng chứng khó khăn hơn mọi người vẫn thường nghĩ rất nhiều. Tôi lấy ví dụ anh có ảnh một kẻ đang thực hiện một vụ án mạng và anh dùng nó để tố cáo nghi phạm. Trước tiên, ảnh của anh sẽ được gửi cho chúng tôi (giám định viên) để giám định. Nhưng để được giám định, còn có một bộ phận sẽ làm thao tác đảm bảo tính trọn vẹn của dữ liệu, tức là họ phải đảm bảo ảnh mà chúng tôi khảo sát chính là ảnh mà anh gửi đi tố cáo. Việc này được thực hiện thông qua các hàm băm, ví dụ như gần đây họ phổ biến sử dụng SHA. Sau khi chúng tôi khảo sát, cũng chỉ có thể đưa ra kết luận như đã nói phần đầu trả lời của câu hỏi này, tức là bao nhiêu phần trăm với kỹ thuật kiểm định nào. Giả sử chúng tôi xác định được ảnh anh đưa là ảnh thật chưa qua chỉnh sửa, thì sau đó một bộ phận khác sẽ tiếp tục phân tích xem hiện trường mà anh ghi nhận có phải là hiện trường mà anh tố cáo hay không, người mà anh ghi hình có phải là nghi phạm hay không... Tất cả những thông tin đó sẽ được tập hợp lại trước toà và căn cứ vào đó họ mới đưa ra kết luận.

Điều này sẽ đặc biệt khó khăn nếu như ảnh của anh bị nén nhiều hơn 1 lần hay ví dụ như anh lấy từ một đoạn video trên youtube vì thông tin đã mất khá nhiều và ảnh của anh lúc này chắc chắn đã là ảnh sửa.

**PV: Như vậy nếu tôi muốn ... nguỵ tạo chứng cứ bằng ảnh giả, nên dùng ảnh có độ phân giải cao, nén một lần?**

GĐA: Nếu anh có ảnh giả có độ phân giải cao, nó sẽ lưu lại nhiều dấu vết hơn và chúng tôi dễ truy ra hơn quá trình chỉnh sửa ảnh, còn nếu anh có ảnh giả có độ phân giải thấp tuy làm quá trình giám định khó khăn hơn nhưng giá trị sử dụng làm bằng chứng lại thấp đi. Do vậy, nguỵ tạo bằng chứng luôn luôn là một việc làm sai trái và bất lợi trong mọi trường hợp!

Ngược lại, để sử dụng ảnh THẬT làm bằng chứng, nhân chứng nên cố gắng sử dụng ảnh chất lượng càng cao càng tốt và hạn chế mọi can thiệp, dù chỉ là nén ảnh.

# Toán học làm được gì trong phát hiện ảnh giả mạo?

**PV: Tôi vẫn không thấy toán học có vai trò gì ở đây cả. Liệu anh có thể giải thích rõ hơn vì sao giám định ảnh lại liên quan đến toán học nhiều hơn là nhiếp ảnh như anh đã đề cập?**

GĐA: Như đề cập ở những câu trả lời trước, giám định ảnh cần phải xây dựng dựa trên bằng chứng có thể kiểm định. Toán học đóng vai trò trọng yếu trong việc xây dựng các độ đo để kiểm định giả thiết đưa ra. Bên cạnh đó, toán học giúp mô hình hoá quá trình ghi nhận ảnh cũng như xấp xỉ các loại nhiễu. Đây chính là những thành tố quan trọng nhất của giám định ảnh!

Như tôi đã nói ở trên, việc nén một bức ảnh từ 2 lần trở lên làm cho bức ảnh trở nên chắc chắn là ảnh sửa, nhưng để phát hiện ra việc nén ảnh 2 lần thì kiến thức nhiếp ảnh không làm được, nhưng toán học làm được. Một trong những cách làm đó là dựa trên luật Benford và phân tích sự phân bố của chữ số đầu tiên trong biến đổi Cosine rời rạc trên ảnh. Anh có thể xem ở Epsilon số 5, chúng tôi có nói đến ứng dụng này. Trong số tới, chúng tôi sẽ trình bày một số phương pháp nữa để phát hiện ra ảnh cắt ghép, và để xác định một bức ảnh chụp bởi camera nào. Tất cả đều dựa trên toán học!

**PV: Anh có thể nêu ra một ví dụ cụ thể hơn về việc áp dụng toán học mà không phải sử dụng ảnh nén hay không? Ý tôi là một ví dụ nào đó có thể dễ hình dung hơn.**

GĐA: Tôi giới thiệu một ví dụ rất nổi tiếng về bức ảnh chụp Lee Harvey Oswald.

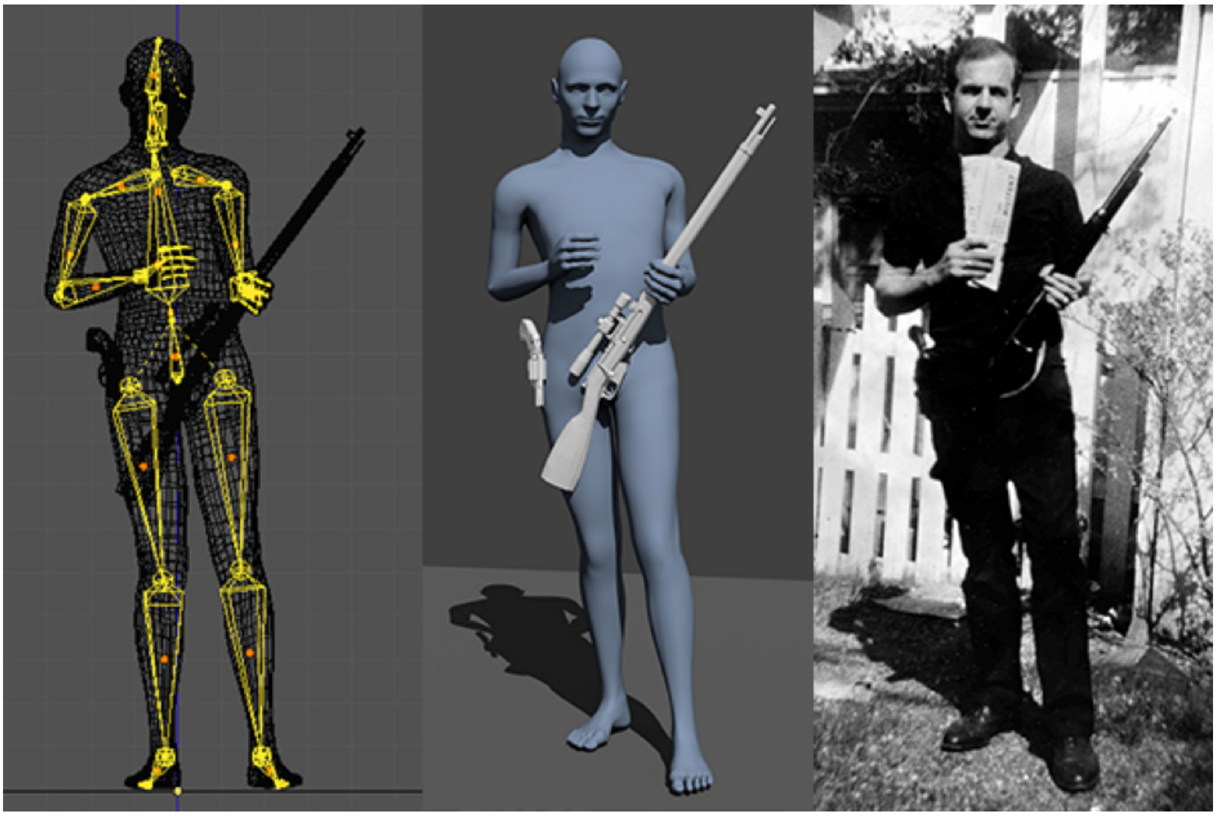
Ngày 22/11/1963, tổng thống Mỹ đương thời John F. Kennedy bị ám sát, hung thủ sau cùng được xác định là Lee Harvey Oswald, một xạ thủ bắn tỉa. Một trong những bằng chứng quan trọng là bức ảnh chụp lại cảnh Oswald ở sân sau cầm loại súng trường được xác định là loại dùng để ám sát Kennedy.

Tại thời điểm bị bắt, Oswald tuyên bố bức ảnh là giả mạo và rất nhiều chuyên gia đã chỉ ra các chi tiết giả mạo, bao gồm 4 chi tiết chính như sau:

1. Ánh sáng và bóng trong bức ảnh trái thực tế. Cụ thể là họ cho rằng vùng bóng dưới mũi của Oswald và vùng bóng toàn thân (trên nền) có chiều trái ngược nhau.
2. Đặc điểm khuôn mặt của Oswald là không phù hợp với hình ảnh khác của anh ta. Cụ thể là cằm của Oswald ngoài đời nhỏ hơn so với trong ảnh chụp, nên người trong ảnh có thể không phải là Oswald.
3. Kích thước của súng trường là không phù hợp với độ dài được biết đến của loại súng này. Cụ thể là tỉ lệ độ dài của súng so với chiều cao của Oswald trong ảnh không hợp lý (tỉ lệ theo độ dài của súng chia cho chiều cao của Oswald là 0.6493, trong khi tỉ lệ này trong ảnh là 0.5824);
4. Tư thế đứng của Oswald là bất hợp lý, không thể thăng bằng nếu như đứng như vậy.

Mặc dù vậy, căn cứ vào các bằng chứng khác, Oswald vẫn bị buộc tội. Nhưng liệu đây có phải là một bức ảnh giả?

Hơn 45 năm sau vụ án, bắt đầu từ 2009, Hany Farid, cha đẻ của giám định ảnh số, cùng với các cộng sự của mình tập trung phân tích chi tiết hơn cho bức ảnh này. Bằng các phần mềm và mô



Hình 4: Lee Harvey Oswald và mô hình phân tích 3D. Từ phải sang trái: Ảnh chụp Lee Harvey Oswald vào năm 1963; mô hình 3D tái dựng dựa trên các chỉ số sinh học của Oswald và kích thước các vật dụng khác cho thấy chiều dài súng, gương mặt cũng như bóng của Oswald trong hình là chính xác; mô hình 3D có bổ sung thêm khối lượng từng phần cơ thể của Oswald cho thấy dáng đứng như vậy là thật sự thăng bằng. (Nguồn ảnh: Đại học Dartmouth, tháng 10 năm 2015.)

hình toán học, dựa trên các chỉ số sinh học của Oswald cũng như các vật dụng, một mô hình 3D hoàn chỉnh đã được dựng lên nhằm tái tạo lại hiện trường của bức ảnh. Và lần lượt từng chi tiết được cho rằng giả mạo (mà không có bằng chứng) đã được cải chính. Trước tiên hết là về bóng, với mô hình ánh sáng mô phỏng ánh sáng tự nhiên, chiều và cả kích thước của các vùng bóng đo được hoàn toàn trùng khớp với ảnh chụp. Cũng với mô hình này, hiệu ứng ánh sáng cho thấy thị giác con người rất dễ bị ngộ nhận khi vùng cằm trong ảnh có vẻ to hơn bình thường, nhưng thực tế cằm của Oswald trong hình hoàn toàn trùng khớp với mẫu 3D tái hiện. Và cuối cùng, với chiều cao thật của Oswald và chiều dài thật của súng, ảnh tái hiện dựa trên mô hình 3D cũng cho ra tỉ lệ bằng với tỉ lệ "tưởng như mâu thuẫn" trong ảnh chụp. Hay nói cách khác, với mô hình 3D này Farid và cộng sự đã bác bỏ toàn bộ 3 giả thiết đầu tiên cho rằng đây là một bức ảnh giả. Vậy còn nghi ngờ cuối cùng về dáng đứng thì sao? Phải mất đến 6 năm sau, vào năm 2015, bằng cách đo đạc và thêm vào khối lượng từng bộ phận trên mô hình 3D, họ mới xác nhận được là tư thế đứng như trong ảnh là hoàn toàn thăng bằng, phủ định nghi ngờ cuối cùng của bức ảnh. Và do vậy, cho đến hiện tại, tấm ảnh về Lee Harvey Oswald vẫn được xem là ảnh thật.

**PV: Câu hỏi cuối cùng: nếu tôi muốn thử nghiệm phát hiện ảnh sửa, có công cụ hay phần mềm nào có thể giúp tôi thực hiện điều này thay vì phải phân tích vật lý và toán học quá phức tạp như vậy?**

GĐA: Nếu bạn muốn thử nghiệm, tôi có thể giới thiệu một số dịch vụ sau trên internet (vẫn còn hoạt động cho đến khi Epsilon số 12 này được đăng):

http://29a.ch/photo-forensics/
http://www.imageforensic.org/
http://fotoforensics.com/
http://www.getghiro.org/

Các công cụ trên vẫn đòi hỏi phải có kiến thức nền tảng về giám định ảnh nhất định, nhưng bạn đọc vẫn có thể thử nghiệm, đặc biệt là các phân tích về Exif. Với bạn đọc yêu thích toán học, chúng tôi xin hẹn vào số tới, khi đó chúng tôi sẽ trình bày chi tiết hơn cách dùng toán để phát hiện ảnh sửa và nguồn gốc ảnh.

**PV: Cảm ơn người giám định ảnh, và hẹn gặp lại anh vào số tiếp theo.**

# XẤP XỈ DIOPHANTINE - DÀN[1], CẦU NỐI ĐẾN VỚI ĐỘNG HỌC THUẦN NHẤT[2]

Lý Ngọc Tuệ
Mathworks, Massachusetts, Mỹ

## 1. Giới thiệu

Trong các phần trước của loạt bài về xấp xỉ Diophantine, chúng ta đã trả lời cho câu hỏi về khả năng xấp xỉ các số (véc tơ, ma trận) thực bởi các số (véc tơ, ma trận) hữu tỉ với 3 kết quả kinh điển: Định lý Dirichlet, Định lý Khintchine, và sự dày đặc của tập các số (véc tơ, ma trận) xấp xỉ kém. Các công cụ mà chúng ta đã sử dụng để chứng minh các định lý này trong các phần trước bao gồm liên phân số[3] (cf. [8, 10], quy tắc Dirichlet, hình học của số[4] (cf. [9]), và trò chơi của Schmidt/trò chơi siêu phẳng tuyệt đối[5] (cf. [11]). Trong phần này, chúng tôi xin giới thiệu về một hướng đi được phát triển mạnh mẽ trong khoảng 20 gần đây của lý thuyết xấp xỉ Diophantine: thông qua mối liên hệ với động học thuần nhất và lý thuyết ergodic [6].

Mối liên hệ giữa số học và động học thuần nhất có lẽ lần đầu tiên được lưu ý đến bởi Raghunathan vào những năm 1970, rằng giả thuyết Oppenheim [15] trong số học:

**Giả thuyết 1** (Giả thuyết Oppenheim). *Cho $n \geq 3$. Gọi $Q$ là một dạng toàn phương không xác định với hệ số thực và không phải là bội số của một dạng với hệ số hữu tỉ. Với mọi $\varepsilon > 3$, tồn tại một véc tơ $\vec{x}$ khác 0 sao cho $0 < Q(x, x) < \varepsilon$.*

tương đương với tính chất sau trên không gian các dàn:

*Mọi quỹ đạo tương đối compact của* $\mathrm{SO}(2,1)$ *trong* $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ *là compact.*

Quan sát này của Raghunathan đã dẫn đến lời giải cho giả thuyết Oppenheim của Margulis [12] vào năm 1987. Mối liên hệ tương tự cũng được sử dụng trong chứng minh của Einsiedler, Katok, và Lindenstrauss [4] rằng tập các số không thỏa giả thuyết Littlewood có chiều Hausdorff bằng 0 (một trong những kết quả đã mang lại giải Fields cho Lindenstrauss vào năm 2010).

Vào năm 1985, mối liên hệ trực tiếp giữa xấp xỉ Diophantine và động học thuần nhất trong không gian các dàn đã được nhận ra cụ thể bởi Dani trong [3] như sau:

[3] continued fractions
[4] geometry of numbers
[5] Schmidt game, hyperplane absolute game
[6] ergodic theory

**Định lý 1** (Tương ứng của Dani [3])**.** *Số thực (véc tơ, ma trận) $x \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$, $M_{n,m}(\mathbb{R})$) là một số xấp xỉ kém khi và chỉ khi dàn đơn modula[7] $\Lambda_x$ tương ứng trên $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{R}^{m+n}$) có quỹ đạo bị chặn dưới tác động của một nhóm con đường chéo một tham số[8] của nhóm tuyến tính đặc biệt $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ($\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_{m+n}(\mathbb{R})$).*

Sử dụng mối liên hệ này, Dani áp dụng kết quả của Schmidt trong xấp xỉ Diophantine để chứng minh kết quả mới trong động học thuần nhất rằng tập các điểm có quỹ đạo bị chặn dưới tác động của nhóm con đường chéo một tham số như trong Định lý 1 là một tập thắng cuộc trong trò chơi của Schmidt.

Tương ứng của Dani sau đấy được Kleinbock và Margulis [5] sử dụng để chứng minh giả thuyết Baker-Sprindžuk rằng phần giao của một đa tạp giải tích[9] với tập các số xấp xỉ tốt có độ đo bằng 0. Sau đấy, Kleinbock và Margulis mở rộng tương ứng của Dani ra cho các ma trận $\psi$-xấp xỉ được, và áp dụng kết quả trong động học thuần nhất để đưa ra một chứng minh hoàn toàn khác cho định lý của Khintchine-Groshev. Phương pháp này sau đấy được mở rộng và áp dụng để chứng minh các định luật 0-1 cho các đa tạp giải tích thực [1, 2] và $S$-arithmetic[10] [7, 13, 14] với trường cơ sở là $\mathbb{Q}$.

Trong phần 3, chúng ta sẽ phát biểu lại Tương ứng của Dani một cách cụ thể hơn và chứng minh tương ứng này. Trước đấy trong phần 2, chúng ta sẽ khảo sát qua một số điều cơ bản về không gian các dàn và động học thuần nhất trong các phần sau.

## 2. Không gian các dàn trong $\mathbb{R}^n$

Một dàn trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^n$ là một khái niệm tổng quát hóa tập các số nguyên $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ lên $\mathbb{R}^n$. Xét bên trong tập số nguyên có một số tính chất đáng chú ý sau:

(1) $\mathbb{Z}$ là một nhóm con của $\mathbb{R}$.

(2) $\mathbb{Z}$ là một tập rời rạc trong $\mathbb{R}$.

(3) Tồn tại một miền cơ bản[11]: Có 1 song ánh $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to [0, 1) : x \mapsto x \mod 1$.

(4) Miền cơ bản $[0, 1)$ của $\mathbb{Z}$ trong $\mathbb{R}$ có độ dài hữu hạn (= 1). Và độ dài của $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ được định nghĩa bằng độ dài của miền cơ bản.

Các tính chất này được sử dụng để định nghĩa một dàn trên một nhóm Lie $G$ bất kỳ như sau:

**Định nghĩa 2.** Một tập con $\Gamma \subset G$ được gọi là một dàn nếu như:

(1) $\Gamma$ là một nhóm con rời rạc trong $\mathbb{R}^n$.

[7] unimodular lattice
[8] diagonal one-parameter subgroup
[9] analytic manifold
[10] $S$-arithmetic analytic manifolds
[11] fundamental domain

(2) Tồn tại một tập Borel $F \subseteq G$ sao cho hàm tự nhiên $F \to G/\Gamma : g \mapsto g\Gamma$ là một song ánh. $F$ được gọi là một miền cơ bản của $\Gamma$ trong $G$.

(3) $\mu(G/\Gamma) := \mu(F) < \infty$ có với $\mu$ là độ đo Haar của $G$.

Nếu như $\Gamma$ là một dàn trong $G$ thì $G/\Gamma$ còn được gọi là một *không gian đồng điều*[12].

**Ví dụ 3.** (i) $\mathbb{Z}^2$ là một dàn trong $\mathbb{R}^2$ với miền cơ bản $[0, 1) \times [0, 1)$.

(ii) $\{0\} \times \mathbb{Z}$ không phải là một dàn trong $\mathbb{R}^2$.

(iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{Z} \right\}$ là một dàn trong $\mathbb{R}^2$.

Tất cả các dàn trong $\mathbb{R}$ có thể được mô tả dễ dàng như sau:

**Bài tập 4.** Chứng minh rằng $\Gamma$ là một dàn trong $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Gamma = a\mathbb{Z}$ với $a \neq 0$.

Quan sát trên có thể được mở rộng lên không gian véc tơ bằng cách thay thế số $a \neq 0$ bằng một ma trận khả nghịch:

**Định lý 5.** *(1) Với mọi dàn $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$, tồn tại một ma trận $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sao cho:*

$$\Gamma = g\mathbb{Z}^n.$$

*(2) Xét dàn $\mathbb{Z}^n$ trong $\mathbb{R}^n$ và $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ là một ma trận khả nghịch. Khi đấy, $g\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^n$ khi và chỉ khi $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$.*

**Bài tập 6.** Chứng minh rằng nếu như $\Gamma$ là một dàn trong $\mathbb{R}^n$, thì $\Gamma$ có chứa $n$ véc tơ độc lập tuyến tính.

**Bài tập 7.** Chứng minh Định lý 5

**Lưu ý 8.** Dàn $\Gamma$ trong $\mathbb{R}^n$ được gọi là một dàn *đơn modula*[13] nếu như $\lambda_n(\mathbb{R}^n/\Gamma) = 1$, với $\lambda_n$ là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}^n$. Khi đấy, ma trận $g$ trong Định lý 5 thuộc về tập các ma trận tuyến tính đặc biệt $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Tập các dàn đơn modula trong $\mathbb{R}^n$ được ký hiệu bởi $\Omega_n$.

Định lý 5 cho phép chúng ta đồng nhất $\Omega_n$ với $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) / \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ qua phép gán:

$$\Gamma = g\mathbb{Z}^n \mapsto g\,\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}).$$

Lưu ý rằng tập các ma trận tuyến tính đặc biệt $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ là một nhóm Lie, và $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ cũng là một dàn trong $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Cách đồng nhất trên đem lại độ đo, khoảng cách Riemann, không gian tiếp tuyến, và nhiều tính chất khác từ $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) / \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ cho $\Omega_n$. Cụ thể hơn, $\Omega_n$ trở thành một không gian đồng nhất.

[12]homogeneous space
[13]unimodular

Tuy độ đo và khoảng cách Riemann chúng ta đem về cho $\Omega_n$ từ thương $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\,\mathrm{SL}(\mathbb{Z})$ có vẻ trừu tượng, hàm khoảng cách này tương đương với hàm khoảng cách "tự nhiên" trong không gian các dàn trên $\mathbb{R}^n$ như sau: 2 dàn $\Gamma$ và $\Gamma'$ được gọi là gần nhau nếu như tồn tại 1 tập sinh $(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n)$ cho $\Gamma$ và 1 tập sinh $(\vec{y}_1, ..., \vec{y}_n)$ cho $\Gamma'$ sao cho:

$$\max\{\|\vec{x}_i - \vec{y}_i\| : 1 \leq i \leq n\}$$

đủ nhỏ, và khoảng cách Riemann giữa $\Gamma$ và $\Gamma'$ cũng tương đương với giá trị này.

**Lưu ý 9.** Khi $n = 1$, chúng ta chỉ có duy nhất 1 dàn đơn modula trong $\mathbb{R}$ chính là $\mathbb{Z}$. Với $n \geq 2$, miền cơ bản của dàn $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ trong $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ mặc dù có độ đo hữu hạn, nhưng không tương đối compact như các dàn trong $\mathbb{R}^n$. Nói một cách khác, khi $n \geq 2$, tập $\Omega_n$ k0 phải là một tập compact.

Vậy các dàn đơn modula trong $\mathbb{R}^n$ có thể "tiến đến vô cùng" như thế nào? Cho một dãy các dàn $\{\Gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$. Gọi $\vec{x}_i$ là véc tơ khác 0 ngắn nhất của $\Gamma_i$. Nếu như:

$$\lim_{i\to\infty} \|\vec{x}_i\| = 0,$$

thì giới hạn của các dàn $\Gamma_i$ sẽ bị mất đi ít nhất một bậc tự do, và vì vậy k0 phải là một dàn trong $\mathbb{R}^n$:

$$\lim_{i\to\infty} \Gamma_i \notin \Omega_n.$$

Xét hàm: $\delta : \Omega_n \to \mathbb{R}_{>0}$,

$$\Gamma \mapsto \delta(\Gamma) := \min\{\|\vec{x}\| : \vec{x} \in \Gamma \setminus \{0\}\}.$$

Hàm $\delta$ có thể xem như là "khoảng cách đến $\infty$ của dàn $\Gamma$. Và ta nói là $\Gamma_i \in \Omega_n$ tiến đến vô cùng nếu như

$$\lim_{i} \delta(\Gamma_i) = 0.$$

Chúng ta gọi một tập $S \subseteq \Omega_n$ là bị chặn nếu như tồn tại một tập $K \subseteq \Omega_n$ compact sao cho $S \subseteq K$. Các tập con bị chặn của $\Omega_n$ có thể được mô tả bởi tiêu chuẩn sau của Mahler[14]:

**Định lý 10** (Tiêu chuẩn compact của Mahler). *Tập $S \subseteq \Omega_n$ là bị chặn khi và chỉ khi:*

$$\inf_{\Gamma\in S} \delta(\Gamma) > 0.$$

Nói một cách nôm na, một tập con của $\Omega_n$ bị chặn khi khoảng cách từ tập đó đến vô cùng là đủ xa.

[14] Mahler's Compactness Criterion

# 3. Tương ứng của Dani

Nhắc lại trong phần 4 [11], chúng ta gọi số thực $x \in \mathbb{R}$ là *xấp xỉ kém*[15] nếu như tồn tại một hằng số $c = c_x > 0$ sao cho với mọi $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^2}.$$

Tương tự như vậy, một véc tơ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ được gọi là xấp xỉ kém nếu như tồn tại một hằng số $c > 0$ sao cho với mọi $\vec{p} \in \mathbb{Z}^n, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$,

$$\left\| \vec{x} - \frac{\vec{p}}{q} \right\| > \frac{c}{|q|^{1+\frac{1}{n}}}.$$

Ký hiệu tập các số xấp xỉ kém là $\mathbf{BA}$, và tập các véc tơ xấp xỉ kém là $\mathbf{BA}_n$. Tương ứng của Dani có thể được xây dựng như sau. Với mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$, ký hiệu ma trận:

$$u_x := \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Hiển nhiên $u_x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Gán cho $x$ một dàn đơn modula $\Lambda_x$ như sau:

$$\Lambda_x := u_x \mathbb{Z}^2 \in \Omega_2.$$

Với mỗi $t \in \mathbb{Z}$, đặt $g_t$ là một ma trận đường chéo trong $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ định nghĩa bởi:

$$g_t := \begin{pmatrix} e^t & \\ & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Ta có thể dễ dàng thấy được rằng với mọi $t$ và với mọi $x$:

$$g_t \Lambda_x = g_t u_x \mathbb{Z}^2 \in \Omega_2.$$

Tương ứng của Dani cho tập $\mathbf{BA}$ có thể được phát biểu như sau:

**Định lý 11.** *Số thực $x \in \mathbb{R}$ là một số xấp xỉ kém khi và chỉ khi luồng một chiều*[16] $\{g_t \Lambda_x : t \geq 0\}$ *trong $\Omega_2$ bị chặn.*

*Chứng minh.* $(\Rightarrow)$: Giả sử như $x \in \mathbf{BA}$, với $c > 0$ sao cho với mọi $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$:

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^2}.$$

[15] badly approximable

[16] one-dimensional flow

Nhân 2 vế với $q^2$ cho ta được:

$$|q| \cdot |qx - p| > c.$$

Khi đấy, với mọi $p, q \neq 0, t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\left\| g_t u_x \begin{pmatrix} -p \\ q \end{pmatrix} \right\| &= \left\| \begin{pmatrix} e^t & \\ & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p \\ q \end{pmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} e^t(qx - p) \\ e^{-t} q \end{pmatrix} \right\| \\
&= \max\bigl\{ e^t |qx - p|, e^{-t}|q| \bigr\} \\
&\geq \sqrt{e^t |qx - p| \cdot e^{-t}|q|} \\
&= \sqrt{|qx - p| \cdot |q|} \\
&> \sqrt{c}.
\end{aligned}$$

Vì vậy,

$$\delta\bigl(\bigl\{ g_t u_x \mathbb{Z}^2 : t \geq 0 \bigr\}\bigr) \geq \sqrt{c} > 0,$$

và theo tiêu chuẩn compact của Mahler, $\bigl\{ g_t u_x \mathbb{Z}^2 : t \geq 0 \bigr\}$ bị chặn trong $\Omega_2$.

($\Leftarrow$): Theo chiều ngược lại, giả sử như:

$$\delta\bigl(\bigl\{ g_t u_x \mathbb{Z}^2 : t \geq 0 \bigr\}\bigr) = c > 0.$$

Giả sử như $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ sao cho:

$$|q| \cdot |qx - p| < 1.$$

Đặt

$$t = -\frac{1}{2} \log \left| x - \frac{p}{q} \right| > 0.$$

Khi đấy, ta có được:

$$e^t \cdot |qx - p| = e^{-t}|q| = \left\| \begin{pmatrix} e^t(qx - p) \\ e^{-t} q \end{pmatrix} \right\| = \left\| g_t u_x \begin{pmatrix} -p \\ q \end{pmatrix} \right\| \geq \delta\bigl(\bigl\{ g_t u_x \mathbb{Z}^2 : t \geq 0 \bigr\}\bigr) = c.$$

Từ đó ta suy ra:

$$|q| \cdot |qx - p| = e^t |qx - p| \cdot e^{-t}|q| \geq c^2 > c^2/2 > 0.$$

Và vì vậy, $x \in \mathbf{BA}$. □

Tương ứng của Dani có thể mở rộng ra cho $\mathbf{BA}_n$ như sau:

**Định lý 12.** *Véc tơ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ là một véc tơ xấp xỉ kém khi và chỉ khi luồng một chiều $\{g_t \Lambda_{\vec{x}} : t \geq 0\}$ trong $\Omega_{n+1}$ bị chặn, với:*

$$\Lambda_{\vec{x}} := \begin{pmatrix} I_n & \vec{x} \\ & 1 \end{pmatrix} \mathbb{Z}^{n+1},$$

*và*

$$g_t := \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{n}} I_n & \\ & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

**Bài tập 13.** Chứng minh Định lý 12

**Bài tập 14.** Phát biểu Tương ứng Dani cho tập các ma trận xấp xỉ kém $A \in \mathbf{BA}_{n,m}$: tồn tại $c > 0$ sao cho với mọi $\vec{p} \in \mathbb{Z}^n, \vec{q} \in \mathbb{Z}^m, \vec{q} \neq 0$:

$$\|\vec{q}\|^n \cdot \|A\vec{q} - \vec{p}\|^m > c.$$

## Tài liệu

[1] V. Beresnevich, V. Bernik, D. Kleinbock, và G. Margulis, *Metric Diophantin approximation: The Khintchine-Groshev theorem for non-degenerate manifolds*, Moscow Math. J. **2** (2002), pp. 203-225.

[2] V. Bernik, D. Kleinbock, và G. Margulis, *Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions*, Int. Math. Res. Not. (2001), pp. 453–486.

[3] S. G. Dani, *Divergent trajectories of flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation*, J. Reine Angew. Math. **359** (1985), pp. 55–89.

[4] M. Einsiedler, A. Katok, và E. Lindenstrauss, *Invariant measures and the set of exceptions to Littlewoods conjecture*, Ann. Math. **164** (2006), pp. 513–560.

[5] D. Kleinbock và G. Margulis, *Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds*, Ann. Math. **148** (1998), pp. 339–360.

[6] D. Kleinbock và G. Margulis, *Logarithm laws for flows on homogeneous spaces*, Invent. Math. **138** (1999), pp. 451–494.

[7] D. Kleinbock và G. Tomanov, *Flows on $S$-arithmetic homogeneous spaces and application to metric Diophantine approximation*, Max Plank Institute for Mathematics preprints (2003), no. 65, pp. 1–45.

[8] Lý Ngọc Tuệ, *Xấp xỉ Diophantine trên $\mathbb{R}$ và Liên phân số*, Epsilon **4** (2015).

[9] ——, *Xấp xỉ Diophantine trên $\mathbb{R}^n$ - Quy tắc Dirichlet và Hình học của số*, Epsilon **5** (2015).

[10] ——, *Xấp xỉ Diophantine với độ đo - Định lý Khintchine*, Epsilon **6** (2015).

[11] ——, *Xấp xỉ Diophantine trên $\mathbb{R}^n$ - Véc tơ xấp xỉ kém và Trò chơi siêu phẳng tuyệt đối*, Epsilon **8** (2016).

[12] G. Margulis, *Formes quadratiques indefinies et flots unipotents sur les espaces homogènes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **304** (1987), pp.249–253.

[13] A. Mohammadi và A. Salehi Golsefidy, *$S$-arithmetic Khintchine-type theorem*, Geom. Func. Anal. **19** (2009), pp. 1147–1170.

[14] ——, *Simultaneous Diophantine approximation on non-degenerate $p$-adic analytic manifolds*, Israel J. Math. **188** (2012), pp.231–258.

[15] A. Oppenheim, *The minima of indefinite quaterary quadratic forms*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. bf 15 (1929), pp. 724–727.

[16] W. M. Schmidt, *Badly approximable systems of linear forms*, J. Number Theory **1** (1969), pp 139–154.

# HÌNH HỌC VÀ THỜI GIAN

Nguyễn Ái Việt
(Viện Công Nghệ Thông Tin, Đại Học Quốc gia Hà Nội)

TÓM TẮT

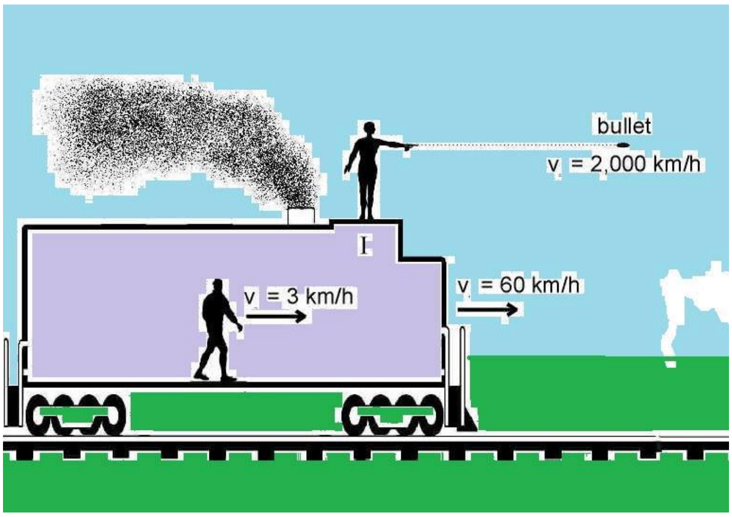
Hình học phẳng và hình học không gian trong chương trình toán phổ thông đều là hình học Euclide. Thêm một chiều thời gian vào hình học chúng ta sẽ có hình học không thời gian hay còn gọi là hình học Minkowski với những nhận thức mới về thế giới xung quanh. Một trong phát hiện quan trọng của hình học không thời gian có ảnh hưởng tới sự phát triển của nhân loại là công thức năng lượng của Einstein. Công nghệ định vị toàn cầu GPS sẽ không thể chính xác nếu không tính đến các quan niệm mới về khoảng cách và thời gian. Hình học không thời gian ra đời khi hình học Euclide không thể giải thích được các quan sát thực nghiệm về vận tốc ánh sáng. Einstein, Lorentz, Poincaré và Minkowski đã tìm ra hình học không thời gian khi đi tìm một mô hình toán học để giải thích thí nghiệm Michelson-Morley. Ứng dụng toán học vào thực tiễn trước tiên là phải chọn mô hình toán học phù hợp và không ràng buộc các quan niệm của chúng ta vào bất cứ lý thuyết toán học nào.

## Nguyên lý cộng vận tốc

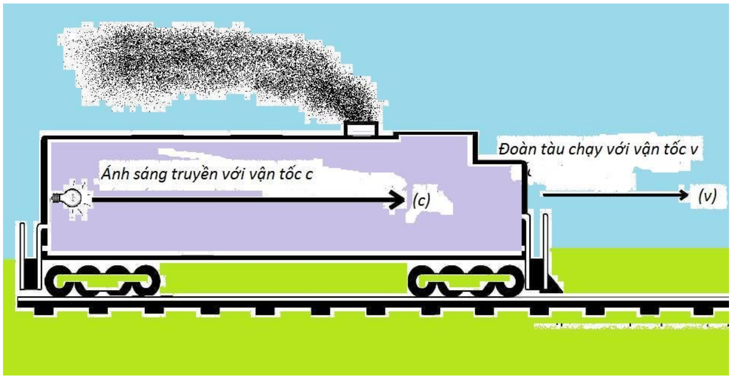
Giả sử có một con tàu chạy với vận tốc $v$, trên tàu có một hành khách đi với vận tốc $u'$. Người quan sát trên sân ga sẽ thấy hành khách chuyển động với vận tốc $u$ là bao nhiêu?

Bài toán này tuy rất đơn giản đối với học sinh phổ thông, nhưng chúng ta sẽ thử thận trọng kiểm tra từng bước lập luận. Nhiều ý tưởng khoa học vĩ đại cũng đã ra đời khi xem xét các ví dụ đơn giản như vậy. Nếu chúng ta đánh dấu một điểm $X$ bất kỳ trên con tàu, trong một khoảng thời gian $t$, người quan sát trên sân ga sẽ thấy điểm $X$ dịch chuyển một đoạn đường $x = vt$. So với điểm $X$, hành khách sẽ đi được một đoạn đường là $x' = u't$. Trong hình học Euclide, khoảng cách mà hành khách di chuyển so với sân ga là $s = s_1 + s_2 = (v + u')t$. Như vậy vận tốc của hành khách là $u = v + u'$. Đó chính là *nguyên lý cộng vận tốc* (Hình 1).

Nguyên lý cộng vận tốc được ứng dụng rộng rãi trong đời sống và tỏ ra khá chính xác với các vận tốc trong đời thường, nhỏ so với vận tốc ánh sáng $c = 300.000km/c$. Toán học đẹp đẽ ở chỗ giúp ta biết trước được các kết quả đo đạc bằng cách sử dụng các công thức toán. Lập luận của nguyên lý cộng vận tốc chỉ dựa trên việc cộng khoảng cách dường như hiển nhiên là đúng. Tuy nhiên, những chân lý được cho là hiển nhiên nhiều lần đã đánh lừa cả những bộ óc vĩ đại nhất. Ví dụ như, năm 1922, Elie Cartan đã đưa ra một lý thuyết tổng quát cho hình học Riemann. Ngay




Hình 1: Nguyên lý cộng vận tốc.




Hình 2: Vận tốc ánh sáng không đổi khi nguồn sáng chuyển động.

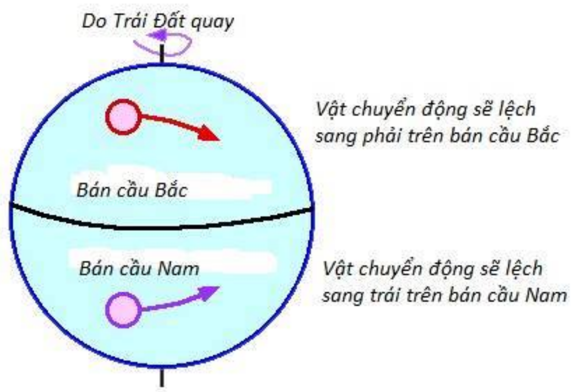
lập tức, ông đã nghĩ tới việc áp dụng lý thuyết này để mở rộng lý thuyết tương đối của Einstein. Do sử dụng một công thức sai mà Cartan cho là đúng "hiển nhiên", ông đã đi đến những hệ quả mâu thuẫn với thực tiễn. Điều đó làm việc ứng dụng lý thuyết Cartan vào thực tế bị chậm lại gần nửa thế kỷ.

Chúng ta hãy thử xét thêm một bài toán khác. Giả sử trên tàu chuyển động với vận tốc $v$ có một nguồn sáng. Biết rằng ánh sáng truyền với vận tốc xấp xỉ $c = 300.000 km/s$. Nếu áp dụng nguyên lý cộng vận tốc, người quan sát trên sân ga sẽ thấy ánh sáng chuyển động với vận tốc $c + v$ (Hình 2).

Mặc dù trong lập luận nêu trên, chúng ta chỉ dựa trên nguyên lý cộng vận tốc, nhưng chúng ta sẽ thấy kết luận của nó khác xa với thực tế.

## Thí nghiệm Michelson-Morley

Năm 1887, Albert Michelson và Edward Morley đã tiến hành một thí nghiệm cho thấy rằng ánh sáng truyền theo mọi phương với vận tốc không đổi, không phụ thuộc vào vận tốc của




Hình 3: Lực Coriolis chứng tỏ Trái Đất không đứng yên.

nguồn sáng.

Theo kết quả thí nghiệm Michelson-Morley, nguyên lý cộng vận tốc không thể áp dụng cho ánh sáng. Cụ thể, trong ví dụ nêu trên, người quan sát đứng trên sân ga sẽ phải thấy vận tốc ánh sáng cũng bằng $c$ giống như hành khách trên tàu. Điều đó có gì mâu thuẫn hay không? Thí nghiệm hay lập luận về nguyên lý cộng vận tốc đã có sai sót? Trong thực tế, thí nghiệm Michelson-Morley đã được lặp lại nhiều lần, loại bỏ mọi sai số và đều dẫn đến kết luận như nhau, không thể lầm lẫn.

Chúng ta sẽ còn phải biện luận một khả năng nữa. Thí nghiệm Michelson-Morley được thực hiện trong phòng thí nghiệm đặt trên Trái Đất. Vì thế, nếu Trái Đất đứng yên tuyệt đối như trong thuyết địa tâm của Nhà Thờ Trung cổ, thí nghiệm Michelson-Morley cũng sẽ cho thấy ánh sáng truyền theo mọi phương với vận tốc không đổi. Tuy vậy, chúng ta có những bằng chứng khác để chắc chắn rằng Trái Đất không đứng yên và thực hiện nhiều chuyển động quay khác nhau. Khi một vật bất kỳ chuyển động quay, sẽ có một lực Coriolis tác động lên vật chuyển động trên bề mặt của nó. Trong thực tế người ta đã quan sát được lực này trên hai bán cầu của Trái Đất theo hai hướng khác nhau như trong Hình 3.

Chúng ta sẽ đi tìm một lời giải thích khác cho thí nghiệm Michelson-Morley.

## Phép biến đổi Lorentz

Như vậy, chúng ta cần phải có một công thức cộng vận tốc mới có thể áp dụng được cả cho trường hợp nguồn sáng chuyển động. Công thức mới phải đảm bảo vận tốc ánh sáng đối với người quan sát trên sân ga cũng giống như đối với người quan sát trên tàu và đều bằng $c$ vừa có thể bao gồm cả nguyên lý cộng vận tốc cũ ở một mức độ chính xác nào đó.

Để làm được điều này, chúng ta sẽ xét lại các giả thiết "ngầm định" trong lập luận nêu trên về cộng vận tốc. Thậm chí, chúng ta có thể phải thay đổi các quan niệm về khoảng cách, thời gian, hoặc cả hai trong nguyên lý cộng vận tốc mới.

Người đầu tiên làm được điều đó vào năm 1892 là nhà vật lý người Hà Lan Henrik Lorentz (giải thưởng Nobel năm 1902). Ông giải thích việc vận tốc ánh sáng không thay đổi khi nguồn sáng chuyển động bằng cách cho rằng thời gian và khoảng cách do người quan sát trên sân ga và trên tàu đo được là khác nhau. Cụ thể người quan sát trên sân ga sẽ đo được khoảng thời gian và quãng đường một đối tượng bất kỳ (kể cả ánh sáng) đi được trong khoảng thời gian lần lượt là $t$ và $x$. Trong khi đó người quan sát đứng yên trên tàu sẽ đo được các đại lượng này là $t'$ và $x'$. Lorentz đã tìm được liên hệ giữa các đại lượng do hai người quan sát được thông qua *phép biến đổi Lorentz* sau đây

$$x' = \beta(-vt + x), \;\; t' = \beta(t - \frac{v}{c^2}x), \tag{1}$$

trong đó $\beta = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ là *hệ số Lorentz*. Trước tiên, chúng ta hãy kiểm tra xem phép biến đổi Lorentz có thỏa mãn các yêu cầu đã đề ra hay không.

Dễ dàng thử được,công thức biến đổi Lorentz (1) thỏa mãn hệ thức

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2 \tag{2}$$

Hệ thức (2) có ý nghĩa rất quan trọng: Đại lượng $x^2 - c^2t^2$ luôn là một số không đổi không phụ thuộc người quan sát khi họ chuyển động so với nhau.

Trong trường hợp số không đổi này bằng $0$, đối tượng quan sát sẽ chuyển động với vận tốc ánh sáng đối với cả hai người quan sát bất kỳ

$$u = x/t = u' = x'/t' = c \tag{3}$$

Đây chính là trường hợp nguồn sáng chuyển động không làm thay đổi vận tốc của ánh sáng trong thí nghiệm Michelson-Morley.

Chúng ta hãy tìm công thức cộng vận tốc mới từ công thức biến đổi Lorentz (1) như sau:

$$x'/t' = \frac{-v + x/t}{1 - v/c^2 x/t}, \tag{4}$$

hoặc một cách tường minh hơn

$$u' = \frac{-v + u}{1 - v/c^2 u}\, , \;\; u = \frac{u' + v}{1 + v/c^2 u'} \tag{5}$$

Đối với những vật chuyển động với vận tốc nhỏ hơn nhiều so với vận tốc ánh sáng $v/c^2 \approx 0$, chúng ta có nguyên lý cộng vận tốc cũ $u = v + u'$.

Như vậy, nếu thời gian và quãng đường do hai người quan sát bất kỳ đo được liên hệ với nhau bởi phép biến đổi Lorentz (1), chúng ta sẽ có nguyên lý cộng vận tốc mới thỏa mãn mọi yêu cầu của thực nghiệm.

Điểm cốt lõi nhất trong phép biến đổi Lorentz là thời gian và quãng đường đi được của đối tượng do hai người quan sát là khác nhau. Đặc biệt khái niệm "thời gian địa phương" của người quan sát của Lorentz được nhà toán học Henri Poincaré đánh giá là ý tưởng "tài tình nhất".

# Hệ quy chiếu và bất biến

## Biến đổi tọa độ không gian

Trong hình học Euclide, chúng ta đã quen thuộc với việc sử dụng phép biến đổi tọa độ không gian. Để đơn giản chúng ta chỉ xem xét không gian hai chiều, tuy mọi tính chất toán học quan trọng mà chúng ta quan tâm sẽ không thay đổi trong không gian nhiều chiều hơn.

Một điểm P cho trước được mô tả bằng các tọa độ $(x_1, x_2)$ trong hệ tọa độ thứ nhất và $(x'_1, x'_2)$ trong hệ tọa độ thứ hai quay đi một góc $\theta$ so với hệ tọa độ thứ nhất như trong Hình 4.

Sử dụng kiến thức hình học và lượng giác phổ thông, chúng ta có thể tìm ra công thức biến đổi quay hệ tọa độ như sau

$$x'_1 = \cos\theta x_1 + \sin\theta x_2, \quad x'_2 = \sin\theta x_1 - \cos\theta x_2 \tag{6}$$

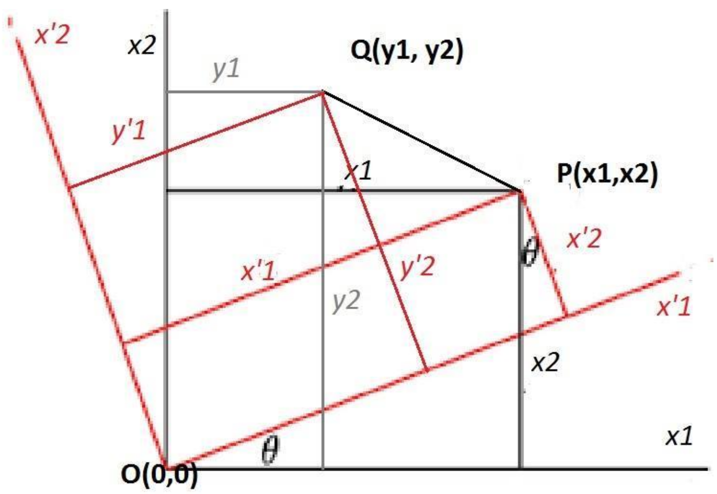
Hiển nhiên khoảng cách của đoạn OP không thay đổi khi ta quay hệ tọa độ. Do đó

$$OP^2 = x_1^2 + x_2^2 = x_1'^2 + x_2'^2 \tag{7}$$

Không những thế, khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ $P$ và $Q$ cũng không thay đổi với phép quay hệ tọa độ theo trục bất kỳ trong hình học Euclide.

Theo ngôn ngữ của toán học, khoảng cách bất biến với phép quay. Trong không gian Euclide 2 chiều chỉ có một phép quay, trong không gian 3 chiều có 3 phép quay độc lập theo ba trục không gian vuông góc với nhau. Tổng quát, trong không gian n chiều có $n(n-1)/2$ phép quay độc lập.

Như vậy, chúng ta sẽ hiểu tại sao trong các giáo trình toán cao cấp, định nghĩa hình học Euclide bao gồm các phép biến đổi quay hệ tọa độ và tính chất bất biến khoảng cách. Trong sách giáo khoa phổ thông, các thuộc tính bất biến được "ngầm định" xem như đúng hiển nhiên, không




Hình 4: Phép quay không gian bảo toàn khoảng cách

phát biểu thành tiên đề. Các tính chất bất biến với phép quay này được sử dụng trong các bài toán dựng hình và khi chứng minh các trường hợp bằng nhau của tam giác.

Về mặt vật lý, người ta "lý giải" về khả năng ứng dụng hình học Euclide với bất biến khoảng cách là do không gian có tính đồng nhất và đẳng hướng. Nếu trong không gian có một phân bố không đồng đều của các chất, nó sẽ không còn thuần nhất và đẳng hướng nữa. Các hình sẽ bị "méo đi" khi bị dịch chuyển trong các không gian như vậy. Chẳng hạn khi trong không gian có trường hấp dẫn khá mạnh, các đường thẳng sẽ bị uốn cong. Khi đó người ta sẽ phải sử dụng hình học Riemann thay cho hình học Euclide. Như vậy, bất biến khoảng cách không phải là một chân lý hiển nhiên bất di bất dịch. Khoa học không đặt niềm tin mù quáng vào bất cứ chân lý được thừa nhận nào của quá khứ.

## Hệ quy chiếu

Khi có thêm chiều thời gian trong hình học, chúng ta sẽ có khái niệm *hệ quy chiếu*, bao gồm các tọa độ không gian và thời gian. Thời gian là một số thực, do đó chúng ta sẽ có 4 biến thực khác nhau. Tuy nhiên, chúng ta sẽ thấy hình học không thời gian có tính chất khác không gian Euclide 4 chiều ở tính bất biến về khoảng cách.

Trong hình học không thời gian, bất biến về khoảng cách bị thay thế bất biến *khoảng không thời gian* được định nghĩa như sau

$$ds^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 - c^2(\tau - t)^2, \tag{8}$$

đối với hai sự kiện xảy ra tại các tọa độ không gian $(x_1, x_2, x_3)$, $(y_1, y_2, y_3)$ và tại các thời điểm lần lượt là $t$ và $\tau$.

Điều làm khoảng cách có thể thay đổi trong hình học không thời gian không phải là do không gian mất tính đồng nhất và đẳng hướng, mà chính là do các chuyển động với vận tốc lớn. Điều này chúng ta chưa hề biết trong vật lý cổ điển, khi hình học Euclide được coi là duy nhất và hiển nhiên là đúng với thực tiễn. Khoảng cách và thời gian đo được sẽ thay đổi khi người quan sát chuyển động với vận tốc lớn cho phép vận tốc ánh sáng không phụ thuộc vào hệ quy chiếu. Đó chính là ý nghĩa sâu xa của bất biến khoảng không thời gian.

Trong không gian ba chiều chúng ta sẽ có 3 phép biến đổi Lorentz độc lập tương tự như trong công thức (1), ứng với 3 tọa độ không gian khác nhau. Như vậy, chúng ta có 3 phép quay tọa độ độc lập trong không gian và 3 phép biến đổi Lorentz độc lập.

Poincaré là người đầu tiên nhận ra phép biến đổi Lorentz có tính chất giống như phép quay. Điều khác biệt chỉ là thay các hàm lượng giác thông thường trong công thức (6) bằng các hàm lượng giác hyperbole. Như vậy trong mặt phẳng $(ct, x)$ chúng ta có phép quay hyperbole

$$ct' = \cosh\theta ct - \sinh\theta x, \quad x' = -\sinh\theta ct + \cosh\theta x \tag{9}$$

Chúng ta sẽ tìm hiểu ý nghĩa của các hàm lượng giác hyperbole khi liên hệ với các hàm lượng giác bình thường như sau: Nếu trong công thức Moivre

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{10}$$

sử dụng biến số thuần ảo $\zeta = -i\theta$ chúng ta sẽ có

$$e^{\zeta} = \cosh\zeta + \sinh\zeta \tag{11}$$

Do đó,

$$\cosh\zeta = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh\zeta = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{12}$$

Hàm lượng giác hyberbole có tính chất sau

$$\cosh^2\zeta - \sinh^2\zeta = 1 \tag{13}$$

Sử dụng tính chất này chúng ta sẽ kiểm tra được khoảng không thời gian $x^2 - c^2t^2$ bất biến với các phép quay hyperbole (9). Mặt khác, chúng ta cũng kiểm tra được phép biến đổi Lorentz trong công thức (1) chính là phép quay hyperbole với tham số quay $\theta$ xác định qua vận tốc tương đối giữa hai hệ quy chiếu

$$\tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta} = \frac{v}{c} \tag{14}$$

Trong vật lý, phép quay Lorentz còn gọi là *phép ném* do biến đổi một hệ quy chiếu thành một hệ quy chiếu chuyển động với vận tốc $v$ so với nó.

## Không gian Minkowski

Năm 1907, nhà toán học Hermann Minkowski, vốn là thày dạy toán của Einstein, nhận thấy tất cả các công thức trong lý thuyết tương đối hẹp do Einstein, Lorentz và Poincaré xây dựng đều có thể viết lại đẹp đẽ trong không gian 4 chiều với 4 tọa độ như sau $(x_1, x_2, x_3, x_0 = ct)$. Khoảng không thời gian bất biến là

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_0^2 = \tag{15}$$

trong đó $dx_\mu, \mu = 1, 2, 3, 0$ là chênh lệch về tọa độ không thời gian giữa hai sự kiện bất kỳ.

So với không gian Euclide 4 chiều $R^4$, hình học không thời gian chỉ có thay đổi một dấu trừ trong định nghĩa khoảng bất biến. Như chúng ta sẽ thấy, khi áp dụng vào thực tiễn, chỉ dấu trừ trong định nghĩa khoảng bất biến này sẽ đảo lộn nhiều nhận thức hàng ngày của chúng ta.

Có một cách quan niệm khác: Nếu thời gian là một số ảo, chúng ta sẽ có bất biến như trong hình học Euclide. Nói rộng ra: thời gian cũng là một chiều không gian ảo và ngược lại không gian là chiều thời gian ảo. Như vậy số ảo tồn tại trong thế giới thực. Khiên cưỡng với các số thực mới là phi thực tế. Học Toán là để có một tư duy cởi mở và linh hoạt chứ không phải để tự trói mình vào những kiến thức quen thuộc và lạc hậu.

Như vậy, không gian Minkowski đã thống nhất không gian với thời gian, các phép biến đổi Lorentz chính là các phép quay đặc biệt trong không gian 4 chiều này đã "hòa trộn" không gian với thời gian. Các sự kiện vật lý xảy ra trong thực tế đều mô tả bởi một điểm trong không gian Minkowski.

Việc thống nhất không thời gian trong hình học Minkowski dẫn tới việc thống nhất rất nhiều đại lượng khác với nhau. Các vector 3 chiều trong hình học không gian đều cần được mở rộng thành các vector 4 chiều trong hình học không thời gian.

Trước hết chúng ta hãy xét vector vận tốc $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Thay cho vận tốc, trong vật lý, người ta thường dùng vector xung lượng $\vec{p} = m\vec{v}$. Trong hình học Minkowski, mọi vector đều có 4 thành phần, như vậy chúng ta cần bổ sung thêm một thành phần nữa. Thành phần thứ tư của xung lượng mở rộng chính là một đại lượng quen thuộc trong vật lý là năng lượng. Ta có vector năng-xung lượng trong hình học Minkowski định nghĩa như sau: $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, p_0) = (p_x, p_y, p_z, E)$. Việc thống nhất năng lượng với xung lượng vào một vector năng-xung lượng có một ý nghĩa rất sâu xa. Xung lượng là gắn liền với biến thiên theo các hướng không gian. Năng lượng sẽ gắn với biến thiên theo thời gian trong cơ học lượng tử và là nền tảng cho phương trình Schrödinger nổi tiếng mô tả các hiện tượng lượng tử trong thế giới vi mô. Điều đó hàng chục năm sau Minkowski mới được các nhà vật lý hiểu rõ.

Một trong những vẻ đẹp nữa của hình học Minkowski là việc mô tả lý thuyết điện từ của Maxwell một cách thống nhất. Như chúng ta biết, lý thuyết điện từ do nhà vật lý người Scottland James Clerk Maxwell phát hiện vào năm 1865. Lý thuyết này bao gồm tất cả các định luật về điện và từ. Lý thuyết này tiên đoán được sự tồn tại của sóng điện từ có ứng dụng thực tế rất rộng rãi ngày nay. Ánh sáng cũng là một loại sóng điện từ đặc biệt. Trong lý thuyết Maxwell có hai đại lượng cơ bản là *từ trường* $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ và *điện trường* $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$. Câu hỏi đặt ra là làm thế nào mô tả điện trường và từ trường trong hình học Minkowski, khi các vector trong hình học này phải có 4 chiều?

Khác với trường hợp của năng-xung lượng, mô tả của điện trường và từ trường không đơn giản là thêm vào thành phần thứ 4. Trong thực tế, không có đại lượng vật lý nào ứng với thành phần thứ tư của điện trường hoặc từ trường cả.

Người ta đã tìm ra một vector 4 chiều trong hình học Minkowski $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3, A_0)$ gọi là vector *thế năng điện từ*. Khi đó điện trường và từ trường có thể biểu diễn qua vector thế năng điện từ như sau

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (F_{01}, F_{02}, F_{03}), \quad \vec{B} = (F_{12}, F_{23}, F_{31}) \\ F_{\mu\nu} &= -F_{\nu\mu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \end{aligned} \tag{16}$$

trong đó $\mu, \nu = 1, 2, 3, 0$ và $\partial_\mu$ là đạo hàm theo biến thứ $\mu$. Các phương trình Maxwell, vốn rất khó nhớ bây giờ có thể viết thành dạng đơn giản và đẹp đẽ tương tự như phương trình sóng đối với thế năng điện tử $A_\mu$ như sau

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A_\mu = 0 \tag{17}$$

Điều đáng nói là trong hình học Minkowski, điện trường và từ trường được thống nhất với nhau thông qua một vector thế năng điện từ trường 4 chiều.

Ban đầu Einstein nghĩ rằng hình học Minkowski chỉ là một công cụ để mô tả các công thức toán học cho đẹp đẽ hơn. Nhưng ông đã nhanh chóng nhận ra ý nghĩa của hình học này trong việc thống nhất các đại lượng vật lý tưởng chừng riêng rẽ với nhau. Từ đó, ông đã có phát minh vĩ đại nhất của nhân loại là lý thuyết tương đối rộng, khi mở rộng hình học Minkowski cho các không gian không có tính đồng nhất. Năm 1915, Einstein công bố lý thuyết tương đối rộng với các công thức toán học sử dụng các vector 4 chiều rất rộng rãi. Khi đó, Minkowski đã qua đời được 6 năm, không kịp chứng kiến sự ra đời của công trình khoa học vĩ đại nhất của nhân loại do học trò của mình khám phá.

Ngày nay cách mô tả các đại lượng vật lý thông qua các vector 4 chiều của Minkowski trở nên phổ biến rộng rãi trong vật lý. Nhờ đó, Dirac đã tìm ra phương trình mô tả electron và positron và các hạt vật chất. Cũng nhờ đó, Yang và Mills phát hiện được phương trình Yang-Mills mô tả các tương tác giữa các vật chất.

# Hình học không thời gian và thực tế

## Công thức năng lượng của Einstein

Việc thống nhất năng lượng và xung lượng trong không gian Minkowski có một hệ quả vô cùng quan trọng. Tương tự như bất biến khoảng không thời gian, năng-xung lượng cũng liên quan tới một đại lượng bất biến là khối lượng thông qua công thức

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - E^2 = -m^2c^4 \tag{18}$$

Chúng ta sẽ không tìm cách dẫn ra công thức này theo cách mà Einstein và các nhà toán học và vật lý đồng thời với ông đã làm. Các cách dẫn này chứa đựng nhiều quan điểm khác nhau, kể cả sai sót, còn đang tranh luận cho tới ngày nay [2].

Tuy nhiên, những người quan tâm tới cơ sở toán học chặt chẽ của công thức năng xung lượng (18) có thể thấy khối lượng chính là bất biến Casimir trong lý thuyết biểu diễn nhóm Poincaré của E.P.Wigner [3]. Chính vì thế, khối lượng là đặc trưng

Chúng ta hãy viết lại công thức năng xung lượng trong hệ tọa độ Descartes $(x, y, z)$ dưới dạng

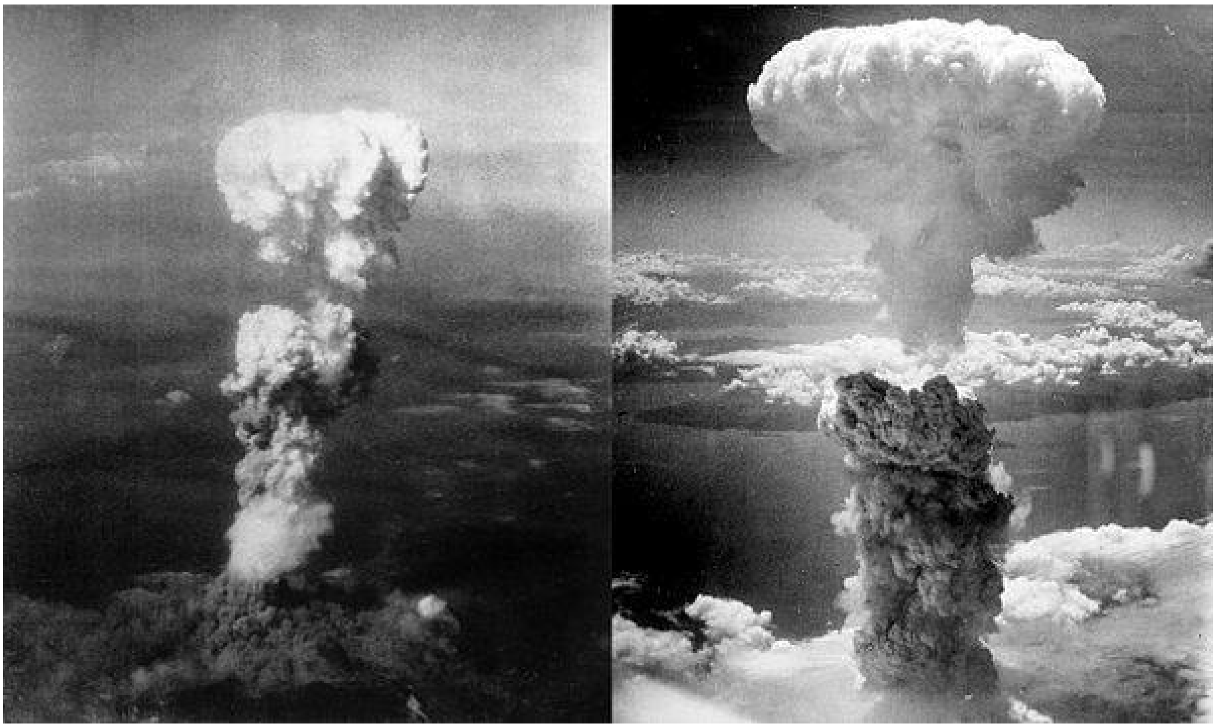
$$E = \sqrt{m^2c^4 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \tag{19}$$

Khi xung lượng bằng $0$, chúng ta có công thức năng lượng nổi tiếng của Einstein

$$E = mc^2 \tag{20}$$

Công thức này có một ý nghĩa vô cùng quan trọng:Do khối lượng của vật chất tương đương với năng lượng, khi khối lượng mất đi sẽ giải phóng ra một năng lượng vô cùng lớn. Đó chính là cơ sở của năng lượng nguyên tử.

Năm 1938, người ta đã phát hiện năng lượng được giải phóng trong rã hạt nhân nguyên tử uran khi bị bắn phá bởi các hạt neutron. Bên cạnh đó, trong các phản ứng tổng hợp các hạt nhân nhẹ thành hạt nhân năng, cũng có một lượng năng lượng lớn gấp bội được giải phóng.



Hình 5: Bom nguyên tử tại Hiroshima và Nagasaki

Giải phóng năng lượng trong cả hai trường hợp đều do khối lượng bị mất mát theo công thức khối lượng của Einstein.

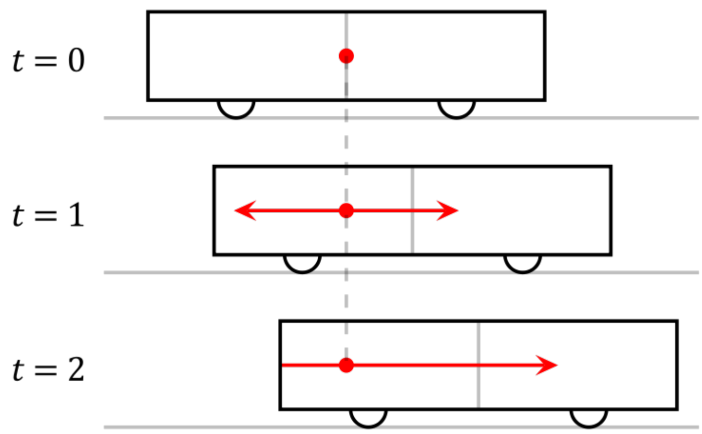
Công thức khối lượng là thành tựu vĩ đại đáng lẽ chỉ để giải quyết vấn đề năng lượng cho loài người, nhưng tiếc thay, công thức này bị lạm dụng để làm các loại vũ khí hủy diệt chưa từng thấy trong lịch sử. Đó là vết nhơ trong lịch sử loài người. Điều đó cho thấy, để đi vào ứng dụng thực tế, các nhà khoa học cần có nền tảng đạo đức vững chắc bên cạnh kiến thức khoa học uyên thâm.

## Quan niệm mới về thời gian và khoảng cách

Trong hình học không thời gian, do các khái niệm không gian và thời gian được hòa trộn, các quan niệm về khoảng cách và thời gian tuyệt đối mà chúng ta thừa nhận như các chân lý hiển nhiên không còn đúng nữa.

Trước hết là ở tính đồng thời. Hai sự kiện được gọi là đồng thời nếu xảy ra tại cùng một thời điểm. Do thời gian trong các hệ quy chiếu khác nhau là khác nhau, nên hai sự kiện được coi là đồng thời trong một hệ quy chiếu sẽ không còn là đồng thời trong hệ quy chiếu khác. Điều đó cũng tương tự như có hai sự kiện đồng thời xảy ra tại thành phố Hồ Chí Minh và Hà Nội, nhưng đối với người trên chuyến máy bay từ Hà Nội đi thành phố Hồ Chí Minh hoặc ngược lại thì một sự kiện sẽ xảy ra trước sự kiện kia.

Trong Hình 6, có một tia sáng chiếu từ giữa toa tàu đang chuyển động. Người quan sát đứng ở trên tàu sẽ thấy tia sáng chiếu đến đầu tàu và cuối tàu đồng thời. Trong khi đó, người đứng trên sân ga sẽ thấy tia sáng đến cuối tàu sớm hơn do quãng đường ánh sáng phải đi ngắn hơn.




Hình 6: Tính đồng thời phụ thuộc vào hệ quy chiếu

Bạn đọc có thể tự nghĩ ra rất nhiều tình huống lý thú khi tính đồng thời bị vi phạm.

Do thời gian trong các hệ quy chiếu khác nhau là khác nhau do phép biến đổi Lorentz, không những tính đồng thời bị vi phạm mà thời trôi đi trong hệ quy chiếu này có thể dài hoặc ngắn hơn thời gian trôi đi trong hệ quy chiếu kia. Người ta có một kịch bản giả tưởng về hai anh em sinh đôi, sống trên hai hệ quy chiếu khác nhau, người này sẽ già hơn người kia khi gặp lại.

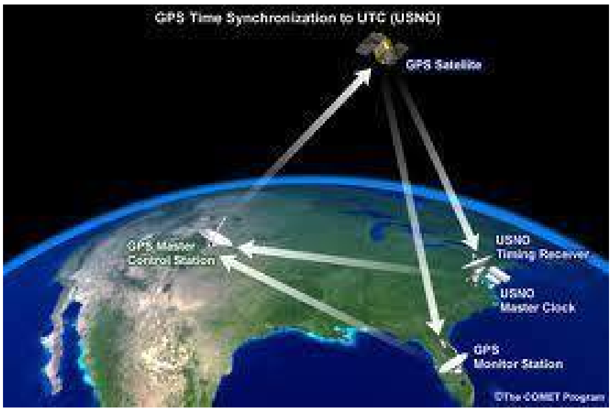
Chính vì thế câu chuyện Từ Thức gặp tiên, khi trở về quê nhà, những người thân đều đã qua đời, vẫn có phần thực tế trong hình học không thời gian. Nếu cõi tiên của Từ Thức ở trong một hệ quy chiếu chuyển động, ông sẽ thấy thời gian ngắn hơn so với hệ quy chiếu gắn với quê hương, nơi có người thân của ông sinh sống.

Độ dài cũng thay đổi trong các hệ quy chiếu khác nhau. Người quan sát sẽ thấy vật chuyển động ngắn lại nhờ phép biến đổi Lorentz. Điều đáng chú ý là mặc dù thời gian bị đảo lộn trong hệ quy chiếu, trong hình học không thời gian, tính nhân quả không bị đảo lộn. Nếu một sự kiện A là hệ quả của một sự kiện B, trong mọi hệ quy chiếu sự kiện A luôn là hệ quả của sự kiện B. Do đó, trong mọi hệ quy chiếu, người quan sát sẽ phải luôn luôn thấy cha sinh trước con.

## Công nghệ GPS và thuyết tương đối

Các ví dụ nói trên tuy rất thú vị về mặt triết lý, nhưng đều có vẻ trừu tượng và giả tưởng. Trong phần này, chúng ta hãy xét một ví dụ về ứng dụng hình học không thời gian trong thực tế.

Công nghệ định vị toàn cầu GPS là công nghệ xác định vị trí của các vật chuyển động trên bề mặt Trái Đất nhờ các vệ tinh trong không gian. Từ các vật trên mặt đất, người ta cho phát đi sóng điện từ đến các vệ tinh, vệ tinh sẽ nhận được tín hiệu sóng và qua đó tính được khoảng cách từ vật phát sóng đến vệ tinh. Nếu có nhiều vệ tinh (trong thực tế hệ thống GPS có 24 vệ tinh), từ các khoảng cách khác nhau, người ta sẽ xác định được chính xác vị trí của vật trên mặt đất (Xem Hình 7). Chính trong công nghệ này ảnh hưởng của hình học không thời gian đặc biệt quan trọng [4] Các vệ tinh chuyển động trên quỹ đạo quanh Trái Đất với tốc độ 14.000 km/giờ. Do đó đồng hồ trên các vệ tinh sẽ chạy nhanh hơn các đồng hồ trên Trái Đất chừng 7 micro




Hình 7: Công nghệ định vị bằng vệ tinh

giây trong một ngày đêm. Do quỹ đạo của các vệ tinh cách mặt đất chừng 20.000km, lực hấp dẫn trên vệ tinh sẽ nhỏ hơn trên mặt đất 4 lần. Các hiệu ứng hấp dẫn lại làm đồng hồ trên mặt đất chạy nhanh 45 micro giây trong một ngày đêm. Như vậy về tổng số, đồng hồ trên mặt đất sẽ chạy nhanh hơn đồng hồ trên vệ tinh 38 giây trong một ngày đêm.

Để đo được vị trí của vật trên mặt đất bằng công nghệ GPS chính xác tới 15m, sai số đo thời gian phải dưới 50 nanô giây. Nếu không tính tới các hiệu ứng của thuyết tương đối, mỗi ngày đêm sai số sẽ tích lũy khoảng 10km, một con số rất lớn làm sai lệch việc đo khoảng cách bằng GPS.

Ngày nay, hiệu chỉnh thời gian với hình học không thời gian và hình học Riemann bao gồm hiệu ứng hấp dẫn rất quan trọng trong công nghệ GPS.

## Mở rộng hình học không thời gian

Năm 1915, Einstein đã ứng dụng hình học Riemann vào vật lý bằng cách mở rộng hình học không thời gian và bỏ qua điều kiện bất biến khoảng không thời gian. Hình học này đã mô tả sự hình thành vũ trụ và tương tác hấp dẫn từ các khoảng cách xa nhau hàng triệu năm ánh sáng.

Tuy nhiên, đó vẫn chưa phải là giới hạn cuối cùng của sự mở rộng. Ngày nay, hình học Riemann mở rộng thêm các chiều không gian và hơn một chiều thời gian cũng bắt đầu được nghiên cứu. Bên cạnh đó các tính chất hình học như độ cong, độ xoắn và các tính chất topo của không thời gian đang đem lại rất nhiều quan niệm mới mở ra những chân trời ứng dụng mới không những cho khoảng cách lớn giữa các Thiên hà mà cả ở các khoảng cách vô cùng bé, nơi các quan niệm hiện tại của chúng ta về không thời gian sẽ phải thay đổi rất nhiều.

Ứng dụng toán học là tìm và phát triển các mô hình toán học phù hợp với thực tiễn. Thực tiễn không dừng lại với bất kỳ lý thuyết toán học cụ thể nào.

# Tài liệu

[1] Nguyễn Ái Việt, *Cấu trúc không thời gian: Tập 1.Thuyết tương đối hẹp và đối xứng không thời gian* (sẽ xuất bản)

[2] E.Hecht, American Journal of Physics, **79** (6) (2011) 591–600

[3] V.Bargmann and E.P.Wigner, Proc. Natl. Acad. Sci. 34 (5) (1948) 211–23.

[4] C.M.Will,*Stable clocks and general relativity* (1995) arxiv: gr-qc/9504017

# CHỨNG MINH CÔNG THỨC EULER CHO ĐA DIỆN BẰNG VẬT LÝ

Đàm Thanh Sơn
*(Đại học Chicago)*

## GIỚI THIỆU

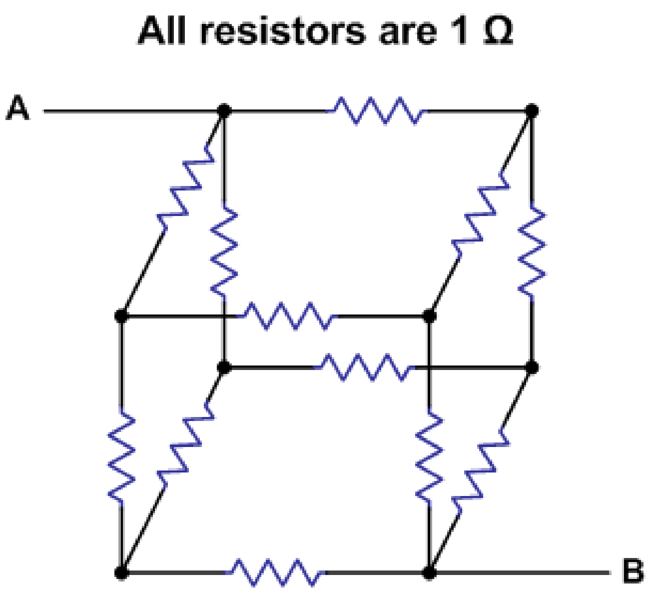
Bài viết được trích từ bài viết https://damtson.wordpress.com/2016/10/22/euler-formula/ của tác giả.

Giải Nobel vật lý năm nay được trao cho ba nhà vật lý, Thouless, Haldane và Kosterlitz, vì những đóng góp liên quan đến các chuyển pha và các trạng thái tôpô. Nhân dịp này chúng ta sẽ dùng vật lý để chứng minh một công thức khá nổi tiếng, liên quan đến tôpô - công thức Euler cho đa diện. Công thức này nói rằng với một đa diện bất kỳ, số đỉnh $V$, số mặt $F$ và số cạnh $E$ của nó thoả mãn

$$V + F - E = 2.$$

Ví dụ với hình lập phương ta có $V = 8,\ F = 6,\ E = 12$, và $8 + 6 - 12 = 2$. Bạn có thể kiểm tra với một vài hình đa diện nữa để thấy công thức luôn đúng.

Để chứng minh công thức này, ta sẽ lắp một mạch điện theo hình đa diện, thay mỗi cạnh của đa diện bằng một điện trở. Không quan trọng lắm các giá trị của điện trở là bao nhiêu, miễn là tất cả các điện trở đều khác không. Để cho đơn giản ta cho mỗi điện trở là $1\omega$. Sau đó ta chọn hai đỉnh và nối hai cực của một nguồn điện vào hai đỉnh đó, cũng không quan trọng lắm là đỉnh nào. Chẳng hạn với hình lập phương ta có thể tưởng tượng ra mạch điện như sau:




Khi ta nối một mạch điện như vậy, tất nhiên điện sẽ chạy trong mạch một cách nhất định. Ta có thể đặt nhiều câu hỏi với mạch điện này. Ví dụ ta có thể hỏi điện trở của mạch là bao nhiêu. Câu hỏi tôi sẽ hỏi là như sau: Giả sử tổng dòng điện chạy qua mạch là 1 Amper, dòng điện chạy qua từng điện trở là bao nhiêu? (Tất nhiên là nếu trả lời được câu hỏi này thì có thể tìm ra được điện trở của mạch).

Để trả lời câu hỏi trên, ta sẽ lập một hệ phương trình cho phép ta tìm được dòng điện chảy qua từng điện trở. Giả sử $AB$ là một cạnh, ta ký hiệu $I_{AB}$ là dòng điện chạy từ đỉnh $A$ đến đỉnh $B$. Ta có $I_{AB} = -I_{BA}$, và có tổng cộng $E$ đại lượng này. Ta sẽ lập một hệ phương trình để tìm giá trị của các dòng điện này.

Có hai loại phương trình, xuất phát từ hai định luật Kirchhoff. Loại đầu tiên là như sau. Giả sử $A$ là một đỉnh, và $B,\ C,\ D,\dots$ là các đỉnh kề $A$. Ta có phương trình:

$$I_{AB} + I_{AC} + I_{AD} + \cdots = 0 \text{ hoặc } 1 \text{ hoặc } -1.$$

Vế phải là 0 nếu như đỉnh $A$ không phải một trong hai đỉnh nối vào nguồn điện, là 1 nếu $A$ được nối vào cực dương và $-1$ nếu $A$ nối vào cực âm. Đơn giản phương trình này nói dòng điện chạy vào một đỉnh phải bằng dòng chạy ra từ đó.

Ta có tổng cộng bao nhiêu phương trình như thế này? Đếm thì thấy tổng cộng là $V$ phương trình, nhưng thực ra chúng không độc lập với nhau. Có thể thấy điều này bằng cách lấy tổng tất cả các phương trình trên. Ta sẽ được đồng nhất thức $0 = 0$, vì ở vế trái với mỗi IAB bao giờ cũng có $I_{BA}$. Vế phải thì tất nhiên tổng là $1 + (-1)$ cộng nhiều số 0, cũng bằng không. Như vậy chỉ có $V - 1$ phương trình độc lập.

Nhưng những phương trình trên không phải tất cả các phương trình ta phải viết ra. Có một loạt các phương trình khác (phương trình loại hai). Ta giả sử $ABCD$ là một mặt (ta cho nó là tứ giác ở đây nhưng logic tiếp theo đúng với mọi đa giác). Ta sẽ có phương trình

$$I_{AB} + I_{BC} + I_{CD} + I_{DA} = 0.$$

Tại sao có phương trình này? Đó là do điện trở trên mỗi cạnh là $1\omega$ nên $I_{AB}$ cũng là hiệu điện thế giữa hai đỉnh $A$ và $B$ : $I_{AB} = U_A - U_B$. Từ đó phương trình ở trên trở thành hiển nhiên. Tổng cộng có $F$ phương trình như vậy. Tuy nhiên các phương trình này cũng không độc lập, nếu cộng tất cả các phương trình này lại ta lại có đồng nhất thức $0 = 0$, do đó là chỉ có $F - 1$ phương trình loại hai.

Tổng cộng ta có như vậy là $(V - 1) + (F - 1) = V + F - 2$ phương trình.

Ta phải giải các phương trình này để tìm các dòng $I_{AB}$. Có bao nhiêu ẩn số tất cả? Số ẩn là số cạnh $E$.

Thiên nhiên cho ta biết khi nối mạch điện thì chỉ có một nghiệm duy nhất, vậy số phương trình phải bằng số ẩn.

Do đó $V + F - 2 = E$. Đây chính là công thức Euler phải chứng minh.

# GIẢ THUYẾT KEPLER VÀ BÀI TOÁN XẾP CAM

Dương Đức Lâm
*University of Sussex, United Kingdom*

## GIỚI THIỆU

Johannes Kepler là một nhà toán học, nhà thiên văn học nổi tiếng người Đức, người có những đóng góp nền tảng góp phần tạo nên cuộc cách mạng khoa học ở thế kỉ 17. Ngoài các định luật chuyển động của hành tinh được nhiều người biết đến, ông còn có nhiều đóng góp khác cho toán học, một trong số đó là giả thuyết Kepler, một trong những bài toán cổ xưa nhất của toán học. Bài viết này đề cập một số vấn đề xoay quanh giả thuyết Kepler và sự mở rộng của nó, bài toán xếp cam nhiều chiều, cũng như những tiến bộ đạt được trong thời gian gần đây.

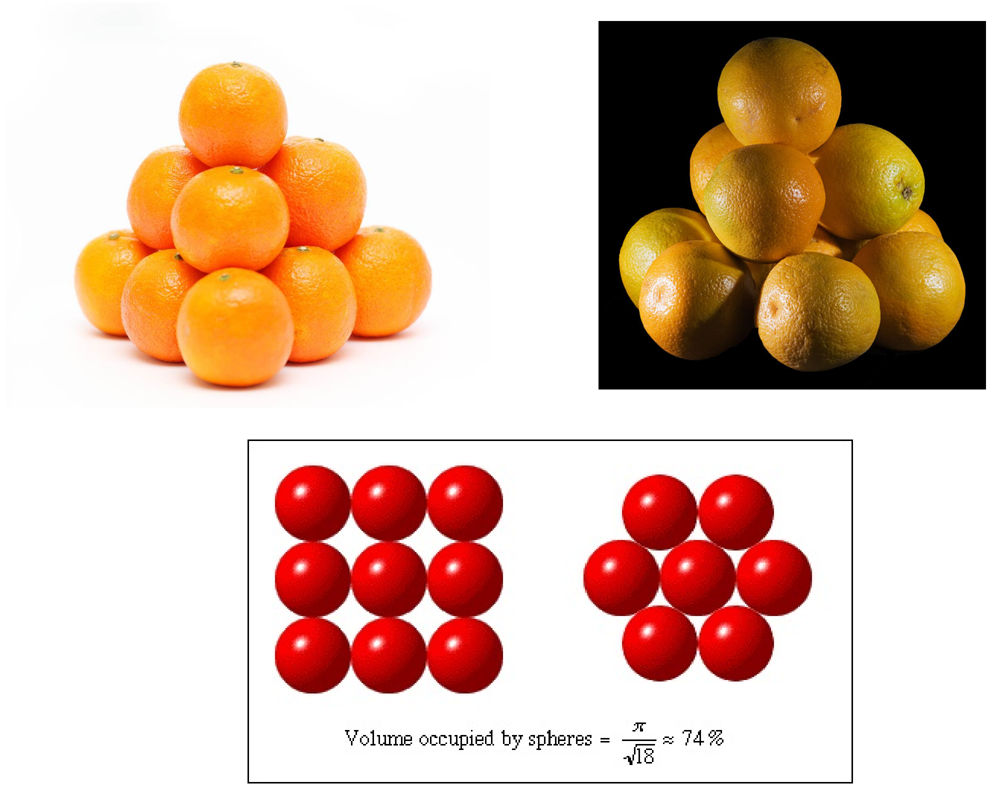
## 1. Giả thuyết Kepler và vài nét lịch sử

Rất nhiều bài toán khó và lâu đời của toán học được phát biểu rất đơn giản. Những ví dụ điển hình là bài toán bốn màu (được Francis Guthrie phát biểu lần đầu vào năm 1852), định lí cuối cùng của Fermat (được ghi lại năm 1637 bên lề một cuốn sách của Diophantus) hay nhiều giả thuyết liên quan đến số nguyên tố. Một ví dụ cũng nổi tiếng không kém, thậm chí còn lâu đời hơn, giả thuyết Kepler, được Johannes Kepler đưa ra vào năm 1611.

Câu chuyện được bắt đầu vào những năm cuối thập kỉ 90 của thế kỉ 16 [4]. Sir Walter Raleigh, một thủy thủ quý tộc người Anh, trong khi đang chuẩn bị cho một chuyến đi thám hiểm, đã hỏi người bạn và là trợ lý của mình là nhà toán học Thomas Harriot, làm thế nào để tính số lượng quả đạn cối được chứa trong một chiếc giỏ. Harriot đã đưa ra lời giải không mấy khó khăn. Tuy nhiên, vốn là một nhà toán học, ông đã đưa ra câu hỏi tổng quát hơn rằng, phải sắp xếp như thế nào để lượng đạn chiếm phần không gian ít nhất.

Sau chuyến đi, Harriot viết thư trao đổi với Kepler, một đồng nghiệp của ông lúc đó ở Praha (Cộng hòa Czech). Sau một thời gian nghiên cứu bài toán, Kepler đã xuất bản một cuốn sách nhỏ tựa đề "Strena Seu de Nive Sexangula[1]" (1611), trong đó mô tả hai cách sắp xếp các hình cầu trong không gian ba chiều: sắp xếp theo kiểu kim tự tháp (hay là kiểu lập phương tâm diện), và sắp xếp theo kiểu lục giác (xem Hình 1). Quan trọng hơn, ông nói rằng, đây là hai cách sắp xếp chặt nhất có thể, tuy nhiên lại không đưa ra chứng minh.

[1] On the Six-Cornered Snowflake




Hình 1: Hai cách xếp cam chặt nhất. (Nguồn ảnh: Wikipedia and Plus Maths.)

Với cách xếp này, một độ chiếm không gian của các quả cam là

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \simeq 74\%.$$

Giả thuyết Kepler nói rằng, tất cả các cách xếp khác đều có mật độ chiếm không gian không lớn hơn con số này.

Có một thực tế rằng, hầu như các cách sắp xếp trái cây ở các quầy bán hoa quả hay cách sắp xếp, chồng chất hàng hoá, đóng gói vật dụng có dạng hình cầu nói chung đều tuân theo quy tắc này [2] (xem Hình 2). Bởi thế mà giả thiết Kepler còn được gọi là bài toán xếp cam hay bài toán đóng gói hình cầu (sphere packing problem).

## 2. Thomas Hales và hành trình tìm kiếm lời giải

Khác với một số bài toán nổi tiếng khác, chẳng hạn bài toán bốn màu, mà trong nhiều năm liền chủ yếu chỉ nhận được sự quan tâm tìm kiếm lời giải từ các nhà toán học "amateur", giả thuyết Kepler được nhiều nhà toán học hàng đầu chú ý, trong đó có Newton và Gauss [5]. Nó được Hilbert đưa vào danh sách 23 bài toán nổi tiếng tại đại hội toán học thế giới năm 1900 và nằm ở vị trí số 18.

[2]Điều này cũng minh hoạ cho một quy luật tối ưu của tự nhiên: các hiện tượng tự nhiên luôn hướng đến trạng thái tối ưu nhất.

Hình 2: Cách sắp xếp hoa quả ở các quầy hàng tuân theo giả thuyết Kepler. (Nguồn ảnh: New Scientist.)

Năm 1990, nhà toán học Wu-Yi Hsiang ở Đại học Berkeley, California tuyên bố đã chứng minh được giả thuyết này và kết quả sau đó xuất hiện trên tạp chí International Journal of Mathematics (1993). Tuy nhiên, các nhà toán học, trong đó có Thomas Hales ở Đại học Michigan, sớm tìm ra lỗ hổng trong chứng minh của Hsiang và không chấp nhận kết quả này.

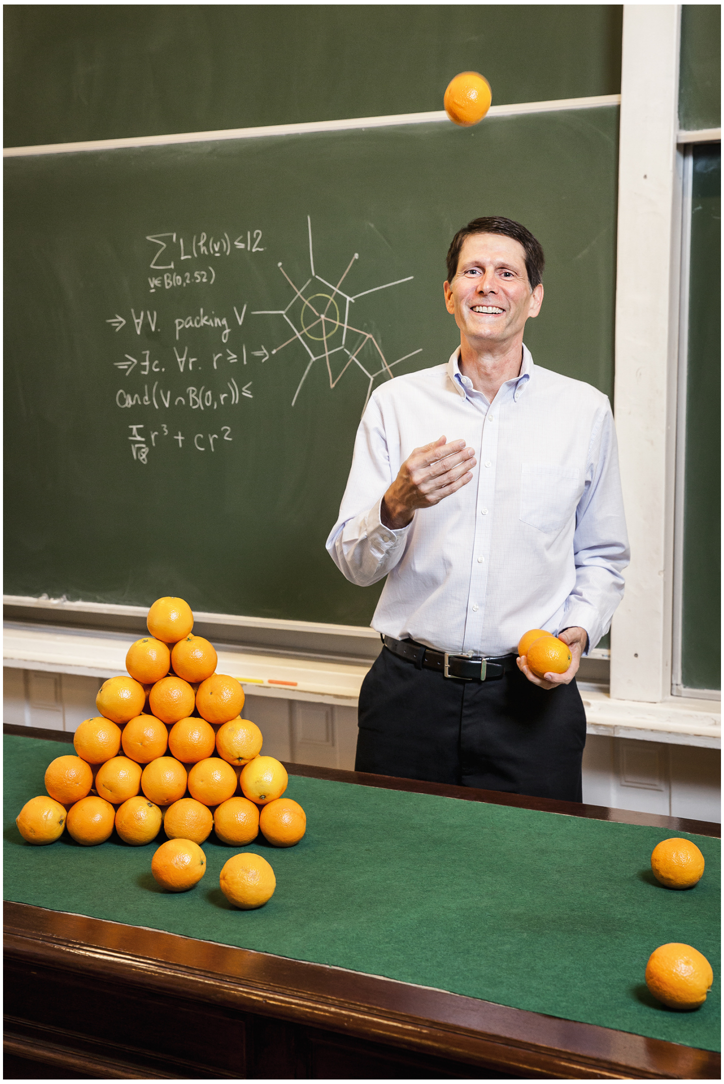
Những năm sau đó, Hales đã xây dựng một chương trình nhằm chứng minh giả thuyết Kepler với sự trợ giúp của máy tính. Đến năm 1998, Hales thông báo hoàn thành chứng minh và gửi bản thảo cho tạp chí Annals of Mathematics, được cộng đồng toán học thừa nhận rộng rãi là tạp chí uy tín nhất về toán, và cũng chỉ công bố những công trình tốt nhất. Trong thông báo sau đó của Hales trên Notices of AMS, một hội đồng bình duyệt gồm 12 người đã được thành lập để kiểm tra tính đúng đắn của chứng minh, đây là một điều ít có tiền lệ trong việc bình duyệt tạp chí, thông thường việc bình duyệt một bài báo chỉ có hai người, và những người bình duyệt thường được giấu tên.

Tuy nhiên, với riêng trường hợp này thì đây là điều khá dễ hiểu vì chứng minh của Hales dài tận 250 trang, chưa kể 3 gigabytes dữ liệu tính toán kèm theo. Nhất là sau khi có những tranh cãi xảy ra với chứng minh chưa hoàn thiện của Hsiang, họ phải cẩn thận. Quá trình bình duyệt kéo dài tới tận 4 năm, và sau cùng họ phải bỏ cuộc vì "hết năng lượng". Tạp chí Annals of Mathematics cuối cùng vẫn nhận đăng nhưng kèm theo chú thích rằng, các bình duyệt viên không thể kiểm tra được tính đúng đắn của chứng minh, và chỉ chắc chắn khoảng 99% là đúng. Một điều chưa từng có tiền lệ! Và nếu tính thời gian từ lúc ban biên tập nhận được bản thảo (9/1998) đến lúc nhận đăng (8/2005) cũng lên tới tận 7 năm, một điều khá hiếm thấy!

Không bằng lòng với sự chậm trễ lẫn kết luận của ban biên tập, Hales tiếp tục xây dựng một chương trình gọi là "Flyspeck"[3] để kiểm tra tất cả các bước logic trong chứng minh bằng máy tính. Đây là một chương trình hợp tác toàn cầu, trong đó có một phần được thực hiện ở Viện Toán học, Hà Nội (xem [3]).

Sau hơn 10 năm nỗ lực không biết mệt mỏi, chương trình cũng đến lúc hái trái ngọt. Vào đầu tháng 8/2014, ngay trước thềm Đại hội Toán học Thế giới diễn ra ở Seul, Hales thông báo chính thức rằng Flyspeck đã hoàn thành. Giả thuyết Kepler đã được chứng minh một cách hình thức.

[3] dựa trên những chữ cái đầu FPK của "Formal Proof of Kepler.



Hình 3: Thomas Hales. (Nguồn ảnh: Balin Thirling.)

Hơn bốn trăm năm sau khi ra đời, giả thuyết Kepler, bài toán lâu đời nhất của Hình học tổ hợp coi như đã được chứng minh hoàn toàn. Tuy nhiên, câu chuyện chưa dừng ở đây. Nhiều nhà toán học vẫn không hài lòng với lời giải này [8]. Bởi vì bản thân việc đúng hay sai của một giả thuyết đôi khi không có nhiều ý nghĩa bằng việc hiểu tại sao nó đúng (hay sai). Và điều cốt lõi là các ý tưởng nằm sau mỗi chứng minh có vai trò gì trong dòng chảy của toán học. Điều này hoàn toàn đúng với Định lí Fermat, vốn được mệnh danh là con gà đẻ trứng vàng của toán học, bởi vì quá trình tìm kiếm chứng minh cho nó đã góp phần tạo nên những lý thuyết toán học mới, và đó cũng là động lực thúc đẩy sự phát triển của toán học. Điều này thì Flyspeck không làm được. Dù sao, việc máy tính có thể giúp sức con người trong việc kiểm tra các thuật toán phức tạp, như với giả thuyết Kepler, hay đã từng xảy ra với bài toán bốn màu, cũng cho thấy những tiến bộ đáng kể của khoa học máy tính nói riêng và khoa học kĩ thuật nói chung.

# 3. Bài toán xếp cam $n$ chiều

Bài toán tương ứng với giả thuyết Kepler, hay bài toán xếp cam, trong không gian $n$ chiều cũng dành được nhiều sự quan tâm. Gọi $\rho_n$ là mật độ lớn nhất của một cách xếp cam trong không gian $n$ chiều. Theo giả thuyết Kepler thì

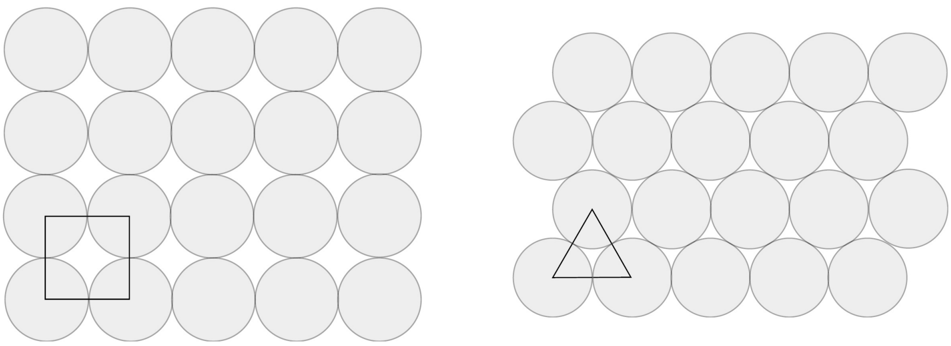
$$\rho_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \simeq 74\%.$$

Dưới đây, ta sẽ tìm hiểu một chút về các trường hợp khi $n \neq 3$.

## 3.1. $n = 1$ hoặc $2$

Trong không gian một hay hai chiều, bài toán cũng đã được giải quyết tương đối dễ dàng. Trường hợp một chiều không có gì để bàn ("không gian" bây giờ là đường thẳng, mỗi "quả cam" là một đoạn thẳng), $\rho_1 = 1$. Trong trường hợp hai chiều ("không gian" ứng với mặt phẳng, "quả cam" ứng với hình tròn), xét hai cách xếp ở Hình 4 (a) và (b). Có thể tính toán được không mấy khó khăn mật độ chiếm không gian của các hình tròn ở hình (a) là $\frac{\pi}{4} \simeq 79\%$. Còn ở hình (b), mật độ này là lớn nhất và nó bằng

$$\rho_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \simeq 91\%.$$



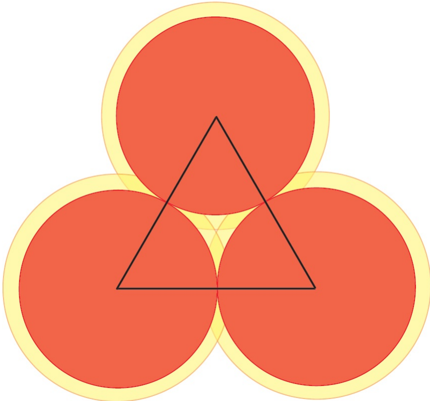
(a) (b)

Hình 4: Bài toán xếp cam hai chiều.

Thật vậy, điều này có thể chứng minh dựa vào ý tưởng "chia để trị", biến mặt phẳng thành các miền địa phương, và trong mỗi miền, chứng minh rằng mật độ chiếm không gian của các hình tròn không vượt quá $\rho_2$. Để đơn giản, xét một miền địa phương với ba hình tròn tiếp xúc nhau như ở Hình 6.

Trong miền tam giác tạo thành từ tâm của ba hình tròn, có một phần trống không được phủ. Nếu ta mở rộng các hình tròn bằng cách tăng bán kính của chúng lên một khoảng $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$ thì có thể thấy, không mấy khó khăn, các hình tròn đã phủ kín phần trống giữa chúng.

Bằng cách mở rộng các hình tròn một khoảng $c$ một cách tương tự cho các miền bất kì, có thể chứng minh được rằng, trong bất kì trường hợp nào, mật độ chiếm không gian của các hình tròn cũng không vượt quá $\rho_2$. Một chứng minh đầy đủ có thể tham khảo trong [9].



Hình 5

## 3.2. $n > 3$

Bây giờ, câu chuyện sẽ khác hẳn khi số chiều tăng lên, và có phần phức tạp hơn. Vào ngày 14 tháng 3 đầu năm nay, một nhà toán học trẻ người Ukraina, Maryna Viazovska, đã gây xôn xao cộng đồng toán học khi đưa lên arXiv một chứng minh rất độc đáo giải quyết bài toán xếp cam trong trường hợp $n = 8$. Kết quả mà Viazovska đưa ra cho trường hợp này là

$$\rho_8 = \frac{\pi^4}{2^4.4!} \simeq 25.37\%.$$

Terence Tao, Đại học California, Los Angeles, đã nói về chứng dài chỉ 23 trang của Viazovska: "*Hai trong số những điều tôi rất thích của chứng minh này là: (a) nó sử dụng các kĩ thuật của giải tích Fourier để nhận được hằng số tốt nhất, và (b) nhân tử Fourier tối ưu được xây dựng nhờ sử dụng các dạng modular, một điều mà tôi không thể ngờ lại có liên quan tới bài toán xếp cam.*" Còn Peter Sarnak, Đại học Princeton và viện IAS, thì nhấn mạnh: "*Chứng minh đơn giản một cách đáng kinh ngạc, như những gì tuyệt vời nhất có thể!*".

Hình 6: Maryna Viazovska. (Nguồn ảnh: Trang web cá nhân.)

Rất nhanh sau đó, Maryna Viazovska cùng với các đồng nghiệp, bằng một bài báo khác [7] dài chỉ 12 trang, đã giải quyết tiếp trường hợp $n = 24$. Các kết quả của Viazovska và các cộng sự hiện (có thể) vẫn đang trong quá trình kiểm tra tính chính xác, nhưng nếu đúng, đây sẽ là một trong những thành tựu đáng chú ý nhất của Hình học tổ hợp trong năm nay. Và cũng như lời Thomas Hales đã nói, đây chính là những điều mà chúng ta đang chờ đợi.

## 4. Những chân trời rộng mở và lời kết

Giả thuyết Kepler đã được giải, một số kết quả riêng trong trường hợp chiều cao cũng được tìm ra. Vậy điều gì còn lại?

Lời giải của Thomas Hales cho giả thuyết Kepler, dù đã được chứng minh là đúng, thì vẫn chưa làm hài lòng các nhà toán học. Bởi như điều mà Paul Erdos vẫn hay tin tưởng, rằng mỗi bài toán đều có một lời giải đẹp đẽ nhất và được chứa trong cuốn sách của Chúa Trời. Vậy lời giải đẹp đẽ nhất (và không nhờ sự trợ giúp của máy tính) của giả thuyết Kepler liệu có tồn tại? Nếu tồn tại, nó là gì?

Ngoài ra, quay lại với cách xếp cam trong giả thuyết Kepler, để đạt được cách xếp tối ưu nhất, chúng ta phải xếp chúng một cách cẩn thận theo đúng các cách đã chỉ ra. Nhưng giả sử, chúng ta đang vội và chỉ có thể ném cam vào hộp một cách nhanh nhất có thể. Lúc này các quả cam sẽ rơi ngẫu nhiên vào hộp. Vậy mật độ chiếm thể tích hộp của các quả cam bây giờ có thể là bao nhiêu? Đây là bài toán đóng gói ngẫu nhiên. Các kết quả xoay quanh bài toán này vẫn còn nhiều chuyện đáng bàn.

Bây giờ giả sử ta không đi xếp cam nữa, mà xếp các đồ vật có dạng hình khối khác nhau. Lúc này mật độ chiếm thể tích của chúng sẽ có thể là bao nhiêu? Đương nhiên, kết quả sẽ phụ thuộc vào hình dạng của vật xếp. Trong [1], các tác giả đã đạt được một số trường hợp riêng cho trường hợp vật xếp có dạng ellipsoid. Tuy nhiên, các kết quả này vẫn còn khiêm tốn.

Rõ ràng, cùng với việc tìm kiếm lời giải cho các bài toán xếp cam chiều cao còn lại (hiện mới chỉ được giải cho $n = 1, 2, 3, 8$ và 24), xoay quanh bài toán này vẫn còn nhiều điều thú vị chờ chúng ta khám phá. Hy vọng, sau những thành tựu gây nức lòng của Viazovska, chúng ta sẽ sớm được biết thêm nhiều điều bí ẩn xung quanh bài toán này.

## Tài liệu

[1] A. Donev, I. Cisse, D. Sachs, E. Variano, F. H. Stillinger, R. Connelly, S. Tarquato and P.M. Chikin, Improving the density of jammed disordered packings using ellipsoids, *Science*, 303 (2004), 990–993.

[2] Frank Morgan, Kepler's Conjecture and Hales's Proof, A Book review, *Notices of AMS*, Vol 52, Issue 1, 2005.

[3] Hoàng Lê Trường, Giả thuyết Kepler đã được chứng minh một cách hình thức, *Thông tin Toán học*, VMS, Tập 19, Số 1, 2015.

[4] George G. Szpiro, *Kepler's Conjecture: How Some of the Greatest Minds in History Helped Solve One of the Oldest Math Problems in the World*, John Wiley & Sons, New York, 2003.

[5] Doron Zeilberger, To Prove the Optimal Packing, *Science*, Vol. 301, Issue 5637, pp. 1186.

[6] Maryna Viazovska, The sphere packing problem in dimension 8, arXiv:1603.04246.

[7] Henry Cohn, Abhinav Kumar, Stephen D. Miller, Danylo Radchenko, Maryna Viazovska, The sphere packing problem in dimension 24, arXiv:1603.06518v1.

[8] https://vuhavan.wordpress.com/2015/05/30/xep-cam/

[9] http://blog.kleinproject.org/?p=742

[10] https://www.quantamagazine.org/20160330-sphere-packing-solved-in-higher-dimensions/

# THI TRẮC NGHIỆM GÂY NHIỀU TRANH CÃI Ở MỸ

Neal Koblitz
(*Đại học Washington*)
Người dịch: Hảo Linh

## LỜI DẪN

Dù có nhiều ý kiến nặng ký (trong đó có ý kiến của Hội toán học Việt Nam) phản đối việc áp dụng hình thức thi trắc nghiệm ở hầu hết các môn thi tốt nghiệp THPT, Bộ Giáo dục và Đào tạo vẫn quyết định triển khai phương án này "*theo đúng lộ trình*". Tạp chí Tia sáng có đăng bài viết của giáo sư Neal Koblitz, một nhà toán học Mỹ có nhiều duyên nợ với Việt Nam nêu ý kiến về vấn đề này trên cơ sở những kinh nghiệm của ông ở Mỹ, nơi trắc nghiệm vẫn thường được sử dụng trong các kỳ thi đánh giá năng lực ở các cấp độ. Được sự đồng ý của dịch giả và Tòa soạn, chúng tôi đăng lại bài viết trên để bạn đọc của Epsilon có thể tham khảo thêm.

Một hạn chế của các đề thi trắc nghiệm là nó thất bại trong việc chuẩn bị cho học sinh đối diện với phương thức giải quyết vấn đề mà họ sẽ bắt gặp trong các lớp toán, khoa học và trong những nghề nghiệp tương lai.


*Biểu tình phản đối thi trắc nghiệm ở phổ thông để đánh giá chất lượng giáo viên và các trường học. Có một em học sinh giơ tấm biển: "Em không chỉ là điểm số".*

Gần đây có nhiều cuộc thảo luận ở Việt Nam về việc làm thế nào để đánh giá năng lực toán học của học sinh và có rất nhiều tranh cãi về ý tưởng sử dụng các đề thi trắc nghiệm. Hội Toán học Việt Nam đã cảnh báo việc sử dụng những đề thi như thế này sẽ khiến học sinh nhớ các tiểu xảo hơn là phát triển một hiểu biết logic về môn học này. Tôi muốn bình luận về vấn đề trên dựa vào kinh nghiệm của chúng tôi ở Mỹ.

## 1. Thi trắc nghiệm từ bậc phổ thông "là một thất bại"

Tại Mỹ, ở cấp tiểu học và trung học, học sinh cũng làm các bài kiểm tra trắc nghiệm khách quan định kỳ. Lý do là bởi vì việc chấm điểm và các so sánh tương quan có thể dễ dàng được thực hiện bằng máy tính. Tuy nhiên, việc sử dụng kết quả những bài kiểm tra này là để đánh giá giáo viên và các trường học thay vì học sinh. Một trường học hoặc giáo viên có nhiều học sinh học kém hơn mức trung bình và không tăng điểm qua từng năm sẽ bị "*phạt*" bằng nhiều cách và trong một số trường hợp, trường học có thể bị đóng cửa.

Việc sử dụng những bài thi trắc nghiệm gây ra rất nhiều tranh cãi ở Mỹ và bị phản ứng mạnh mẽ bởi hiệp hội giáo viên và các chuyên gia giáo dục. Ở những trường hàng đầu, phụ huynh và giáo viên tin rằng họ có thể là những người đánh giá tốt việc học của học sinh và không cần phải nhờ sự trợ giúp của các bài kiểm tra trắc nghiệm. Kết quả là, họ từ chối triển khai những kì thi trắc nghiệm này. Chính sách đánh giá giáo viên và trường học dựa trên kết quả của học sinh làm các đề kiểm tra trắc nghiệm bắt đầu từ 15 năm trước trong suốt nhiệm kỳ của Tổng thống Bush và kéo dài suốt nhiệm kỳ của Tổng thống Obama. Chính sách này đã tạo ra một áp lực rất lớn lên các giáo viên trong việc "*dạy để thi*" và ngăn cản việc dạy sâu, dạy theo bối cảnh. Trong nhiều trường hợp, nó còn dẫn đến những hành vi sai trái và gian lận (giáo viên và ban giám hiệu sửa đáp án của học sinh nhằm tăng điểm cho các em). Hầu hết các nhà khoa học và giáo dục tin rằng chính sách này là một thất bại và chất lượng các trường phổ thông của Mỹ không những không cải thiện mà thậm chí còn giảm sút trong suốt thời kì này. Trong một cuốn sách bán chạy được xuất bản vào năm 2010, chuyên gia giáo dục Diane Ravitch, một cán bộ giáo dục hàng đầu trong thời kỳ đương nhiệm của Tổng thống Bush và từng ủng hộ các kỳ thi trắc nghiệm, đã thay đổi quan điểm của mình. Bây giờ bà là một người dẫn đầu nhóm phản đối việc sử dụng các kỳ thi trắc nghiệm ngày một phổ biến.

## 2. Không chỉ dựa trên kết quả thi trắc nghiệm để tuyển sinh đại học

Ở Mỹ, bài kiểm tra đánh giá năng lực (Scholastic Aptitude Test – SAT [1]) được sử dụng như một phần của quá trình tuyển sinh đại học. Ban đầu SAT hoàn toàn là một bài kiểm tra trắc nghiệm khách quan. Nhưng cách đây khoảng $7-10$ năm, nhiều trường ngưng sử dụng kết quả SAT cho việc tuyển sinh của mình vì họ cảm thấy thi trắc nghiệm không phải là một cách hữu ích để lựa chọn sinh viên. Từ đó, công ty ra đề SAT, Công ty dịch vụ kiểm tra đánh giá giáo dục ETS

[1] SAT là kỳ thi dùng để đánh giá năng lực học tập của học sinh, bao gồm ba phần: Đọc hiểu (critical reading), toán và viết luận. Trong đó hai phần đầu là thi trắc nghiệm khách quan.

(Educational Testing Service) đã đưa phần viết luận vào đề thi để hầu hết các trường có thể tiếp tục sử dụng SAT.

Một điều rất quan trọng cần nhấn mạnh, đó là các trường đại học của Mỹ không bao giờ chỉ dựa trên kết quả thi cử để tuyển sinh. Các cán bộ tuyển sinh ở trường đại học tin rằng thông qua việc sử dụng nhiều công cụ, họ có thể có một cách đánh giá các ứng viên tốt hơn là chỉ dựa vào kết quả của kỳ thi đầu vào.

Có thể nói, rất khó để thiết kế được một bài thi trắc nghiệm công bằng và hữu ích. Bản thân ETS cũng đầu tư một số tiền lớn mỗi năm để thiết kế các đề thi trắc nghiệm. Khi một bài thi trắc nghiệm được thiết kế tốt, nó có hai lợi thế (1) nó tốn rất ít kinh phí để chữa và chấm điểm vì nó có thể được thực hiện bằng máy, và (2) nó có thể được sử dụng để loại trừ những học sinh có năng lực rất yếu. Có nghĩa là, một học sinh có kết quả rất tệ trong bài thi trắc nghiệm khó có thể là ứng cử viên cho những trường đại học hàng đầu. Tuy nhiên, những kỳ thi trắc nghiệm không thể lựa chọn được những sinh viên xuất sắc.

Một hạn chế của các đề thi trắc nghiệm là nó thất bại trong việc chuẩn bị cho học sinh đối diện với phương thức giải quyết vấn đề mà họ sẽ bắt gặp trong các lớp toán, khoa học và trong những nghề nghiệp tương lai. Trên thực tế, các nhà toán học và các nhà khoa học không giải quyết các vấn đề bằng một đáp án ngắn. Ngược lại, các vấn đề đòi hỏi một đáp án dài, cần nhiều bước giải quyết, trong đó các sinh viên phải đưa ra lời giải đầy đủ của họ là một sự chuẩn bị tốt cho những nghề nghiệp trong lĩnh vực khoa học và công nghệ.

Ở các cấp học càng cao trong hệ thống giáo dục, các bài thi trắc nghiệm càng ít được sử dụng. Một đại học tốt không bao giờ chỉ dựa vào các đề thi trắc nghiệm để quyết định tuyển sinh. Tuy nhiên, các đề thi trắc nghiệm thi thoảng vẫn có ích ở trình độ cao, ví dụ như đề thi sau đại học GRE (Graduate Record Exam) trong Toán học – để xác định và loại ra những sinh viên có học lực rất yếu.

Bởi vậy, nếu Chính phủ Việt Nam cần phải giảm thiểu chi phí chấm điểm các bài thi đầu vào đại học thì có một cách hợp lý để làm điều đó, một sự thỏa hiệp sẽ không ảnh hưởng xấu đến quá trình tuyển chọn. Đề thi tuyển sinh có thể có hai phần: Một phần trắc nghiệm và một phần tự luận. Những học sinh có kết quả thấp hơn mức điểm sàn ở phần thi thứ nhất sẽ không đỗ và sẽ không cần chấm phần thi thứ hai của họ nữa. Điều đó có nghĩa là, phần thi đầu tiên sẽ xác định được những học sinh yếu nhất và phần thứ hai là để xác định những học sinh xuất sắc. Điều này sẽ tiết kiệm thời gian và chi phí mà không phải đánh đổi chất lượng của quá trình tuyển sinh.

## 3. Con người là chính, máy móc chỉ là thứ yếu

Trường đại học có đề thi đầu vào môn toán tốt nhất mà tôi từng biết là Đại học Cambridge (Anh), được biết đến là một trong những trường hàng đầu thế giới. Bài thi là bước cuối cùng trong quá trình tuyển chọn các học sinh muốn học toán tại Cambridge. Các giáo sư Toán sẽ đưa cho các thí sinh dự tuyển một loạt các bài toán khó và nói với các em rằng họ không yêu cầu các em phải giải được tất cả chúng một cách đầy đủ. Sau khoảng một - hai tiếng, giám khảo sẽ thu lại câu trả lời đầy đủ hoặc một phần câu trả lời của các thí sinh và phỏng vấn các em về quá trình tư duy để đi đến lời giải của họ và đặc biệt là về những điểm mà họ vướng mắc. Một thí sinh có năng lực giải quyết vấn đề và có hiểu biết sâu sắc, tạo ấn tượng tốt với các giám khảo sẽ được tuyển chọn vào Cambridge. Tôi dạy các em sinh viên năm thứ nhất đại học. Trong khóa học về giải tích, chúng tôi nhấn mạnh phần ứng dụng của Toán học. Bài kiểm tra cuối kỳ của chúng tôi kéo dài trong ba tiếng đồng hồ và có tám câu hỏi, trong đó, một nửa số câu hỏi liên quan đến những vấn đề trong thực tế. Các sinh viên được yêu cầu đưa ra lời giải một cách chi tiết chứ không chỉ đáp án cuối cùng. Ở cấp đại học, các đồng nghiệp và tôi không sử dụng các bài kiểm tra trắc nghiệm để đánh giá học sinh.

Trong giáo dục, yếu tố con người là chính và công nghệ chỉ là thứ yếu. Dĩ nhiên, việc một máy tính có thể chấm hàng triệu bài kiểm tra trắc nghiệm nhanh chóng thì rất tiện lợi. Nhưng chỉ con người mới có thể đưa ra những đánh giá tin cậy về tiềm năng và trí tuệ của ai đó.

Neal Koblitz hiện là giáo sư Toán học tại Đại học Washington và là giáo sư danh dự tại Viện nghiên cứu Mật mã Ứng dụng tại Đại học Waterloo. Neal Koblitz là cha đẻ của mật mã đường cong elliptic và siêu elliptic - hai đóng góp quan trọng trong ngành mật mã hiện đại. Năm 1985, ông và vợ mình, Ann Hibner Koblitz sáng lập ra giải thưởng Kovalevskaia để tôn vinh những nhà khoa học nữ ở các nước phát triển. Ông từng tới Việt Nam giảng dạy nhiều lần tại các trường đại học và các viện nghiên cứu Toán học.

Theo Tia Sáng.

# BÀI TOÁN CHỨNG MINH TRUNG ĐIỂM VÀ CÁC MỞ RỘNG

Trần Quang Hùng (THPT chuyên KHTN, Hà Nội)

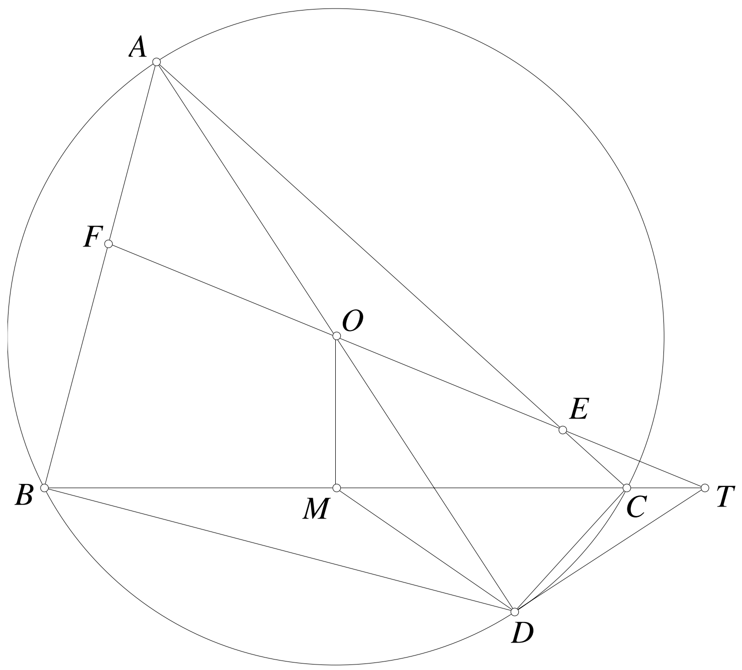
## TÓM TẮT

Bài viết mở rộng và phát triển bài toán hình học hay về chứng minh trung điểm sử dụng các công cụ hình học thuần túy và hàng điểm điều hòa.

Bài toán đẹp và nổi tiếng này lần đầu tiên xuất hiện trong [1]. Sau đó một thời gian ngắn thì [2,3] cũng đề cập tới và trong đó có nhiều lời giải khác nhau dùng cả phương pháp xạ ảnh và thuần túy hình học. Gần đây [4] cũng nhắc lại bài toán đó cùng với một mở rộng hay. Bài toán đó như sau

**Bài toán 1.** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$. $AD$ là đường kính của $(O)$. Tiếp tuyến tại $D$ của $(O)$ cắt $BC$ tại $T$. $OT$ cắt $CA, AB$ tại $E, F$. Chứng minh rằng $O$ là trung điểm của $EF$.

Tôi sẽ đưa ra một lời giải thuần túy hình học cho bài toán này



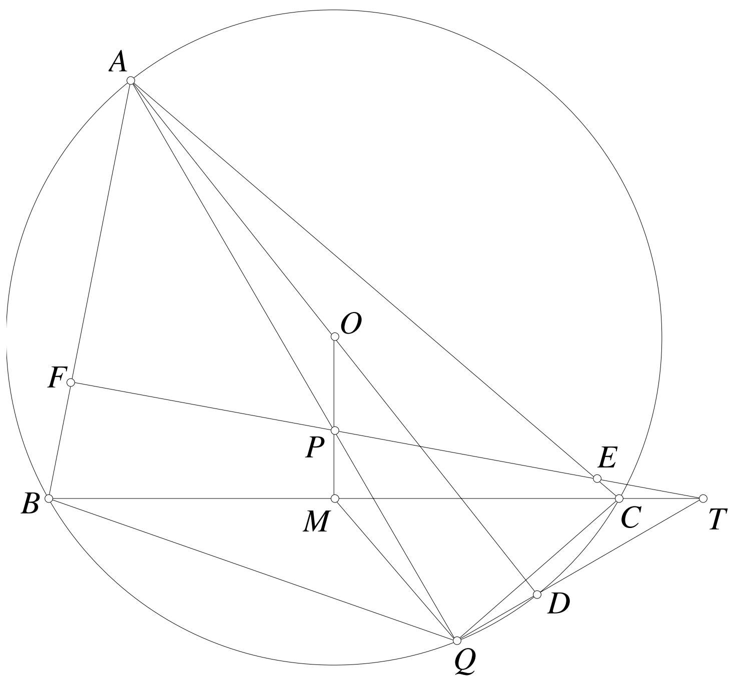

Hình 1.

**Lời giải.** Gọi $M$ là trung điểm của $BC$ thì $OM \perp BC$. Từ đó tứ giác $OMDT$ nội tiếp. Vậy $\angle DMC = \angle TOD = \angle AOF$. Lại có $\angle FAO = \angle MCD$. Từ đó hai tam giác $AOF$ và $CMD$ đồng dạng. Tương tự hai tam giác $AOE$ và $BMD$ đồng dạng. Suy ra $\frac{OE}{OF} = \frac{OE}{OA} \cdot \frac{OA}{OF} = \frac{MD}{MB} \cdot \frac{MC}{MD} = 1$ vậy $O$ là trung điểm $EF$. Ta có điều phải chứng minh. □

**Nhận xét.** Trong [1,2,3,4] cũng đề xuất nhiều lời giải dùng cả phương pháp xạ ảnh và thuần túy hình học. Lời giải trên tác giả cũng tự tìm ra khá lâu cũng giống với ý tưởng trong [3,4]. Bài toán cũng có nhiều mở rộng thú vị. Chúng ta sẽ xét mở rộng sau đây

**Bài toán 2.** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$ với $AD$ là đường kính của $(O)$. $P$ là một điểm trên trung trực $BC$. $AP$ cắt $(O)$ tại $Q$ khác $A$. $QD$ cắt $BC$ tại $T$. $TP$ cắt $CA, AB$ tại $E, F$. Chứng minh rằng $P$ là trung điểm của $EF$.

Mở rộng đầu tiên này khá đơn giản, lời giải hoàn toàn tương tự lời giải bài toán gốc

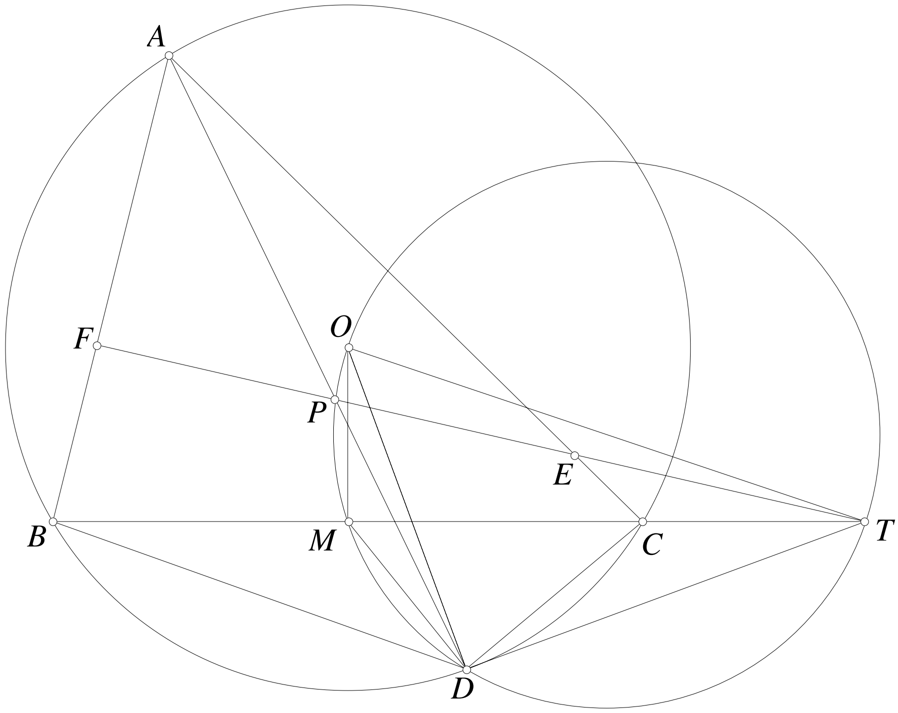



Hình 2.

**Lời giải.** Gọi $M$ là trung điểm $BC$, do $AD$ là đường kính của $(O)$ nên dễ thấy $\angle PMT = \angle PQT = 90°$. Từ đó $\angle QMC = \angle QPT = \angle APF$ và $\angle PAF = \angle MCQ$. Vậy hai tam giác $APF$ và $CMQ$ đồng dạng. Tương tự tam giác $APE$ và $BMQ$ đồng dạng. Từ đó $\frac{PE}{PF} = \frac{PE}{AP} \cdot \frac{AP}{PF} = \frac{MQ}{MB} \cdot \frac{MC}{MQ} = 1$. Vậy $P$ là trung điểm $EF$. Ta có điều phải chứng minh. □

**Nhận xét.** Khi $P$ trùng $O$ thì $QD$ là tiếp tuyến của $(O)$ ta được bài toán ban đầu. Với cách giải đó ta thu được tiếp bài toán mở rộng sau

**Bài toán 3.** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$ với $D$ là một điểm thuộc cung $BC$ không chứa $A$. Tiếp tuyến tại $D$ của $(O)$ cắt $BC$ tại $T$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác $ODT$ cắt $AD$ tại $P$ khác $D$. $PT$ cắt $CA, AB$ tại $E, F$. Chứng minh rằng $P$ là trung điểm của $EF$.

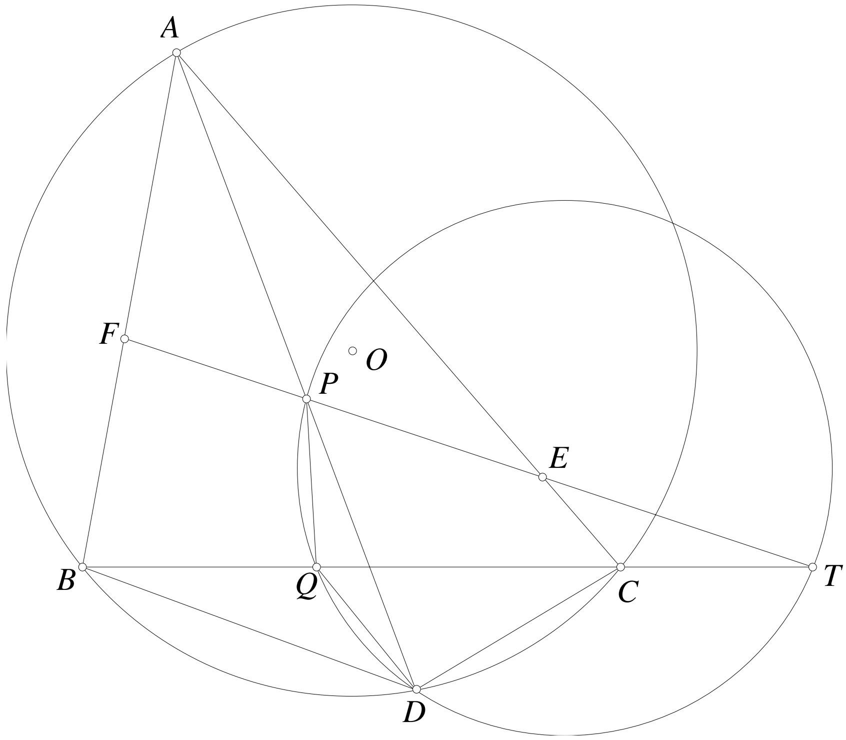



Hình 3.

**Lời giải.** Gọi $M$ là trung điểm $BC$ thì dễ thấy $M$ thuộc đường tròn đường kính $OT$ cũng là đường tròn ngoại tiếp tam giác $ODT$. Từ đó ta có $\angle DMC = \angle DPT = \angle APF$ và $\angle PAF = \angle MCD$. Vậy hai tam giác $APF$ và $CMD$ đồng dạng. Tương tự tam giác $APE$ và $BMD$ đồng dạng. Từ đó $\frac{PE}{PF} = \frac{PE}{AP} \cdot \frac{AP}{PF} = \frac{MD}{MB} \cdot \frac{MC}{MD} = 1$. Vậy $P$ là trung điểm $EF$. Ta có điều phải chứng minh. □

Tổng quát hơn nữa ta có bài toán sau

**Bài toán 4.** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$ và điểm $P$ bất kỳ. $AP$ cắt $(O)$ tại $D$ khác $A$. $Q$ là điểm bất kỳ thuộc $BC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác $PQD$ cắt $BC$ tại $T$ khác $Q$. $TP$ cắt $CA, AB$ tại $E, F$. Chứng minh rằng $\frac{PE}{PF} = \frac{QC}{QB}$.

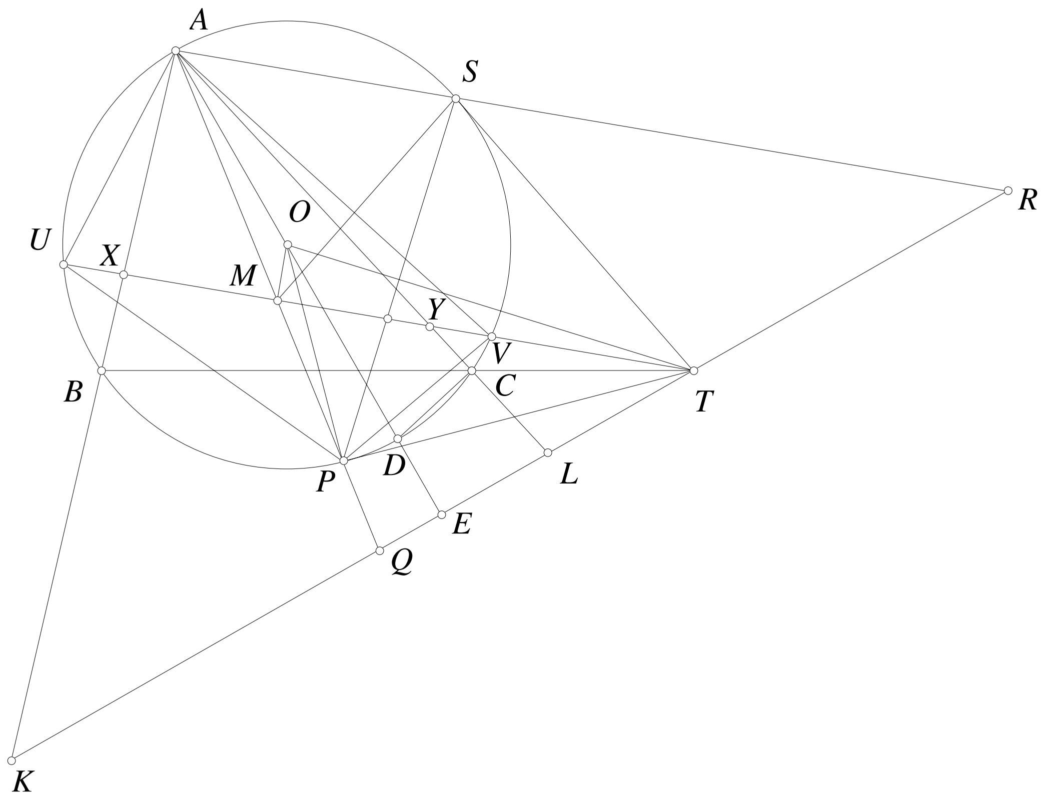



Hình 4.

**Lời giải.** Ta có $\angle QDC = \angle DPT = \angle APF$ và $\angle PAF = \angle QCD$. Vậy hai tam giác $QCD$ và $PAF$ đồng dạng. Tương tự hai tam giác $QBD$ và $PAE$ đồng dạng. Từ đó $\frac{PE}{PF} = \frac{PE}{AP} \cdot \frac{AP}{PF} = \frac{QD}{QB} \cdot \frac{QC}{QD} = \frac{QC}{QB}$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

**Nhận xét.** Khi $Q$ là trung điểm $BC$ và $P$ thuộc $OQ$ ta thu được bài toán 2. Rõ ràng bài toán sau này rất tổng quát, tuy nhiên như chúng ta lại thấy lời giải càng đơn giản. Chúng ta xét tiếp bài toán sau của tác giả đã được đề nghị trên báo THTT, chúng tôi xin giới thiệu lời giải gốc đã đề nghị trên báo

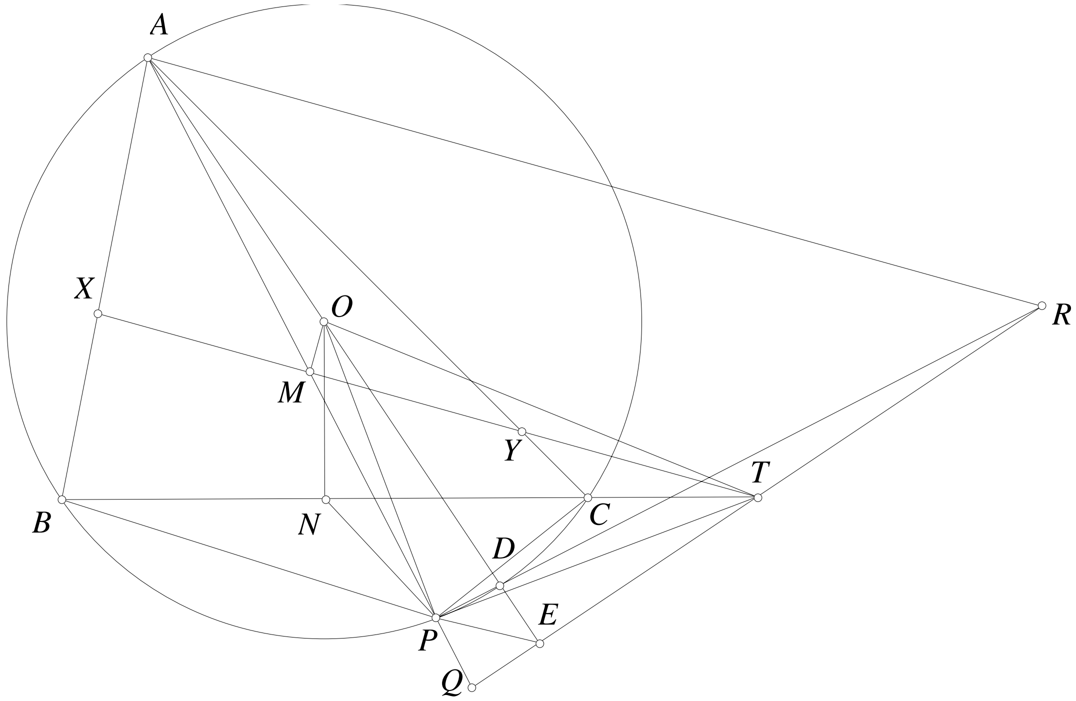
**Bài toán 5.** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$. với $P$ là một điểm trên cung $BC$ không chứa $A$ của $(O)$. Tiếp tuyến tại $P$ của $(O)$ cắt $BC$ tại $T$. $AP$ cắt đường thẳng qua $T$ vuông góc $OA$ tại $Q$. $M$ là trung điểm $AQ$. $TM$ cắt $AB, AC$ lần lượt tại $X, Y$. Chứng minh rằng $M$ là trung điểm $XY$.




Hình 5.

**Lời giải thứ nhất.** Gọi $AD$ là đường kính của $(O)$ và $AD$ cắt $TQ$ tại $E$. Qua $A$ kẻ đường thẳng song song $TM$ cắt $TQ$ tại $R$. Do $M$ là trung điểm $AQ$ nên $T$ là trung điểm $QR$. Gọi $AB, AC$ giao $ET$ tại $K, L$. $AD$ là đường kính của $(O)$ nên $\angle ACD = 90^\circ = \angle DEL$, do đó tứ giác $DCLE$ nội tiếp. Từ đó $\angle CLK = \angle CDA = \angle CBA$ nên tứ giác $BCLK$ nội tiếp. Do $PT$ là tiếp tuyến của $(O)$, ta có $\angle PQT = \angle K + \angle PAB = \angle ACB + \angle PCB = \angle ACP = 180^\circ - \angle ABP = 180^\circ - \angle APT = \angle TPQ$. Từ đó tam giác $TPQ$ cân tại $T$. Kết hợp tứ giác $BCKL$ nội tiếp và vẫn chú ý $TP$ là tiếp tuyến của $(O)$ ta có $TQ^2 = TP^2 = \overline{TB}.\overline{TC} = \overline{TL}.\overline{TK}$. Mặt khác do $T$ là trung điểm $QR$ nên theo hệ thức Newton ta có $(LK, QR) = -1$ do đó $A(LK, QR) = -1$. Nhưng $AQ \parallel TM$ từ đó theo liên hệ tỷ số đơn và tỷ số kép $M$ là trung điểm $XY$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Tuy nhiên với ý tưởng tương tự từ các lời giải thuần túy trên chúng ta cũng có thể giải bài trên bằng lời giải thuần túy hình học như sau

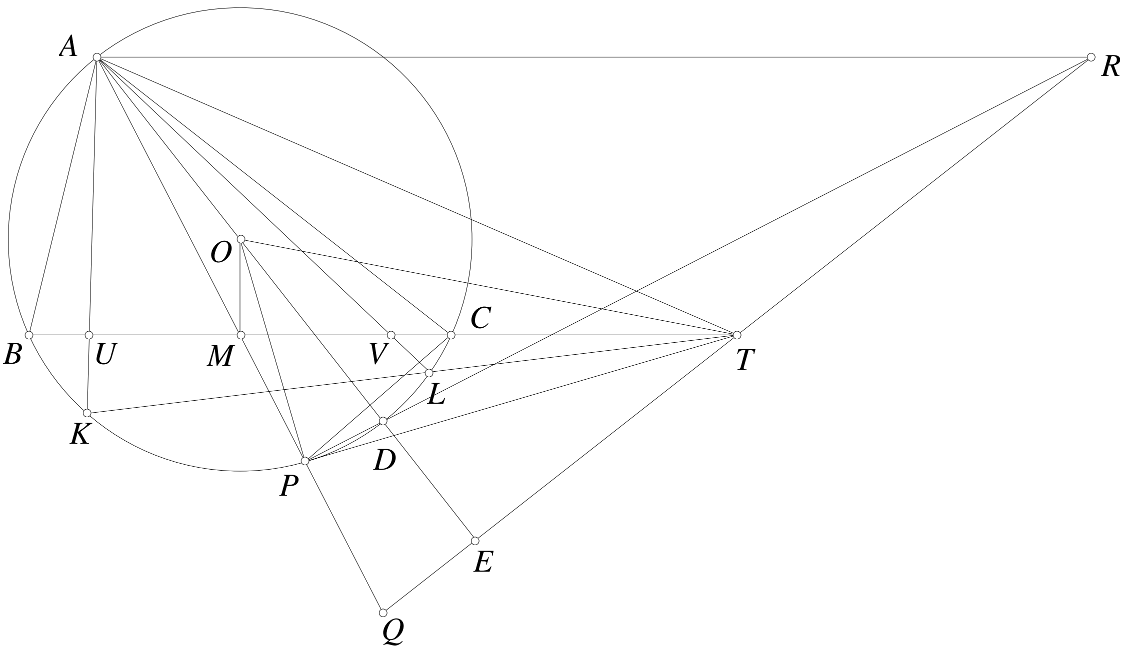



Hình 6.

**Lời giải thứ hai.** Gọi $AD$ là đường kính của $(O)$ và $AD$ cắt $TQ$ tại $E$. Qua $A$ kẻ đường thẳng song song $TM$ cắt $TQ$ tại $R$. Dễ thấy tứ giác $PDEQ$ nội tiếp. Từ đó $\angle Q = \angle ADP = 180° - \angle ABP = 180° - \angle APT = \angle TPQ$ do đó tam giác $PTQ$ cân mà $M$ là trung điểm $AQ$ nên $T$ là trung điểm $QR$, từ đó tam giác $TPR$ cân. Ta có tứ giác $APER$ nội tiếp nên $\angle OAP = \angle TRP$. Vậy hai tam giác cân $OAP$ và $TRP$ đồng dạng. Suy ra hai tam giác $POT$ và $PAR$ đồng dạng tương ứng. Từ đó $\angle POT = \angle PAR = \angle PMT$. Vậy suy ra $M$ thuộc đường tròn đường kính $OT$. Từ đó dễ có $OM \perp XY$. Gọi $N$ là trung điểm $BC$ ta cũng có $\angle PNC = \angle PMT = \angle AMX$ và $\angle PCN = \angle MAX$. Vậy hai tam giác $AMX$ và $CNP$ đồng dạng. Tương tự tam giác $AMY$ và $BNP$ đồng dạng. Vậy $\frac{MX}{MY} = \frac{MX}{AM} \cdot \frac{AM}{MY} = \frac{NP}{NC} \cdot \frac{NB}{NP} = 1$. Từ đó $M$ là trung điểm $XY$. Ta có điều phải chứng minh. □

**Nhận xét.** Nếu $E$ trùng $D$ ta thu được bài toán 1. Từ lời giải thứ hai, chúng ta thu được một trường hợp riêng rất đẹp như sau của bài toán 5

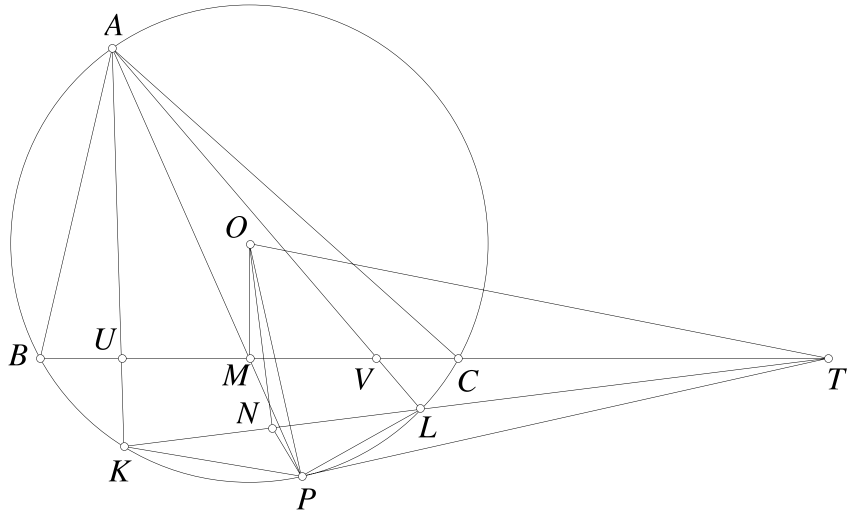
**Bài toán 6.** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$. $M$ là trung điểm $BC$. $AM$ cắt $(O)$ tại $P$ khác $A$. Tiếp tuyến tại $P$ của $(O)$ cắt $BC$ tại $T$. Một đường thẳng qua $T$ cắt $(O)$ tại $K, L$. $AK, AL$ cắt $BC$ tại $U, V$. Chứng minh rằng $M$ là trung điểm của $UV$.




Hình 7.

**Lời giải thứ nhất.** Tương tự như lời giải thứ 2. Gọi $AD$ là đường kính của $(O)$. Đường thẳng qua $T$ vuông góc với $AD$ cắt $AD, AP$ tại $E, Q$. Gọi $PD$ cắt $QE$ tại $R$. Dễ thấy tứ giác $PDEQ$ nội tiếp. Từ đó $\angle Q = \angle ADP = 180° - \angle ABP = 180° - \angle APT = \angle TPQ$ do đó tam giác $PTQ$ cân mà tam giác $QPR$ vuông tại $P$ nên $T$ là trung điểm $QR$, từ đó tam giác $TPR$ cân. Ta có tứ giác $APER$ nội tiếp nên $\angle OAP = \angle TRP$. Vậy hai tam giác cân $OAP$ và $TRP$ đồng dạng. Suy ra hai tam giác $POT$ và $PAR$ đồng dạng tương ứng. Từ đó $\angle PMT = \angle POT = \angle PAR$. Suy ra $AR \parallel MT$ vậy $M$ là trung điểm $AQ$. Áp dụng bài toán 5 vào tam giác $AKL$ suy ra $M$ là trung diểm $UV$. Ta có điều phải chứng minh. □

Chúng ta cũng có thể đưa ra một lời giải đơn giản hơn dựa trên lời giải bài toán 1 như sau




Hình 8.

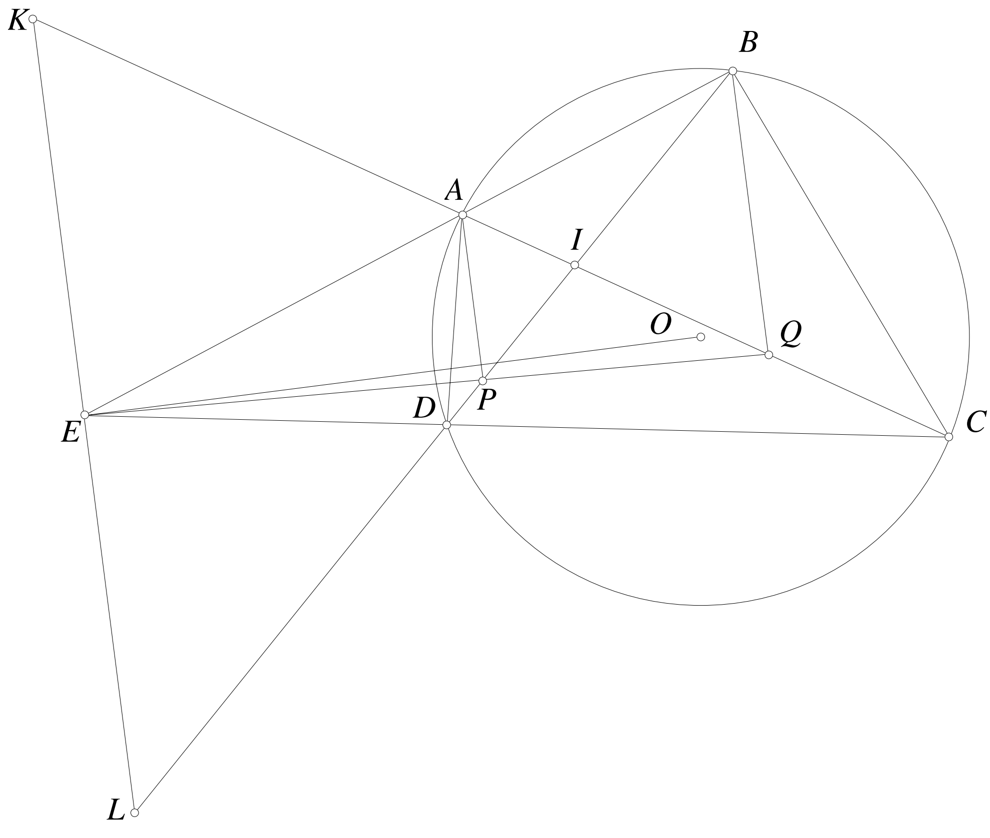
**Lời giải thứ hai.** Gọi $N$ là trung điểm $KL$ thì $M, N, P$ đều thuộc đường tròn đường kính $OT$. Từ đó $\angle AMU = \angle TMP = \angle TNP$ và $\angle MAU = \angle PLN$. Vậy hai tam giác $LPN$ và $AUM$ đồng dạng. Tương tự hai tam giác $KPN$ và $AVM$ cũng đồng dạng. Từ đó $\frac{MU}{MV} = \frac{MU}{AM} \cdot \frac{AM}{MV} = \frac{NP}{NL} \cdot \frac{NK}{NP} = 1$. Ta có điều phải chứng minh. □

Ở trong [4] tác giả **Trần Minh Ngọc** cũng đưa ra một mở rộng khác thú vị kèm lời giải xạ ảnh, sau đây chúng tôi xin giới thiệu bài toán và lời giải thuần túy hình học cho bài toán đó

**Bài toán 7.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O)$ với $AE, BF$ là đường kính của $(O)$. $EF$ cắt $CD$ tại $T$. $OT$ cắt $AD, BC$ tại $M, N$. Chứng minh rằng $O$ là trung điểm $MN$.

Chúng tôi xin đưa ra một lời giải thuần túy hình học sử dụng ý tưởng từ bài toán 1. Ta cần bổ đề sau

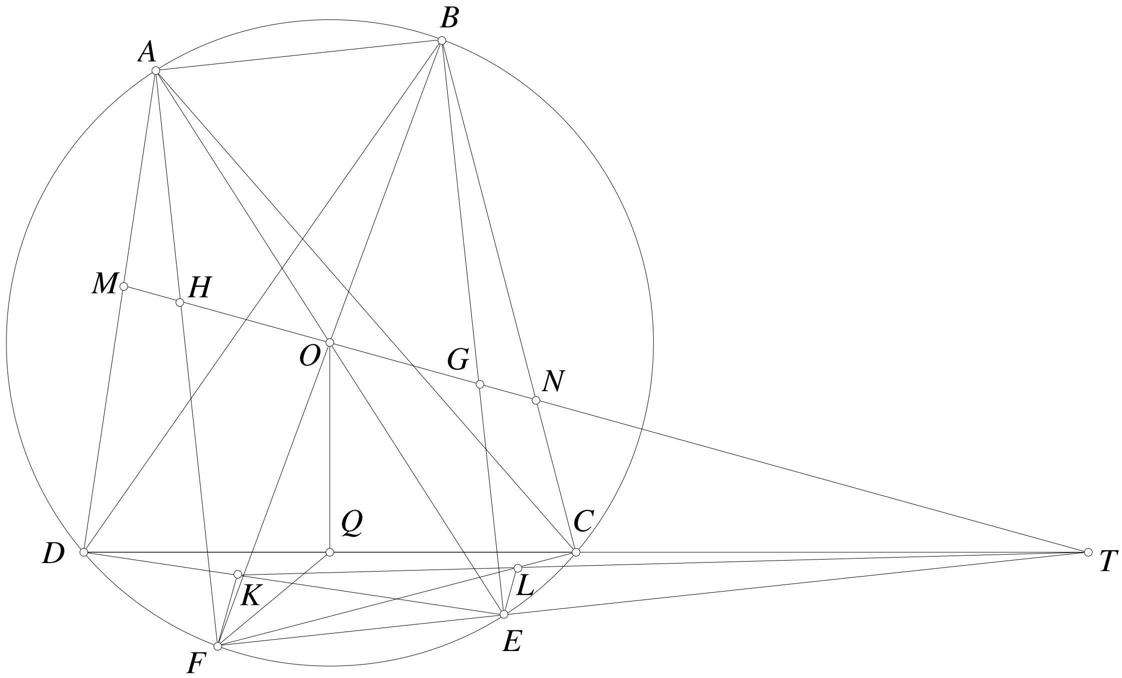
**Bổ đề 7.1.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O)$. $AB$ cắt $CD$ tại $E$. Các điểm $P, Q$ thuộc $BD, AC$ sao cho $AP, BQ$ cùng vuông góc với $OE$. Thì $E, P, Q$ thẳng hàng.




Hình 9.

**Chứng minh.** Qua $E$ kẻ đường thẳng vuông góc với $OE$ cắt $CA, BD$ tại $K, L$. Theo bài toán con bướm thì $E$ là trung điểm $KL$. Từ đó ta có $\frac{AP}{BQ} = \frac{AP}{EL} \cdot \frac{EK}{BQ} = \frac{AB}{EB} \cdot \frac{EA}{AB} = \frac{EA}{EB}$. Theo định lý Thales đảo suy ra $E, P, Q$ thẳng hàng. □

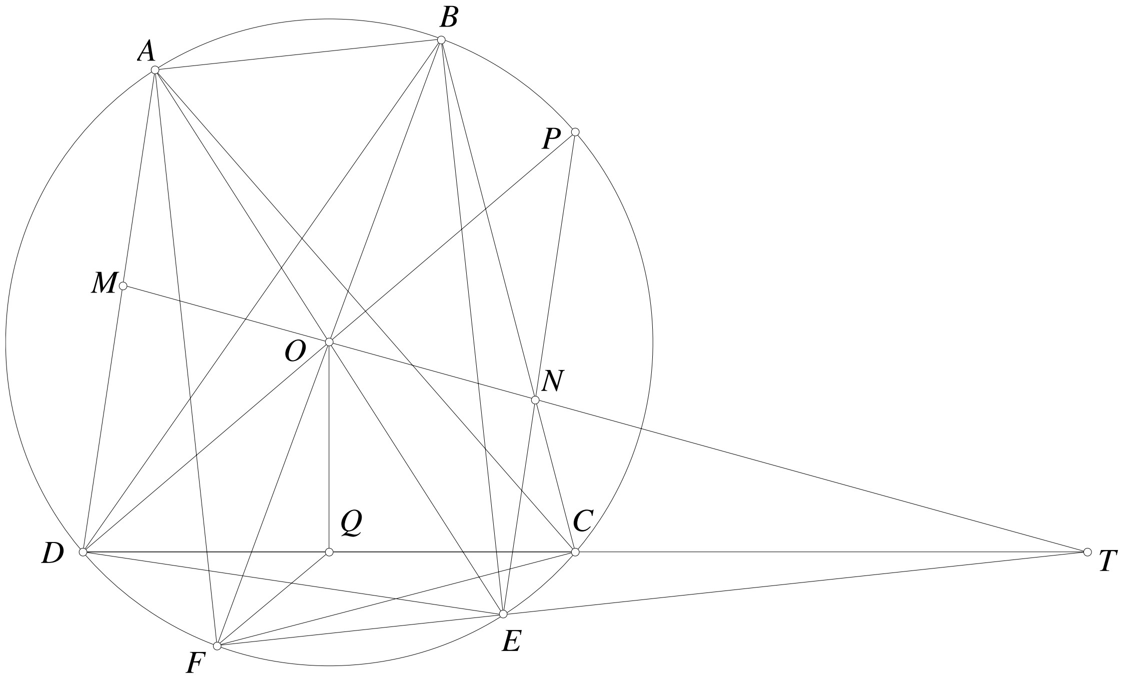
Trở lại bài toán




Hình 10.

**Lời giải thứ nhất.** Dễ thấy tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật. Gọi $MN$ cắt $AF, BE$ tại $G, H$ thì $O$ là trung điểm $GH$. Ta sẽ chứng minh rằng $MG = NH$, thật vậy. Gọi $K, L$ thuộc $DE, FC$ sao cho $FK, EL$ cùng vuông góc với $OT$. Theo bổ đề dễ có $K, L$ thẳng hàng suy ra $\frac{EL}{FK} = \frac{TE}{TF} = \frac{EG}{FH} = \frac{HA}{GB}$. Ta lại có $\angle MAH = \angle SEF$ và $\angle AHM = \angle THF = 90^\circ - \angle HTF = \angle SFE$. Từ đó ta có hai tam giác $AHM$ và $EFK$ đồng dạng. Tương tự hai tam giác $BGN$ và $FEL$ đồng dạng. Từ đó $\frac{HM}{GN} = \frac{HM}{HA} \cdot \frac{HA}{GB} \cdot \frac{GB}{GN} = \frac{FK}{FE} \cdot \frac{EL}{FK} \cdot \frac{EF}{EL} = 1$. Từ đó $MG = NH$ suy ra $O$ là trung điểm $GH$ cũng là trung điểm $MN$. Ta có điều phải chứng minh, $\square$

Lời giải sau khá ngắn gọn sử dụng định lý Pascal đảo của **Lê Thị Hải Linh** học sinh lớp 12 chuyên toán Bắc Ninh.




Hình 11.

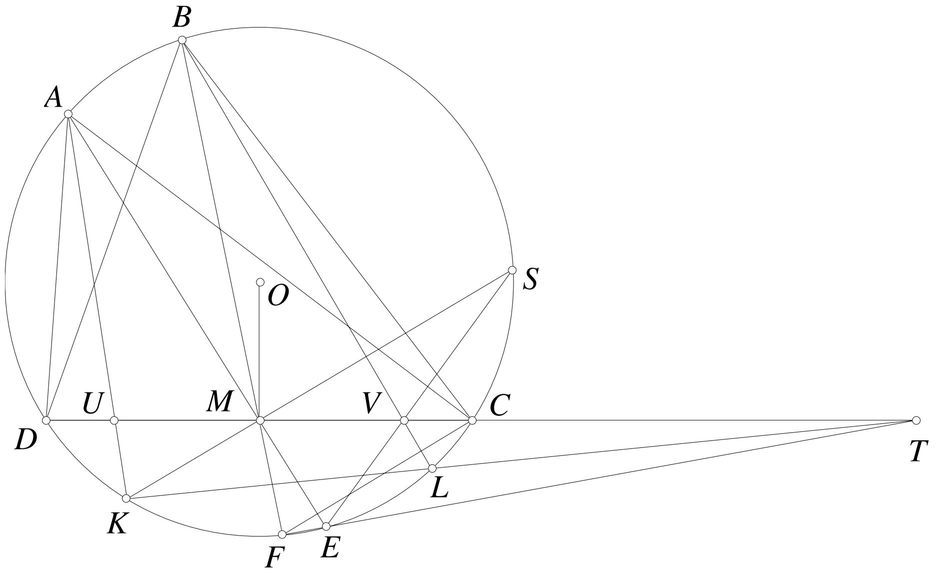
**Lời giải thứ hai.** Gọi $OD$ cắt $NE$ tại $P$. Áp dụng định lý Pascal đảo cho bộ $\begin{pmatrix} D & B & E \\ F & P & C \end{pmatrix}$ do $O, N, T$ thẳng hàng nên $P$ thuộc $(O)$. Từ đó tứ giác $APED$ là hình chữ nhật suy ra $O$ là trung điểm $MN$. □

**Nhận xét.** Khi hai đỉnh $A$ và $B$ trùng nhau ta thu lại được bài toán 1. Sau đây tôi xin đưa ra một mở rộng thú vị khác cho bài toán 7, các bạn hãy làm như một bài luyện tập

**Bài toán 8.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O)$ và $P$ trên trung trực $AB$. $PA, PB$ cắt $(O)$ tại $E, F$ khác $A, B$. Các điểm $M, N$ lần lượt thuộc $BC, AD$ sao cho $EM \parallel AD$ và $FN \parallel BC$. $MN$ cắt $AE, BF$ tại $K, L$. Chứng minh rằng đẳng giác của $O$ trong tam giác $PKL$ cách đều $MN$.

Dựa vào ý tưởng bài toán 7, chúng tôi đề xuất mở rộng bài toán 6 như sau

**Bài toán 9.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O)$. $M$ là trung điểm $CD$. $AM, BM$ cắt $(O)$ tại $E, F$ khác $A, B$. $EF$ cắt $CD$ tại $T$. Một đường thẳng qua $T$ cắt $(O)$ tại $K, L$. $AK, BL$ cắt $CD$ tại $U, V$. Chứng minh rằng $M$ là trung điểm $UV$.




Hình 12.

**Lời giải.** Gọi $KM$ cắt $EV$ tại $S$. Áp dụng định lý Pascal đảo cho $\begin{pmatrix} S\ F\ L \\ A\ K\ E \end{pmatrix}$ với $M, V, T$ thẳng hàng suy ra $S$ thuộc $(O)$. Từ đó áp dụng định lý con bướm cho tứ giác $AKES$ suy ra $M$ là trung điểm $UV$. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 1 cũng còn rất nhiều ứng dụng thú vị chẳng hạn như các bài toán sau, các bạn hãy coi như các bài luyện tập

**Bài toán 10.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$. $D$ là điểm sao cho $CD \perp BC$. $M$ là trung điểm $BC$. $DM$ cắt $AB$ tại $E$. $F$ thuộc $AD$ sao cho $BF \parallel CE$. Chứng minh rằng $BF \perp CF$.

**Bài toán 11.** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$ có đường cao $AD$. $E, F$ là hình chiếu của $D$ lên $CA, AB$. $EF$ cắt $BC$ tại $G$. $AG$ cắt $(O)$ tại $L$ khác $A$. $K$ đối xứng $A$ qua $BC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác $AKL$ cắt $CA, AB$ tại $M, N$ khác $A$.

a) Gọi $P$ là trung điểm $MN$. Chứng minh rằng $\angle PAC = \angle DAB$.

b) Gọi $Q, R$ là trung điểm $BC, EF$. Chứng minh rằng $P, Q, R$ thẳng hàng.

**Bài toán 12.** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$ với $AD$ là đường kính của $(O)$. Tiếp tuyến tại $D$ của $(O)$ cắt $BC$ tại $T$. Tiếp tuyến tại $B, C$ của $(O)$ cắt nhau tại $S$. Chứng minh rằng đường thẳng qua $O$ vuông góc với $OT$ chia đôi $AS$.

**Bài toán 13.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O)$ với $AE, BF$ là đường kính của $(O)$. $EF$ cắt $CD$ tại $T$. Tiếp tuyến tại $C, D$ của $(O)$ cắt nhau tại $S$. Tiếp tuyến tại $A, B$ của $(O)$ cắt nhau tại $R$. Chứng minh rằng đường thẳng qua $O$ vuông góc $OT$ chia đôi $SR$.

# Tài liệu

[1] Topic Tangent to circumcircle at antipode meets sideline
http://artofproblemsolving.com/community/c6h108346

[2] Topic Equal segments?
http://artofproblemsolving.com/community/c6h110996

[3] Darij Grinberg
http://web.mit.edu/ darij/www/Butterfly.zip

[4] Trần Minh Ngọc
https://tranminhngocctlhp.wordpress.com/2015/03/11/xung-quanh-mot-bai-toan-kinh-dien/

# SÁNG TẠO TOÁN HỌC BẰNG PHƯƠNG PHÁP VẬT LÝ HỌC

Nguyễn Ngọc Giang

Chúng ta đã bắt gặp rất nhiều bài viết về sáng tạo các bài toán bằng phương pháp toán học. Để sáng tạo toán người ta có nhiều cách thức như khái quát hóa, đặc biệt hóa, tương tự hóa, tìm bài toán thực tế, tìm nhiều cách giải, tìm bài toán đảo, ... Tuy nhiên, do toán học có mối liên hệ mật thiết với một số ngành cơ bản như vật lý học và tin học nên toán học chịu sự chi phối không nhỏ của các ngành khoa học cơ bản này. Có những bài toán toán học cho đến nay người ta vẫn chưa tìm ra lời giải toán học cho nó mà chỉ tìm ra được lời giải Tin học và Vật lý. Điển hình như bài toán bốn màu trong tin học hay vấn đề trọng số Steiner trong vật lý học. Trong bài viết này chúng tôi xin đưa ra một hướng tư duy tương đối thú vị và mới mẻ đó là sáng tạo Toán học bằng phương pháp Vật lý.

Bài toán 1. *(Bài toán Héron) Trong mặt phẳng, cho trước một đường thẳng $d$ và hai điểm $A, B$ ở cùng một phía đối với đường thẳng. Trên đường thẳng đã cho tìm một điểm $C$ sao cho tổng các khoảng cách từ điểm $C$ đó đến hai điểm $A$, $B$ là nhỏ nhất.*

So với các bài toán khác, bài toán Héron có một đặc trưng mà không nhiều bài toán có thể có được. Đó là bài toán Héron có rất nhiều thể hiện thực tế. Chẳng hạn các bài toán trong sách giáo khoa và các bài toán sau là các ví dụ tiêu biểu:

Bài toán 2. *(Câu b bài 39 trang 88, Toán 8 tập một) Bạn Tú đang ở vị trí $A$, cần đến bờ sông $d$ để lấy nước rồi đi đến vị trí $B$. Con đường ngắn nhất mà bạn Tú nên đi là con đường nào?*

Bài toán 3. *(Trang 12, Hình học 11 nâng cao) Người ta tổ chức một cuộc chạy thi trên bãi biển với điều kiện sau: Các vận động viên xuất phát từ địa điểm $A$ và đích đến là địa điểm $B$, nhưng trước khi đến $B$ phải nhúng mình vào nước biển (ta giả thiết rằng mép nước biển là một đường thẳng). Tìm vị trí ở bờ biển để tổng khoảng cách từ địa điểm $A$ đến vị trí ở bờ biển rồi đến $B$ là ngắn nhất?*

Bài toán 4. *Học sinh cắm trại ở một vị trí $A$, nhưng quy định nấu bếp ở vị trí $B$ (cùng phía so với bờ sông). Người nấu bếp phải chọn bến lấy nước ở vị trí nào để đường đi từ trại đến bến rồi đến bếp là ngắn nhất (cho rằng bờ sông là thẳng)?*

Bài toán 5. *Có hai địa điểm $A$ và $B$ nằm về cùng một phía đối với một con đường xe lửa đi qua hai địa điểm này. Người ta muốn xây dựng một nhà ga sao cho tổng khoảng cách từ địa điểm $A$ đến nhà ga và từ nhà ga đến địa điểm $B$ là ngắn nhất?*

Bài toán 6. *Có hai kho hàng ở cùng phía đối đường quốc lộ. Trên đường quốc lộ đó người ta muốn xây dựng một bến xe sao cho đường vận chuyển từ hai kho đến bến xe là ngắn nhất?*

Bài toán 7. *Để cấp nước sạch cho 2 điểm dân cư nằm về một phía của con kênh, trên bờ kênh phải xây một tháp nước. Vậy, phải đặt nó ở vị trí nào để tổng độ dài đường ống dẫn nước từ nó đến 2 điểm dân cư là ngắn nhất?*

Bài toán 8. *Vòng chung kết cuộc thi kén chồng còn lại 3 chàng trai: Một nhà Toán học, một nhà vật lý học, một nhà Hóa học. Điều kiện cô gái đưa ra là: Các chàng trai phải xuất phát đồng thời từ một địa điểm $A$, chạy đến hái một bông hoa tại một điểm bất kì trên hàng rào $d$ và chạy về điểm $B$ tặng cho cô gái đang đứng đợi ở đó. Ai đến sớm nhất thì cô gái sẽ lấy làm chồng. Biết rằng, vận tốc chạy của 3 chàng trai là như nhau. Cuối cùng nhà Toán học đã tìm được đường đi với với thời gian ít nhất và thắng cuộc. Hỏi nhà Toán học đã chạy theo đường nào?*

Bài toán Héron là một trong những bài toán quan trọng nhất của chương trình giáo dục môn toán ở nước ta. Tầm quan trọng của nó thể hiện ở chỗ, nó xuất hiện cả ở sách giáo khoa toán Trung học cơ sở (lớp 8) và sách giáo khoa toán Trung học phổ thông (lớp 11). Chính vì thế khai thác sâu về bài toán này sẽ giúp ích nhiều cho các thầy cô giáo, các bậc phụ huynh và các em học sinh có một cái nhìn tương đối đầy đủ.

Chúng ta hãy đến với lời giải đầu tiên của bài toán Héron bằng cách tìm hiểu nguyên lí Fermat. Nguyên lí Fermat thường được phát biểu đơn giản theo cách sau: *Ánh sáng truyền theo đường mà thời gian truyền là nhỏ nhất*. Chính xác hơn, nguyên lí Fermat được phát biểu dưới dạng tổng quát là: *Quang lộ từ một điểm này tới một điểm khác phải là một cực trị: Nghĩa là hoặc nhỏ nhất, hoặc lớn nhất, hoặc dừng (độ dài các đường truyền đều bằng nhau)*".

Một cách phát biểu dưới dạng khác: "*Thời gian truyền của ánh sáng từ một điểm này tới một điểm khác phải là một cực trị : Nghĩa là hoặc nhỏ nhất, hoặc lớn nhất, hoặc không đổi (như nhau đối với mọi đường truyền)*".

Như vậy, dựa vào nguyên lí Fermat, ta có thể giải bài toán động học có dạng: "*Tìm quỹ đạo chuyển động của vật để thời gian chuyển động của nó là nhỏ nhất ?*".

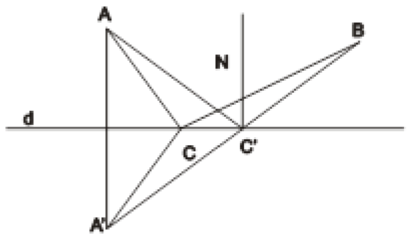
Phương pháp giải bài toán động học có dạng nguyên lí Fermat được hiểu:

- Chuyển động của vật được xem như sự truyền của ánh sáng.
- Các miền mà chất điểm chuyển động trong đó sẽ đóng vai trò môi trường truyền ánh sáng.

Khi đó, tại ranh giới của các miền (môi trường) sẽ xảy ra các hiện tượng phản xạ hoặc khúc xạ ánh sáng. Áp dụng các định luật cơ bản của Quang hình học, chúng ta có thể nhận được ngay lời giải cần tìm của bài toán.

Từ những kết quả lí thuyết này ta có cách giải vật lý cho bài toán Héron sau

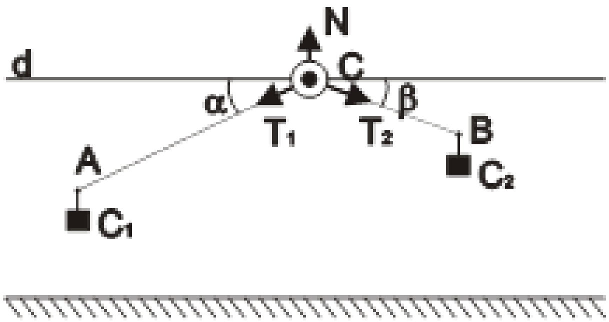
Cách 1. Chuyển động theo đường gấp khúc $ACB$ có thể xem như ánh sáng truyền từ $A$ tới "*gương phẳng*" $d$ (đường thẳng $d$ đóng vai trò gương phẳng), sau khi phản xạ trên gương, tia phản xạ đi qua điểm $B$.




Theo định luật phản xạ ánh sáng, ta nhận được ngay lời giải của bài toán khi $C$ trùng với $C'$. Lúc này $\angle AC'N = \angle NC'B$. □

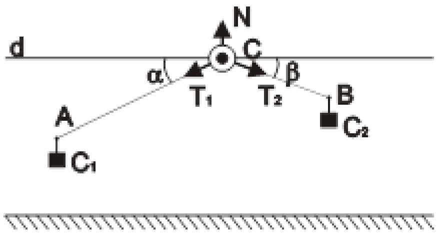
Cách giải này cho thấy bản chất vật lý học của bài toán toán học. Tuy nhiên, đây không phải là cách giải vật lý duy nhất. Ta có thể giải bài toán này bằng phương pháp vật lý khác như sau.

Cách 2. Ta xét vòng $C$ không trọng lượng có thể trượt không ma sát theo một trục $d$ nằm ngang. Ở đầu $C$ có nối hai sợi chỉ. Mỗi sợi chỉ đó vòng qua một ròng rọc (tương ứng ở $A$ và ở $B$) và ở đầu kia của sợi chỉ có treo các khối nặng có cùng khối lượng tương ứng là $C_1$ và $C_2$ (hình vẽ). (Ta cũng thừa nhận những điều kiện đơn giản hóa thông thường: Trục tuyệt đối cứng, các sợi chỉ tuyệt đối mềm nhưng không giãn, ta không kể tới ma sát, trọng lượng các sợi chỉ và phản lực của chỗ gập góc của chúng, kích thước của các ròng rọc và của vòng). Chúng ta cần phải tìm vị trí của vòng $C$ trên thanh $d$ sao cho cả hệ thống cơ học ở trạng thái cân bằng.




Thật vậy, hai khối nặng phải được treo lơ lửng càng thấp càng tốt (nghĩa là thế năng của hệ phải cực tiểu). Do đó suy ra rằng tổng $AC_1 \cdot C_1 + BC_2 \cdot C_2$ phải cực đại. Vì chiều dài mỗi sợi dây không đổi nên tổng $AC \cdot C_1 + BC \cdot C_2$ phải cực tiểu.

Ở vị trí cân bằng của hệ, các lực tác động lên vòng $C$ bằng không. $C$ chịu các lực căng của chỉ $\overrightarrow{T_1}$ và $\overrightarrow{T_2}$ ($|\overrightarrow{T_1}| = |\overrightarrow{T_2}|$ - các khối nặng kéo chỉ bằng các lực có độ lớn như nhau, lực căng do các khối nặng không giảm đi do ma sát ở các ròng rọc mà được truyền toàn vẹn) và phản lực $\overrightarrow{N}$ (hình vẽ).




Do $\overrightarrow{N} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} = \overrightarrow{0}$ và $\overrightarrow{N} \perp d$, hình chiếu trên đường thẳng $d$ cho ta

$$|\overrightarrow{T_1}|\cos\alpha = |\overrightarrow{T_2}|\cos\beta,$$

từ đó $\alpha = \beta$. Ta cũng nhận được chính kết quả như cách giải 1. □

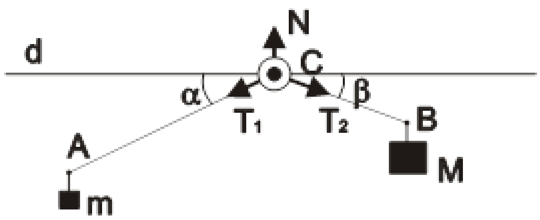
Ở đây ta cần giải thích thêm tại sao ta lại đem chiếu $\overrightarrow{N} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} = \overrightarrow{0}$ lên đường thẳng $d$ ($\overrightarrow{N} \perp d$) và thu được hệ thức $|\overrightarrow{T_1}|\cos\alpha = |\overrightarrow{T_2}|\cos\beta$.

Lý giải này bạn đọc cũng có thể áp dụng tương tự cho các bài toán 9 hay bài toán 15 dưới đây. Do các lực căng không thể kéo vòng về theo phương thẳng đứng được, vì trục d xuyên qua vòng tuyệt đối cứng (phản lực $\overrightarrow{N}$ của trục có thể có cường độ tùy ý). Thêm vào đó các lực thành phần nằm ngang của hai lực đó, có hướng đối lập, phải triệt tiêu lẫn nhau, phải bằng nhau về cường độ. Hay ta có hệ thức $|\overrightarrow{T_1}|\cos\alpha = |\overrightarrow{T_2}|\cos\beta$. Điều này trùng với lập luận ở trên.

Khái quát hóa bài toán 1 ta được bài toán sau.

Bài toán 9. *Trong mặt phẳng, cho trước một đường thẳng $d$ và hai điểm $A$, $B$ ở cùng một phía đối với đường thẳng. Trên đường thẳng đã cho tìm một điểm $C$ sao cho $m \cdot AC + M \cdot BC$ đạt giá trị nhỏ nhất với $m$ và $M$ là các số dương cho trước?*

Bài toán này chúng ta có thể giải được bằng phương pháp tương tự như cách giải 2 bài toán 1. Cũng giống như lập luận của cách 2 bài toán 1 (thay $C_1$ bởi $m$, $C_2$ bởi $M$), từ điều kiện cân bằng của hệ $\overrightarrow{N} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} = \overrightarrow{0}$ ta đem chiếu lên đường thẳng d thì sẽ cho đẳng thức $m \cdot \cos\alpha = M \cdot \cos\beta$, tức là vòng $C$ sẽ ở vị trí sao cho các sợi chỉ cột vào nó tạo với $d$ thỏa hệ thức $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{M}{m}$ (hình vẽ).




Từ bài toán 9 ta có thể phát biểu bài toán thực tế dưới dạng.

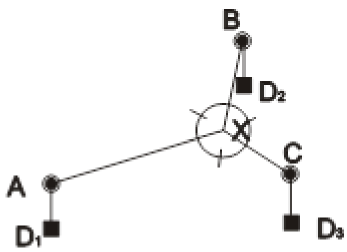
Bài toán 10. *(Bài tổng quát của câu b bài 39 trang 88, Toán 8 tập một) Bạn Tú đang ở vị trí $A$ đi với vận tốc $v_1$ đến bờ sông $d$ để lấy nước rồi đi đến vị trí $B$ với vận tốc $v_2$ với thời gian ít nhất. Hỏi bạn Tú đã đi theo đường nào và tìm thời gian cho đường đó?*

Rõ ràng theo bài toán 9 thì $m = \frac{1}{v_1}$, $M = \frac{1}{v_2}$ nên điều kiện cực tiểu thỏa $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{v_1}{v_2}$. Từ đây chúng ta dễ dàng rút ra thời gian cực tiểu cần tìm.

Bây giờ chúng ta sẽ tìm một số bài toán tương tự của bài toán Héron. Ta có bài toán

Bài toán 11. *Trên mặt phẳng cho trước 3 điểm $A$, $B$ và $C$. Hãy tìm điểm thứ tư $X$ sao cho tổng khoảng cách từ nó đến 3 điểm đó đạt giá trị nhỏ nhất?*

Lời giải. Chúng ta sẽ đưa ra lời giải cơ học cho bài toán này trong trường hợp các điểm cho trước $A$, $B$ và $C$ tạo ra hình tam giác mà tất cả các góc của nó nhỏ hơn $120°$. Ta xét ba ròng rọc quay xung quanh một trục (cái đinh) đóng trên một bức tường thẳng đứng ở các điểm $A$, $B$ và $C$ (hình vẽ). Ba sợi chỉ $XAD_1$, $XBD_2$, $XCD_3$ luôn qua ba ròng rọc tương ứng ở $A$, $B$ và $C$. Ba sợi chỉ được nối ở đầu chung $X$ và ở mỗi đầu kia của các sợi chỉ ta treo các khối nặng tương ứng $D_1$, $D_2$ và $D_3$. Các khối nặng $D_1$, $D_2$ và $D_3$ nặng bằng nhau. Ta phải tìm vị trí cân bằng.




Ba khối nặng phải cùng treo lơ lửng càng thấp càng tốt nghĩa là tổng các khoảng cách của chúng từ một mực ngang đã cho (mặt đất) phải nhỏ nhất (tức là thế năng của hệ phải cực tiểu) Do đó tổng $AD_1 + BD_2 + CD_3$ phải cực đại. Vì chiều dài mỗi sợi chỉ là không đổi nên $AX + BX + CX$ phải cực tiểu.

Mặt khác ở trạng thái cân bằng tổng các lực tác dụng lên điểm $X$ bằng không. Có ba lực có độ lớn bằng nhau tác động lên $X-$ đó là lực căng các sợi chỉ $T_1$, $T_2$ và $T_3$ (các khối nặng bằng nhau kéo các sợi chỉ các lực có độ lớn như nhau): $|\overrightarrow{T_1}| = |\overrightarrow{T_2}| = |\overrightarrow{T_3}|$ và $\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \overrightarrow{T_3} = \overrightarrow{0}$. Rõ ràng, do đối xứng, các lực này phải xiên góc như nhau lực nọ đối với lực kia, góc giữa bất kì hai trong số ba sợi dây cùng nối chung ở $X$ bằng $120°$. (Tam giác do ba lực tạo thành là đều, các góc ngoài của nó đều bằng $120°$). □

Nhận xét. Trong trường hợp các điểm $A$, $B$ và $C$ tạo thành tam giác mà một góc giả sử góc $A \geqslant 120°$ thì điểm $X$ sẽ trùng với đỉnh $A$ này. Bạn hãy suy nghĩ xem tại sao?

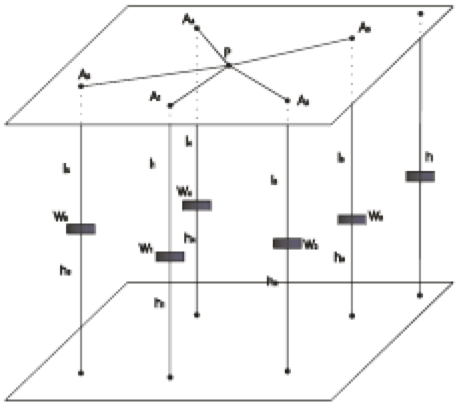
Bài toán 11 có một hướng tổng quát rất khó sau:

Bài toán 12. *Cho $n$ điểm $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ trong mặt phẳng tương ứng với $n$ vật nặng ($n$ là số dương) có trọng lượng tương ứng là $W_1,\ W_2,\ \ldots,\ W_n$. Tìm điểm $P$ sao cho tổng*

$$l = W_1PA_1 + W_2PA_2 + \cdots + W_nPA_n,$$

*có giá trị nhỏ nhất? Điểm $P$ tại vị trí tổng $l$ đạt giá trị nhỏ nhất gọi là điểm Fermat nghĩa rộng (điểm $F$ nghĩa rộng).*

Lời giải. Ta giải bài toán như sau: Đối với $n$ tập hợp điểm $\{A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n\}$ bất kì, điểm $F$ nghĩa rộng đó đều tồn tại và duy nhất. Người ta khoan lỗ ở các vị trí $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$ trên tấm phẳng. Lấy $n$ sợi dây buộc vào điểm $P$ và xâu qua các lỗ khoan đó. Buộc các vật nặng tương ứng $W_n$ vào $n$ sợi dây tạo thành hệ thống lực. Khi hệ đứng yên (cân bằng), vị trí điểm $P$ chính là điểm $F$ nghĩa rộng (minh họa hình vẽ khi $n = 5$).



Ta gọi $C$ là hằng số

$$C = \sum W_i(PA_i + l_i) = \sum (W_i \times PA_i + W_il_i),$$

trong đó $l_i$ là khoảng cách tương ứng từ $n$ điểm đến $n$ vật nặng.

Từ

$$C = \sum W_i(PA_i + l_i) = \sum (W_i \times PA_i + W_il_i),$$

ta có

$$\sum W_i \times PA_i = C - \sum W_il_i = C - \sum (W_i(h - h_i)) = C - \sum W_ih + \sum W_ih_i,$$

trong đó $h$ là khoảng cách từ mặt phẳng đến mặt đất (phẳng).

Nhưng $\sum W_ih$ cũng là hằng số, do đó

$$\sum W_i \times PA_i = \text{hằng số} + \sum W_ih_i,$$

tức là khi hệ thống lực cân bằng, tổng thế năng của $n$ vật nặng $\sum W_ih_i$ cần đạt giá trị nhỏ nhất. Vì vậy $\sum W_i \times PA_i$ cũng đạt tới giá trị nhỏ nhất, hay $l$ đạt giá trị nhỏ nhất. □

Nhận xét. Đến nay người ta vẫn chưa tìm ra được lời giải toán học cho vấn đề trọng số Steiner.

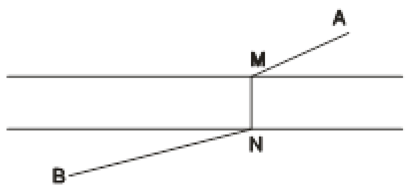
Bài toán thực tế của bài toán 12 là bài toán sau khi $m = n = p$.

Bài toán 13. *Giả sử $A, B, C$ là ba địa điểm cần nhận sản phẩm của nhà máy được xây dựng sao cho tam giác $ABC$ không tù. Các phần sản phẩm được nhà máy cung cấp cho các địa điểm $A, B, C$ là $m, n, p$. Cần phải xây dựng nhà máy ở đâu để cho các chi phí vận chuyển là ít nhất? (Ở đây chúng ta bỏ qua chi phí xây dựng các đường $AX$, $BX$ và $CX$ nối các địa điểm $A, B, C$ với nhà máy $X$ và chúng ta coi rằng quá trình chi phí vận chuyển tỉ lệ thuận với tích của khối lượng hàng nhân với độ dài của quãng đường).*

Ở Sách giáo khoa hình học 11 nâng cao, có bài toán cực trị hình học tương tự với bài toán Héron.

Bài toán 14. *(Bài toán 2, trang 7, Hình học 11 nâng cao) Hai thôn nằm ở hai vị trí $A$ và $B$ cách nhau một con sông (xem rằng hai bờ sông là hai đường thẳng song song (hình vẽ). Người ta dự định xây một chiếc cầu $MN$ bắc qua sông (cố nhiên cầu phải vuông góc với bờ sông) và làm hai đoạn đường thẳng từ $A$ đến $M$ và từ $B$ đến $N$. Hãy xác định vị trí chiếc cầu $MN$ sao cho $AM + BN$ ngắn nhất?*

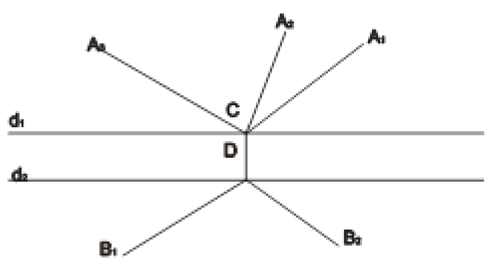
Bài toán này chúng ta có thể giải bằng việc sử dụng phương pháp hình học thuần túy. Tuy nhiên chúng ta cũng có thể sử dụng phương pháp cơ học để giải.




Chúng ta sẽ giải bài toán 14 bằng cách phát biểu bài toán tổng quát hơn như sau.

Bài toán 15. *Trên các bờ sông khác nhau có 5 khu dân cư $A_1,\ A_2,\ A_3,\ B_1,\ B_2$ ($A_1,\ A_2,\ A_3$ trên một bờ sông, $B_1,\ B_2$ ở trên bờ bên kia (hình vẽ)). Cần phải xây dựng cầu $CD$ sao cho tổng các chiều dài đường $A_1C,\ A_2C,\ A_3C.\ B_1D,\ B_2D$ từ các khu dân cư đến cầu là tối thiểu (các bờ sông song song, cầu vuông góc với bờ sông)?*

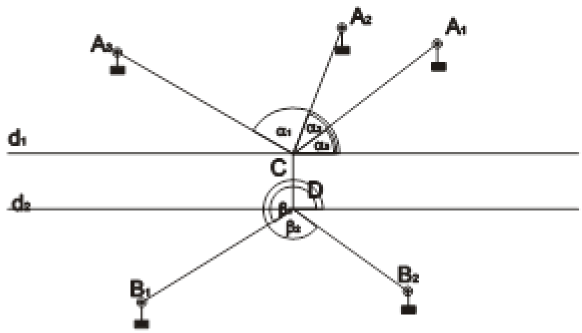
Để giải bài toán này ta xét hệ thống cơ sau đây. Một thanh cứng $CD$ có thể trượt không ma sát trên đường ray và luôn luôn vuông góc với đường ray. Ta xét năm ròng rọc quay xung quanh một trục (cái đinh) đóng trên một bức tường thẳng đứng ở các điểm $A_1,\ A_2,\ A_3$ và $B_1,\ B_2$ (xem hình vẽ).



Năm sợi chỉ $DCA_1$, $DCA_2$, $DCA_3$, $CDB_1$, $CDB_2$ luồn qua năm ròng rọc tương ứng ở $A_1$, $A_2$, $A_3$ và $B_1$, $B_2$. Năm sợi chỉ được nối ở đầu chung với $C$ hoặc $D$ của thanh và ở mỗi đầu kia của các sợi chỉ ta treo các khối nặng như nhau.

Ta xét các lực tác dụng lên thanh $CD$. Trên đầu $C$ của thanh có các lực căng của chỉ $A_1C$, $A_2C$, $A_3C$ là $\overrightarrow{T_1}$, $\overrightarrow{T_2}$ và $\overrightarrow{T_3}$ ($|\overrightarrow{T_1}| = |\overrightarrow{T_2}| = |\overrightarrow{T_3}|$ do các khối nặng như nhau) và phản lực $\overrightarrow{N_1}$ từ phía thanh ray thứ nhất.

Trên đầu $D$ của thanh có các lực căng của chỉ $B_1D$, $B_2D$ là $\overrightarrow{T_4}$ và $\overrightarrow{T_5}$ ($|\overrightarrow{T_1}| = |\overrightarrow{T_2}| = |\overrightarrow{T_3}| = |\overrightarrow{T_4}| = |\overrightarrow{T_5}|$) và phản lực $\overrightarrow{N_2}$ từ phía thanh ray thứ hai (trên hình vẽ các lực $N_1$ và $N_2$ vuông góc với các thanh ray, còn các lực $\overrightarrow{T_i}$ $(i = \overline{1,\ 5})$ có độ lớn bằng nhau.




Do $\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \overrightarrow{T_3} + \overrightarrow{T_4} + \overrightarrow{T_5} + \overrightarrow{N_1} + \overrightarrow{N_2} = \overrightarrow{0}$ và $\overrightarrow{N_1}$, $\overrightarrow{N_2} \perp d_1$, $d_2$, ta đem chiếu lên đường thẳng d song song hoặc trùng với $d_1$ hoặc $d_2$ cho ta

$$|\overrightarrow{T_1}|\cos\alpha_1 + |\overrightarrow{T_2}|\cos\alpha_2 + |\overrightarrow{T_3}|\cos\alpha_3 + |\overrightarrow{T_4}|\cos\beta_1 + |\overrightarrow{T_5}|\cos\beta_2 = 0,$$

hay

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 + \cos\beta_1 + \cos\beta_2 = 0. \tag{1}$$

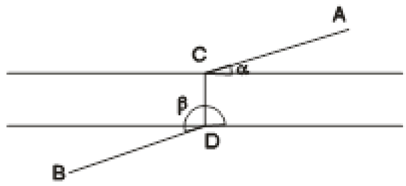
Các góc được tính theo chiều ngược chiều kim đồng hồ $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \pi$, $\pi \leqslant \beta_j \leqslant 2\pi$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$ (xem hình vẽ).

Nhận xét. Ta có một số nhận xét:

1. Đẳng thức (1) mặc dù không cho ta cách dựng đoạn $CD$ bằng compa và thước kẻ, nhưng thường hữu ích cho việc giải các bài toán thực tế tương tự.

2. Bài toán 15 là bài toán mà theo một số tài liệu thì người ta chưa tìm được lời giải thuần túy toán học cho nó. Qua đây ta thấy rõ ưu điểm của phương pháp vật lý học ứng dụng trong một số bài toán toán học.

3. Ở bài toán 15 nếu bên mỗi bờ sông chỉ có một khu dân cư thì ta thu được bài toán 14. Từ đẳng thức (1) cho ta $\cos\alpha + \cos\beta = 0$, từ đó $\beta = \pi + \alpha$ (hình vẽ), tức là các đoạn $AC$ và $BD$ phải song song. Trong trường hợp này đoạn $CD$ có thể dựng được bằng compa và thước kẻ. Bạn đọc có thể tham khảo thêm cách giải bằng phép tịnh tiến trong Sách giáo khoa Hình học 11 nâng cao.




Chúng ta đã có những khám phá thú vị xoay quanh bài toán Héron. Các cách giải vật lý khác nhau, các bài toán khái quát hóa, tương tự hóa, các bài toán thực tế đã đem đến cho chúng ta nhiều điều bổ ích. Qua việc sáng tạo toán học bằng phương pháp vật lý học chúng ta còn nhận thấy một điều, đó là có những bài toán toán học mà nếu giải bằng phương pháp toán học thì rất khó hoặc không thể giải được trong khi nếu giải bằng phương pháp vật lý thì lại tương đối đơn giản. Hy vọng bài viết của chúng tôi đã mang đến cho các bạn nhiều cảm nhận mới mẻ. Bài viết này cần trao đổi gì thêm? Mong được sự chia sẻ của bạn đọc.

Sau cùng là một số bài tập luyện tập.

Bài toán 16. *Cho hai điểm $A$ và $B$, đường thẳng $d$ phân cách $A$ và $B$ và hai vận tốc $u$ và $v$. Tìm thời gian nhỏ nhất cần để chuyển từ $A$ tới $B$, giả định rằng khi chuyển từ $A$ tới $d$ thì vận tốc là $u$ và từ $d$ tới $B$ thì vận tốc là $v$?*

Bài toán 17. *Có hai kho chứa xăng hình tròn ở cùng một phía đối với đường quốc lộ. Người ta muốn xây dựng một trạm cung ứng và phân phối xăng bên đường quốc lộ nối với hai bồn xăng trên sao cho đường ống nối tới hai bồn xăng là ngắn nhất? Chúc các bạn thành công.*

Mọi ý kiến đóng góp có thể gửi về tác giả theo địa chỉ: *Số nhà* 229/85 *Thích Quảng Đức, phường* 4, *quận Phú Nhuận, thành phố Hồ Chí Minh.*

Di động: 0908576218.

Email: nguyenngocgiang.net@gmail.com

## Tài liệu

[1] Nguyễn Bá Đô, Đặng Hùng Thắng, Hoàng Văn Trung (2005), *Một số vấn đề toán học chưa giải quyết được*, Nhà xuất bản Giáo dục.

[2] Tạp chí vật lý và tuổi trẻ.

[3] Tạp chí Tin học và nhà trường.

[4] Tạp chí Kvant.

# TOÁN HỌC GIẢI TRÍ VỚI TƯ DUY SÁNG TẠO

Đặng Nguyễn Đức Tiến
(DCU, Ireland)

GIỚI THIỆU

*Làm thế nào tạo nên 4 hình tam giác đều với 6 que diêm?*

*"Hãy nghĩ khác đi, hãy nghĩ khác thói quen, bạn sẽ tìm được cách giải quyết!"*

"Hãy nghĩ khác đi", đó chính là một trong những tiêu chí quan trọng của tư duy sáng tạo, hay vẫn được gọi là tư duy ngoại biên. "Hãy nghĩ khác đi", bạn sẽ tìm ra cách giải quyết cho hàng loạt bài toán nữa trong chuyên mục toán học giải trí kỳ này với chủ đề tư duy sáng tạo.

## Tư duy sáng tạo

Tư duy sáng tạo, hay tư duy ngoại biên (lateral thinking) là một thuật ngữ được đặt ra bởi Edward de Bono (1933 -) vào năm 1967 để chỉ cách suy nghĩ để giải quyết một cách giáng tiếp và sáng tạo đối với các vấn đề rất khó có thể giải quyết được bằng suy luận logic thông thường. Theo de Bono, sử dụng tư duy logic là dạng tư duy "thẳng đứng", tìm cách trực tiếp để giải quyết vấn đề, trong khi sử dụng tư duy ngoại biên là việc suy nghĩ "bên lề", để tạo ra những ý tưởng mới hoặc thay đổi cách thức nhìn nhận vấn đề. Và như vậy, thay vì "đâm đầu" giải quyết trực diện, tư duy ngoại biên tìm cách "vượt" qua vấn đề bằng những cách tiếp cận hoàn toàn khác lạ.

Tư duy ngoại biên, tên nghe thì có thể xa lạ nhưng thật ra xuất hiện rất phổ biến trong các câu đố vui dân gian. Người viết bài này vẫn nhớ những câu đố dạng như: "Vì sao về mùa đông một số loài chim lại bay về phương bắc?" và câu trả lời thay vì những lý do về thời tiết, tập quán của một số loài chim ... thì câu đáp án lại là ... "vì chim phải bay chứ hổng lẽ nó đi!"

"Hãy nghĩ khác đi", ngày nay không chỉ dùng để giải đố, mà nó được áp dụng trong khoa học kỹ thuật, trong thiết kế, nghệ thuật, và kể cả trong chính trị, kinh tế... và vì vậy hầu hết các công ty tuyển dụng đều có những yêu cầu nhất định đối với nhân viên về khả năng tư duy sáng tạo.

Trong phần tiếp theo của bài viết, chúng tôi tổng hợp và gửi đến bạn đọc một số câu hỏi tuyển dụng kinh điển đòi hỏi phải có những tư duy mới lạ để giải quyết. Chúng tôi cũng lưu ý rằng một số câu hỏi này đã xuất hiện rải rác trong một vài số Epsilon, nhưng chúng tôi cũng tổng hợp lại ở đây trong bài viết này để tiện theo dõi.

# 20 câu hỏi tuyển dụng

Trong phần này, chúng tôi tổng hợp và gửi đến bạn đọc 20 câu hỏi tuyển dụng, chủ yếu từ nguồn `http://puzzlefry.com`. Tất cả các cầu hỏi đều được giữ nguyên nội dung toán học, và chỉ thay đổi rất ít về mô tả bài toán, chủ yếu để làm ngắn đi câu hỏi. "Hãy nghĩ khác đi," bạn sẽ tìm ra lời giải cho những câu hỏi này. Để giúp các bạn "giải toả bức xúc" nếu nghĩ không ra cách giải, chúng tôi cũng đăng một lời giải gợi ý ở bên dưới mỗi câu hỏi, nhưng để tránh làm mất hứng thú cho bạn đọc muốn tự giải, chúng tôi xoay ngược lại chiều của phần giải đáp này.

**Câu hỏi 1** *Sử dụng 2 đồng hồ cát, một 4 phút, một 7 phút, làm thế nào để đo được chính xác 9 phút? Yêu cầu thời gian đo không vượt quá 9 phút.*

**Lời giải gợi ý:**

Bắt đầu bởi 2 đồng hồ cát cùng lúc. Sau 4 phút, đồ hồ 4 phút đã chạy xong, đồng hồ 7 phút đã chạy được 4 phút. Lật ngược đồng hồ 4 phút. Sau 7 phút, đồng hồ 7 phút đã chạy hết, đồng hồ 4 phút đã chạy 3 phút. Lật ngược đồng hồ 4 phút. Sau 8 phút, đồ hồ 4 phút đã chạy xong, đồng hồ 7 phút đã chạy được 1 phút. Lật ngược đồng hồ 7 phút (không cần quan tâm đồng hồ 4 phút nữa). Sau 9 phút, đồng hồ 7 phút chạy xong.

**Câu hỏi 2** *Có 10 túi tiền, mỗi túi có 10 đồng tiền, trong đó có 1 túi chứa toàn tiền giả chỉ nặng 9gr mỗi đồng so với tiền thật mỗi đồng nặng 10gr. Với một cân số, dùng bao nhiêu lần cân để tìm ra túi chứa tiền giả*

**Lời giải gợi ý:**

Chỉ cần 1 lần cân. Xem thêm ở Epsilon số 7.

**Câu hỏi 3** *Một vị vua bạo ngược được tặng 1000 thùng rượu quý, nhưng tin mật báo cho hay có 1 thùng rượu đã bị hạ độc. Chất độc là cực độc và chỉ cần uống 1 giọt là đủ để chết người, tuy nhiên độc tính chỉ tác dụng 1 tháng sau khi uống. Nhà vua bạo ngược không biết được thùng nào bị bỏ độc quyết định dùng các phạm nhân thử rượu. Nhà vua chỉ muốn mất tối đa 10 tù nhân, và muốn sau đúng 1 tháng sẽ xác định được thùng rượu bị bỏ độc. Phải làm thế nào?*

**Lời giải gợi ý:**

Đánh số các thùng theo hệ nhị phân. Khi đó tù nhân thứ 1 uống các bình có chữ số đầu tiên bằng 1, tù nhân thứ 2 uống các bình có chữ số thứ 2 bằng 1... Vì $2^{10} = 1024 > 1000$ nên chỉ cần 10 tù nhân thử rượu sẽ xác định được thùng rượu bị hạ độc.

**Câu hỏi 4** *Có 2 con vịt ở trước 1 con vịt, 2 con vịt ở sau 1 con vịt, và 1 con vịt ở giữa. Hỏi tất cả có mấy con vịt?*

**Lời giải gợi ý:**

Có ba con vịt.

**Câu hỏi 5** *Có 12 đồng xu giống hệt nhau, trong đó một đồng giả, có khối lượng khác với 11 đồng còn lại. Với một cân đĩa, bằng làm thế nào để tìm ra đồng giả và xác định nặng hơn hay nhẹ hơn so với đồng thật? Bạn cần dùng mấy lần cân?*

**Lời giải gợi ý:**

Đây là một bài toán kinh điển. Chỉ cần 3 lần cân. Mời bạn đọc xem lại lời giải chi tiết ở Epsilon số 6.

**Câu hỏi 6** *Có 3 chiếc hộp: 1 hộp có 2 quả banh màu trắng, 1 hộp có 2 banh màu đen, và 1 hộp có 1 banh trắng, 1 banh đen. Mỗi hộp có ghi nhãn bên trong chứa banh màu gì, rủi thay cả 3 nhãn đều dán sai. Bạn được chọn 1 hộp, và lấy ra 1 banh ngẫu nhiên trong hộp đó. Hỏi phải làm bao nhiêu lần để xác định hộp nào chứa banh gì?*

**Lời giải gợi ý:**

Chỉ cần 1 lần. Chọn hộp có gắn nhãn Trắng-Đen.

**Câu hỏi 7** *Một chiếc bánh ngọt đã bị cắt bớt 1 phần. Làm thế nào chỉ với 1 nhát cắt có thể chia phần còn lại thành 2 phần bằng nhau?*

**Lời giải gợi ý:**

Cắt bánh theo chiều cao.

**Câu hỏi 8** *Một con ốc được treo trên mạn tàu. Hiện tại ốc được treo 1m cao hơn mực nước. Nước triều đang dâng, cứ 1 giờ dâng cao 15 cm. Hỏi sau bao lâu thì mực nước sẽ chạm vào ốc.*

**Lời giải gợi ý:**

Không bao giờ, vì tàu nổi trên nước.

**Câu hỏi 9** *Một nhà đầu tư mua vào 200 cổ phiếu của công ty A với giá 50$ một cổ phiếu. Sau đó giá cổ phiếu này tăng 50%, rồi lại giảm đi 40%. Nhà đầu tư sau đó bán toàn bộ số cổ phiếu này. Hỏi số tiền nhà đâu tư tăng lên/mất đi là bao nhiêu?*

**Lời giải gợi ý:**

Nhà đầu tư mua vào 200 * 50 = 10,000$. Giá cổ phiếu tăng 50% nên trở thành 10,000 * (1 + 0.5) = 15,000$. Sau đó giảm đi 40% nên còn 15,000 * (1 - 0.4) = 9,000. Do vậy nhà đầu tư bị mất đi 1,000$. Điều này khá ngược với cảm nhận thông thường số phần trăm tăng thêm là 50 lớn hơn so với số phần trăm giảm đi là 40%, mang lại cảm giác người này có lãi sau giao dịch.

**Câu hỏi 10** *Ba sinh viên đi du lịch và cùng thuê chung một phòng với giá 30$ (mỗi người trả 10$). Người quản lý sau đó kiểm lại và thấy họ đang khuyến mãi nên giá chỉ có 25$ mà thôi nên gọi nhân viên trả lại 5$ cho các sinh viên. Nhân viên tự thấy 5$ khó chia đều cho 3 nên lấy đi 2$ và chỉ đưa lại cho 3 sinh viên này 3$. Các sinh viên này rất vui vẻ vì họ chỉ phải trả 27$ (mỗi người 9$) cho tiền phòng. Tuy vậy, nếu họ trả 27$ và nhân viên giữ lại 1$ thì tổng cộng chỉ là 29$. Hỏi một $ còn lại biến đi đâu?*

**Lời giải gợi ý:**

Đây là một câu đố kinh điển vì cách đặt vấn đề làm rối người đọc. Không có $ nào mất đi cả vì 3 sinh viên trả tiền phòng chỉ có 25$ thêm 2$ cho nhân viên là 27$.

**Câu hỏi 11** *Ở một quốc gia nọ, tất cả các gia đình đều muốn có con trai. Vì vậy, họ tiếp tục sinh cho đến khi có được con trai mới dừng. Hỏi kỳ vọng tỉ lệ bé trai và bé gái ở quốc gia đó là bao nhiêu?*

**Lời giải gợi ý:**

Rất lý thú, thoạt tiên có vẻ như tỉ lệ bé trai sẽ cao hơn hẳn bé gái, nhưng tính ra thì tỉ lệ này tiến về một.

**Câu hỏi 12** *Một tử tù được đưa 2 chiếc hộp giống hệt nhau cùng với 50 quả banh trắng và 50 quả banh đen. Tử tù được phép bỏ banh vô 2 hộp này theo ý mình. Sau đó cai ngục sẽ bịt mắt anh ta lại và yêu cầu lấy ngẫu nhiên 1 quả banh từ 1 trong 2 hộp. Nếu banh được chọn có màu trắng, tử tù sẽ được thả tự do, nếu có màu đen, sẽ bị xử tử ngay lập tức. Tìm chiến thuật để xác suất sống là cao nhất.*

**Lời giải gợi ý:**

Đặt một banh trắng vào một hộp và toàn bộ vào hộp còn lại. Khi đó xác suất sống là $1/2 + 1/2 * 49/99 \approx 75\%$.

**Câu hỏi 13** *Stacy có 12 chiếc vớ trắng và 12 chiếc vớ đen trong tủ. Hỏi nếu không nhìn vào tủ, Stacy phải lấy ít nhất bao nhiêu chiếc vớ để có thể tạo thành một đôi cùng màu?*

**Lời giải gợi ý:**

Ba chiếc, vì vớ thông thường không phân biệt phải trái.

**Câu hỏi 14** *Có 1000 quả banh, mỗi quả ghi một con số khác nhau từ 1 đến 1000. Bạn được chọn ngẫu nhiên 2 quả banh. Nếu có người cá cược rằng nếu 2 con số đó là nguyên tố cùng nhau họ sẽ ăn 1 và không phải thì bạn sẽ ăn 2, bạn có chấp nhận cá cược để lấy lời hay không? Ví dụ nếu con số là 5 và 14 thì bạn mất 1 đồng, còn nếu đó là 5 và 25 thì bạn được 2 đồng.*

**Lời giải gợi ý:**

Có. Xác suất bất kỳ để 2 số trong $n$ số đầu tiên là nguyên tố cùng nhau là khoảng $6/\pi^2 \approx 61\%$, nên với tỉ lệ cược như vậy sẽ có lời.
Vì $n$ số đầu tiên sẽ có $n^2$ cặp số có thể, và với tỉ lệ cược 1:2, chỉ cần số cặp không nguyên tố cùng nhau $\geq n^2/3$ thì đã có lời. Ta có số cặp 2 số cùng chia hết cho 2 là $n^2/4$, cùng chia hết cho 3 là $n^2/9$ và cùng chia hết cho 6 (cùng chia hết cho cả 2 và 3) là $n^2/6^2 = 1/36$ do vậy số cặp cùng chia hết cho 2 hoặc cùng chia hết cho 3 là $n^2/4 + n^2/9 - n^2/36 = n^2/3$. Do vậy, chỉ cần thêm vào 1 cặp bất kỳ cùng chia hết với một số nguyên tố $p > 3$ thì ta có số cặp lớn hơn $n^2/3$.
Vậy nên chọn cược với tỉ lệ như trên.
Lời giải chi tiết hơn được Dirichlet đưa ra vào năm 1849 bạn đọc có thể xem chi tiết ở đây (https://primes.utm.edu/notes/relprime.html)

**Câu hỏi 15** *Có 3 con kiến, mỗi con ở một đỉnh của một tam giác. Bắt đầu mỗi con kiến bắt đầu di chuyển theo một chiều ngẫu nhiên và bò dọc theo các cạnh của tam giác với tốc độ di chuyển bằng nhau. Hỏi xác suất chúng không gặp nhau là bao nhiêu?*

**Lời giải gợi ý:**

Giữ 1 con kiến bất kỳ và xem xác suất của 2 con còn lại có cùng chiều với nó hay không. Xác xuất để cả 3 con không gặp nhau xảy ra khi chúng đi cùng chiều, nên là một phần tư.

**Câu hỏi 16** *Có một cây cọc được cắm ở trong hồ. Một nửa của cọc là nằm trong lớp bùn dưới đáy hồ, một phần ba của cọc nằm trong nước và phần nhô lên khỏi mặt hồ là 7 feet. Hỏi chiều cao của cây cọc.*

**Lời giải gợi ý:**

Phần nằm dưới hồ là 1/2 + 1/3 = 5/6 cọc, nên phần nhô lên do vậy là 1/6 của cọc, và từ đó suy ra chiều cao của cọc là 42 feet.

**Câu hỏi 17** *Làm sao để lấy đi 1 từ 19 để còn lại 20?*

**Lời giải gợi ý:**

Số La Mã. 19 = XIX, lấy đi 1 là XX = 20.

**Câu hỏi 18** *Nếu như bạn có một bánh pizza có độ dày bằng $a$ và bán kính bằng $z$ thì thể tích của bánh là bao nhiêu?*

**Lời giải gợi ý:**

pi.z.z.a

**Câu hỏi 19** *Vào lúc 3 giờ 15 thì góc giữa kim giờ và kim phút là bao nhiêu?*

**Lời giải gợi ý:**

Thoạt nhìn tưởng 0, nhưng tính ra là 7.5 độ.

**Câu hỏi 20** *Làm tròn gần nhất đến cm, có bao nhiêu đất trong một lỗ hình hộp chữ nhật kích thước* $3 \times 4 \times 5$ *mét?*

**Lời giải gợi ý:**

Không có đất, vì đây là một lỗ!

## Phần kết

Nếu như bạn vẫn còn đang tìm cách giải cho câu đố ở phần giới thiệu, thì bạn một lần nữa hãy thử nghĩ khác đi, thay vì tìm các xếp que diêm trên mặt phẳng, bạn hãy thử nghĩ thêm ở chiều không gian thứ 3. Vâng, đúng vậy, đó chính là một tứ diện đều, với 4 mặt là các tam giác đều bằng nhau và 6 cạnh tạo bởi 6 que diêm. Và liệu đó có phải là cách giải duy nhất? Không phải, ít nhất chúng tôi còn có 2 cách giải khác nữa, rất khác! Bạn có tìm ra không? Nếu không, dòng bên dưới này của chúng tôi sẽ cho bạn thêm lời giải. Hãy đọc chúng qua một ... cái gương.

Dùng 3 que đấy xếp thành số bốn, và 3 que sau xếp thành hình tam giác

Có 2 cách ở đây, viết số 4 dạng La Mã IV hoặc số 4 như thông thường

# SỬ DỤNG TỔNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH GIỚI HẠN DÃY SỐ

Nguyễn Tài Chung
(Trường THPT Chuyên Hùng Vương - Gia Lai)

## LỜI DẪN

Đây là phần tiếp theo và cũng là kết thúc của bài viết đã được đăng trên số 9 của tạp chí.

## 2.4. Lôgarit hóa để biến tích thành tổng

Sử dụng công thức $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, ta có thể biến tích thành tổng. Chú ý rằng để $\log_a x$ có nghĩa thì $0 < a \neq 1$ và $x > 0$. Khi lôgarit hóa ta thường chọn cơ số $e$ để việc tính toán đơn giản hơn.

Bài toán 12. *Tính*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{(n^2+1)(n^2+4)\cdots\left(n^2+(2n)^2\right)}}{n^4}.$$

Lời giải. Đặt $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{(n^2+1)(n^2+4)\cdots\left(n^2+(2n)^2\right)}}{n^4}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ Khi đó

$$\begin{aligned}
a_n &= \left[(n^2+1)(n^2+4)\cdots\left(n^2+(2n)^2\right)\right]^{\frac{1}{n}} n^{-4}\\
&= \left[n^{4n}\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)\cdots\left(1+\left(\frac{2n}{n}\right)^2\right)\right]^{\frac{1}{n}} n^{-4}\\
&= \left[\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)\cdots\left(1+\left(\frac{2n}{n}\right)^2\right)\right]^{\frac{1}{n}}\\
\ln a_n &= \ln\left[\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)\cdots\left(1+\left(\frac{2n}{n}\right)^2\right)\right]^{\frac{1}{n}}\\
&= \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)+\ln\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)+\cdots+\ln\left(1+\left(\frac{2n}{n}\right)^2\right)\right].
\end{aligned}$$

Như vậy $\ln a_n$ là tổng tích phân của hàm số $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$ trên đoạn $[0, 2]$ ứng với phép chia đều đoạn $[0, 2]$ thành $2n$ đoạn, điểm trung gian $\alpha_i$ là mút bên phải của đoạn $\left[\dfrac{i-1}{n}, \dfrac{i}{n}\right]$.

Do đó

$$\lim_{n\to+\infty}(\ln a_n) = \int_0^2 \ln(1 + x^2)dx.$$

Đặt

$$\begin{cases} u = \ln(1 + x^2) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2x}{1 + x^2} \\ v = x. \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \int_0^2 \ln(1 + x^2)dx &= x\ln(1 + x^2)\Big|_0^2 - 2\int_0^2 \frac{x^2 dx}{1 + x^2} = 2\ln 5 - 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right)dx \\ &= 2\ln 5 - 2\int_0^2 dx + 2\int_0^2 \frac{dx}{1 + x^2} = 2\ln 5 - 4 + 2\arctan 2. \end{aligned}$$

Do hàm số $e^x$ liên tục nên

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln a_n} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln a_n)} = e^{2\ln 5 - 4 + 2\arctan 2} \simeq 4,192.$$

Từ đó thu được kết quả của bài toán. □

Bài toán 13. *Tính* $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$, *với*

$$P_n = \left[\left(2 + \frac{3}{5n}\right)\left(2 + \frac{18}{5n}\right)\cdots\left(2 + \frac{15n - 12}{5n}\right)\right]^{\frac{3}{n}}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Lời giải. Ta có $P_n > 0$ và

$$\begin{aligned} \ln P_n &= \frac{3}{n}\left[\ln\left(2 + \frac{3}{5n}\right) + \ln\left(2 + \frac{18}{5n}\right) + \cdots + \ln\left(2 + \frac{15n - 12}{5n}\right)\right] \\ &= \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(2 + \frac{15i - 12}{5n}\right). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = \ln(2 + x)$ trên đoạn $[0, 3]$. Rõ ràng $f(x)$ liên tục trên $[0, 3]$ nên nó khả tích trên đoạn đó.

Xét phép phân hoạch đều đoạn $[0, 3]$ bởi các điểm chia

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{3 \cdot 1}{n},\ x_2 = \frac{3 \cdot 2}{n}, \ldots, x_{n-1} = \frac{3 \cdot (n-1)}{n},\ x_n = \frac{3 \cdot n}{n} = 3.$$

Khi đó $\Delta_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{3}{n}, \forall i = 1, 2, \ldots$ Xét $\alpha_i = \frac{4}{5}x_{i-1} + \frac{1}{5}x_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Ta có

$$\alpha_i = \frac{4}{5} \cdot \frac{3(i-1)}{n} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3i}{n} = \frac{15i - 12}{5n}, \ f(\alpha_i) = \ln\left(2 + \frac{15i - 12}{5n}\right).$$

Suy ra

$$\ln P_n = \left[\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(2 + \frac{15i - 12}{5n}\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i.$$

Đây chính là tổng tích phân của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0, 3]$. Theo định nghĩa tích phân ta có

$$\lim_{n\to+\infty} (\ln P_n) = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \ln(2 + x)dx.$$

Đặt

$$\begin{cases} u = \ln(2 + x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{2 + x} \\ v = x. \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \ln(2 + x)dx &= [x\ln(2 + x)]|_0^3 - \int_0^3 \frac{xdx}{2 + x} \\
&= 3\ln 5 - \int_0^3 \left(1 - \frac{2}{2 + x}\right)dx = 3\ln 5 - [x - 2\ln(2 + x)]|_0^3 \\
&= 3\ln 5 - [(3 - 2\ln 5) + 2\ln 2] = 5\ln 5 - 2\ln 2 - 3.
\end{aligned}$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\ln P_n} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} P_n} = e^{5\ln 5 - 2\ln 2 - 3}$. □

Bài toán 14. *Tính các giới hạn dưới đây*

$$a) \quad \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} (kn)^{\frac{1}{(n+k)\ln n}} \qquad\qquad b) \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}.$$

Hướng dẫn. $a)$ Đặt $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n} (kn)^{\frac{1}{(n+k)\ln n}}$, khi đó $u_n > 0$. Ta có

$$\begin{aligned}
\ln u_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln(kn)^{\frac{1}{(n+k)\ln n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(kn)}{(k+n)\ln n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(\frac{k}{n} \cdot n^2\right)}{(k+n)\ln n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\frac{k}{n}}{(k+n)\ln n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2\ln n}{(k+n)\ln n} = \alpha_n + \beta_n,
\end{aligned}$$

trong đó $\alpha_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln \dfrac{k}{n}}{(k+n)\ln n}$, $\beta_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2}{(k+n)}$. Ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k+n} = \lim_{n\to+\infty} \left( \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\dfrac{k}{n}+1} \right) = 2\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = 2\ln 2.$$

## 2.5. Sử dụng tổng tích phân kết hợp với nguyên lí kẹp

Nhiều khi giới hạn cần tính không phải là tổng tích phân của bất kì hàm số nào. Lúc đó ta cần sử dụng các bất đẳng thức để đánh giá tổng đã cho theo tổng tích phân của một hàm số nào đó, sau đó sử dụng nguyên lí kẹp để suy ra kết quả.

Định lý 1 (Nguyên lí kẹp). *Nếu ba dãy số $(x_n)$, $(y_n)$, $(z_n)$ thỏa mãn điều kiện*

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n, \forall n \geqslant n_0,$$

*và* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = L$ *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$.

Bài toán 15. *Giả sử $k$ là số nguyên dương, $\alpha$ là số thực bất kì. Hãy tìm giới hạn của dãy số $(a_n)$, với*

$$a_n = \frac{[1^k\cdot\alpha] + [2^k\cdot\alpha] + \cdots + [n^k\cdot\alpha]}{n^{k+1}}, \ \forall n = 1,2,\ldots$$

Hướng dẫn. Với mọi số thực $x$, ta có $x - 1 < [x] \leqslant x$, nên

$$\frac{\alpha\left(1^k + 2^k + \cdots + n^k\right)}{n^{k+1}} - \frac{1}{n^k} < a_n \leqslant \frac{\alpha\left(1^k + 2^k + \cdots + n^k\right)}{n^{k+1}}, \ \forall n = 1,2,\ldots \tag{1}$$

Tương tự như bài toán 2.5 ở phần trước, ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \int_0^1 x^k\,dx = \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_0^1 = \frac{1}{k+1}.$$

Vậy từ (1), sử dụng nguyên lí kẹp, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{\alpha}{k+1}$.

Bài toán 16. *Tính* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n+k^2}{n^3+k^3}$.

Lời giải. Đặt

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k^2}{n^3+k^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k^2}{n^2+\dfrac{k^3}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\dfrac{1}{n}+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\dfrac{k}{n}\right)^3}.$$

Xét $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$, với $f$ là hàm số $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^3}$. Khi đó

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} v_n &= \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{d(1+x^3)}{1+x^3}\\ &= \frac{1}{3}\ln(1+x^3)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\ln 2.\end{aligned}$$

Ta có

$$|u_n - v_n| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3} \leqslant \frac{1}{n},\ \forall n = 1,2,\ldots,$$

từ đây sử dụng nguyên lí kẹp ta được $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n - v_n| = 0$. Như vậy

$$\left|u_n - \frac{1}{3}\ln 2\right| \leqslant |u_n - v_n| + \left|v_n - \frac{1}{3}\ln 2\right|,\ \forall\, n = 1,2,\ldots$$

Từ đây sử dụng nguyên lí kẹp ta được $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{3}\ln 2$. □

Bài toán 17. *Tính*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{n}{n^2+1^2} + \sin\frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \sin\frac{n}{n^2+n^2}\right).$$

Lời giải. Ta đã chứng minh được

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x,\ \forall x \geqslant 0.$$

Do đó

$$\frac{n}{n^2+k^2} - \frac{n^3}{6(n^2+k^2)^3} \leqslant \sin\frac{n}{n^2+k^2} \leqslant \frac{n}{n^2+k^2},$$

suy ra

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{n^3}{6(n^2+k^2)^3} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{n}{n^2+k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}. \tag{2}$$

Ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right) = \int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Mặt khác
$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n^3}{6(n^2+k^2)^3} \leqslant \frac{n \cdot n^3}{6 \cdot n^6} = \frac{1}{6n^2}, \ \forall n = 1, 2, \ldots$$
Từ đây sử dụng nguyên lí kẹp ta được
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^3}{6(n^2+k^2)^3} = 0.$$

Như vậy từ (2) sử dụng nguyên lí kẹp ta được $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin \dfrac{n}{n^2+k^2} = \dfrac{\pi}{4}$. □

Bài toán 18. *Tính* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \sin \dfrac{\pi}{k}$.

Lời giải. Với $n = 1, 2, \ldots$, đặt $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \sin \dfrac{\pi}{k}$, $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{\pi}{k}$.

- Ta sẽ tính $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Ta có
$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\pi}{k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{i+n} \quad (\text{thay } k \text{ bởi } i+n) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{\frac{i}{n}+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right), \end{aligned}$$
với $f$ là hàm số $f(x) = \dfrac{\pi}{x+1}$. Chia đoạn $[0,1]$ bởi các điểm chia $x_i = \dfrac{i}{n}$, với $i = 0, 1, \ldots, n$, tức là chia đoạn $[0,1]$ thành $n$ đoạn đều nhau
$$x_0 = \frac{0}{n} = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \cdots < x_{n-1} = \frac{n-1}{n} < x_n = \frac{n}{n} = 1.$$
Chọn $\alpha_i = \dfrac{i}{n} \in [x_{i-1}, x_i], \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó tổng tích phân của hàm số $f(x)$ trên $[0,1]$ ứng với phép phân hoạch nói trên là $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\dfrac{i}{n}\right)$. Như vậy
$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} v_n &= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right] = \int_0^1 f(x)dx = \pi \int_0^1 \frac{dx}{x+1} \\ &= \pi \ln(x+1)\big|_0^1 = \pi \ln 2. \end{aligned}$$

- Ta sẽ chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n - v_n| = 0$. Ta chứng minh được

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x,\ \forall x \geqslant 0.$$

Vậy $-\frac{x^3}{6} \leqslant \sin x - x \leqslant 0,\ \forall x \geqslant 0$. Suy ra $|\sin x - x| \leqslant \frac{x^3}{6},\ \forall x \geqslant 0$. Như thế

$$\begin{aligned}
|u_n - v_n| &= \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi}{i+n} - \frac{\pi}{i+n}\right)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|\sin\frac{\pi}{i+n} - \frac{\pi}{i+n}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\pi}{i+n}\right)^3 \leqslant \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3 \\
&= \frac{n\cdot\pi^3}{6n^3} = \frac{\pi^3}{6n^2},\ n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Từ đây sử dụng nguyên lí kẹp ta được $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n - v_n| = 0$.

- Ta có $|u_n - \pi\ln 2| \leqslant |u_n - v_n| + |v_n - \pi\ln 2|,\ \forall n = 1, 2, \ldots$ Từ đây sử dụng nguyên lí kẹp ta được $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pi\ln 2$.

Vậy $\pi\ln 2$ là kết quả cần tìm. □

**Bài toán 19.** *Tính* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{n+1}} + e^{\frac{1}{n+2}} + \cdots + e^{\frac{1}{n+n}} - n\right)$.

**Lời giải.** Trước hết, ta chứng minh

$$0 \leqslant e^x - 1 - x \leqslant \frac{x^2}{2}e^x,\ \forall x > 0. \tag{3}$$

- Xét hàm số liên tục $h(x) = e^x - (1+x), \forall x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}
&h'(x) = e^x - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}.\\
&h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.
\end{aligned}$$

Lập bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

ta suy ra $h(x) \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ hay $e^x \geqslant 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}$.

- Tiếp theo, ta chứng minh

$$e^x - 1 - x \leqslant \frac{x^2}{2}e^x,\ \forall x > 0,$$

$$\Leftrightarrow e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}e^x \leqslant 0,\ \forall x > 0. \tag{4}$$

Xét hàm số liên tục $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}e^x,\ \forall x > 0$. Với $x > 0$, ta có

$$f'(x) = e^x - 1 - \left(xe^x + \frac{x^2}{2}e^x\right),$$
$$f''(x) = e^x - \left(e^x + xe^x + xe^x + \frac{x^2}{2}e^x\right) = -\left(2xe^x + \frac{x^2}{2}e^x\right) < 0.$$

Suy ra hàm số $f'(x)$ nghịch biến trên $(0, +\infty)$, vì thế nên

$$f'(x) < \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0,\ \forall x \in (0, +\infty).$$

Như vậy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(0, +\infty)$. Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

Từ bảng biến thiên

| $x$ | $0 \qquad +\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $0 \quad -$ |
| $f(x)$ | $0 \searrow$ |

ta thấy rằng $f(x) < 0,\ \forall x \in (0, +\infty)$. Như vậy (4) đúng, ta có điều phải chứng minh.

Với $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $u_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}}\right) - n$. Do (3) nên

$$\begin{aligned}\left|u_n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\right| &= \sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n+k}} - 1 - \frac{1}{n+k}\right)\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{1}{n+k}}}{2(n+k)^2} \leqslant \frac{ne^{\frac{1}{n+1}}}{2(n+1)^2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.\end{aligned} \tag{5}$$

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{ne^{\frac{1}{n+1}}}{2(n+1)^2} = 0$ và

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1\frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)|_0^1 = \ln 2.$$

Như vậy từ (5), sử dụng nguyên lí kẹp suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$. □

Bài toán 20. *Cho trước $\alpha > 0$. Hãy tính*

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k^\alpha}.$$

Lời giải. Ta sẽ tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k^\alpha}$ theo các trường hợp có thể có của $\alpha > 0$.

- Nếu $\alpha = 1$. Sử dụng là bài toán 25, ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k^\alpha} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \ln 2.$$

- Nếu $0 < \alpha < 1$. Do hàm số $g(k) = k^\alpha$ đồng biến trên $(0, +\infty)$ nên

$$\frac{1}{n+1^\alpha} > \frac{1}{n+2^\alpha} > \cdots > \frac{1}{n+n^\alpha},$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n+k^\alpha} < \frac{1}{n+1^\alpha} + \frac{1}{n+2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n+n^\alpha} < \frac{n}{n+1^\alpha},$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n+k^\alpha} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k^\alpha} < \frac{n}{n+1},\ \forall n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Do

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+k^\alpha} = 1 = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1},$$

nên từ (6), sử dụng nguyên lí kẹp, ta được $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k^\alpha} = 1.$

- Nếu $\alpha > 1$. Khi đó $n + k^\alpha \geqslant 2\sqrt{n\cdot k^\alpha} = 2\sqrt{n}\cdot k^{\frac{\alpha}{2}}$, cho nên

$$0 < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k^\alpha} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1^{\frac{\alpha}{2}}} + \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{2}}} + \cdots + \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right). \tag{7}$$

Mà dãy số $\left(\sqrt{n}\right)_n$ tăng nghiêm ngặt đến dương vô cực nên sử dụng định lí Stolz, ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{1^{\frac{\alpha}{2}}} + \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{2}}} + \cdots + \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{n^{\frac{\alpha-1}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}} = 0.$$

Như vậy, từ (7), sử dụng nguyên lí kẹp, ta được $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k^\alpha} = 0.$

Từ đó dẫn đến kết luận

- Nếu $0 < \alpha < 1$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k^{\alpha}} = 1$.
- Nếu $\alpha = 1$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k^{\alpha}} = \ln 2$.
- Nếu $\alpha > 1$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k^{\alpha}} = 0$.

Bài toán được giải quyết xong. □

Nhận xét. Định lí Stolz được phát biểu như sau

Định lý 2 (Định lý Stolz). *Cho $(x_n)$ và $(y_n)$ là hai dãy thỏa mãn*

*a)* *Dãy $(y_n)$ tăng thực sự tới $+\infty$.*

*b)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = c \in \mathbb{R}$.

*Khi đó* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = c$.

## 2.6. Các bài toán ôn luyện tổng hợp

Bài toán 21 (Học viện kỹ thuật mật mã - 1999). *Tìm* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ *biết*

$$S_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}.$$

Hướng dẫn. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

Bài toán 22. *Cho* $S_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\left(1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}\right)$. *Tìm* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Hướng dẫn. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x} = \frac{2}{3}$.

Bài toán 23. *Tính các giới hạn sau*

*a)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$.

$b)\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\left[1+\cos\dfrac{\pi}{n}+\cos\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\cos\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right].$

$c)\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1^2}{2^3+n^3}+\dfrac{2^2}{4^3+n^3}+\cdots+\dfrac{n^2}{(2n)^3+n^3}\right).$

$d)\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\dfrac{1+n}{n}\right)\left(\dfrac{2+n}{n}\right)\left(\dfrac{3+n}{n}\right)\cdots\left(\dfrac{2n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}.$

$e)\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdots\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right]^{\frac{1}{n}}.$

$f)\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^1\left(1+\dfrac{4}{n^2}\right)^2\cdots\left(1+\dfrac{(n-1)^2}{n^2}\right)^{n-1}\cdot 2^n\right]^{\frac{1}{n^2}}.$

$g)\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\pi^2}{n^2}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\cos^2\frac{\pi}{n}}+\dfrac{2\sin\frac{2\pi}{n}}{1+\cos^2\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\dfrac{n\sin\frac{n\pi}{n}}{1+\cos^2\frac{n\pi}{n}}\right].$

Đáp số. $a)\ \dfrac{\pi}{6},\quad b)\ 0,\quad c)\ \dfrac{1}{12}\ln 3,\quad d)\ 2\ln 2-1,\quad e)\ \dfrac{1}{2},\quad f)\ \dfrac{2}{\sqrt{e}},\quad g)\ \dfrac{\pi^2}{4}.$

Bài toán 24. *Tính* $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}-\dfrac{1}{k+1}\right),\ k\in\mathbb{N}^*.$

Lời giải 1. Dễ thấy hàm số $f(x)=x^k$ có đạo hàm khả tích và bị chặn trên $[0,1]$. Khi đó

$$S_n=\frac{1-0}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(0+i\frac{1-0}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^k dx=\left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_0^1=\frac{1}{k+1}.$$

Áp dụng bài toán 15, ta có

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}-\frac{1}{k+1}\right)=\lim_{n\to+\infty} n\left(S_n-\int_0^1 f(x)dx\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[f(1)-f(0)\right]=\frac{1}{2}.$$

Từ đó thu được kết của bài toán. □

Lời giải 2. Ta có

$$\frac{1}{n^k}\left(1^k+2^k+\cdots+n^k\right)-\frac{n}{k+1}=\frac{(k+1)\left(1^k+2^k+\cdots+n^k\right)-n^{k+1}}{(k+1)\,n^k}.$$

Xét hai dãy số $(x_n)$, $(y_n)$ như sau

$$x_n=(k+1)\left(1^k+2^k+\cdots+n^k\right)-n^{k+1},\ \ y_n=(k+1)\,n^k.$$

Khi đó dãy $(y_n)$ tăng thực sự và $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=+\infty$. Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k&=\lim_{n\to+\infty}\left[C_k^0+C_k^1.\frac{1}{n}+C_k^2.\frac{1}{n^2}+\cdots+C_k^k.\frac{1}{n^k}\right]\\&=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right).\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}-1\right]&=\lim_{n\to+\infty}\left[C_{k+1}^1\cdot\frac{1}{n}+C_{k+1}^2\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+C_{k+1}^{k+1}\cdot\frac{1}{n^{k+1}}\right]\\&=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{k+1}{n}+\frac{k(k+1)}{2n^2}\right].\end{aligned}$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{(k+1)\,(n+1)^k-(n+1)^{k+1}+n^{k+1}}{(k+1)\left[(n+1)^k-n^k\right]}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{(k+1)\,n^k\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-n^{k+1}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}-1\right]}{(k+1)\,n^k\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1\right]}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{(k+1)\,n^k\left(1+\frac{k}{n}\right)-n^{k+1}\left[\frac{k+1}{n}+\frac{k(k+1)}{2n^2}\right]}{(k+1)\,n^k\cdot\frac{k}{n}}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{(k+1)\,n\left(1+\frac{k}{n}\right)-n^2\left[\frac{k+1}{n}+\frac{k(k+1)}{2n^2}\right]}{(k+1)\,k}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{(k+1)k-\frac{(k+1)k}{2}}{(k+1)\,k}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Từ đó cũng thu được kết quả như trên. □

Nhận xét. Ngoài ra ta có thể làm sơ cấp hơn như sau

$$\begin{aligned}(k+1)(n+1)^k &= (k+1)\left[C_k^0 n^k + C_k^1 n^{k-1} + C_k^2 n^{k-2} + \cdots + C_k^k 1\right] \\ &= (k+1)\left[n^k + \frac{k}{1} n^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} n^{k-2} + \cdots + 1\right].\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}(n+1)^{k+1} - n^{k+1} &= C_{k+1}^1 n^k + C_{k+1}^2 n^{k-1} + \cdots + C_{k+1}^{k+1} 1 \\ &= \frac{k+1}{1} n^k + \frac{(k+1)k}{2} n^{k-1} + \cdots + 1.\end{aligned}$$

Suy ra

$$(k+1)(n+1)^k - \left[(n+1)^{k+1} - n^{k+1}\right] = \frac{(k+1)k}{2} n^{k-1} + \cdots \tag{8}$$

Mặt khác

$$(k+1)\left[(n+1)^k - n^k\right] = (k+1)\left[k.n^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} n^{k-2} + \cdots + 1\right] \tag{9}$$

Từ (8) và (9) suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(k+1)k}{2} n^{k-1} + \cdots}{(k+1)\left[k.n^{k-1} + \dfrac{k(k-1)}{2} n^{k-2} + \cdots + 1\right]} = \frac{1}{2}.$$

Bài toán 25. *Tính các giới hạn sau*

$a)$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$.

$b)$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2n+3} + \cdots + \frac{2}{4n-1}\right)$.

$c)$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(\ln 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \cdots - \frac{1}{2n}\right)$.

$d)$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\ln 2 - \frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2n+3} - \cdots - \frac{2}{4n-1}\right)$.

Lời giải. $a)$ Ta có $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, với $f$ là hàm số

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Chia đoạn [0, 1] bởi các điểm chia $x_i = \frac{i}{n}, i = 0, 1, \ldots, n$ , tức là chia đoạn [0, 1] thành $n$ đoạn đều nhau

$$x_0 = \frac{0}{n} = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \cdots < x_{n-1} = \frac{n-1}{n} < x_n = \frac{n}{n} = 1.$$

Chọn $\alpha_i = \frac{i}{n} \in [x_{i-1}, x_i], \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó tổng tích phân của hàm số $f(x)$ trên [0, 1] ứng với phép phân hoạch nói trên là $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Như vậy

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = (\ln(1+x))\big|_0^1 = \ln 2.$$

$b)$ Với $n = 1, 2, \ldots,$ ta có

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2n+2i-1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{2i-1}{2n}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right).$$

Do $\frac{2i-1}{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{i-1}{n} + \frac{i}{n}\right)$ là trung điểm của đoạn $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ với $i = 1, 2, \ldots, n$ cho nên $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)$, là tổng tích phân của hàm số $f(x)$ trên đoạn [0, 1] ứng với phép phân hoạch đều đoạn [0, 1] bởi các điểm chia $x_i = \frac{i}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ và chọn $\alpha_i = \frac{2i-1}{2n}$ là trung điểm của đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ , $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Như vậy

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2n+2i-1} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right) = \int_0^1 f(x)dx = \ln 2.$$

$c)$ Ta có

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\ln 2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\right)$$
$$= -\frac{f(1)-f(0)}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

$d)$ Ta có

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\ln 2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2n+2i-1}\right) = \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right)$$
$$= \frac{f'(1)-f'(0)}{24} = \frac{1}{24}\left(-\frac{1}{4}+1\right) = \frac{3}{24.4} = \frac{1}{32}.$$

Lời giải hoàn tất. □

Nhận xét. Một lời giải khác cho ý a) của bài toán. Ta có

$$\frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Do đó

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} < \ln\frac{n}{n-1} + \ln\frac{n+1}{n} + \cdots + \ln\frac{2n}{2n-1} = \ln\frac{2n}{n-1},$$
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > \ln\frac{n+1}{n} + \ln\frac{n+2}{n+1} + \cdots + \ln\frac{2n+1}{2n} = \ln\frac{2n+1}{n}.$$

Vậy

$$\ln\frac{2n+1}{n} < x_n < \ln\frac{2n}{n-1}, \forall n = 2, 3, \ldots \tag{10}$$

Vì hàm số $f(x) = \ln x$ liên tục trên khoảng $(0, +\infty)$ nên

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\ln\frac{2n+1}{n}\right) = \ln\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n}\right) = \ln 2, \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\ln\frac{2n}{n-1}\right) = \ln 2.$$

Vậy từ (10) sử dụng nguyên lý kẹp suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ln 2$.

Bài toán 26. *Cho hai số nguyên dương $\alpha$, $\beta$. Tính* $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{k^\alpha}{n^\beta}\right)$.

Lời giải. Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{k^\alpha}{n^\beta} = 0$, mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{k^\alpha}{n^\beta}\right)}{\dfrac{k^\alpha}{n^\beta}} = 1$. Do đó

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\min_{k=1,2,\ldots,n}\frac{\ln\left(1+\frac{k^\alpha}{n^\beta}\right)}{\frac{k^\alpha}{n^\beta}}\right) = 1, \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\max_{k=1,2,\ldots,n}\frac{\ln\left(1+\frac{k^\alpha}{n^\beta}\right)}{\frac{k^\alpha}{n^\beta}}\right) = 1. \tag{11}$$

Với $n = 1, 2, \ldots,$ đặt $x_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{k^\alpha}{n^\beta}\right)$. Khi đó

$$\ln x_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^\alpha}{n^\beta}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(1+\frac{k^\alpha}{n^\beta}\right)}{\frac{k^\alpha}{n^\beta}}\cdot\frac{k^\alpha}{n^\beta}.$$

Suy ra

$$\min_{k=1,2,\ldots,n}\frac{\ln\left(1+\frac{k^\alpha}{n^\beta}\right)}{\frac{k^\alpha}{n^\beta}}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^\alpha}{n^\beta} \leqslant \ln x_n \leqslant \max_{k=1,2,\ldots,n}\frac{\ln\left(1+\frac{k^\alpha}{n^\beta}\right)}{\frac{k^\alpha}{n^\beta}}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^\alpha}{n^\beta}. \tag{12}$$

- Nếu $\alpha + 1 = \beta$. Khi đó

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^\alpha}{n^\beta} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha = \int_0^1 x^\alpha dx = \left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1} > 0. \tag{13}$$

Từ (11), (12), (13) sử dụng nguyên lí kẹp ta được

$$\lim_{n\to+\infty}(\ln x_n) = \frac{1}{\alpha+1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln x_n} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln x_n)} = e^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

- Nếu $\alpha + 1 < \beta$. Khi đó

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^\alpha}{n^\beta} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\beta-(\alpha+1)}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha = 0\int_0^1 x^\alpha dx = 0. \tag{14}$$

Từ (11), (12), (14), sử dụng nguyên lí kẹp ta được

$$\lim_{n\to+\infty}(\ln x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = e^0 = 1.$$

- Nếu $\alpha + 1 > \beta$. Khi đó

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^\alpha}{n^\beta} = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha+1-\beta}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha\right) = +\infty. \tag{15}$$

Từ (11), (12), (15), ta được

$$\lim_{n\to+\infty}(\ln x_n) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$$

Kết luận $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k^\alpha}{n^\beta}\right) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\alpha+1}} & \text{khi } \alpha+1=\beta,\\ 1 & \text{khi } \alpha+1<\beta,\\ +\infty & \text{khi } \alpha+1>\beta.\end{cases}$ □

Nhận xét. Một trường hợp đặc biệt của bài toán này là đề đề nghị thi Olympic 30/04/2006.

*Cho dãy số $(x_n)$ xác định bởi*

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n^2}\right), \forall n = 1, 2, \dots$$

*Hãy tìm* $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln x_n)$.

Đối với trường hợp riêng này có thể giải quyết nhẹ nhàng hơn như sau. Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x, \forall x \geqslant 0. \tag{16}$$

Xét $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}, \forall x \geqslant 0$ và $g(x) = x - \ln(1+x), \forall x \geqslant 0$. Ta có với mọi $x \geqslant 0$ thì

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geqslant 0, g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geqslant 0$$

(dấu bằng chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên $[0, +\infty)$). Do đó $f(x)$ và $g(x)$ là những hàm số tăng trên nữa khoảng $[0, +\infty)$. Do đó

$$f(x) \geqslant f(0) = 0, \forall x \in [0, +\infty), \; g(x) \geqslant g(0) = 0, \forall x \in [0, +\infty).$$

Bởi vậy (16) được chứng minh. Bây giờ ta tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln x_n)$. Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

$$\ln x_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

Theo (16) ta có

$$\frac{i}{n^2} - \frac{i^2}{2n^4} \leqslant \ln\left(1 + \frac{i}{n^2}\right) \leqslant \frac{i}{n^2}, \forall n = 1, 2, \ldots, \; \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Suy ra với mọi $n = 1, 2, \ldots,$ ta có

$$\frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n) - \frac{1}{2n^4}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) \leqslant \ln x_n \leqslant \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n). \tag{17}$$

Mà $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \;\; 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ nên từ (17) ta có

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} \leqslant \ln x_n \leqslant \frac{n(n+1)}{2n^2}, \forall n = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

Vì

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n(n+1)}{2n^2}\right] = \frac{1}{2},$$

nên từ (18) sử dụng nguyên lý kẹp ta suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln x_n) = \frac{1}{2}$.

Bài toán 27. *Cho số thực $\alpha$ và số nguyên $p > 1$. Tính giới hạn sau*

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{n^p + (\alpha - 1)k^{p-1}}{n^p - k^{p-1}}.$$

Lời giải. Với $n = 1, 2, \ldots,$ đặt $x_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\frac{n^p + (\alpha - 1)k^{p-1}}{n^p - k^{p-1}}$. Khi đó

$$\ln x_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n^p + (\alpha - 1)k^{p-1}}{n^p - k^{p-1}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{\alpha k^{p-1}}{n^p - k^{p-1}}\right).$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&\min_{k=1,2,\dots,n}\left(\frac{\ln\left(1+\dfrac{\alpha k^{p-1}}{n^p-k^{p-1}}\right)}{\dfrac{\alpha k^{p-1}}{n^p-k^{p-1}}}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha k^{p-1}}{n^p-k^{p-1}} \leqslant \ln x_n\\
&\leqslant \max_{k=1,2,\dots,n}\left(\frac{\ln\left(1+\dfrac{\alpha k^{p-1}}{n^p-k^{p-1}}\right)}{\dfrac{\alpha k^{p-1}}{n^p-k^{p-1}}}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha k^{p-1}}{n^p-k^{p-1}}, \forall n=1,2,\dots
\end{aligned} \tag{19}$$

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha k^{p-1}}{n^p-k^{p-1}}=0$, mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ nên

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\alpha k^{p-1}}{n^p-k^{p-1}}\right)}{\dfrac{\alpha k^{p-1}}{n^p-k^{p-1}}}=1.$$

Tiếp theo ta tính giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha k^{p-1}}{n^p-k^{p-1}}$. Do $k\in\{1,2,\dots,n\}$ nên

$$n^p-n^{p-1}\leqslant n^p-k^{p-1}\leqslant n^p.$$

Vì thế

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{p-1}}{n^p}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{p-1}}{n^p-k^{p-1}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{p-1}}{n^p-n^{p-1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{p-1}}{n^{p-1}(n-1)}\\
&\Rightarrow\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{p-1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{p-1}}{n^p-k^{p-1}}\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{p-1}\right)\cdot\frac{n}{n-1}
\end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{p-1}=\int_0^1 x^{p-1}dx=\left.\frac{x^p}{p}\right|_0^1=\frac{1}{p},\\
&\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{p-1}\right)\cdot\frac{n}{n-1}\right]=\frac{1}{p},
\end{aligned} \tag{20}$$

nên từ (20) cho $n\to+\infty$, ta được

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{p-1}}{n^p-k^{p-1}}=\frac{1}{p}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha k^{p-1}}{n^p-k^{p-1}}=\frac{\alpha}{p}.$$

Như vậy, từ (19) sử dụng nguyên lí kẹp ta được

$$\lim_{n\to+\infty}(\ln x_n)=\frac{\alpha}{p}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}e^{\ln x_n}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln x_n)}=e^{\frac{\alpha}{p}}.$$

Từ đó thu được kết quả của bài toán. □

Bài toán 28. *Cho các số nguyên dương $k, m$ và cho đa thức*

$$P(x) = a_0x^{m+1} + a_1x^m + a_2x^{m-1} + \cdots + a_mx, \;\; a_0 \neq 0.$$

*Lập dãy số* $\left\{v_n = \sum\limits_{j=0}^{kn} P\left(\dfrac{1}{n+j}\right), n = 1, 2, \ldots\right\}$. *Hãy tìm* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Lời giải. Ta có

$$v_n = P\left(\frac{1}{n}\right) + P\left(\frac{1}{n+1}\right) + P\left(\frac{1}{n+2}\right) + \cdots + P\left(\frac{1}{n+kn}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mà $P(x) = a_0x^{m+1} + a_1x^m + a_2x^{m-1} + \cdots + a_mx, \;\; a_0 \neq 0$ nên

$$P\left(\frac{1}{n+j}\right) = a_0\left(\frac{1}{n+j}\right)^{m+1} + a_1\left(\frac{1}{n+j}\right)^m + \cdots + a_m\left(\frac{1}{n+j}\right).$$

Do đó

$$\begin{aligned}
v_n &= P\left(\frac{1}{n}\right) + P\left(\frac{1}{n+1}\right) + P\left(\frac{1}{n+2}\right) + \cdots + P\left(\frac{1}{n+kn}\right)\\
&= \left[a_0\left(\frac{1}{n}\right)^{m+1} + a_1\left(\frac{1}{n}\right)^m + \cdots + a_m\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\
&+ \left[a_0\left(\frac{1}{n+1}\right)^{m+1} + a_1\left(\frac{1}{n+1}\right)^m + \cdots + a_m\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]\\
&+ \ldots\\
&+ \left[a_0\left(\frac{1}{n+kn}\right)^{m+1} + a_1\left(\frac{1}{n+kn}\right)^m + \cdots + a_m\left(\frac{1}{n+kn}\right)\right]\\
&= a_0\sum_{j=0}^{kn}\left(\frac{1}{n+j}\right)^{m+1} + a_1\sum_{j=0}^{kn}\left(\frac{1}{n+j}\right)^m + \cdots + a_m\sum_{j=0}^{kn}\left(\frac{1}{n+j}\right).
\end{aligned} \tag{21}$$

• Với $i \geqslant 2$ ta có

$$0 \leqslant \sum_{j=0}^{kn}\left(\frac{1}{n+j}\right)^i = \frac{1}{n^i} + \frac{1}{(n+1)^i} + \cdots + \frac{1}{(n+kn)^i} \leqslant \frac{kn+1}{n^i}.$$

Mà $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{kn+1}{n^i} = 0$ nên theo nguyên lý kẹp suy ra

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{kn}\left(\frac{1}{n+j}\right)^i = 0. \tag{22}$$

• Với $i = 1$ ta có

$$\sum_{j=0}^{kn}\left(\frac{1}{n+j}\right)^i = \sum_{j=0}^{kn}\left(\frac{1}{n+j}\right) = \frac{1}{n} + \sum_{j=1}^{kn}\left(\frac{1}{n+j}\right)$$

$$= \frac{1}{n} + \sum_{j=1}^{kn} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{j}{n}} = \frac{1}{n} + \sum_{j=1}^{kn} \frac{1}{n} f\left(\frac{j}{n}\right) \text{ (với } f(x) = \frac{1}{1+x}\text{)}$$

Dễ thấy $\sum_{j=1}^{kn} \frac{1}{n} f\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{kn} f\left(\frac{j}{n}\right)$ là tổng tích phân của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0, k]$ với các điểm chia $x_i = \frac{i}{n}$ $(i = 0, 1, 2, \dots, kn)$ và cách chọn điểm $\alpha_g = \frac{g}{n}$ $(g = 1, 2, \dots, kn)$. Thành thử

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{kn} f\left(\frac{j}{n}\right) = \int_0^k f(x)dx = \int_0^k \frac{1}{1+x}dx = \ln(1+x)\Big|_0^k = \ln(1+k).$$

Do đó

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{kn} \left(\frac{1}{n+j}\right) &= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n} + \sum_{j=1}^{kn} \left(\frac{1}{n+j}\right)\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{kn} \left(\frac{1}{n+j}\right) = \ln(1+k). \end{aligned} \tag{23}$$

Từ (21), (22), (23) suy ra $\lim_{n\to+\infty} v_n = a_m \cdot \ln(1+k)$. □

**Bài toán 29.** *Cho $\alpha, \beta$ là các số dương. Hãy tính giới hạn sau*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+\alpha}{n^2+kn+\beta}.$$

**Lời giải.** Đặt $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+\alpha}{n^2+kn+\beta} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+\alpha}{n+k+\frac{\beta}{n}}$. Khi đó

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n} + \frac{\alpha}{n}}{1 + \frac{k}{n} + \frac{\beta}{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n} + \frac{\beta}{n^2}\right) + \frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n^2}}{1 + \left(\frac{k}{n} + \frac{\beta}{n^2}\right)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n} + \frac{\beta}{n^2}}{1 + \frac{k}{n} + \frac{\beta}{n^2}} + \frac{\alpha n - \beta}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+kn+\beta}. \end{aligned} \tag{24}$$

Với $n > \left[\frac{\beta}{\alpha}\right] + 2$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, ta có

$$\frac{1}{2n^2+\beta} \leqslant \frac{1}{n^2+kn+\beta} \leqslant \frac{1}{n^2+n+\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n^2+\beta} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+kn+\beta} \leqslant \frac{1}{n^2+n+\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha n-\beta}{2n^2+\beta} \leqslant \frac{\alpha n-\beta}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+kn+\beta} \leqslant \frac{\alpha n-\beta}{n^2+n+\beta}.$$

Từ đây sử dụng nguyên lí kẹp, ta được

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha n-\beta}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+kn+\beta} = 0. \tag{25}$$

Với $n > [\beta]+1 > \beta, k \in \{0,1,\dots,n-1\}$, ta có

$$\frac{k}{n} \leqslant \frac{k}{n}+\frac{\beta}{n^2} \leqslant \frac{k+1}{n}.$$

Do đó $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}+\frac{\beta}{n^2}}{1+\frac{k}{n}+\frac{\beta}{n^2}}$ là tổng tích phân của hàm số $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ứng với phép phân hoạch đều đoạn $[0,1]$ bởi các điểm chia $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$ và các điểm trung gian $\alpha_k \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ là $\alpha_k = \frac{k}{n}+\frac{\beta}{n^2}$ $(k \in \{0,1,\dots,n-1\})$.

Do đó

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}+\frac{\beta}{n^2}}{1+\frac{k}{n}+\frac{\beta}{n^2}} &= \int_0^1\frac{x\,dx}{1+x} = \int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx \\ &= (x-\ln(1+x))\big|_0^1 = 1-\ln 2.\end{aligned} \tag{26}$$

Từ (24), (25), (26) suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+\alpha}{n^2+kn+\beta} = 1-\ln 2.$ □

Bài toán 30. *Cho $a, b$ là các số không âm. Hãy tính giới hạn sau*

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k+b+\sqrt{n^2+kn+a}}.$$

Lời giải. Do $a \geqslant 0, b \geqslant 0$ nên

$$n+k+b+\sqrt{n^2+kn+a} \geqslant n+k+\sqrt{n^2+kn}$$

$$\Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k+b+\sqrt{n^2+kn+a}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}+\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}+\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x}}.$$

Đặt $p = [b]$. Khi đó với $n \geqslant \dfrac{a}{p+1-b},\ k = 1, 2, \ldots, n-p-1$, ta có

$$\frac{k+p}{n} \leqslant \frac{k}{n} + \frac{b}{n} + \frac{a}{n^2} \leqslant \frac{k+p+1}{n}.$$

Ta biến đổi

$$\begin{aligned}
x_n &= \sum_{k=1}^{n-p-1} \frac{1}{n+k+b+\sqrt{n^2+kn+a}} + \sum_{k=n-p}^{n} \frac{1}{n+k+b+\sqrt{n^2+kn+a}} \\
&= \left( \sum_{k=1}^{n-p-1} \frac{1}{n+k+b+\sqrt{n^2+kn+a}} + \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{n+k+\sqrt{n^2+kn}} \right) \\
&- \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{n+k+\sqrt{n^2+kn}} + \sum_{k=n-p}^{n} \frac{1}{n+k+b+\sqrt{n^2+kn+a}} \\
&= S_1 - S_2 + S_3.
\end{aligned}$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{n+k+\sqrt{n^2+kn}} \leqslant \frac{p+1}{n}, \\
S_3 &= \sum_{k=n-p}^{n} \frac{1}{n+k+b+\sqrt{n^2+kn+a}} \leqslant \frac{p+1}{n}.
\end{aligned}$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} S_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} S_3 = 0$. Do

$$n+k+b+\sqrt{n^2+kn+a} \leqslant n+k+b+\frac{a}{n}+\sqrt{n^2+kn+bn+a}$$

nên

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k=1}^{n-p-1} \frac{1}{n+k+b+\sqrt{n^2+kn+a}} + \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{n+k+\sqrt{n^2+kn}} \\
&\geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}+\frac{b}{n}+\frac{a}{n^2}+\sqrt{1+\frac{k}{n}+\frac{b}{n}+\frac{a}{n^2}}} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}+\sqrt{1+\frac{k}{n}}} \\
&= \frac{1}{n}\left( \sum_{k=1}^{n-p-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}+\frac{b}{n}+\frac{a}{n^2}+\sqrt{1+\frac{k}{n}+\frac{b}{n}+\frac{a}{n^2}}} + \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}+\sqrt{1+\frac{k}{n}}} \right)
\end{aligned}$$

$$= S_4.$$

Ta có $S_4$ là tổng tích phân của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1+x+\sqrt{1+x}}$ trên đoạn $[0, 1]$ ứng với phép phân hoạch đều đoạn $[0, 1]$ bởi các điểm chia $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$ và chọn các điểm trung gian là

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}, \frac{1+b}{n} + \frac{a}{n^2}, \frac{2+b}{n} + \frac{a}{n^2}, \ldots, \frac{n-p-1+b}{n} + \frac{a}{n^2}.$$

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} S_1 \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} S_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x}}$. Suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} S_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x}} = 2\ln\frac{1+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = 2\ln\frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $2\ln\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ là kết quả cần tìm. □

Nhận xét. Để có bất đẳng thức

$$\frac{k+p}{n} \leqslant \frac{k}{n} + \frac{b}{n} + \frac{a}{n^2} \leqslant \frac{k+p+1}{n},$$

ta cần có

$$\frac{p}{n} \leqslant \frac{b}{n} + \frac{a}{n^2} \leqslant \frac{p+1}{n} \Leftrightarrow pn \leqslant a + bn \leqslant (p+1)n$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-p)n \geqslant -a \\ (b-p-1)n \leqslant -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geqslant \dfrac{-a}{b-p} \\ n \geqslant \dfrac{-a}{b-p-1} \end{cases} \Leftrightarrow n \geqslant \frac{a}{p+1-b}.$$

Bài toán 31. *Cho $a, b, c$ là các số dương, Hãy tính giới hạn sau*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+a}{\sqrt{n^2+kn+b}\cdot\sqrt{n^2+kn+c}}.$$

Lời giải. Theo bài toán 29, ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+\alpha}{n^2+kn+\beta} = 1 - \ln 2 \ \ (\alpha > 0,\ \beta > 0)\,. \tag{27}$$

Giả sử $0 < b \leqslant c$ (trường hợp $0 < c < b$ lập luận tương tự), khi đó

$$\frac{k+a}{n^2+kn+c} \leqslant \frac{k+a}{\sqrt{n^2+kn+b}\cdot\sqrt{n^2+kn+c}} \leqslant \frac{k+a}{n^2+kn+b}.$$

Suy ra

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+a}{n^2+kn+c} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k+a}{\sqrt{n^2+kn+b}\cdot\sqrt{n^2+kn+c}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k+a}{n^2+kn+b}.$$

Từ đây và (27), sử dụng nguyên lí kẹp, ta được

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+a}{\sqrt{n^2+kn+b}\cdot\sqrt{n^2+kn+c}}=1-\ln 2.$$

Từ đó thu được kết quả của bài toán. □

Bài toán 32. *Cho $a, b$ là các số dương, $\alpha$ là số nguyên dương. Hãy tính giới hạn sau*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{2\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+ak+b\right)^{\alpha}\right).$$

Lời giải. Đặt $u_n=\dfrac{1}{n^{2\alpha+1}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+ak+b\right)^{\alpha}$, $v_n=\dfrac{1}{n^{2\alpha+1}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^{2\alpha}$. Khi đó

$$v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2\alpha}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}v_n=\int_0^1 x^{2\alpha}dx=\left.\frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\right|_0^1=\frac{1}{2\alpha+1}.$$

Do hàm số $t^{2\alpha}$ đồng biến trên $(0,+\infty)$ nên $v_n\leqslant u_n$, $\forall n=1,2,\ldots$ Cho $c\in\mathbb{N}^*$ cố định, với mọi $k\in\mathbb{N}^*$, ta có

$$k^2+ak+b\leqslant(k+c)^2\Leftrightarrow 2kc+c^2\geqslant ak+b\Leftarrow\begin{cases}2c\geqslant a\\ c^2\geqslant b.\end{cases}$$

Như vậy, nếu đặt $c=\left[\max\left\{\dfrac{a}{2},\sqrt{b}\right\}\right]+1$ thì

$$k^2+ak+b\leqslant(k+c)^2,\ \forall k=1,2,\ldots$$

Đặt

$$w_n=\frac{1}{n^{2\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n}(k+c)^{2\alpha}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+c}{n}\right)^{2\alpha}=\frac{1}{n}\sum_{i=c+1}^{c+n}\left(\frac{i}{n}\right)^{2\alpha}.$$

Khi đó do hàm số $t^{2\alpha}$ đồng biến trên $(0,+\infty)$ nên $u_n\leqslant w_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Ta có

$$w_n-v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{k+c}{n}\right)^{2\alpha}-\left(\frac{k}{n}\right)^{2\alpha}\right).$$

Do hàm số $g(x)=x^{2\alpha}$ liên tục trên đoạn $[0,1]$ nên hàm số $g(x)=x^{2\alpha}$ liên tục đều trên $[0,1]$.

Cho $\varepsilon>0$, tồn tại $\delta>0$ sao cho

$$\forall x',x''\in[0,1],\ \left|x'-x''\right|<\delta\Rightarrow\left|g(x')-g(x'')\right|<\varepsilon.$$

Chọn số tự nhiên $n_0=\left[\dfrac{c}{\delta}\right]+2$. Khi đó $n_0>\dfrac{c}{\delta}$. Với số tự nhiên $n>n_0$, với $k\in\{1,2,\ldots,n\}$, ta có

$$\left|\frac{k+c}{n}-\frac{k}{n}\right|=\frac{c}{n}<\frac{c}{n_0}<\delta.$$

Như vậy, với số tự nhiên $n > n_0$, với $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, ta có

$$\left(\frac{k+c}{n}\right)^{2\alpha} - \left(\frac{k}{n}\right)^{2\alpha} = \left| g\left(\frac{k+c}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \varepsilon.$$

Suy ra

$$0 \leqslant w_n - v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{k+c}{n}\right)^{2\alpha} - \left(\frac{k}{n}\right)^{2\alpha}\right) < \frac{1}{n}\cdot n\varepsilon = \varepsilon,\ \forall n > n_0.$$

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n - v_n) = 0$. Tóm lại, ta đã chứng minh được

$$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n,\ \forall n = 1, 2, \dots,\ \lim_{n\to+\infty}(w_n - v_n) = 0,\ \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2\alpha+1}.$$

Ta có

$$\left| w_n - \frac{1}{2\alpha+1} \right| \leqslant |w_n - v_n| + \left| v_n - \frac{1}{2\alpha+1} \right|,\ \forall n = 1, 2, \dots$$

Từ đây sử dụng nguyên lí kẹp suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{1}{2\alpha+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2\alpha+1}$. □

Bài toán 33. *Tính giới hạn* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2(1\cdot 2^2\cdot 3^3\dots n^n)^{-\frac{4}{n^2}}\right)$.

Lời giải. Với $n = 1, 2, \dots$, đặt $u_n = n^2\left(\prod\limits_{k=1}^{n} k^k\right)^{-\frac{4}{n^2}}$. Khi đó

$$\ln u_n = 2\ln n - \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k.$$

Do hàm số $f(x) = x\ln x$ đồng biến trên $[1, +\infty)$ nên với $k = 2, 3, \dots$, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(k-1+\frac{i}{n}\right) \leqslant f(k) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(k+\frac{i}{n}\right)\\
&\Rightarrow \int_{k-1}^{k} f(x)dx \leqslant f(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} f(x)dx\\
&\Rightarrow \int_{1}^{n} f(x)dx \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant \int_{2}^{n+1} f(x)dx\\
&\Rightarrow \int_{1}^{n} x\ln x dx \leqslant \sum_{k=2}^{n} k\ln k \leqslant \int_{2}^{n+1} x\ln x dx,\ \forall n = 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{28}$$

Do $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$ ($C$ là hằng số) nên, từ (28) suy ra

$$\frac{n^2}{2}\ln n - \frac{n^2}{4} + \frac{1}{4} \leqslant \sum_{k=2}^{n} k\ln k \leqslant \frac{(n+1)^2}{2}\ln(n+1) - \frac{(n+1)^2}{4} - 2\ln 2 + 1.$$

Do đó

$$-\frac{2(n+1)^2}{n^2}\ln(n+1) + \frac{(n+1)^2}{n^2} + \frac{8\ln 2 - 4}{n^2} \leqslant -\frac{4}{n^2}\sum_{k=2}^{n} k\ln k \leqslant -2\ln n + 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Suy ra

$$2\ln n - \frac{2(n+1)^2}{n^2}\ln(n+1) + \frac{(n+1)^2}{n^2} + \frac{4(2\ln 2 - 1)}{n^2} \leqslant \ln u_n \leqslant 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{(n+1)^2}{n^2} + \frac{4(2\ln 2 - 1)}{n^2}\right] = 1$. Theo quy tắc Lôpitan, ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(\ln n - \frac{(n+1)^2}{n^2}\ln(n+1)\right) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\ln n - (n+1)^2\ln(n+1)}{n^2} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{2n\ln n - [2(n+1)\ln(n+1) + 1]}{2n} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{2\ln n + 2 - [2\ln(n+1) + 2]}{2} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\ln\frac{n}{n+1} = 2\ln 1 = 0.
\end{aligned}$$

Như vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln u_n = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\ln u_n} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln u_n)} = e^1 = e.$ □

Bài toán 34. *Cho các hàm số liên tục $f, g : [0,1] \to [0,+\infty)$. Chứng minh rằng*

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{f\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k+1}{n}\right)}\right] = \int_0^1 \sqrt{f(x) + g(x)}dx.$$

Lời giải. Đặt

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{f\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k+1}{n}\right)},\quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{f\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k}{n}\right)}.$$

Với $n = 1, 2, \ldots$, ta có

$$|u_n - v_n| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sqrt{f\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k+1}{n}\right)} - \sqrt{f\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k}{n}\right)}\right)\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sqrt{f\left(\frac{k}{n}\right)+g\left(\frac{k+1}{n}\right)}-\sqrt{f\left(\frac{k}{n}\right)+g\left(\frac{k}{n}\right)}\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left|f\left(\frac{k}{n}\right)+g\left(\frac{k+1}{n}\right)-\left[f\left(\frac{k}{n}\right)+g\left(\frac{k}{n}\right)\right]\right|}$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left|g\left(\frac{k+1}{n}\right)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right|}.$$

Theo giả thiết hàm số $g$ liên tục trên đoạn $[0, 1]$, suy ra hàm số $g$ liên tục đều trên $[0, 1]$. Cho $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\forall x', x'' \in [0,1], \ \left|x'-x''\right| < \delta \Rightarrow \left|g(x')-g(x'')\right| < \varepsilon^2.$$

Chọn số tự nhiên $n_0 = \left[\frac{1}{\delta}\right] + 2$. Khi đó $n_0 > \frac{1}{\delta}$. Với số tự nhiên $n > n_0$, với $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, ta có

$$\left|\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \delta.$$

Như vậy, với số tự nhiên $n > n_0$, với $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, ta có

$$\left|g\left(\frac{k+1}{n}\right)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \varepsilon^2.$$

Suy ra $0 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left|g\left(\frac{k+1}{n}\right)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right|} < \frac{1}{n}\cdot n\varepsilon = \varepsilon, \ \forall n > n_0$. Do đó

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left|g\left(\frac{k+1}{n}\right)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right|}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}|u_n - v_n| = 0.$$

Mà

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{f\left(\frac{k}{n}\right)+g\left(\frac{k}{n}\right)}\right) = \int_0^1 \sqrt{f(x)+g(x)}dx,$$

cho nên $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \sqrt{f(x)+g(x)}dx.$ □

Bài toán 35. *Tính* $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2}$.

Lời giải. Theo định lí Stolz, ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{i+j}{i^2+j^2}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2}\right).$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{i+j}{i^2+j^2} &= \sum_{i=1}^{n+1}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2}+\frac{i+(n+1)}{i^2+(n+1)^2}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2}+\frac{i+(n+1)}{i^2+(n+1)^2}\right)\\ &+ \sum_{j=1}^{n}\frac{(n+1)^2+j}{(n+1)^2+j^2}+\frac{(n+1)+(n+1)}{(n+1)^2+(n+1)^2}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{i+(n+1)}{i^2+(n+1)^2}\\ &+ \sum_{j=1}^{n}\frac{(n+1)^2+j}{(n+1)^2+j^2}+\frac{2(n+1)}{2(n+1)^2}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2}+2\sum_{i=1}^{n}\frac{i+(n+1)}{i^2+(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Như vậy

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2} &= \lim_{n\to+\infty}\left[2\sum_{i=1}^{n}\frac{i+(n+1)}{i^2+(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}\right]\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{2}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\dfrac{i}{n+1}+1}{\dfrac{i^2}{(n+1)^2}+1}+\frac{1}{n+1}\right]\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{2}{n+1}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n+1}\right)+\frac{1}{n+1}\right],\end{aligned}$$

với $f$ là hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$. Chia đều đoạn $[0,1]$ bởi các điểm chia $x_i=\dfrac{i}{n+1}$ $(i=0,1,\dots,n+1)$ và chọn $\alpha_i=\dfrac{i}{n+1}\in[x_{i-1},x_i],\forall i=1,2,\dots,n.$

Khi đó tổng tích phân của hàm số $f(x)$ trên $[0,1]$ ứng với phép phân hoặc nói trên là

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n+1}\right).$$

Do hàm số $f$ khả tích nên

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n+1}\right)=\int_0^1\frac{x+1}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2} = 2\int\limits_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}dx + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = \frac{\pi}{2} + \ln 2.$ □

## Tài liệu


[1] Nguyễn Tài Chung, 2013, *Chuyên khảo Dãy số*, NXB Đại Học Quốc gia Hà Nội.

[2] G.Pôlya, G. Xegơ, 1983, *Bài tập và các định lí giải tích,* NXB Đại Học và trung học chuyên nghiệp.

[3] W.J. Kaczkor, M.T. Nowak, 2003, *Bài tập giải tích 1,* NXB Đại Học Sư Phạm.

[4] W.J. Kaczkor, M.T. Nowak, 2003, *Problems in Mathematical Analysis III Integration,* American Mathematical Society.

[5] Jean-Marie Monier, 2000, *Giáo trình toán - Tập 1- Giải tích 1,* NXB Giáo dục.

[6] Ovidiu Furdui, 2012, *Limits, Series, and Fractional Part Integrals,* Springer.

[7] Các tài liệu trên Internet.

# HÀM PHẦN NGUYÊN

Nguyễn Tất Thu
(Trường THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai)

## GIỚI THIỆU

Phần nguyên là khái niệm được xây dựng rất đơn giản trong số học, nhưng lại có rất nhiều ứng dụng không chỉ trong Toán học mà còn có nhiều ứng dụng trong toán ứng dụng và công nghệ thông tin. Trong bài viết này, chúng tôi trình bày một số định lí về phần nguyên và một số bài toán liên quan đến phần nguyên.

# 1. Khái niệm về hàm phần nguyên

## 1.1. Định nghĩa

Định nghĩa 1. *Với số thực $x$, khi đó có duy nhất số nguyên $n$ thoả $n \leqslant x < n+1$. Chúng ta nói $n$ là số tự nhiên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng $x$ là phần nguyên của $x$.*

*Ký hiệu $n = [x]$ (hoặc $n = \lfloor x \rfloor$). Hiệu $x - [x]$ được gọi là phần lẻ (phần thập phân) của $x$ và kí hiệu $\{x\}$.*

## 1.2. Tính chất cơ bản

Sử dụng định nghĩa phần nguyên, ta dễ dàng chứng minh được các tính chất sau

Định lý 1. *Ta có*

1. *Nếu $x > y$ thì $[x] \geqslant [y]$.*
2. *Với $x, y$ là các số thực, ta có $[x] + [y] \leqslant [x + y] \leqslant [x] + [y] + 1$.*
3. *Nếu $a$ và $b$ là số nguyên, $b > 0$, và $q$ là thương của phép chia $a$ cho $b$ thì $q = \left[\frac{a}{b}\right]$.*
4. *Với mọi số thực $x$ và mọi số nguyên $n$, ta có $[x + n] = [x] + n$.*
5. *Với mọi số thực dương $x$ và mọi số nguyên dương $n$ thì số bội nguyên dương của $n$ không vượt quá $x$ là $\left[\frac{x}{n}\right]$.*

6. *Với mọi số thực dương $x$ và mọi số nguyên dương $n$ thì* $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$.

7. *Với $x$ là số thực bất kì thì* $[2x] - 2[x]$ *bằng 1 nếu* $\frac{1}{2} \leqslant \{x\} < 1$ *và bằng 0 nếu* $0 \leqslant \{x\} < \frac{1}{2}$.

Ta chứng minh một số tính chất sau

2. Đặt $n = [x]$, $m = [y]$. Suy ra $x = n + \{x\}$ và $y = m + \{y\}$, ta có

$$[x + y] = [m + n + \{x\} + \{y\}] = m + n + [\{x\} + \{y\}].$$

Mặt khác $0 \leqslant \{x\} + \{y\} < 2$ nên ta có điều phải chứng minh.

5. Ta chú ý các bội của $n$ là $1 \cdot n,\ 2 \cdot n, \ldots,\ k \cdot n$. Ta có $k \cdot n \leqslant x < (k+1) \cdot n$. Đó là $k \leqslant \frac{x}{n} < k + 1$ và kết thúc sự chứng minh.

6. Ta đặt $\lfloor x \rfloor = m,\ \{x\} = \alpha$. Từ thuật toán phép chia và tính chất 1. ta có

$$m = n\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + r,\ 0 \leqslant r \leqslant n - 1.$$

Chúng ta có được $0 \leqslant r + \alpha \leqslant n - 1 + \alpha < n$, do đó $\left\lfloor \frac{r+\alpha}{n} \right\rfloor = 0$ và

$$\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m+\alpha}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + \frac{r+\alpha}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+\alpha}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor.$$

7. Ta có $x = [x] + \{x\}$. Suy ra

$$[2x] - 2[x] = [2[x] + 2\{x\}] - 2[[x] + \{x\}] = [2\{x\}] - 2[\{x\}] = [2\{x\}].$$

Do đó

- Nếu $\frac{1}{2} \leqslant \{x\} < 1$ thì

$$1 \leqslant 2\{x\} < 2 \Rightarrow [2\{x\}] = 1 \Rightarrow [2x] - 2[x] = 1.$$

- Nếu $0 \leqslant \{x\} < \frac{1}{2}$ thì

$$0 \leqslant 2\{x\} < 1 \Rightarrow [2\{x\}] = 0 \Rightarrow [2x] - 2[x] = 0.$$

## 1.3. Công thức Polignac

Định lý 2. *Cho $p$ là một số nguyên tố và $n$ là một số nguyên dương, khi đó số mũ của số nguyên tố $p$ trong phân tích tiêu chuẩn của $n!$ được tính theo công thức*

$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^i}\right].$$

## 1.4. Một số tính chất của hàm phần nguyên và điểm nguyên

Định lý 3. *Cho $p$ là số nguyên tố lẻ và $q$ là số nguyên không chia hết cho $p$. Nếu $f : \mathbb{Z}_+^* \to \mathbb{R}$ là một hàm thoả*

*i) $\frac{f(k)}{p}$ không là số nguyên với $k = 1, 2, \ldots, p-1$;*

*ii) $f(k) + f(p-k)$ là số nguyên chia hết cho $p$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, p-1$.*

*Khi đó*

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left\lfloor f(k)\frac{q}{p} \right\rfloor = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{p-1} f(k) - \frac{p-1}{2}. \tag{1}$$

Lời giải. Từ ii) ta có

$$\frac{qf(k)}{p} + \frac{qf(p-k)}{p} \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Và từ (1), ta có $\frac{qf(k)}{p} \notin \mathbb{Z}$ và $\frac{qf(p-k)}{p} \notin \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$. Do đó

$$0 < \left\{\frac{qf(k)}{p}\right\} + \left\{\frac{qf(p-k)}{p}\right\} < 2.$$

Nhưng từ (2),

$$\left\{\frac{qf(k)}{p}\right\} + \left\{\frac{qf(p-k)}{p}\right\} \in \mathbb{Z}$$

nên

$$\left\{\frac{qf(k)}{p}\right\} + \left\{\frac{qf(p-k)}{p}\right\} = 1,\ k = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Lấy tổng hai lần ta có

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left\{\frac{qf(k)}{p}\right\} = \frac{p-1}{2}.$$

Nên

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{p}{q} f(k) - \sum_{k=1}^{p-1} \left\lfloor f(k)\frac{q}{p} \right\rfloor = \frac{p-1}{2}.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Định lý 4. *Cho $a, c$ là các số thực không âm và $f : [a; b] \to [c; d]$ là một song ánh và là hàm tăng. Khi đó*

$$\sum_{a \leqslant k \leqslant b} \lfloor f(k) \rfloor + \sum_{c \leqslant k \leqslant d} \left\lfloor f^{-1}(k) \right\rfloor - n\left(G_f\right) = \lfloor b \rfloor \lfloor d \rfloor - \alpha(a) \cdot \alpha(c), \tag{3}$$

*với $k$ là số nguyên, $n\left(G_f\right)$ là số điểm có toạ độ là số tự nhiên trên đồ thị của hàm $f$ và $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ được xác định bởi*

$$\alpha(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{nếu } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z} \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ x - 1 & \text{nếu } x \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \end{cases}$$

Lời giải. Với mỗi miền bị chặn $M$ trong mặt phẳng, ta kí hiệu $n(M)$ là số điểm có toạ độ là số tự nhiên nằm trong $M$.

Hàm $f$ tăng và song ánh nên liên tục. Xét các tập sau

$$\begin{aligned}
M_1 &= \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,|a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\},\\
M_2 &= \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,|c \leqslant y \leqslant d,\ 0 \leqslant x \leqslant f^{-1}(y)\right\},\\
M_3 &= \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,|0 \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant d\right\},\\
M_4 &= \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,|0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant c\right\}.
\end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
&n(M_1) = \sum_{a\leqslant k\leqslant b} \lfloor f(k)\rfloor,\ n(M_2) = \sum_{c\leqslant k\leqslant d} \lfloor f^{-1}(k)\rfloor,\\
&n(M_3) = \lfloor b\rfloor \cdot \lfloor d\rfloor,\ n(M_4) = \alpha(a)\cdot\alpha(c).
\end{aligned}$$

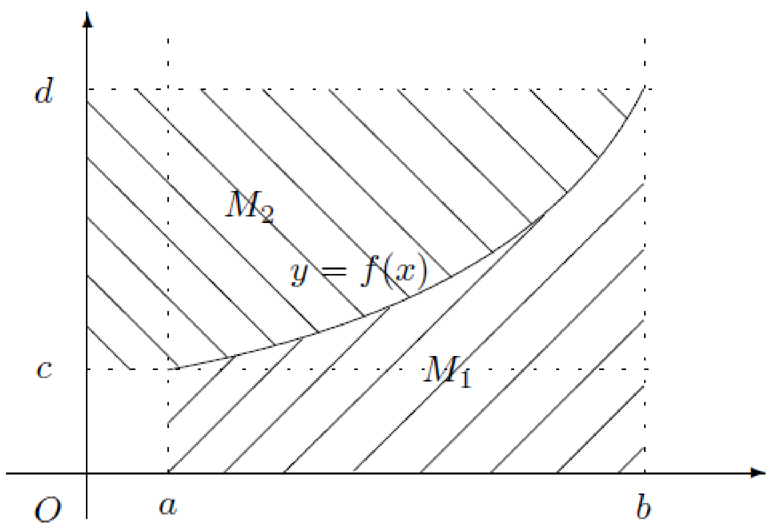
Ta có

$$n(M_1) + n(M_2) - n(M_1 \cap M_2) = n(M_1 \cup M_2).$$

Vì vậy

$$n(M_1) + n(M_2) - n\left(G_f\right) = n(M_3) - n(M_4).$$

Từ đó kết thúc sự chứng minh.




□

Định lý 5. *Cho $m, n, s$ là các số nguyên dương, $m \leqslant n$. Khi đó*

$$\sum_{k=1}^{s} \left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor + \sum_{1\leqslant k\leqslant \frac{ms}{n}} \left\lfloor \frac{kn}{m} \right\rfloor = s\cdot\left\lfloor \frac{ms}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\gcd(m,n)\cdot s}{n} \right\rfloor. \tag{4}$$

Lời giải. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau

Bổ đề 1. *Trong dãy $\dfrac{1\cdot m}{n}, \dfrac{2\cdot m}{n}, \ldots, \dfrac{s\cdot m}{n}$, chứa đúng $\left\lfloor \dfrac{\gcd(m,n)\cdot s}{n} \right\rfloor$ số nguyên.*

Thật vậy, gọi $d = (m,n)$, ta có $m = dm_1,\ n = dn_1$ với $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$ và $(m_1,n_1) = 1$.

Vì $(m_1,n_1) = 1$ nên trong dãy $\frac{1\cdot m_1}{n_1}, \frac{2\cdot m_1}{n_1}, \ldots, \frac{p\cdot m_1}{n_1}$ có $\left\lfloor \frac{p}{n_1} \right\rfloor$ số nguyên trong đó.

Vì $n_1 = \frac{n}{d} = \frac{n}{\gcd(m,n)}$ nên có $\left\lfloor \frac{p\cdot\gcd(m,n)}{n} \right\rfloor$ số nguyên trong dãy. Bổ đề được chứng minh.

Để chứng minh kết quả của định lí ta xét hàm $f : [1;s] \to \left[\frac{m}{n}; \frac{ms}{n}\right]$, $f(x) = \frac{m}{n}x$ thoả định lí 4. Theo bổ đề trên ta có $n\left(G_f\right) = \left\lfloor \frac{\gcd(m,n)\cdot s}{n} \right\rfloor$ ta có điều phải chứng minh. □

Định lý 6. *Cho $a, c$ là các số thực không âm và $f : [a;b] \to [c;d]$ là một song ánh và là hàm giảm. Khi đó*

$$\sum_{a\leqslant k\leqslant b} \lfloor f(k) \rfloor - \sum_{c\leqslant k\leqslant d} \left\lfloor f^{-1}(k) \right\rfloor = \lfloor b \rfloor \alpha(c) - \lfloor d \rfloor \alpha(a),$$

*với $k$ là số nguyên và $\alpha$ là hàm được nói trong định lí 4.*

Lời giải. Hàm $f$ song ánh và tăng nên nó liên tục. Xét các tập

$$\begin{aligned}
N_1 &= \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,|a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant f(x)\right\},\\
N_2 &= \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,|c \leqslant y \leqslant d,\ a \leqslant x \leqslant f^{-1}(y)\right\},\\
N_3 &= \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,|a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant c\right\},\\
N_4 &= \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,|0 \leqslant x \leqslant a,\ c \leqslant y \leqslant d\right\}.
\end{aligned}$$

Khi đó

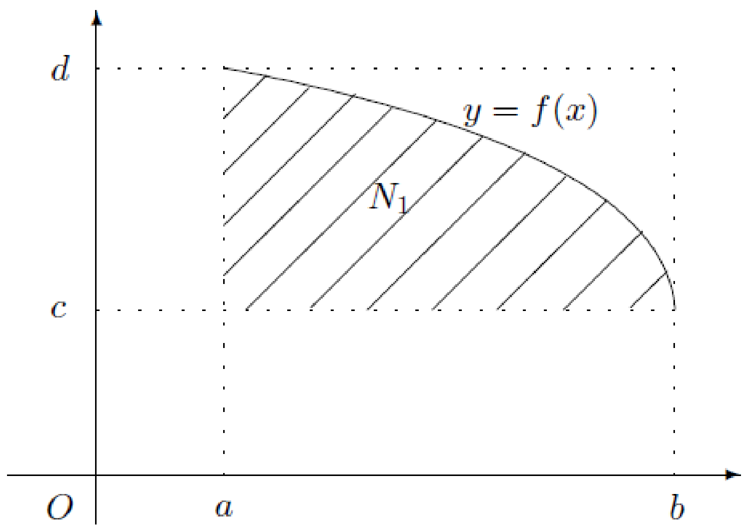
$$\sum_{a\leqslant k\leqslant b} \lfloor f(k) \rfloor = n(N_1) + n(N_3), \quad \sum_{c\leqslant k\leqslant d} \left\lfloor f^{-1}(k) \right\rfloor = n(N_2) + n(N_4),\ n(N_1) = n(N_2),$$

và

$$n(N_3) = (\lfloor b \rfloor - \alpha(a))\,\alpha(c),\ n(N_4) = (\lfloor d \rfloor - \alpha(c))\,\alpha(a).$$

Vì vậy

$$\sum_{a\leqslant k\leqslant b} \lfloor f(k) \rfloor - \sum_{c\leqslant k\leqslant d} \left\lfloor f^{-1}(k) \right\rfloor = n(N_3) - n(N_4) = \lfloor b \rfloor \alpha(c) - \lfloor d \rfloor \alpha(a).$$



□

Định lý 7. *(Đẳng thức Hermite) Cho $n$ là số nguyên dương. Khi đó với mỗi số thực $x$ ta có*

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right].$$

Lời giải. Đặt

$$f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] - [nx].$$

Ta có

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{1}{n}\right) &= \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\right] - \left[n\left(x + \frac{1}{n}\right)\right] \\ &= \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + [x+1] - [nx+1]. \end{aligned}$$

Áp dụng $[x+k] = [x] + k$ với $k \in \mathbb{Z}$, ta được

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $f$ là hàm tuần hoàn với chu kì $\frac{1}{n}$. Vì vậy ta chỉ cần nghiên cứu $f(x)$ trong $0 \leqslant x < \frac{1}{n}$. Nhưng $f(x) = 0$ với mọi $x \in \left[0; \frac{1}{n}\right)$, nên $f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ và chứng minh hoàn tất. □

## 2. Một số ví dụ áp dụng

Ví dụ 1. *Tìm tất cả các số nguyên dương $n$ sao cho $\left\lfloor \sqrt[n]{111} \right\rfloor$ chia hết 111.*

Lời giải. Các ước nguyên dương của 111 là $1, 3, 37, 111$. Ta có các trường hợp sau

1. $\left\lfloor \sqrt[n]{111} \right\rfloor = 1$ hay $1 \leqslant 111 < 2^n$, ta có $n \geqslant 7$.
2. $\left\lfloor \sqrt[n]{111} \right\rfloor = 3$ hay $3^n \leqslant 111 < 4^n$, ta có $n = 4$.
3. $\left\lfloor \sqrt[n]{111} \right\rfloor = 37$ hay $37^n \leqslant 111 < 38^n$, điều này không thể xảy ra.
4. $\left\lfloor \sqrt[n]{111} \right\rfloor = 111$ hay $n = 1$.

Bởi vậy $n = 1, n = 4$ hoặc $n \geqslant 7$. □

Ví dụ 2. *Giải phương trình trên tập số thực*

$$\lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor = 1.$$

Lời giải. Từ định nghĩa của $\lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor = 1$, ta có $1 \leqslant x \lfloor x \rfloor < 2$. Ta xét các trường hợp sau

- $x \in (-\infty; -1)$. Thì $\lfloor x \rfloor \leqslant -2$ và $x \lfloor x \rfloor > 2$ điều này dẫn tới mâu thuẫn.
- $x = -1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -1$. Thì $x \lfloor x \rfloor = 1$ nên $x = -1$ là một lời giải.
- $x \in (-1; 0)$. Chúng ta có $\lfloor x \rfloor = -1$ nên $x \lfloor x \rfloor = -x < 1$, (loại).
- $x \in [0; 1)$, thì $\lfloor x \rfloor = 0$ và $x \lfloor x \rfloor = 0 < 1$, nên chúng ta không có lời giải trong trường hợp này.
- $x \in [1; 2)$ chúng ta có $\lfloor x \rfloor = 1$ và $x \lfloor x \rfloor = x$ thoả bài toán.
- $x \geqslant 2$ thì $\lfloor x \rfloor \geqslant 2$ và $x \lfloor x \rfloor \geqslant 4$ mâu thuẫn với yêu cầu đề bài.

Vì vậy $x \in \{-1\} \cup [1; 2)$. □

Ví dụ 3. *Tìm tất cả các số thực $x > 1$ sao cho $\sqrt[n]{\lfloor x^n \rfloor}$ $(n \geqslant 2)$ là số nguyên dương với mọi số nguyên $n$.*

*(Romanian Regional Mathematical Contest 2004)*

Lời giải. Đặt $\sqrt[n]{\lfloor x^n \rfloor} = a_n$, khi đó $\lfloor x^n \rfloor = a_n^n$ và $a_n^n \leqslant x^n < a_n^n + 1$.

Do đó $a_n \leqslant x < \sqrt[n]{a_n^n + 1}$ nên $\lfloor x \rfloor = a_n$. Chúng ta thấy, bài toán thoả mãn với mọi số nguyên $x$, $(x \geqslant 2)$.

Giả sử có một giá trị của $x$ thoả bài toán và $x$ không phải là số nguyên. Đặt $x = a + \alpha$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \geqslant 1, 0 < \alpha < 1$. Khi đó $a^n < (a + \alpha)^n < a^n + 1$, bởi vậy

$$1 < \left(1 + \frac{\alpha}{a}\right)^n < 1 + \frac{1}{a^n} \leqslant 2. \tag{5}$$

Mà theo bất đẳng thức Bernoulii, ta có $\left(1 + \frac{\alpha}{a}\right)^n \geqslant 1 + n\frac{\alpha}{a} > 2$ với $n$ đủ lớn. Dẫn đến sự mâu thuẫn với (5). Vậy bài toán được giải quyết. □

Ví dụ 4. *(THTT T10/466) Chứng minh rằng*

$$\frac{(3n)!}{n!\,(n+1)!\,(n+2)!},$$

*là một số nguyên với mọi số nguyên $n \geqslant 3$.*

Lời giải. Để chứng minh bài toán, ta chỉ cần chứng minh. Với mọi số nguyên tố $p$ ta luôn có

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{3n}{p^k}\right] \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left[\frac{n}{p^k}\right] + \left[\frac{n+1}{p^k}\right] + \left[\frac{n+2}{p^k}\right]\right). \tag{6}$$

Áp dụng đẳng thức Hermite ta có

$$\left[\frac{3n}{a}\right] = \left[\frac{n}{a}\right] + \left[\frac{n}{a} + \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{n}{a} + \frac{2}{3}\right].$$

Hơn nữa $a \geqslant 3$, nên

$$\frac{n}{a} + \frac{1}{3} \geqslant \frac{n}{a} + \frac{1}{a} = \frac{n+1}{a},$$

do đó

$$\left[\frac{n}{a} + \frac{1}{3}\right] \geqslant \left[\frac{n+1}{a}\right].$$

Tương tự

$$\left[\frac{n}{a} + \frac{2}{3}\right] \geqslant \left[\frac{n+2}{a}\right].$$

Từ đó, suy ra

$$\left[\frac{3n}{a}\right] \geqslant \left[\frac{n}{a}\right] + \left[\frac{n+1}{a}\right] + \left[\frac{n+2}{a}\right]. \tag{7}$$

Do đó, nếu $p \geqslant 3$ thì sử dụng (7) ta có được (6).

Xét $p = 2$, khi đó (6) trở thành

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{3n}{2^k}\right] \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left[\frac{n}{2^k}\right] + \left[\frac{n+1}{2^k}\right] + \left[\frac{n+2}{2^k}\right]\right). \tag{8}$$

Với $n \geqslant 4$ ta có

$$\log_2 (3n) - \log_2 (n+2) = \log_2 \frac{3n}{n+2} \geqslant 1,$$

Nên tồn tại số nguyên dương $q$ sao cho

$$\log_2 (n+2) \leqslant q \leqslant \log_2 (3n) \Rightarrow n+2 < 2^q < 3n. \tag{9}$$

Và với $n = 3$ thì ta chọn $q = 3$. Do đó với $n \geqslant 3$ tồn tại số nguyên $q$ thỏa mãn (9). Với $k \geqslant 2,\ k \neq q$ , áp dụng (7) ta có

$$\left[\frac{3n}{2^k}\right] \geqslant \left[\frac{n}{2^k}\right] + \left[\frac{n+1}{2^k}\right] + \left[\frac{n+2}{2^k}\right],$$

Do đó để chứng minh (8) ta chỉ cần chứng minh

$$\left[\frac{3n}{2}\right] + \left[\frac{3n}{2^q}\right] \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^q}\right] + \left[\frac{n+1}{2^q}\right] + \left[\frac{n+2}{2^q}\right]. \tag{10}$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$\left[\frac{3n}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2}\right] - 1,$$

và

$$\left[\frac{n}{2^q}\right] = \left[\frac{n+1}{2^q}\right] = \left[\frac{n+2}{2^q}\right] = 0,\ \left[\frac{3n}{2^q}\right] \geqslant 1.$$

Nên (10) đúng, hay bài toán được chứng minh. □

Ví dụ 5. *(THTT 364) Cho $n$ là số nguyên dương. Tính $[S]$ với*

$$S = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3+1}{3}} + \cdots + \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}.$$

Lời giải. Ta có $S > n-1$. Mặt khác với mọi $x > 0$ và $k \geqslant 2$ là số nguyên dương, ta có bất đẳng thức

$$(1+x)^k > 1+kx \Rightarrow 1+x > \sqrt[k]{1+kx}.$$

Cho $x = \frac{1}{k^2}$ ta được

$$\sqrt[k]{1+\frac{1}{k}} \leqslant 1 + \frac{1}{k^2},$$

Do đó

$$S = \sum_{k=2}^{n} \sqrt[k]{1+\frac{1}{k}} \leqslant \sum_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right) < \sum_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k(k-1)}\right) = \sum_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = n - \frac{1}{n} < n.$$

Suy ra $[S] = n-1$. □

Ví dụ 6. *Cho $p$ là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left\lfloor \frac{k^3}{p} \right\rfloor = \frac{(p-1)(p-2)(p+1)}{4}.$$

*(German Mathematical Olympiad 2002)*

Lời giải. Hàm $f(x) = x^3$ thoả mãn các điều kiện i) và ii) của định lí 1 nên ta có

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left\lfloor k^3 \frac{q}{p} \right\rfloor = \frac{q}{p} \frac{(p-1)^2 p^2}{4} - \frac{p-1}{2} = \frac{(p-1)(p^2q - pq - 2)}{4}.$$

Cho $q = 1$ ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 7. *Tính*

$$S_n = \sum_{k=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \left\lfloor \frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2} \right\rfloor.$$

Lời giải. Xét hàm số

$$f : [1; n] \to \left[1; \frac{n(n+1)}{2}\right], \; f(x) = \frac{x(x+1)}{2}$$

Hàm $f$ tăng và song ánh. Ta thấy

$$n\left(G_f\right) = n \text{ và } f^{-1}(x) = \frac{-1+\sqrt{1+8x}}{2}.$$

Áp dụng định lí 2 ta có

$$\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{k(k+1)}{2} \right\rfloor + \sum_{k=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \left\lfloor \frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2} \right\rfloor - n = \frac{n^2(n+1)}{2},$$

Hay là

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \left\lfloor \frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2} \right\rfloor &= \frac{n^2(n+1)}{2} + n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\\ &= \frac{n^2(n+1)}{2} + n - \frac{n(n+1)}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n^2+2)}{3}.\end{aligned}$$

Từ đó dẫn đến kết luận của bài toán. □

Ví dụ 8. *(VN TST 2005) Cho số nguyên tố $p (p > 3)$. Tính*

*a)* $S = \sum\limits_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left( \left[\frac{2k^2}{p}\right] - 2\left[\frac{k^2}{p}\right] \right)$ *nếu* $p \equiv 1 \pmod 4$.

*b)* $P = \sum\limits_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{k^2}{p}\right]$ *nếu* $p \equiv 1 \pmod 8$.

Lời giải. Trước hết ta có bổ đề sau

Bổ đề 2. *Với $p$ là số nguyên tố thỏa $p \equiv 1 \pmod 4$ thì mỗi số tự nhiên $a$ với $1 \leqslant a \leqslant \frac{p-1}{2}$ sẽ tồn tại duy nhất số tự nhiên $b$ thỏa $\frac{p+1}{2} \leqslant b \leqslant p-1$ và $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod p$.*

Thật vậy, theo định lí Wilson $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$. Với mỗi $k = 1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$, ta thấy

$$p - k \equiv -k \pmod p \Rightarrow k(p-k) \equiv -k^2 \pmod p.$$

Kết hợp với giả thiết $p \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow \frac{p-1}{2} \vdots 2$, ta được

$$-1 \equiv (p-1)! \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot \left( \left(\frac{p-1}{2}\right)! \right)^2 \equiv \left( \left(\frac{p-1}{2}\right)! \right)^2 \pmod p.$$

Đặt $\varphi = \left(\frac{p-1}{2}\right)! \Rightarrow \varphi^2 \equiv -1 \pmod p$. Với mỗi $1 \leqslant a \leqslant \frac{p-1}{2}$, ta chọn $\frac{p+1}{2} \leqslant b \leqslant p-1$ thỏa $b^2 \equiv a^2.\varphi^2 \pmod p$, dễ thấy $b$ tồn tại và duy nhất. Khi đó

$$a^2 + b^2 \equiv a^2(1+\varphi^2) \equiv 0 \pmod p.$$

Bổ đề được chứng minh.

a) Ta thấy tổng đã cho là

$$S = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left( \left[\frac{2k^2}{p}\right] - 2\left[\frac{k^2}{p}\right] \right)$$

có đúng $\frac{p-1}{2}$ số hạng.

Ta có $[2x] - 2[x] = 0$ hoặc 1 (tính chất 7). Theo bổ đề thì với mỗi số tự nhiên $a$ thỏa $1 \leqslant a \leqslant \frac{p-1}{2}$ thì tồn tại duy nhất số tự nhiên $b$ thỏa $\frac{p+1}{2} \leqslant b \leqslant p-1$ sao cho

$$a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow a^2 + (p-b)^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

do đó, tồn tại duy nhất số tự nhiên $a'$ thỏa $1 \leqslant a' \leqslant \frac{p-1}{2}$ sao cho

$$a^2 + a'^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Gọi $x,\ y$ lần lượt là số các số dư của phép chia $k^2$cho $p$ $(1 \leqslant k \leqslant \frac{p-1}{2})$ có giá trị lớn hơn $\frac{p-1}{2}$ và nhỏ hơn $\frac{p-1}{2}$. Theo nhận xét trên thì $x = y$, hơn nữa

$$x + y = \frac{p-1}{2} \Rightarrow x = y = \frac{p-1}{4}.$$

Từ đó ta có $S = x \cdot 1 + y \cdot 0 = \frac{p-1}{4}$. Do đó, tổng cần tìm là $\frac{p-1}{4}$.

b) Do $p \equiv 1 \pmod{8}$ nên tồn tại $a$ sao cho $a^2 \equiv 2 \pmod{p}$. Ta thấy rằng

$$p \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow p \equiv 1 \pmod{4}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{k^2}{p}\right] = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\left[\frac{2k^2}{p}\right] - \left[\frac{k^2}{p}\right]\right) - \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\left[\frac{2k^2}{p}\right] - 2\left[\frac{k^2}{p}\right]\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\left[\frac{2k^2}{p}\right] - \left[\frac{k^2}{p}\right]\right) - S \end{aligned}.$$

Ta cần tính

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\left[\frac{2k^2}{p}\right] - \left[\frac{k^2}{p}\right]\right) &= \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{2k^2}{p} - \frac{k^2}{p}\right) - \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\left\{\frac{2k^2}{p}\right\} - \left\{\frac{k^2}{p}\right\}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{k^2}{p}\right) - \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\left\{\frac{2k^2}{p}\right\} - \left\{\frac{k^2}{p}\right\}\right), \end{aligned}$$

trong đó $p \equiv 1 \pmod{8}$.

Theo nhận xét trên thì tập hợp các số dư khi chia $k^2, 1 \leqslant k \leqslant \frac{p-1}{2}$ cho $p$ trùng với tập hợp các số dư khi chia $2k^2, 1 \leqslant k \leqslant \frac{p-1}{2}$ cho $p$, tức là

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\left\{\frac{2k^2}{p}\right\} - \left\{\frac{k^2}{p}\right\}\right) = 0,$$

suy ra

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\left[\frac{2k^2}{p}\right] - \left[\frac{k^2}{p}\right]\right) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{k^2}{p}\right) = \frac{p^2-1}{24}.$$

Vậy $P = \frac{p^2-1}{24} - \frac{p-1}{4} = \frac{(p-1)(p-5)}{24}$. □

Ví dụ 9. *Có bao nhiêu số khác nhau trong dãy số phần nguyên dưới đây*

$$\left[\frac{1^2}{2014}\right], \left[\frac{2^2}{2014}\right], \dots, \left[\frac{2014^2}{2014}\right].$$

Lời giải. Đầu tiên ta có $\left[\frac{1007^2}{2014}\right] = 503$. Gọi $x < 503$ là số tự nhiên sao cho tồn tại số $i < 1007$ lớn nhất để $\left[\frac{i^2}{2014}\right] = x$. Do

$$\frac{(i+1)^2}{2014} - \frac{i^2}{2014} = \frac{2i+1}{2014} < 1$$

nên

$$\left[\frac{(i+1)^2}{2014}\right] = x + 1.$$

Từ đây suy ra dãy

$$\left[\frac{1^2}{2014}\right], \left[\frac{2^2}{2014}\right], \dots, \left[\frac{1007^2}{2014}\right]$$

gồm 504 số tự nhiên khác nhau từ 0 đến 503. Khi $i > 1007$ các số hạng $\left[\frac{i^2}{2014}\right]$ tăng thực sự nên dãy

$$\left[\frac{1008^2}{2014}\right], \left[\frac{1009^2}{2014}\right], \dots, \left[\frac{2014^2}{2014}\right]$$

có đúng 1007 số tự nhiên khác nhau. Vậy có tất cả là $504 + 1007 = 1511$ số tự nhiên khác nhau trong dãy số ban đầu. □

Ví dụ 10. *Tìm các số nguyên dương $x,\ y$ thỏa mãn*

$$x = y\left[\sqrt{x}\right].$$

Lời giải. Ta có

$$\left[\sqrt{x}\right] \geqslant 1 \text{ và } \left[\sqrt{x}\right] \leqslant \sqrt{x} < \left[\sqrt{x}\right] + 1,$$

nên

$$\left(\left[\sqrt{x}\right]\right)^2 \leqslant x < \left(\left[\sqrt{x}\right] + 1\right)^2.$$

Do đó

$$\left(\left[\sqrt{x}\right]\right)^2 \leqslant y\left[\sqrt{x}\right] < \left(\left[\sqrt{x}\right] + 1\right)^2,$$

Hay

$$\left[\sqrt{x}\right] \leqslant y < \left[\sqrt{x}\right] + 2 + \frac{1}{\left[\sqrt{x}\right]} < \left[\sqrt{x}\right] + 3.$$

Nên ta có các trường hợp sau

- $y = \left[\sqrt{x}\right]$, khi đó $x = \left[\sqrt{x}\right]^2$. Từ đây suy ra

$$\begin{cases} x = k^2 \\ y = k \end{cases}, \ k \in \mathbb{N}.$$

- $y = [\sqrt{x}] + 1$, khi đó $x = [\sqrt{x}]^2 + [\sqrt{x}]$. Từ đây ta có $\begin{cases} x = k^2 + k \\ y = k + 1 \end{cases}$, $k \in \mathbb{N}$.
- $y = [\sqrt{x}] + 2$ ta có $x = [\sqrt{x}]^2 + 2[\sqrt{x}]$. Từ đây ta có $\begin{cases} x = k^2 + 2k \\ y = k + 2 \end{cases}$, $k \in \mathbb{N}$.

Từ đó dẫn đến kết luận của bài toán. □

Ví dụ 11. *(APMO 2001) Tìm số nguyên dương $N$ lớn nhất, sao cho trong tập hợp $\{1, 2, \ldots, N\}$ số các số chia hết cho 3 bằng số các số chia hết cho 5 hoặc chia hết cho 7.*

Lời giải. Theo đề bài ta có

$$\left[\frac{N}{3}\right] = \left[\frac{N}{5}\right] + \left[\frac{N}{7}\right] - \left[\frac{N}{35}\right].$$

Đặt $N = 35k + r$ với $0 \leqslant r < 35$ và ta chỉ xét $k \geqslant 1$. Ta có

$$\begin{aligned}\left[\frac{35k+r}{3}\right] &= \left[\frac{35k+r}{5}\right] + \left[\frac{35k+r}{7}\right] - \left[\frac{35k+r}{35}\right] \\ &= 7k + \left[\frac{r}{5}\right] + 5k + \left[\frac{r}{7}\right] - k - \left[\frac{r}{35}\right] \\ &= 11k + \left[\frac{r}{5}\right] + \left[\frac{r}{7}\right].\end{aligned}$$

Mặt khác, ta có $\left[\frac{N}{3}\right] \geqslant \frac{N-2}{3}$, nên suy ra

$$\frac{35k+r-2}{3} \leqslant 11k + \left[\frac{r}{5}\right] + \left[\frac{r}{7}\right] \leqslant 11k + \frac{r}{5} + \frac{r}{7},$$

hay $2k \leqslant \frac{r}{35} + 1 < 3$ nên $k \leqslant 1 \Rightarrow N \leqslant 69$. Bằng cách xét với $N = 69,\ 68,\ 67,\ 66,\ 65$ ta thấy chỉ có $N = 65$ thỏa. Vậy $N = 65$ là số cần tìm. □

Ví dụ 12. *Tìm số nguyên tố $p$ nhỏ nhất sao cho*

$$\left[\left(3+\sqrt{p}\right)^{2n}\right] + 1,$$

*chia hết cho $2^{n+1}$ với mọi số tự nhiên $n$.*

Lời giải. Với $p = 2$ ta có

$$\left[\left(3+\sqrt{2}\right)^4\right] + 1 = 378 \not\vdots\, 2^3.$$

Với $p = 3$ ta có

$$\left[\left(3+\sqrt{3}\right)^2\right] + 1 = 23 \not\vdots\, 2^2.$$

Với $p = 5$. Đặt

$$x_1 = \left(3+\sqrt{5}\right)^2,\ x_2 = \left(3-\sqrt{5}\right)^2$$

và $a_n = x_1^n + x_2^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $x_1 + x_2 = 28$ và $x_1x_2 = 16$ nên ta có hệ thức truy hồi

$$a_{n+2} = 28a_{n+1} - 16a_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Vì $0 < x_2 < 1$ nên $0 < x_2^n < 1$, do đó $a_n - 1 < x_1^n < a_n$ , hay

$$\left[x_1^n\right] = a_n - 1 \Leftrightarrow \left[x_1^n\right] + 1 = a_n.$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $a_n \vdots 2^{n+1}$ với mọi số nguyên dương $n$. Vậy số nguyên tố nhỏ nhất cần tìm là $p = 5$. □

Ví dụ 13. *Cho dãy số $(u_n) : u_n = \left[n\sqrt{2}\right]$. Chứng minh rằng, dãy số đã cho chứa vô hạng số là số chính phương.*

Lời giải. Ta có

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{2m+1} = \sum_{i=0}^{2m+1} C_{2m+1}^{i}(\sqrt{2})^{i} = \sum_{i=0}^{m} C_{2m+1}^{2i}2^{i} + \sum_{i=0}^{m} C_{2m+1}^{2i+1}2^{i}\sqrt{2} = x_{2m+1} + y_{2m+1}\sqrt{2}$$

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2m+1} = \sum_{i=0}^{m} C_{2m+1}^{2i}2^{i} - \sum_{i=0}^{m} C_{2m+1}^{2i+1}2^{i}\sqrt{2} = y_{2m+1}\sqrt{2} - x_{2m+1}.$$

Trong đó

$$x_{2m+1} = \sum_{i=0}^{m} C_{2m+1}^{2i}2^{i}, \, y_{2m+1} = \sum_{i=0}^{m} C_{2m+1}^{2i+1}2^{i}$$

với $m = 0, 1, 2, \ldots$ Ta có $x_{2m+1}, y_{2m+1}$ là những số nguyên dương.

Từ cách xác định $x_{2m+1}, y_{2m+1}$,ta có

$$1 = \left(\sqrt{2}+1\right)^{2m+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2m+1} = \left(\sqrt{2}y_{2m+1} + x_{2m+1}\right)\left(\sqrt{2}y_{2m+1} - x_{2m+1}\right) = 2y_{2m+1}^2 - x_{2m+1}^2.$$

Suy ra $1 + x_{2m+1}^2 = 2y_{2m+1}^2$. Do đó

$$x_{2m+1}^4 + x_{2m+1}^2 = 2(x_{2m+1}y_{2m+1})^2.$$

Mà

$$x_{2m+1}^4 < x_{2m+1}^4 + x_{2m+1}^2 < \left(x_{2m+1}^2 + 1\right)^2 \Rightarrow x_{2m+1}^2 < \sqrt{x_{2m+1}^4 + x_{2m+1}^2} < x_{2m+1}^2 + 1.$$

Suy ra

$$\left[\sqrt{x_{2m+1}^4 + x_{2m+1}^2}\right] = x_{2m+1}^2 \Rightarrow \left[x_{2m+1}y_{2m+1}\sqrt{2}\right] = x_{2m+1}^2.$$

Đặt $b_m = x_{2m+1}y_{2m+1}$, ta có $b_m$ là dãy các số dương và là dãy tăng thực sự nên $\{b_m\}$ nhân vô số giá trị nguyên dương và $u_{b_m} = x_{2m+1}^2 \Rightarrow u_{b_m}$ là số chính phương điều phải chứng minh. □

Ví dụ 14. *(Định lí Beatty về phân hoạch tập số nguyên dương) Cho* $\alpha$; $\beta$ *là các số vô tỷ dương sao cho* $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. *Khi đó hai tập (hai dãy) vô hạn*

$$A = \{\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, \ldots\} \text{ và } B = \{\lfloor \beta \rfloor, \lfloor 2\beta \rfloor, \lfloor 3\beta \rfloor, \ldots\}$$

*lập thành hai "phân hoạch" của tập các số nguyên dương* $\mathbb{N}^*$. *Tức là là*

$$A \cap B = \emptyset \text{ và } A \cup B = \mathbb{N}^*.$$

Lời giải. Trước tiên ta chứng minh sự tách rời giữa $A \cap B = \emptyset$. Thật vậy, giả sử $\exists i, j$ sao cho $\lfloor i\alpha \rfloor = \lfloor j\beta \rfloor = k$ Khi đó, bởi vì $i\alpha$ và $j\beta$ đều là các số vô tỷ nên $k < i\alpha < k + 1$ và $k < j\beta < k + 1$ hay

$$\frac{i}{k+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{i}{k} \text{ và } \frac{j}{k+1} < \frac{1}{\beta} < \frac{j}{k}.$$

Cộng các bất đẳng thức này lại theo vế, ta được

$$\frac{i+j}{k+1} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 < \frac{i+j}{k} \Rightarrow k < i + j < k + 1 \Rightarrow \text{ vô lý!}$$

Vậy ta có $A \cap B = \emptyset$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh số tự nhiên $n$ bất kỳ sẽ phải có mặt hoặc trong $A$ hoặc trong $B$. Thật vậy, cũng bằng phương pháp phản chứng, ta giả sử $n$ không xuất hiện trong cả hai dãy trên, khi đó $\exists i, j$ sao cho

$$\begin{cases} i\alpha < n \\ (i+1)\alpha > n + 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} j\beta < n \\ (j+1)\beta > n + 1 \end{cases}$$

hay là

$$\frac{i}{n} < \frac{1}{\alpha} < \frac{i+1}{n+1} \text{ và } \frac{j}{n} < \frac{1}{\beta} < \frac{j+1}{n+1}.$$

Cộng các bất đẳng thức này lại theo vế, ta được

$$\frac{i+j}{n} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 < \frac{i+j+2}{n+1} \Rightarrow i + j < n < i + j + 1 \Rightarrow \text{ vô lý!}$$

Như vậy ta có $A \cup B = \mathbb{N}^*$. □

Sau đây chúng tôi giới thiệu một số bài tập để bạn đọc nghiên cứu.

## 3. Bài tập

Bài tập 1. Tìm số hạng phân biệt của dãy số hữu hạn $\left\lfloor \frac{k^2}{1998} \right\rfloor$, với $k = 1, 2, \ldots, 1997$.

(1998 Balkan Mathematical Olympiad)

Bài tập 2. Xác định số các số thực $a$ thoả phương trình

$$\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{5} \right\rfloor = a$$

(1998 Canadian Mathematical Olympiad)

Bài tập 3. Cho $\lambda$ là nghiệm dương của phương trình $t^2 - 1998t - 1 = 0$. Dãy số $x_0, x_1, \ldots$ được xác định bởi

$$x_0 = 1,\ x_{n+1} = \lfloor \lambda x_n \rfloor,\ n \geqslant 0.$$

Tìm số dư của phép chia $x_{1998}$ cho 1998.

Bài tập 4. Cho dãy số nguyên dương $(u_n)$ thỏa

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 1 + \left[\frac{u_{n+1}^2}{u_n}\right],\ n \geqslant 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = 2^n$ với mọi số tự nhiên $n$.

Bài tập 5. Cho $n$ là số nguyên dương. Tìm công thức của tổng

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{2^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor + \cdots$$

Bài tập 6. Tình tổng

$$\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \left\lfloor \frac{x+i}{j} \right\rfloor,$$

với $x$ là số thực.

Bài tập 7. So sánh giá trị của các tổng sau

$$\sum_{k=0}^{2000} \left\lfloor \frac{3^k + 2000}{3^{k+1}} \right\rfloor \text{ và } \sum_{k=0}^{2000} \left\lfloor \frac{3^k - 2000}{3^{k+1}} \right\rfloor.$$

Bài tập 8. a) Chứng minh rằng có vô số các số hữu tỉ dương $x$ thoả

$$\left\{x^2\right\} + \{x\} = 0,99.$$

b) Chứng minh rằng không tồn tại số hữu tỉ dương $x$ thoả $\left\{x^2\right\} + \{x\} = 1$.

(2004 Romanian Mathematical Olympiad)

Bài tập 9. Cho các số hữu tỉ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ thoả

$$\sum_{i=1}^{n} \{k\alpha_i\} < \frac{n}{2}$$

với bất kì số nguyên dương $k$.

a) Chứng minh rằng có ít nhất một só trong các số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là số nguyên.

b) Có tồn tại hay không $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ thoả $\sum\limits_{i=1}^{n} \{k\alpha_i\} \leqslant \frac{n}{2}$ sao cho các $\alpha_i$ không là số nguyên.

Bài tập 10. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n^2}{k^2} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{n^2} \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{k}} \right\rfloor,$$

với mọi số nguyên $n \geqslant 1$.

Bài tập 11. Cho $\theta$ là số vô tỉ dương. Khi đó với mỗi số nguyên dương $m$ ta có

$$\sum_{k=1}^{m} \lfloor k\theta \rfloor + \sum_{k=1}^{\lfloor m\theta \rfloor} \left\lfloor \frac{k}{\theta} \right\rfloor = m \lfloor m\theta \rfloor.$$

Bài tập 12. Cho $p$ và $q$ là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau và $m$ là số thực thoả $1 \leqslant m < p$.

1. Nếu $s = \left\lfloor \frac{mq}{p} \right\rfloor$ thì $\sum\limits_{k=1}^{\lfloor m \rfloor} \left\lfloor \frac{kq}{p} \right\rfloor + \sum\limits_{k=1}^{s} \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor = \lfloor m \rfloor s$.

2. Nếu $p$ và $q$ là các số lẻ thì $\sum\limits_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\lfloor \dfrac{kq}{p} \right\rfloor + \sum\limits_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \left\lfloor \dfrac{kp}{q} \right\rfloor = \dfrac{(p-1)(q-1)}{4}$.

Bài tập 13. Cho $p$ là số nguyên tố lẻ, $q$ là số nguyên không chia hết cho $q$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left\lfloor (-1)^k \cdot k^2 \frac{q}{p} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Bài tập 14. Cho $p$ là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{k^p - k}{p} \equiv \frac{p+1}{2} \pmod{p}.$$

Bài tập 15. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n$ thì $\left[ \left( \sqrt{2} + \sqrt{3} \right)^{2n} \right]$ không chia hết cho 5.

Bài tập 16. Chứng minh rằng phương trình

$$\left\lfloor n\sqrt{2} \right\rfloor + 2n = \left\lfloor m\sqrt{2} \right\rfloor$$

không có nghiệm nguyên dương $m, n$.

Bài tập 17. Chứng minh rằng dãy số $(a_n) : a_n = [n\sqrt{2}]$ chứa vô hạn số hạng là lũy thừa nguyên của 3.

Bài tập 18. Tập $S \subseteq \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $\forall a \in S$ thì $4a \in S$ và $\left[\sqrt{a}\right] \in S$. Chứng minh $S = \mathbb{Z}^+$.

Bài tập 19. (APMO 2009) Cho $2k$ số thực $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$. Xác định dãy số $(X_n)$ như sau

$$X_n = \sum_{i=1}^{k} [a_i n + b_i],\ n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng nếu $(X_n)$ là một cấp số cộng thì $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i$ là số nguyên.

## Tài liệu


[1] Hà Huy Khoái, *Các chuyên đề bồi dưỡng số học*, NXB Giáo dục, năm 2006.

[2] Titu Andreescu and Dorin Andrica, 2009. *Number Theory: Structures, Examples, and Problems (179-188).*

[3] Các website: `ArtofProblemSolving.com`, `diendantoanhoc.net`

# TỪ ĐA THỨC CHEBYSHEV ĐẾN BẤT ĐẲNG THỨC BERSTEIN - MARKOV

Trịnh Đào Chiến
(Trường Cao đẳng Sư phạm Gia Lai)

## GIỚI THIỆU

Đa thức Chebyshev là một sự liên kết đẹp đẽ giữa Đại số với Lượng giác. Định lí Berstein - Markov mô tả mối quan hệ giữa đa thức với đạo hàm của nó. Đã có khá nhiều công trình nghiên cứu về các vấn đề này. Từ Đa thức Chebyshev đến Định lí Berstein - Markov là cả một chặng hành trình mà bài viết này chỉ làm cái công việc của người lữ khách, ngồi tỉ mẩn kể lại một vài kỷ niệm sau một chuyến đi xa.

Thời còn là sinh viên, khi lần đầu tiếp xúc với khái niệm Đa thức Chebyshev, người viết bài này cứ thắc mắc: vì sao lại định nghĩa một cách "áp đặt" rằng $T_n(x) = \cos n\alpha$, khi $x = \cos\alpha$? Phải đến một thời gian khá dài, mới "ngấm" cái sự tinh tế ấy.

Một vài kiến thức trong nội dung bài viết có thể vượt quá kiến thức phổ thông, nhưng có thể được trang bị ngay ở chương trình đào tạo cho sinh viên năm thứ nhất, ngành toán học.

Bây giờ, giả sử $T_n(x)$ là đa thức biến số $x \in \mathbb{R}$, bậc $n$. Ta biết rằng, với mỗi $x \in [-1, 1]$ luôn tồn tại duy nhất $\alpha \in [0, \pi]$ sao cho $x = \cos\alpha$, trong đó $x = -1$ khi và chỉ khi $\alpha = \pi$, $x = 1$ khi và chỉ khi $\alpha = 0$. Khi đó , bởi hàm số $y = \cos x$ là hàm giảm nghiêm ngặt trên đoạn $[-1, 1]$ nên $\alpha = \arccos x$ và $T_n(x) = T_n(\cos\alpha)$ là đa thức bậc $n$ theo $\cos\alpha$.

Ngoài ra, theo Công thức Moivre, $\cos n\alpha$ cũng biểu diễn được bởi một đa thức bậc $n$ theo $\cos\alpha$. Lưu ý rằng, với $T_n(x)$ là đa thức bất kì xác định trước thì 2 đa thức bậc $n$ theo $\cos\alpha$ này thường là khác nhau.

Một cách tự nhiên, người ta nghĩ ngay đến việc bổ sung thêm điều kiện $T_n(x) = \cos n\alpha$, khi $x = \cos\alpha$, cho đa thức $T_n(x)$. Khi đó, khái niệm Đa thức Chebyshev được hình thành, được đặt tên theo nhà toán học Nga Pafnuty Lvovich Chebyshev.

**Định nghĩa 1.** *Đa thức $T_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, được gọi là Đa thức Chebyshev loại 1 nếu thỏa mãn điều kiện*

$$T_n(x) = \cos n\alpha, \text{ khi } x = \cos\alpha.$$

Nhận xét rằng

$T_0(x) = T_0(\cos\alpha) = \cos 0\alpha = \cos 0 = 1,$

$T_1(x) = T_1(\cos\alpha) = \cos 1\alpha = \cos\alpha = x,$

$T_2(x) = T_2(\cos\alpha) = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2x^2 - 1,$

$T_3(x) = T_3(\cos\alpha) = \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 4x^3 - 3x,$

$T_4(x) = T_4(\cos\alpha) = \cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1, \ldots$

Hơn nữa, với $n \geq 2$, vì $\cos n\alpha + \cos(n-2)\alpha = 2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha$ nên ta có

$$\begin{aligned} T_n(x) = T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha &= 2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha - \cos(n-2)\alpha \\ &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x). \end{aligned}$$

Vậy $T_n(x)$ được xác định theo hệ thức truy hồi

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

Dưới đây là một số tính chất của Đa thức Chebyshev loại 1.

**Tính chất 1.** *a) $T_n(x) = \cos(n.arcosx)$ với mọi $x \in [-1, 1]$.*

*b) $|T_n(x)| \leq 1$ với mọi $x \in [-1, 1]$.*

**Chứng minh.** Thật vậy, với $x \in [-1, 1]$, ta có $T_n(x) = \cos n\alpha = \cos(n.\text{arcos}x)$. Suy ra $|T_n(x)| \leq 1$ với mọi $x \in [-1, 1]$.

**Tính chất 2.** *$T_n(x)$ là đa thức với hệ số nguyên, bậc $n$, hệ số của $x^n$ bằng $2^{n-1}$ và là hàm số chẵn khi $n$ chẵn, hàm số lẻ khi $n$ lẻ.*

**Chứng minh.** Từ hệ thức truy hồi xác định $T_n(x)$ nêu trên, dễ dàng suy ra rằng $T_n(x)$ là đa thức với hệ số nguyên, bậc $n$, hệ số của $x^n$ bằng $2^{n-1}$.

Bây giờ, ta chứng minh tính chất cuối cùng bằng phương pháp quy nạp. Nhận xét rằng $T_0(x) = 1$ là hàm số chẵn, $T_1(x) = x$ là hàm số lẻ, $T_2(x) = 2x^2 - 1$ là hàm số chẵn, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ là hàm số lẻ. Khi đó, với mọi $n \geq 2$, ta có

+ Nếu $n$ là số chẵn, giả sử rằng $T_{n-2}(x)$ là hàm số chẵn và $T_{n-1}(x)$ là hàm số lẻ, thì ta có

$$T_n(-x) = 2(-x)T_{n-1}(-x) - T_{n-2}(-x) = 2(-x)(-T_{n-1}(x)) - T_{n-2}(x)$$

$$= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) = T_n(x).$$

Do đó $T_n(x)$ là hàm số chẵn.

+ Nếu $n$ là số lẻ, giả sử rằng $T_{n-2}(x)$ là hàm số lẻ và $T_{n-1}(x)$ là hàm số chẵn, thì ta có

$$T_n(-x) = 2(-x)T_{n-1}(-x) - T_{n-2}(-x)$$

$$= 2(-x)(T_{n-1}(x)) - (-T_{n-2}(x)) = -2xT_{n-1}(x) + T_{n-2}(x) = -T_n(x).$$

Do đó $T_n(x)$ là hàm số lẻ.

**Tính chất 3.** *$T_n(x)$ có đúng $n$ nghiệm phân biệt trên đoạn $[-1, 1]$, là*

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \ k = 1, 2, ..., n.$$

*Hơn nữa, $T_n(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x^*{}_k = cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, được gọi là các điểm luân phiên (hoặc là các luân điểm) của $T_n(x)$, với các giá trị cực trị tương ứng là $T_n(x^*{}_k) = (-1)^k$, $k = 1, 2, ..., n-1$.*

**Chứng minh.** Với mỗi $k = 1, 2, ..., n$, ta có

$$T_n(x_k) = \cos(n.\text{arcos}(x_k)) = \cos\left(n.\text{arcos}\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right)\right) = \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right) = 0.$$

Hơn nữa, với mỗi $k = 1, 2, ..., n-1$, ta có

$$T_n{}'(x) = \frac{d}{dx}(\cos(n.\text{arccos}x)) = \frac{nsin(n.\text{arccos}x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Do đó

$$T_n{}'(x^*{}_k) = \frac{nsin(n.\text{arccos}x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{nsin\left(n.\text{arccos}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\right)}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}} = \frac{nsin(k\pi)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = 0$$

và

$$T_n\left(x^*{}_k\right) = \cos\left(n.\text{arcos}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\right) = \cos\left(k\pi\right) = \left(-1\right)^k.$$

Ta nhắc lại rằng, hai hàm $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ bình phương khả tích trên đoạn $[a, b]$ được gọi là trực giao, tương ứng với một hàm trọng $\omega\left(x\right)$ xác định, liên tục, không âm, trên đoạn đó nếu $\int\limits_a^b \omega\left(x\right) f\left(x\right) g\left(x\right) dx = 0$.

**Tính chất 4.** *Dãy đa thức $\{T_n\left(x\right)\}$ là dãy đa thức trực giao, tương ứng với hàm trọng là hàm mật độ $\omega\left(x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ xác định trên khoảng mở $(-1, 1)$.*

**Chứng minh.** Ta cần chứng minh rằng, các đa thức $T_n\left(x\right)$ xác định trên khoảng mở $(-1, 1)$, tương ứng với hàm trọng là hàm mật độ $\omega\left(x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, sẽ thỏa mãn tính chất sau

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{T_n\left(x\right) T_m\left(x\right)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, \text{ nếu } n \neq m, \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ nếu } n = m \neq 0, \\ \pi, \text{ nếu } n = m = 0. \end{cases}$$

Thật vậy, với $n \geq 0$, $m \geq 0$, ta có

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{T_n\left(x\right) T_m\left(x\right)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int\limits_{-1}^{1} \cos\left(n.\text{arccos}x\right) \cos\left(m.\text{arccos}x\right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Với $\alpha = \text{arcos}x$, ta có $d\alpha = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Vậy

$$I = -\int\limits_{\pi}^{0} \cos\left(n\alpha\right) \cos\left(m\alpha\right) d\alpha = \int\limits_{0}^{\pi} \cos\left(n\alpha\right) \cos\left(m\alpha\right) d\alpha$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos\left(n+m\right)\alpha + \cos\left(n-m\right)\alpha}{2} d\alpha.$$

- Nếu $n \neq m$, thì

$$I = \left[\frac{1}{2\left(n+m\right)} sin\left(n+m\right)\alpha + \frac{1}{2\left(n-m\right)} sin\left(n-m\right)\alpha\right]_0^{\pi} = 0.$$

- Nếu $n = m \neq 0$, thì

$$I = \left[\frac{1}{2\left(n+m\right)} sin\left(n+m\right)\alpha + \frac{x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

- Nếu $n = m = 0$, thì

$$I = \int_0^\pi d\alpha = \pi.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Một cách tự nhiên, người ta nghĩ đến việc tương tự hóa Định nghĩa 1 đối với hàm sin.

**Định nghĩa 2.** *Đa thức $U_n(x), x \in \mathbb{R}$, bậc $n$, được gọi là Đa thức Chebyshev loại 2 nếu thỏa mãn điều kiện*

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}, \text{ khi } x = \cos\alpha.$$

Miền xác định của $x$ và $\alpha$ tương tự như đối với đa thức $T_n(x)$.

Nhận xét rằng

$$U_0(x) = U_0(\cos\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} = 1,$$

$$U_1(x) = U_1(\cos\alpha) = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha = 2x,$$

$$T_2(x) = T_2(\cos\alpha) = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha\left(4\cos^2\alpha - 1\right)}{\sin\alpha} = 4\cos^2\alpha - 1 = 4x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = T_3(\cos\alpha) = \frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha\left(8\cos^3\alpha - 4\cos\alpha\right)}{\sin\alpha} = 8\cos^3\alpha - 4\cos\alpha = 8x^3 - 4x, ...$$

Hơn nữa, với $n \geq 2$, vì $\sin(n+1)\alpha + \sin(n-1)\alpha = 2\cos\alpha.\sin n\alpha$ nên ta có

$$U_n(x) = U_n(\cos\alpha) = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\cos\alpha.\sin n\alpha - \sin(n-1)\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= 2\cos\alpha\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin(n-1)\alpha}{\sin\alpha} = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x).$$

Vậy $U_n(x)$ được xác định theo hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} U_0(x) = 1, \; U_1(x) = 2x, \\ U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \; n \geq 2. \end{cases}$$

Tương tự, ta có thể chứng minh các tính chất sau của Đa thức Chebyshev loại 2.

**Tính chất 5.** *a)* $U_n(x) = \dfrac{sin(n.arcosx)}{\sqrt{1-x^2}}$, *với mọi* $x \in (-1,1)$.

*b)* $U_n(x) = \dfrac{1}{n} T_n{}'(x)$.

**Tính chất 6.** $U_n(x)$ *là đa thức với hệ số nguyên, bậc* $n-1$, *hệ số của* $x^n$ *bằng* $2^{n-1}$ *và là hàm số chẵn khi* $n$ *lẻ, hàm số lẻ khi* $n$ *chẵn.*

**Tính chất 7.** $|U_n(x)| \le n$ *với mọi* $x \in (-1,1)$.

**Tính chất 8.** $U_n(x)$ *có đúng* $n$ *nghiệm phân biệt trên đoạn* $[-1,1]$, *là*

$$x_k = \cos\left(\frac{k}{n+1}\pi\right), \; k = 1,2,...,n.$$

*Hơn nữa,* $U_n(x)$ *đạt cực trị tại các điểm* $x^*{}_k = cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, *với các giá trị cực trị tương ứng là* $T_n(x^*{}_k) = (-1)^k$, $k = 1,2,...,n-1$.

**Tính chất 9.** *Dãy đa thức* $\{U_n(x)\}$ *là dãy đa thức trực giao, tương ứng với hàm trọng là hàm mật độ* $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$ *xác định trên khoảng đóng* $[-1,1]$.

Các nội dung trên đã phần nào cho thấy một góc liên kết đẹp đẽ giữa Đại số với Lượng giác của Đa thức Chebyshev. Định lí Berstein - Markov có thể được xem như là sản phẩm của sự liên kết đó. Sau đây là những con đường dẫn đến định lí này, với một số áp dụng đối với toán phổ thông.

**Định lí 1 (Berstein).** *Nếu* $t(x) = \dfrac{1}{2}a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k sinkx)$, *thì*

$$\left|t'(x)\right| \le n.\text{sup}\,|t(x)|\,.$$

**Chứng minh.** Giả sử, ngược lại, rằng $\sup\left|t'(x)\right| = nl$, trong đó $l > \sup|t(x)|$. Vì $t'(x)$ là hàm liên tục nên tồn tại giá trị $c$ sao cho $t'(c) = \pm nl$. Giả sử rằng $t'(c) = nl$. Vì $nl$ là giá trị lớn nhất của $t'(x)$, nên $t''(c) = 0$. Xét hàm số $S(x) = l\sin n(x-c) - t(x)$. Ta có $r(x) = S'(x) = nl\text{cos}n(x-c) - t'(x)$. $S(x)$ và $r(x)$ đều có bậc $n$. Xét các điểm

$$u_0 = c + \frac{\pi}{2n}, \; u_k = u_0 + \frac{k\pi}{2n}, \; k = 1,2,...,2n.$$

Thế thì $S(u_0) = 1 - t(u_0) > 0$, $S(u_1) = 1 - t(u_1) < 0$, ... $S(u_{2n}) = 1 - t(u_{2n}) > 0$.

Mỗi khoảng $(u_0,\ u_1)$, $(u_1,\ u_2)$, ... , $(u_{2n-1}, u_{2n})$ chứa một không - điểm của $S(x)$, nghĩa là $S(y_i) = 0$, trong đó $u_i < y_i < u_{i+1}$, $i = 0, 1, ..., 2n-1$. Dễ thấy $y_{2n-1} < y_0 + 2\pi$. Ta viết $y_{2n} = y_0 + 2\pi$. Thế thì $S(y_{2n}) = S(y_0) = 0$.

Bởi Định lí Rolle, tồn tại một không-điểm $x_i$ của $r(x)$ thuộc mỗi khoảng $(y_i, y_{i+1})$, $i = 0, 1, ..., 2n-1$. Dễ thấy rằng $x_{2n-1} < x_0 + 2\pi$. Ta có $r(c) = nl - t'(c) = 0$. Vì đa thức $r(x)$ có bậc $n$,.... có $2n$ không-điểm, nên suy ra rằng, với mỗi $k$, ta có $c \equiv x_k \,(\mathrm{mod} 2\pi)$. Nhưng $r'(c) = -t''(c) = 0$. Do đó $c$ (và cũng như thế với $x_k$) là không - điểm bội 2 (và là điểm cực tiểu) của $r(x)$. Do đó $r(x) \equiv 0$ và $S(x)$ là hằng số. Tuy nhiên $S(u_0) > 0$ và $S(u_1) < 0$, mâu thuẫn. Ta có điều phải chứng minh.

**Hệ quả 1.** *Nếu đa thức $P(x)$ có bậc $n$ và $|P(x)| \le M$, với mọi $x \in (-1, 1)$, thì*

$$\left|P'(x)\right| \le nM\sqrt{1-x^2}.$$

**Chứng minh.** Đặt $t(\alpha) = P(\cos\alpha)$. Ta có $t'(\alpha) = -\sin\alpha.P'(\cos\alpha)$. Áp dụng Định lí 1, ta có điều phải chứng minh.

**Hệ quả 2.** *Giả sử đa thức lượng giác $P(x) = \sum\limits_{j=0}^{n}(a_j\cos jx + b_j\sin jx)$ thỏa mãn điều kiện $|P(x)| \le 1$, với mọi $x \in R$. Thế thì, ta có $\left|P'(x)\right| \le n$, với mọi $x \in R$.*

Ta có kết quả sau

**Bổ đề 1.** *Giả sử*

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right),\ k = 1, 2, ..., n$$

*là các không - điểm của Đa thức Chebyschev $T_n(x)$. Nếu đa thức $P(x)$ có bậc $n-1$, thì*

$$P(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sqrt{1-{x_k}^2}P(x_k)\frac{T_n(x)}{x-x_k}.$$

**Chứng minh.** Vì $x_k = \cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$, nên $n.\arccos x_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2}$. Vậy

$$\sin(n.\arccos x_k) = \sin\frac{(2k-1)\pi}{2} = (-1)^{k-1}.$$

Suy ra

$$T_n{}'(x) = (\cos(n.\arccos x))' = \frac{n.\sin(n.\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Do đó

$$T_n{}'(x_k) = \frac{n.\sin(n.\arccos x_k)}{\sqrt{1 - x_k{}^2}} = \frac{n(-1)^{k-1}}{\sqrt{1 - x_k{}^2}}$$

hay $n = (-1)^{k-1}.\sqrt{1 - x_k{}^2}.T_n{}'(x_k)$.

Bây giờ, áp dụng Công thức nội suy Lagrange cho đa thức $P(x)$, với các mốc nội suy là $x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$, ta có

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} \left( P(x_k) . \prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} nP(x) &= n.\sum_{k=1}^{n} \left( P(x_k) . \prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) \\ &= \left( (-1)^{k-1}.\sqrt{1 - x_k{}^2}.T_n{}'(x_k) \right) . \sum_{k=1}^{n} \left( P(x_k) . \prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left( (-1)^{k-1}.\sqrt{1 - x_k{}^2}.P(x_k) . \frac{T_n(x)}{x - x_k} \right) \end{aligned}$$

hay

$$P(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left( (-1)^{k-1}.\sqrt{1 - x_k{}^2}.P(x_k) . \frac{T_n(x)}{x - x_k} \right).$$

Ta có điều phải chứng minh.

**Hệ quả 3.** *Giả sử đa thức $P_{n-1}(x)$ có bậc không vượt quá $n-1$, có hệ số cao nhất là $a_0$, thỏa mãn điều kiện*

$$\sqrt{1 - x^2}\,|P_{n-1}(x)| \leq 1, \ \forall x \in [-1, 1].$$

*Thế thì, ta có $|a_0| \leq 2^{n-1}$.*

**Giải.** Ta viết đa thức đã cho dưới dạng Đa thức nội suy Lagrange theo các nút nội suy

$$x_k = \cos\left( \frac{2k-1}{2n}\pi \right), \ k = 1, 2, ..., n,$$

là các nghiệm của Đa thức Chebyshev $T_n(x)$. Áp dụng Bổ đề 1, ta có

$$P(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sqrt{1 - x_k{}^2} P(x_k) \frac{T_n(x)}{x - x_k}.$$

Suy ra
$$a_0 = \frac{2^{n-1}}{n} \sum_{k=1}^{n} n(-1)^{k-1}\sqrt{1-{x_k}^2}P\left(x_k\right).$$

Do đó
$$|a_0| \leq \frac{2^{n-1}}{n} \sum_{k=1}^{n} n\left|\sqrt{1-{x_k}^2}P\left(x_k\right)\right| \leq \frac{2^{n-1}}{n}n = 2^{n-1}.$$

**Bổ đề 2.** *Giả sử đa thức $Q\left(x\right)$ có bậc $n-1$ và*
$$\left|Q\left(x\right)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in \left(-1, 1\right).$$

*Thế thì $\left|Q\left(x\right)\right| \leq n, \ \forall x \in \left[-1, 1\right].$*

**Chứng minh.** Giả sử rằng $-x_1 = x_n \leq x \leq x_1$. Thế thì, bởi Bổ đề 1, ta có
$$\sqrt{1-x^2} \geq \sqrt{1-{x_1}^2} = \sin\frac{\pi}{2n} \geq \frac{1}{n}.$$

Do đó Bổ đề đúng với $x_n \leq x \leq x_1$.

Nếu $x_1 < x \leq 1$ (hoặc $-1 \leq x < x_n$), thì bởi Bổ đề 1, ta có
$$\left|Q\left(x\right)\right| \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{T_n\left(x\right)}{x-x_k}\right|.$$

Vậy
$$T_n\left(x\right) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(x-x_k).$$

Suy ra
$$\frac{{T_n}'\left(x\right)}{T_n\left(x\right)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}.$$

Do đó
$$\left|Q\left(x\right)\right| \leq \frac{1}{n}\left|{T_n}'\left(x\right)\right|.$$

Với $x = \cos\alpha$, ta có
$${T_n}'\left(x\right) = \frac{n.\sin n\alpha}{\sin\alpha}.$$

Khi đó, ta có $\left|{T_n}'\left(x\right)\right| \leq n^2$. Suy ra điều phải chứng minh.

**Bổ đề 3.** *Cho đa thức lượng giác* $P(t) = a_1 \sin t + a_2 \sin 2t + ... + a_n \sin nt$, *thỏa mãn điều kiện* $|P(t)| \leq 1,\ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...\}$.

*Chứng minh rằng*

$$\left|\frac{P(t)}{\sin t}\right| \leq n,\ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...\}.$$

**Giải.** Nhận xét rằng

$$\frac{P(t)}{\sin t} = P_{n-1}(\cos t).$$

Đặt $\cos t = x$. Khi đó $|x| \leq 1$ và $P(t) = \sin t P_{n-1}(\cos t) = \sqrt{1-x^2} P_{n-1}(x)$. Nhận xét rằng $P(x)$ thỏa mãn các điều kiện của Bổ đề 2, nên $|P_{n-1}(x)| \leq n, \forall x \in [-1, 1]$. Do đó

$$\left|\frac{P(t)}{\sin t}\right| \leq n,\ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...\}.$$

Từ các kết quả trên, ta có định lí kinh điển sau

**Định lí 2 (Berstein - Markov).** *Giả sử đa thức* $P(x)$ *có bậc* $n$, *thỏa mãn điều kiện* $|P_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1, 1]$. *Khi đó*

$$\left|P_n'(x)\right| \leq n^2,\ \forall x \in [-1, 1].$$

Bất đẳng thức cuối cùng trong định lí trên được gọi là Bất đẳng thức Berstein - Markov.

**Chứng minh.** Đặt $x = \cos\alpha$. Khi đó, bởi giả thiết, ta có $|P(\cos\alpha)| \leq 1$.

Hơn nữa $P(\cos\alpha)$ có dạng $P(\cos\alpha) = \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k sin kx)$, nên áp dụng Định lí 1, ta có $\left|\sin\alpha . P'(\cos\alpha)\right| \leq 1$. Suy ra

$$\sqrt{1-x^2}.\left|\frac{P'(x)}{n}\right| \leq 1.$$

Dó đó, áp dụng Bổ đề 3, ta có

$$\left|\frac{P'(x)}{n}\right| \leq n.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Khá nhiều bài toán về bất đẳng thức ở phổ thông được thiết lập dựa vào Bất đẳng thức Berstein - Markov. Tuy nhiên, vì việc chứng minh bất đẳng thức này vượt ra ngoài kiến thức phổ thông nên người ta thường tìm kiếm một lời giải phổ thông cho các bài toán đó. Sau đây là một số minh họa cho phương pháp này.

Xét đa thức $P(x) = ax + b$, thỏa mãn điều kiện $|P(x)| = |ax + b| \leq 1, \forall x \in [-1, 1]$. Áp dụng Bất đẳng thức Berstein - Markov, ta có $\left|P'(x)\right| \leq n^2$, hay $|a| \leq 1,\ \forall x \in [-1, 1]$.

Ta thiết lập được bài toán sau

**Bài toán 1 (Olympic sinh viên VN 2016 - Khối học sinh phổ thông).** *Giả sử $a$ và $b$ là hai số thực sao cho $|ax + b| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$. Chứng minh rằng*

*i)* $|a| \leq 1$.

*ii)* $|bx + a| \leq 1$ *khi* $|x| \leq 1$.

**Giải.** Bởi giả thiết $|ax + b| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$, ta có $|a + b| \leq 1$ (khi $x = 1$) và $|-a + b| \leq 1$ (khi $x = -1$).

i) Từ Bất đẳng thức tam giác, ta có $|2a| = |(a + b) - (-a + b)| \leq |a + b| + |-a + b| \leq 2$. Suy ra $|a| \leq 1$. Ta có điều phải chứng minh.

ii) Để chứng minh $|bx + a| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$, ta chỉ cần kiểm tra tại $x = \pm 1$. Nói cách khác, ta cần kiểm tra rằng $|a + b| \leq 1$ và $|a - b| \leq 1$. Điều này đã được chứng minh ở câu i) ở trên.

Tương tự, xét đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$, thỏa mãn điều kiện $|P(x)| = |ax^2 + bx + c| \leq 1, \forall x \in [-1, 1]$. Áp dụng Bất đẳng thức Berstein - Markov, ta có $\left|P'(x)\right| \leq n^2$, hay $|2ax + b| \leq 4,\ \forall x \in [-1, 1]$.

Ta thiết lập được bài toán sau

**Bài toán 2 (Olympic sinh viên VN 2016 - Khối học sinh phổ thông).** *Giả sử $a$, $b$, $c$ là $b$ số thực sao cho các giá trị của đa thức $ax^2 + bx + c$ tại $1$, $0$, $-1$ đều thuộc đoạn $[-1, 1]$. Chứng minh rằng*

*i)* $|2ax + b| \leq 4$ *khi* $|x| \leq 1$.

*ii)* $|cx^2 + bx + a| \leq 2$ *khi* $|x| \leq 1$.

**Giải.** i) Đặt $d = a + b + c$ và $e = a - b + c$. Khi đó, theo giả thiết, ta có

$$a = \frac{1}{2}(d + e) - c,\ b = \frac{1}{2}(d - e).$$

Vậy
$$2a + b = (d + e) - 2c + \frac{1}{2}(d - e) = \frac{3}{2}d - 2c + \frac{1}{2}e.$$

Từ đó, theo bất đẳng thức tam giác, ta có
$$|2a + b| \leq \frac{3}{2}|d| + 2|c| + \frac{1}{2}|e| \leq \frac{3}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 4.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $|2ax - b| \leq 4$.

ii) Ta có
$$cx^2 + bx + a = c\left(x^2 - 1\right) + \frac{d}{2}(1 + x) + \frac{e}{2}(1 - x).$$

Vậy, theo bất đẳng thức tam giác, khi $|x| \leq 1$, ta có
$$\left|cx^2 + bx + a\right| = \left|c\left(x^2 - 1\right) + \frac{d}{2}(1 + x) + \frac{e}{2}(1 - x)\right| \leq \left|x^2 - 1\right| + \frac{1}{2}|1 + x| + \frac{e}{2}|1 - x|$$
$$= 1 - x^2 + \frac{1}{2}(1 + x + 1 - x) = 2 - x^2 \leq 2.$$

Tương tự, xét đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, thỏa mãn điều kiện
$$|P(x)| = \left|ax^3 + bx^2 + cx + d\right| \leq 1, \forall x \in [-1, 1].$$

Áp dụng Bất đẳng thức Berstein - Markov, ta có $\left|P'(x)\right| \leq n^2$, hay
$$\left|3ax^2 + 2bx + c\right| \leq 9, \ \forall x \in [-1, 1].$$

Ta thiết lập được bài toán sau và có thể giải nó bằng kiến thức phổ thông

**Bài toán 3 (Olympic sinh viên VN 2016 - Khối học sinh phổ thông).** *Giả sử $a$, $b$,$c$, $d$ là bốn số thực sao cho các giá trị $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ của đa thức $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tương ứng tại $-1$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $1$ đều thuộc đoạn $[-1, 1]$. Chứng minh rằng*

*i) Với mọi số thực $A$, $B$, ta có đẳng thức $|A + B| + |A - B| = 2\max\{|A|, |B|\}$.*

*ii) Bằng cách biểu diễn $3ax^2 + 2bx + c$ theo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ và $x$, hãy chứng minh rằng $|3ax^2 + 2bx + c| \leq 9$ khi $|x| \leq 1$.*

*iii) $|dx^3 + cx^2 + bx + a| \leq 4$ khi $|x| \leq 1$.*

Một số bài toán, chẳng hạn sau đây, cũng có thể thiết lập dựa vào Bất đẳng thức Berstein - Markov, với một lời giải hoàn toàn bằng kiến thức phổ thông.

**Bài toán 4.** *Cho $a$, $b$,$c$ là ba số thực và $n$ là một số nguyên dương. Giả sử đa thức $f(x) = ax^{2n} + bx + c$ có các giá trị $1$, $0$, $-1$ đều thuộc đoạn $[-1, 1]$. Chứng minh rằng*

*i)* $|f(x)| \le \dfrac{2n-1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}} + 1$ *khi* $|x| \le 1$.

*ii) Với mỗi* $1 \le M < \infty$, *ta có* $|f(x)| \le 2M^{2n} - 1$ *khi* $1 \le |x| \le M$.

**Giải.** i) Ta có $a = \dfrac{1}{2}(d+e) - c$, $b = \dfrac{1}{2}(d-e)$. Như vậy

$$f(x) = \frac{d}{2}\left(x^{2n} + x\right) + \frac{e}{2}\left(x^{2n} - x\right) + c\left(1 - x^{2n}\right).$$

Theo giả thiết, $\max\{|c|, |d|, |e|\} \le 1$, nên dựa vào kết luận của Bài 3i) ở trên, khi $|x| \le 1$, ta có

$$\begin{aligned}|f(x)| &\le \frac{1}{2}\left(\left|x^{2n} + x\right| + \left|x^{2n} - x\right|\right) + \left|1 - x^{2n}\right| \\ &= \max\left\{x^{2n}, |x|\right\} + 1 - x^{2n} = 1 + x - x^{2n}.\end{aligned}$$

- *Cách 1.* Mặt khác, áp dụng Bất đẳng thức AM - GM cho $2n$ số không âm

$$x^{2n}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}}, \frac{1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}}}_{2n-1 \text{ so}},$$

ta có

$$x^{2n} + \frac{2n-1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}} \ge 2n \sqrt[2n]{\frac{x^{2n}}{4^n n^{2n}}} = |x|.$$

Do đó

$$|f(x)| \le \frac{2n-1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}} + 1.$$

- *Cách 2.* Mặt khác, ta có thể khảo sát hàm số $y = g(t) = 1 + t - t^{2n}$ với $0 \le t \le 1$. Dễ thấy

$$g'(t) = 1 - 2nt^{2n-1} > 0, \text{khi } 0 \le t < t_0 := \frac{1}{\sqrt[2n-1]{2n}},$$

$$g'(t) < 0, \text{khi } t_0 < t \le 1.$$

Vậy

$$\max_{0 \le t \le 1} g(t) = g(t_0) = 1 + t_0\left(1 - t_0{}^{2n-1}\right) + t_0(2n-1)\left(1 - t_0{}^{2n-1}\right)$$

$$= 1 + (2n-1)\, {t_0}^{2n} = \frac{2n-1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}} + 1.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

ii) Khi $1 \le |x| \le M < \infty$, bởi Bài toán 3, ta có

$$|f(x)| \le \frac{1}{2}\left(\left|x^{2n} + x\right| + \left|x^{2n} - x\right|\right) + \left|1 - x^{2n}\right|$$
$$= \max\left\{x^{2n}, |x|\right\} + x^{2n} - 1 = 2x^{2n} - 1 \le 2M^{2n} - 1.$$

**Bài toán 5.** *Cho đa thức với hệ số thực $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và số $\alpha > 0$, thỏa mãn $|f(x)| \le M$, $\forall x \in [-1, 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của $|a|$, giá trị lớn nhất của $|b|$, giá trị lớn nhất của $|c|$, giá trị lớn nhất của $|d|$.*

**Giải.** Đặt

$$\begin{cases} A = f(-1) = -a + b - c + d \\ B = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{8} + \frac{b}{4} - \frac{c}{2} + d \\ C = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{8} + \frac{b}{4} + \frac{c}{2} + d \\ D = f(1) = a + b + c + d \\ E = f(0) = d \end{cases}$$

Giải hệ trên theo ẩn $a, b, c, d$, ta được

$$\begin{cases} a = -\frac{2}{3}A + \frac{4}{3}B - \frac{4}{3}C + \frac{2}{3}D \\ b = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}D - E \\ c = \frac{1}{6}A - \frac{8}{6}B + \frac{8}{6}C - \frac{1}{6}D \\ d = E \end{cases}$$

Bởi giả thiết $|a| \le 4M$, $|b| \le 2M$, $|c| \le 3M$, $|d| \le M$, ta xét $f(x) = M\left(4x^3 - 3x\right)$ và $g(x) = M\left(2x^2 - 1\right)$, nên khi đó dấu đẳng thức xảy ra.

Vậy $\max|a| = 4M$, $\max|b| = 2M$, $\max|c| = 3M$, $\max|d| = M$.

**Bài toán 6.** *i) Cho $f(x) = 2x^2 + bx + c$. Tìm $b, c \in \mathbb{R}$ sao cho $|f(x)| \le 1$, $\forall x \in [-1, 1]$.*

*ii) Cho $f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$. Tìm $a, b, c \in \mathbb{R}$ sao cho $|f(x)| \le 1$, $\forall x \in [-1, 1]$.*

**Giải.** i) Xét $|f(-1)|$, $|f(0)|$, $|f(1)| \leq 1$. Ta có $|2-b+c| \leq 1$, $|2+b+c| \leq 1$, $|c| \leq 1$. Tuy nhiên $4 = |2-b+c+2+b+c-2c| \leq |2-b+c| + |2+b+c| + |-2c| \leq 4$.

Vậy các đẳng thức trên phải đồng thời phải xảy ra các đẳng thức. Do đó $b = 0$, $c = -1$.

Ngược lại, với $b = 0$, $c = -1$, ta dễ dàng chứng minh được $f(x) = 2x^2 - 1$ thỏa mãn

$$|f(x)| \leq 1, \ \forall x \in [-1, 1].$$

ii) Theo câu trên, kết quả thu được $f(x)$ là một Đa thức Chebyschev bậc hai và các điểm được chọn chính là các luân điểm của $f(x)$. Một cách tự nhiên, ta nghĩ đến kết quả ở câu này sẽ là một Đa thức Chebyschev bậc ba và các luân điểm sẽ là $\cos\frac{k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Thật vậy, từ giả thiết, ta có

$$|f(-1)|, \ \left|f\left(-\frac{1}{2}\right)\right|, \ \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|, \ |f(1)| \leq 1.$$

Do đó

$$|4+a+b+c| \leq 1, \ |-4+a-b+c| \leq 1,$$
$$\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c\right| \leq 1, \ \left|-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + c\right| \leq 1.$$

Nhận xét rằng, bất đẳng thức $|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$ xảy ra dấu đẳng thức khi các $a_i$ cùng dấu. Với việc dự đoán $a = 0$, $b = -3$, $c = 0$, ta có

$$|8+2b| \leq |4+a+b+c| + |4-a+b-c| \leq 2.$$

Suy ra $|4+b| \leq 1$ và

$$|-1-b| \leq \left|-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b - c\right| + \left|-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + c\right| \leq 2.$$

Cuối cùng, ta cần khử $b$. Ta có $3 \leq |4+b| + |-1-b| \leq 1 + 2 = 3$.

Vậy dấu bằng ở tất cả các bất đẳng thức được xảy ra, hay $a = 0$, $b = -3$, $c = 0$.

Khi đó $f(x) = 4x^3 - 3x$, với mọi $x \in [-1, 1]$ bất kì. Vậy tồn tại $\alpha \in [0, \pi]$ để $x = \cos\alpha$.

Suy ra $f(x) = \cos 3\alpha \in [-1, 1]$, chính là điều kiện đủ của bài toán.

**Bài toán 7 (Đề đề nghị Olympic 30/4 - 2013).** *Tìm* $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ *để* $\max\limits_{|x|\leq 1} |x^3 + ax^2 + bx + c|$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

**Giải.** Vì giả thiết chứa điều kiện $|x| \leq 1$ và đa thức đã cho là đa thức bậc 3, nên ta nghĩ đến việc xét các điểm là luân điểm của Đa thức Chebyshev bậc 3. Kí hiệu $f(x) = |x^3 + ax^2 + bx + c|$ và $M = \max\limits_{|x|\leq 1} f(x)$. Ta có

$$f(1) = |1 + a + b + c|, \ f(-1) = |1 - a + b - c|,$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{8} + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\right|, \ f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{8} - \frac{a}{4} + \frac{b}{2} - c\right|.$$

Suy ra

$$f(1) + f(-1) \geq |2 + 2b|, \ f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) \geq \left|\frac{1}{4} + b\right|.$$

Do đó

$$f(1) + f(-1) + 2\left(f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \geq \frac{3}{2}.$$

Vậy $6M \geq \frac{3}{2}$ hay $M \geq \frac{1}{4}$.

Suy ra $\max\limits_{|x|\leq 1} |x^3 + ax^2 + bx + c|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{4}$, khi $a = c = 0, b = -\frac{3}{4}$.

**Bài toán 8.** *Cho* $x_1, x_2, ..., x_n$, $n \geq 2$ *, là các số thực phân biệt trong đoạn* $[-1, 1]$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + ... \frac{1}{t_n} \geq 2^{n-2},$$

với

$$t_k = \left|\prod_{i=1, i\neq k}^{n} (x_i - x_k)\right|, \ k = 1, 2, ..., n.$$

**Giải.** Áp dụng Công thức nội suy Lagrange cho Đa thức Chebyschev $T_{n-1}(x)$ bậc $n-1$ tại $n$ điểm $x_1, x_2, ..., x_n$, ta có

$$T_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} T_{n-1}(x_k) \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}.$$

Đồng nhất hệ số của 2 đa thức, ta có

$$2^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} T_{n-1}(x_k) \frac{T_{n-1}(x_k)}{(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)}.$$

Ngoài ra, vì $|T_{n-1}(x)| \leq 1$ , $\forall |x| \leq 1$ và $x_k \in [-1, 1]$ , $\forall k = 1, 2, ..., n$ , nên

$$2^{n-2} \leq \sum_{k=1}^{n} T_{n-1}(x_k) \frac{|T_{n-1}(x_k)|}{|(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)|} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t_k}.$$

Ta có điều phải chứng minh.

## Tài liệu tham khảo

[1] Trịnh Đào Chiến, Huỳnh Minh Thuận, *Một số ứng dụng của Đa thức nội suy Lagrange*, Tạp chí Khoa học Trường Đại học Quy Nhơn, tập II, số 3, năm 2008.

[2] Trần Nam Dũng, *Đa thức*, file pdf, nguồn Internet.

[3] Nguyễn Văn Mậu, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỉ*, Nhà xuất bản Giáo dục 2002.

[4] Đề thi và đáp án Olympic sinh viên Việt Nam 2016 (Khối học sinh phổ thông).

[5] J.C. Mason, D.C. Handscomb, *Chebyshev polynomials*, CHAPMAN and HALL/CRC - A CRC Press Company Boca Raton London New York Washington, D.C - 2003 by CRC Press LLC, chapter 1 - 2 (file pdf, Internet).

# GIẢI QUYẾT CÁC BẤT ĐẲNG THỨC TRÊN ĐOẠN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Lương Văn Khải - Đỗ Trần Nguyên Huy
(Khoa Toán - Tin học - Trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG Tp. HCM)

### GIỚI THIỆU

Bên cạnh các bất đẳng thức đối xứng, thuần nhất phổ biến thì các bất đẳng thức trên đoạn, khoảng cũng là một đề tài vô cùng hấp dẫn. Cái khó của nó đến từ việc khai thác triệt để giả thiết đã cho. Chẳng hạn, với giả thiết $a, b, c \in [0, 1]$, ta thường bắt gặp việc sử dụng các đánh giá $abc \geqslant 0, (a-1)(b-1)(c-1) \leqslant 0$. Thế nhưng, việc liên tục sử dụng các đánh giá trung gian như trên sẽ dần dần giảm độ chặt của bất đẳng thức, và có thể khiến ta không thể giải được bài toán ban đầu, nếu không đủ khéo léo. Qua bài viết này, tôi xin đưa ra cách "phiên dịch" các giả thiết dạng này thành đẳng thức để bảo toàn độ chặt bất đẳng thức cần chứng minh.

## 1. Cơ sở

Bổ đề 1. *Cho số thực $x \in (a, b]$. Khi đó ta có các đánh giá*

$$x - a \in (0; b-a] \to \frac{1}{x-a} \in \left[\frac{1}{b-a}, +\infty\right) \to \frac{1}{x-a} - \frac{1}{b-a} \in [0, +\infty).$$

*Đặt* $m = \dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{b-a}$ *thì* $m \geqslant 0$, *ta có mối quan hệ* $x = \dfrac{b-a}{m(b-a)+1} + a$.

Chú ý.

- Nếu $b \to +\infty$ thì đặt $m = x - a$.
- Nếu xét các biến trên $[a, b]$ thì xét trước trường hợp tồn tại một biến bằng $a$.

## 2. Bài tập

Bài tập 1. *Cho* $a, b \in [0, 1]$. *Chứng minh rằng*

$$ab + 1 \geqslant a + b.$$

*Lời giải.* Xét các trường hợp

- Nếu tồn tại một biến bằng $0$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 0$. Khi đó BĐT cần chứng minh trở thành $b \leqslant 1$, một điều hiển nhiên đúng theo giả thiết.
- Nếu cả hai biến đều khác $0$. Đặt $a = \dfrac{1}{x+1}, b = \dfrac{1}{y+1}$ thì $x, y \geqslant 0$. Khi đó

$$a + b = \frac{x+y+2}{(x+1)(y+1)}, ab = \frac{1}{(x+1)(y+1)}$$

$$\Rightarrow ab + 1 \geqslant \frac{xy+x+y+2}{(x+1)(y+1)} \geqslant \frac{x+y+2}{(x+1)(y+1)} = a + b.$$

Bài toán được chứng minh xong.

□

Nhận xét 1. *Bài toán trên khá cơ bản, cách làm quen thuộc của chúng ta là để ý*

$$(ab+1) - (a+b) = (a-1)(b-1) \geqslant 0.$$

*Cách làm trên dài hơn, nhưng nó cho ta thấy rõ độ yếu của bất đẳng thức này (chỉ cần $xy \geqslant 0$) và quan trọng hơn, nó là nền tảng tư duy cho các bài kế tiếp sau đây.*

Bài tập 2. *Cho $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh rằng rằng*

$$a + b + c \leqslant abc + 2.$$

*Lời giải.*
*Cách 1.* Theo đề bài ta có

$$(a-1)(b-1)(c-1) \leqslant 0 \Rightarrow a + b + c \leqslant ab + bc + ca - abc + 1.$$

Lại để ý

$$(a-1)(b-1) \geqslant 0 \Rightarrow ab + 1 \geqslant a + b \Rightarrow abc + c \geqslant bc + ca$$

$$\Rightarrow a + b + c \leqslant abc + c + ab - abc + 1 = c + ab + 1. \tag{1}$$

Hơn nữa

$$(ab-1)(c-1) \geqslant 0 \Rightarrow c + ab \leqslant abc + 1 \Rightarrow c + ab + 1 \leqslant abc + 2. \tag{2}$$

Từ $(1)$ và $(2)$ ta có đpcm.

*Cách 2.*

- Giả sử tồn tại một biến bằng $0$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 0$. BĐT cần chứng minh trở thành $b + c \leqslant 2$, một điều hiển nhiên đúng theo giả thiết.

- Nếu cả ba biến đều khác 0, đặt $a = \dfrac{1}{1+x}, b = \dfrac{1}{1+y}, c = \dfrac{1}{1+z}$ thì $x, y, z > 0$. Khi đó ta có
$$a+b+c = \frac{2(x+y+z)+xy+yz+zx+3}{(1+x)(1+y)(1+z)}, abc = \frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)}.$$
BĐT cần chứng minh tương đương với
$$\frac{2(x+y+z)+xy+yz+zx+3}{(1+x)(1+y)(1+z)} \leqslant \frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)} + 2$$
$$\Leftrightarrow 2(x+y+z)+xy+yz+zx+3 \leqslant 2(xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1)+1$$
$$\Leftrightarrow xy+yz+zx+2xyz \geqslant 0,$$
một điều hiển nhiên đúng.

Bài toán được chứng minh xong. □

Nhận xét 2. *Về mức độ thì bài này khó hơn bài đầu tiên. Cách 1 ngắn gọn nhưng cần một chút khéo léo. Và một lần nữa phương pháp đặt ẩn phụ đã giải quyết gọn gàng bài toán về mặt ý tưởng.*

Bài tập 3. *Cho* $a, b, c \in [0, 1]$. *Chứng minh rằng*
$$a+b+c-(ab+bc+ca) \leqslant 1.$$

*(Đề chọn đội tuyển VMO trường Phổ thông Năng khiếu)*

*Lời giải.*

- Nếu trong ba số $a, b, c$ có một số bằng 0, giả sử $a = 0$, BĐT cần chứng minh trở thành
$$b+c-bc \leqslant 1,$$
chính là Bài 1 ở trên.

- Nếu cả ba biến $a, b, c$ đều khác 0, một lần nữa đặt $a = \dfrac{1}{x+1}, b = \dfrac{1}{y+1}, c = \dfrac{1}{z+1}$ thì $x, y, z \geqslant 0$. Khi đó
$$a+b+c = \frac{2(x+y+z)+xy+yz+zx+3}{(1+x)(1+y)(1+z)},$$
$$ab+bc+ca = \frac{x+y+z+3}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$
BĐT cần chứng minh trở thành
$$\frac{x+y+z+xy+yz+zx}{(1+x)(1+y)(1+z)} \leqslant 14$$
$\Leftrightarrow x+y+z+xy+yz+zx \leqslant x+y+z+xy+yz+zx+xyz+1 \Leftrightarrow xyz+1 \geqslant 0,$
một điều hiển nhiên đúng.

Bài toán được chứng minh xong. $\square$

Khi mức độ khó hơn, các cách dùng đánh giá trực tiếp trở nên khó khăn, đòi hỏi một sự khéo léo và tinh tế không nhỏ. Trong khi đó, phương pháp ta đề cập đến giải quyết tốt về ý tưởng, khó khăn có chăng là khối lượng tính toán mà thôi. Một ví dụ tiếp theo là biến thể của đề Olympic 30 - 4 năm 2001.

Bài tập 4. *Cho* $a, b, c \in [1, 2]$. *Chứng minh rằng*

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) < 10.$$

*Lời giải.*
*Cách 1.* BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c} < 7.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $1 \leqslant c \leqslant b \leqslant a \leqslant 2$. Khi đó

$$(a-b)(a-c) \geqslant 0 \Leftrightarrow ab+bc \geqslant b^2+ca \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{c}+1 \geqslant \frac{a}{b}+\frac{b}{c} \\ \frac{c}{a}+1 \geqslant \frac{c}{b}+\frac{b}{a} \end{cases}$$

Lại có

$$2 > \frac{a}{c} > \frac{1}{2} \Rightarrow (2c-a)(a-2c) < 0 \Rightarrow 2(a^2+c^2) < 5ca \Rightarrow 5 > 2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right).$$

Như vậy

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+7 > \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right),$$

tức là

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c} < 7.$$

Bài toán được chứng minh xong.

*Cách 2.* Đặt $a = \dfrac{x+2}{x+1}, b = \dfrac{y+2}{y+1}, c = \dfrac{z+2}{z+1}$ thì $x, y, z > 0$.
Khi đó

$$a+b+c = \frac{4(xy+yz+zx)+5(x+y+z)+3xyz+6}{(x+1)(y+1)(z+1)},$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{5(xy+yz+zx)+8(x+y+z)+3xyz+12}{(x+2)(y+2)(z+2)}.$$

Đặt

$$p = x+y+z,$$

$$q = xy+yz+zx,$$

$$r = xyz$$

Để ý rằng
$$(x+1)(y+1)9z+1) = p+q+r+1,$$
$$(x+2)(y+2)(z+2) = 4p+2q+r+8.$$
BĐT cần chứng minh trở thành
$$(8p+5q+3r+12)(5p+4q+3r+6) < 10(4p+2q+r+8)(p+q+r+1)$$
$$\Leftrightarrow 40p^2+57pq+27qr+39pr+20q^2+108p+78q+9r^2+54r+72$$
$$< 40p^2+60pq+30qr+50pr+20q^2+120p+100q+10r^2+90r+80$$
$$\Leftrightarrow 3pq+3qr+11pr+12p+22q+r^2+36r+8>0,$$
lại là một điều hiển nhiên đúng nữa, và bài toán được chứng minh xong. □

Nhận xét 3. *Đến bài này, rõ ràng ý tưởng chứng minh ở cách 1, như ta thấy, rất hay và đẹp mắt nhưng việc nghĩ ra là không dễ. Trong khi cách 2, với dòng tư duy như trên, ta thấy nó đem lại một lời giải tự nhiên dù tính toán có chút cồng kềnh.*

Bài tập 5. *Cho* $x, y, z \in [0,1]$. *Chứng minh rằng*
$$(x-x^2)(y-y^2)(z-z^2) \geqslant (x-yz)(y-zx)(z-xy).$$

*(Đề chọn đội tuyển chuyên Bảo Lộc - Lâm Đồng 2016)*

*Lời giải.*
*Cách 1.* Ta có các đẳng thức sau
$$(x-x^2)(y-y^2)(z-z^2) = (xyz-x^2y^2z^2) - xyz(x+y+z-xy-yz-zx),$$
$$(x-yz)(y-xz)(z-xy) = (xyz-x^2y^2z^2) - (x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) + xyz(x^2+y^2+z^2)$$
BĐT cần chứng minh tương đương với
$$xyz(x+y+z-xy-yz-zx) \leqslant (x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) - xyz(x^2+y^2+z^2)$$
$$\Leftrightarrow 3xyz(x+y+z-xy-yz-zx)leq(xy+yz+zx)^2 - xyz(x+y+z)^2.$$
Đặt $x = \dfrac{1}{1+a}, y = \dfrac{1}{1+b}, z = \dfrac{1}{1+c}$ thì $a, b, c > 0$. Khi đó
$$x+y+z = \frac{2(a+b+c)+ab+bc+ca+3}{(1+a)(1+b)(1+c)},$$
$$xy+yz+zx = \frac{a+b+c+3}{(1+a)(1+b)(1+c)},$$
$$xyz = \frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)}.$$
Thế thì
$$3xyz(x+y+z-xy-yz-zx) = \frac{3(a+b+c+ab+bc+ca)}{[(a+1)(b+1)(c+1)]^2},$$

$$(xy+yz+zx)^2-xyz(x+y+z)^2 = \frac{(a+b+c+3)^2}{[(a+1)(b+1)(c+1)]^2}\frac{[2(a+b+c)+(ab+bc+ca)+3]^2}{[(a+1)(b+1)(c+1)]^3}.$$

Vậy ta cần chỉ ra

$$(a+b+c+3)^2(a+1)(b+1)(c+1)-[2(a+b+c)+(ab+bc+ca)+3]^2$$

$$\geqslant 3(a+b+c+ab+bc+ca)(a+1)(b+1)(c+1). \tag{3}$$

Đặt

$$p=a+b+c,$$
$$q=ab+bc+ca,$$
$$r=abc$$

thì

$$(a+1)(b+c)(c+1)=p+q+r+1.$$

Do $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0$ nên $p^2 \geqslant 3q$. Khi đó $(3)$ trở thành

$$(p+q+r+1)[(p+3)^2-3(p+q)] \geqslant (2p+q+3)^2$$
$$\Rightarrow (p+q+r+1)(p^2+3p-3q+9) \geqslant (2p+q+3)^2$$
$$\Leftrightarrow p^3+p^2q-3q^2+r(p^2+3p-3q+9) \geqslant q^2+4pq.$$

Theo BĐT Schur cho bậc 3 thì $p^3+9r \geqslant 4pq$, nên ta cần chứng minh

$$p^2q+r(p^2+3p-3q) \geqslant 4q^2. \tag{4}$$

Xét các trường hợp:

- $4q \leqslant p^2$ thì vì $p^2q \geqslant 4q^2, r(p^2+3p-3q) \geqslant r(p^2-4q) \geqslant 0$ nên $(4)$ đúng.
- $4q > p^2$, theo BĐT Schur bậc 3 và để ý rằng $p^2+3p-3q \geqslant 3p$, ta được

  $$r(p^2+3p-3q) \geqslant \frac{p(4q-p^2)}{9}.3p = \frac{p^2(4q-p^2)}{3}$$

  nên bài toán sẽ được hoàn tất nếu ta chứng minh được

  $$3p^2q+p^2(4q-p^2) \geqslant 12q^2 \Leftrightarrow (4q-p^2)(p^2-3q) \geqslant 0,$$

  một điều chắc chắn đúng.

Bài toán được chứng minh xong.
*Cách 2 (Michael Rozenberg):* Với $a \in [0,1]$ thì $a-a^2 \geqslant 0$ nên vế trái luôn không âm, do đó nếu vế phải không dương thì BĐT luôn đúng. Vì vậy, ta chỉ cần chứng minh BĐT cho trường hợp vế phải không âm.
Với $x,y,z \in [0,1]$ thì

$$z(x+y) \leqslant x+y \Rightarrow x-yz+y-zx \geqslant 0,$$

tức là $x - yz, y - zx$ không thể cùng âm. Tương tự, $y - zx, z - xy$ không thể cùng âm. Vậy vế phải không âm khi và chỉ khi $x - yz, y - zx, z - xy$ đều không âm. Khi đó, BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc} xyz(x^2 - yz) \geqslant \sum_{cyc} (x^2y^2 - xyz) \Leftrightarrow (x-y)^2(z^2 - xyz) \geqslant 0,$$

hiển nhiên đúng. Bài toán được chứng minh xong. □

Nhận xét 4. *Qua các ví dụ trên, ta nhận thấy rằng các bất đẳng thức khi ta biến đổi tương đương với phương pháp đặt ẩn phụ thường rất yếu (trừ bài trên). Đó là do khi đó, ta đã "vô tình" cắt đi được một điểm dấu bằng tại một biên, nên khi biến đổi, ta dễ đánh giá hơn.*
*Rõ ràng phương pháp này có điểm yếu, đó là những biến đổi tương đương khá dài dòng và phức tạp. Tuy nhiên, nếu kết hợp với những biến đổi ban đầu khéo léo thì ta sẽ được lời giải không quá dài dòng.*

Bài tập 6. *Cho $a, b, c \in [0, 1]$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1.$$

*(China TST 2003)*

*Lời giải.*

- Nếu $a + b + c = 0$ thì theo đề bài dẫn đến $a = b = c = 0$, BĐT xảy ra dấu bằng.
- Nếu $a + b + c0$, BĐT cần chứng minh tương đương với

$$1 - \left(\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1}\right) \geqslant (1-a)(1-b)(1-c)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{a}{a+b+c} - \frac{a}{b+c+1} \geqslant (1-a)(1-b)(1-c)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+b+c}\sum_{cyc}\frac{a(1-a)}{b+c+1} \geqslant (1-a)(1-b)(1-c)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a(1-a)}{b+c+1} \geqslant (1-a)(1-b)(1-c)(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left[a(1-a)\left(\frac{1}{b+c+1} - (1-b)(1-c)\right)\right] \geqslant 0.$$

Vậy ta chỉ cần chỉ ra với $m, n \in [0, 1]$ thì

$$\frac{1}{m+n+1} - (1-m)(1-n) \geqslant 0. \qquad (5)$$

- Nếu trong hai số $m, n$ có một số bằng 0< giả sử $m = 0$ thì $(5)$ trở thành

$$\frac{1}{n+1} - (1-n) \geqslant 0 \Rightarrow 1 \geqslant 1 - n^2,$$

hiển nhiên đúng.

- Nếu cả hai số $m, n$ đều khác 0, đặt $m = \dfrac{1}{1+x}, n = \dfrac{1}{1+y}$ thì $x, y \geqslant 0$. Khi đó

$$\frac{1}{m+n+1} = \frac{(1+x)(1+y)}{(1+x)(1+y)+x+y+2},$$

$$(1-m)(1-n) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)}.$$

Ta cần chứng minh

$$(1+x)^2(1+y)^2 \geqslant xy[(1+x)(1+y)+x+y+2]$$

Bằng biến đổi tương đương, rút gọn điều cần chứng minh trở thành

$$(x+y+1)(x+y+1) \geqslant xy,$$

hiển nhiên đúng.

Bài toán được chứng minh xong. □

Bài tập 7. *Cho $a, b, c \in [0, 1]$ thoả*

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) = 1.$$

*Tìm GTNN của biểu thức*

$$S = a^2 + b^2 + c^2.$$

*(Thi thử THPT QG 2016 THPT Thanh Hoa, Bình Phước)*

*Lời giải.* Trước hết xin phát biểu không chứng minh một bổ đề đơn giản nhưng rất quan trọng.

Bổ đề 2. *Với $a, b$ là các số thực dương thoả mãn $ab \geqslant 1$, ta có BĐT*

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} \geqslant \frac{2}{1+ab}.$$

*Chứng minh bổ đề này khá đơn giản, xin dành lai cho bạn đọc.*

Quay lại bài toán. Đặt $a = \dfrac{1}{x+1}.b = \dfrac{1}{y+1}, c = \dfrac{1}{z+1}$ thì $x, y, z > 0$. Giả thiết trở thành $xyz = 1$ và S trở thành

$$S = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(y+1)^2} + \frac{1}{(z+1)^2}.$$

Theo BĐT Cauchy - Schwartz và bổ đề ở trên, ta có

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}\right)\geqslant\frac{1}{xy+1}$$

$$\Rightarrow S\geqslant\frac{1}{xy+1}+\frac{1}{(1+z)^2}=\frac{z}{z+1}+\frac{1}{(1+z)^2}=\frac{z^2+z+1}{(z+1)^2}\geqslant\frac{3}{4}.$$

Vậy GTNN của $S$ là $\frac{3}{4}$ đạt tại $a=b=c=\frac{1}{2}$. □

## 3. Một số bất đẳng thức không mẫu mực

Ở trên ta đã làm quen với một phương pháp khá đơn giản về ý tưởng để giải quyết các bất đẳng thức trên đoạn. Như đã trình bày, sự đơn giản này đi đôi với những tính toán vô cùng phức tạp. Những bài toán dưới đây cho thấy sự phức tạp này có thể khiến phương pháp này khó khả thi, và khi đó, những sự nhạy cảm và quan sát tinh tế mới là chìa khóa giải quyết.

Bài tập 8. *Cho* $a,b,c\in\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\sqrt{6}\right)$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{4}{a+3b}+\frac{4}{b+3c}+\frac{4}{c+3a}\geqslant\frac{3}{a+2b}+\frac{3}{b+2c}+\frac{3}{c+2a}.$$

*(Mihacla Berindeanu)*

Nhận xét 5. *Rõ ràng việc áp dụng phương pháp đổi biến đem lại khối lượng tính toán khá nặng, chưa kể căn thức xuất hiện ở điều kiện làm chúng ta chùn tay. Đây là lúc nhạy cảm toán học lên tiếng!*

*Lời giải.* BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{4}{a+3b}-\frac{3}{a+2b}\right)+\left(\frac{4}{b+3c}-\frac{3}{b+2c}\right)+\left(\frac{4}{c+3a}-\frac{3}{c+2a}\right)\geqslant 0.$$

Xét một số hạng đại diện là

$$\left(\frac{4}{a+3b}-\frac{3}{a+2b}\right)=\frac{a-b}{(a+3b)(a+2b)}.$$

Số hạng này không phải luôn luôn không âm, nhưng nếu ta thêm một hạng tử có dạng $\frac{1}{ka}-\frac{1}{kb}$ vào số hạng đại diện, và chứng minh được tổng có được sau khi thêm, cụ thể là

$$\left(\frac{4}{a+3b}-\frac{3}{a+2b}\right)=\frac{a-b}{(a+3b)(a+2b)}+\frac{1}{ka}-\frac{1}{kb}\geqslant 0$$

thì BĐT ban đầu của ta không thay đổi và ta chứng minh được nó đúng. Tóm lại, giờ ta sẽ tìm một hằng số $k$ sao cho

$$\left(\frac{4}{a+3b}-\frac{3}{a+2b}\right)=\frac{a-b}{(a+3b)(a+2b)}+\frac{1}{ka}-\frac{1}{kb}\geqslant 0\forall a,b.$$

Bằng các phép biến đổi tương đương và kĩ thuật chia đa thức hai biến, ta tìm được $k=12$ là số cần tìm (việc chứng minh xin dành cho bạn đọc).

Kiểm tra lại, ta thấy

$$\left(\frac{4}{a+3b}-\frac{3}{a+2b}\right)=\frac{a-b}{(a+3b)(a+2b)}+\frac{1}{12a}-\frac{1}{12b}=\frac{(a-b)^2(6b-a)}{12ab(a+3b)(a+2b)}\geqslant 0$$

(chú ý $6b-a\geqslant 6.\frac{1}{\sqrt{6}}-\sqrt{6}\geqslant 0$). Chứng minh tương tự với các trường hợp còn lại và cộng vế theo vế, ta có đpcm. □

Bài tập 9. *Cho* $a,b,c\in[0,1]$. *Chứng minh rằng*

$$a+b+c\leqslant ab^2+bc^2+ca^2+\frac{5}{4}.$$

*Lời giải.* Trước hết xin phát biểu và chứng minh một bổ đề quan trọng khác.

Bổ đề 3. *Cho* $m,n,p>0$. *Khi đó ta có*

$$mn^2+np^2+pm^2\leqslant\frac{4}{27}(m+n+p)^3.$$

*Chứng minh.* Không mất tính tổng quát, chuẩn hoá $m+n+p=3$ và giả sử $m$ nằm giữa $n,p$. Khi đó

$$p(m-n)(m-p)\leqslant 0\Rightarrow np^2+pm^2\leqslant m(p^2+pn)$$
$$\Rightarrow mn^2+np^2+pm^2\leqslant m(n^2+p^2+pn)\leqslant m(n+p)^2=m(3-m)^2\leqslant 4.$$

và điều này chứng minh bổ đề của ta. □

Quay lại bài toán. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$a(1-b^2)+b(1-c^2)+c(1-a^2)\leqslant\frac{5}{4}.$$

Áp dụng bổ đề, ta có

$$S\leqslant 2(x+y+z)-(x+y+z)^2+\frac{4}{27}(x+y+z)^3.$$

Đặt $u=x+y+z\in[0,3]$. Khảo sát hàm $g(u)$ trên $[0,3]$, ta tìm được GTLN của $g(u)$ là $\frac{5}{4}$ đạt tại $u=\frac{3}{2}$ và điều này chứng minh BĐT ban đầu của chúng ta. □

## 4. Bài tập tự luyện

Bài tập 10. *Cho* $a, b, c \in [0, 1]$. *Chứng minh rằng*

$$(1 - a + ab)^2 + (1 - b + bc)^2 + (1 - c + ca)^2 \geqslant \frac{3}{2}.$$

Bài tập 11. *(TH & TT) Cho* $a, b, c \in [1, 2]$. *Chứng minh rằng*

$$a^3 + b^3 + c^3 \leqslant 5abc.$$

Bài tập 12. *(Nguyễn Anh Cường) Cho* $x, y, z \in [1, 2]$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{xy}{yz + zx} + \frac{yz}{zx + xy} + \frac{zx}{xy + yz} \leqslant \frac{19}{12}.$$

Bài tập 13.

1. *(Algebraic Inequalities, Old and New methods) Cho các số thực* $a, b, c$ *thuộc* $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right]$. *Chứng minh*

$$\frac{3}{a + 2b} + \frac{3}{b + 2c} + \frac{3}{c + 2a} \geqslant \frac{2}{a + b} + \frac{2}{b + c} + \frac{2}{c + a}.$$

2. *(Bài toán tổng quát) Cho số dương* $k$ *và* $a, b, c \in \left[\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}, \sqrt{k(k+1)}\right]$ *Chứng minh*

$$\frac{k+1}{a + kb} + \frac{k+1}{b + kc} + \frac{k+1}{c + ka} \geqslant \frac{k}{a + (k-1)b} + \frac{k}{b + (k-1)c} + \frac{k}{c + (k-1)a}.$$

Bài tập 14. *Cho* $a, b, c$ *thoả* $0 \leqslant a \leqslant 1 \leqslant b \leqslant c$ *và* $a + b + c = 3$. *Chứng minh rằng*

$$a^2b + b^2c + c^2a \geqslant abc + 2.$$

Bài tập 15. *Cho* $a, b, c$ *thoả* $0 \leqslant a \leqslant 1 \leqslant b \leqslant c$ *và* $ab + bc + ca = 3$. *Chứng minh rằng*

$$a^2b + b^2c + c^2a \geqslant abc + 2.$$

## Tài liệu

[1] Nguyễn Anh Cường, *ABC Method Abstract Concreteness*.

[2] Võ Quốc Bá Cẩn, *Phân loại và phương pháp chứng minh bất đẳng thức*.

[3] Diễn đàn Art of Problem Solving: http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t243f6_inequalities

# BÀI TOÁN HAY LỜI GIẢI ĐẸP

Ban biên tập

## GIỚI THIỆU

Chuyên mục này được lấy cảm hứng từ bài viết của thầy Nguyễn Duy Liên ở số báo thứ 3 về bài toán số 6 trong kỳ thi IMO 2001 với 5 cách giải khác nhau. Mục này sẽ để dành viết về những bài toán hay, lời giải đẹp và những câu chuyện thú vị xung quanh những bài toán và lời giải đó.

Tên của chuyên mục được mượn từ tên của một nhóm những người yêu toán trên Facebook do anh Nguyễn Văn Lợi sáng lập "*Bài toán hay – Lời giải đẹp – Đam mê toán học*". Chuyên mục ghi nhận các đề cử của bạn đọc và sẽ chọn đăng mỗi kỳ 1, 2 bài toán.

Số này chúng tôi giới thiệu bài toán số 5 của IMO 2014, bài toán về những đồng xu của ngân hàng Cape Town. Bài toán này do Luxembourg đề nghị và được Ban tuyển chọn để xếp vào phần Số học.

Bài toán. *(Bài toán 5, IMO 2014) Với mỗi số nguyên dương $n$, Ngân hàng Cape Town phát hành những đồng xu mệnh giá $\frac{1}{n}$. Cho một bộ hữu hạn các đồng xu như vậy (không nhất thiết phải có mệnh giá khác nhau) có tổng giá trị không quá $99+\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng ta có thể chia các đồng xu này thành 100 nhóm hoặc ít hơn, sao cho mỗi nhóm có tổng giá trị không quá 1.*

Chúng ta sẽ thấy qua lời giải dưới đây rằng bài toán này thật ra là một bài toán tổ hợp. Lời giải của bài toán sử dụng hướng tiếp cận xây dựng thuật toán với 3 bước

1. Tổng quát hóa bài toán để có thể thực hiện các bước "*rút gọn*" sau này.
2. "*Rút gọn*" bài toán bằng các bước ghép xu và loại bỏ các đồng xu mệnh giá 1.
3. Phân chia các nhóm lớn và thực hiện thuật toán phân phối các đồng xu nhỏ.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương $N$, mọi bộ hữu hạn các đồng xu có tổng mệnh giá không quá $N-\frac{1}{2}$ có thể chia thành $N$ nhóm mỗi nhóm có tổng giá trị không quá 1. Khẳng định của bài toán là trường hợp riêng khi $N=100$. Ta sẽ bắt đầu với vài sự chuẩn bị. Nếu có một số đồng xu trong các đồng xu đã cho có tổng mệnh giá cũng có dạng $\frac{1}{k}$ với $k$ nguyên dương thì ta ghép chúng lại thành một đồng xu mới. Rõ ràng, nếu bộ đồng xu mới có thể chia được thỏa mãn yêu cầu bài toán thì bộ đồng xu cũ cũng chia được. Sau mỗi lần ghép như thế, tổng số đồng xu sẽ giảm, do đó đến một lúc nào đó ta sẽ đi đến tình huống là không thể ghép được như thế nữa.

Lúc này, với mỗi số nguyên dương chẵn $k$, có tối đa một đồng xu mệnh giá $\frac{1}{k}$ (trong trường hợp ngược lại ta có thể ghép hai đồng xu như thế lại). Bây giờ, rõ ràng, mỗi đồng xu mệnh giá 1 phải lập thành một nhóm riêng. Nếu có $d$ đồng xu như thế thì ta có thể loại chúng ra khỏi bộ đồng xu và thay $N$ bởi $N - d$. Do đó, từ giờ ta có thể giả sử không còn đồng xu mệnh giá 1.

Cuối cùng, ta có thể chia tất cả các đồng xu thành nhóm theo cách sau. Với mỗi $k = 1, 2, \ldots, N$ ta cho tất cả các đồng xu mệnh giá $\frac{1}{2k-1}$ và $\frac{1}{2k}$ vào nhóm $G_k$. Tổng giá trị của nhóm $G_k$ không vượt quá $(2k-2)\cdot\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} < 1$. Như vậy ta được $N$ nhóm, mỗi nhóm có tổng mệnh giá $< 1$. Ta chỉ còn cần phân bố các đồng xu "*nhỏ*" có mệnh giá nhỏ hơn $\frac{1}{2N}$. Ta sẽ phân chúng vào các nhóm từng bước một. Ở mỗi bước, ta xét một đồng xu "*nhỏ*" còn lại. Tổng giá trị số các đồng xu ở các nhóm lúc này không quá $N - \frac{1}{2}$. Vì thế phải có một nhóm có tổng giá trị không quá $\frac{N-\frac{1}{2}}{N} = 1 - \frac{1}{2N}$, do đó ta có thể bỏ thêm đồng xu nhỏ vào nhóm này. Bằng cách như vậy, ta có thể phân phối tất cả các đồng xu vào các nhóm. □

Một lời giải rất đẹp! Có thể thấy là trong lời giải không vận dụng bất cứ một kiến thức hay kết quả cao siêu nào, chỉ là những phép cộng, phép nhân, phép chia và tư duy thuật toán. Bài toán đóng gói trong tin học được xếp vào lớp bài toán NP nhưng với điều kiện ràng buộc về khối lượng (phải có dạng $\frac{1}{k}$), bài toán đã có thuật giải đẹp như đã trình bày.

Bước chuẩn bị (ghép các đồng xu) là một trong những bước đi tự nhiên nhưng rất quan trọng, nó giúp chúng ta làm gọn dữ liệu, loại đi những "*bùng nổ tổ hợp*" không bản chất. Ta có thể thấy, các phép biến đổi như vậy, tuy có vẻ một chiều (theo nghĩa nếu sau khi ghép làm được thì trước khi ghép cũng làm được) nhưng thực ra là tương đương, vì sau khi ghép, ta cũng có một cấu hình của bài toán.

Dưới đây chúng tôi xin đưa ra một số bài toán tương tự, cũng giải bằng thuật toán và một trong những thành tố quan trọng là bước "*sắp xếp, điều chỉnh dữ liệu*".

Bài toán 1. *Có một số hòn đá, mỗi hòn đá có khối lượng không quá 0,5kg. Tổng khối lượng các hòn đá không vượt quá 3kg. Chứng minh rằng ta có thể chia các hòn đá thành 4 nhóm, mỗi nhóm có tổng khối lượng không vượt quá 1.*

Bài toán 2. *Cho 50 số nguyên dương có tổng bằng 99. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $S < 100$ tồn tại một số số trong các số đó có tổng bằng $S$.*

Bài toán 3. *Một số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện với các số thực bất kỳ $a_1, a_2, \ldots, a_d$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \cdots + a_d = 2013$ và $0 \leqslant a_i \leqslant 1$ với $i = 1, 2, \ldots, d$ thì luôn có một cách chia tập hợp các số thực đó thành n tập con đôi một phân biệt (trong đó cho phép cả tập rỗng), sao cho tổng các số trong mỗi tập hợp luôn không vượt quá 1. Hãy tìm số n nhỏ nhất thỏa mãn tính chất trên.*

Bài toán 4. *Tại một hội nghị quốc tế, các đại biểu tham dự biết ít nhất một trong 3 thứ tiếng Anh, Pháp, Đức. Biết rằng có đúng 50 đại biểu biết tiếng Anh, đúng 50 đại biểu biết tiếng Pháp và đúng 50 đại biểu biết tiếng Đức. Chứng minh rằng có thể chia các đại biểu thành 5 nhóm sao cho trong mỗi nhóm có đúng 10 đại biểu biết tiếng Anh, đúng 10 đại biểu biết tiếng Pháp và đúng 10 đại biểu biết tiếng.*