Chuẩn Euclid
Ngô Bảo Châu

Cân bằng Nash
Vladimir Gurvich

Luật Benford và những ứng dụng thú vị
Trần Nam Dũng & Đặng Nguyễn Đức Tiến

Ứng dụng **dãy số trong các bài toán phương trình hàm**
Đỗ Minh Khoa & Võ Quốc Bá Cẩn

VÀ CÁC CHUYÊN MỤC KHÁC

"Vì vũ trụ là hoàn hảo và được tạo ra bởi đấng sáng tạo trí tuệ nên không có gì trong vũ trụ mà ở đó người ta không thấy ý nghĩa của những bài toán về giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất"

Leonard Euler

"Lớp học truyền thống sẽ làm mờ đi tư duy của bạn, tiêu diệt tiềm năng cho sự sáng tạo đích thực."

John Nash

Epsilon

ngày **13** tháng **10** năm **2015** Số **5**

TẠP CHÍ ONLINE CỦA CỘNG ĐỒNG NHỮNG NGƯỜI YÊU TOÁN

LỜI NGỎ CHO EPSILON SỐ 5

Ban Biên tập Epsilon

Ý tưởng về tạp chí Epsilon được khởi nguồn vào khoảng cuối năm 2014, đến nay đã đi được hành trình gần một năm. Nhìn lại suốt chặng đường đó, chúng tôi luôn nhận ra rằng sức sống của Epsilon gắn liền với sự ủng hộ và đóng góp của các độc giả cùng các tác giả.

Để đáp lại thịnh tình của đông đảo độc giả, Epsilon số 5 sẽ có nội dung khá hấp dẫn với nhiều bài viết ở các thể loại và chuyên mục khác nhau. Ngoài các chuyên mục định kỳ như lịch sử toán học, các vấn đề cổ điển và hiện đại sẽ có các bài viết thú vị khác.

Phần mở đầu của Epsilon số 5 sẽ là bài viết về Chuẩn Euclid của Ngô Bảo Châu – tóm lược phần đầu của bài giảng ở trường hè Lý thuyết số từ cổ điển đến hiện đại.

Tiếp theo đó:
Về xấp xỉ Diophantine: nếu như ở phần trước, chúng ta đã có được câu trả lời cho câu hỏi "Các số hữu tỉ có thể xấp xỉ các số vô tỉ tốt đến thế nào?" thì ở số 5 này, một lần nữa Lý Ngọc Tuệ sẽ giới thiệu với những vấn đề còn thú vị hơn về khả năng xấp xỉ các véc tơ trên $\mathbb{R}^n$ bằng các véc tơ hữu tỉ $\mathbb{Q}^n$.

Về nhịp cầu kết nối giữa toán cao cấp và toán sơ cấp sẽ có các bài: Từ Euclid đến Lobachevsky của Nguyễn Ngọc Giang và Cân bằng Nash của Vladirmir Gurvich. Phần 2 bài viết Chứng minh và sự tiến bộ của William P. Thurston qua lời dịch của Nguyễn Dzuy Khánh sẽ đề cập đến một câu hỏi rất thú vị và quan trọng "Điều gì khích lệ con người nghiên cứu toán học?".

Về trung gian giữa lý thuyết và ứng dụng sẽ là bài viết về luật Benford và những ứng dụng thú vị của Trần Nam Dũng & Đặng Nguyễn Đức Tiến.

Ngoài ra trong mảng toán sơ cấp, phong phú nhất vẫn là chủ đề hình học với bài viết "Điều kiện ngoại tiếp của một tứ giác không lồi và ứng dụng" của Đỗ Thanh Sơn, bài viết về công thức tính khoảng cách giữa tâm đường tròn Euler và tâm đường tròn Apollonius của Trịnh Xuân Minh và bài "Tổng quát hóa một bài hình vô địch Nga 2005" của Trần Quang Hùng và Phan Anh Quân.

Phần giải tích và đại số sẽ có bài "Áp dụng dãy số vào giải các phương trình và bất phương trình hàm" của Đỗ Minh Khoa và Võ Quốc Bá Cẩn và bài "Giải tích và các bài toán cực trị" của Trần Nam Dũng.

Phần số học và tổ hợp sẽ có bài "Thặng dư bậc hai modulo M" của Nguyễn Hồng Lữ và bài "Phân hoạch tập các số tự nhiên thành hai tập hợp có tổng bằng nhau" của Nguyễn Văn Lợi, Nguyễn Hải Đăng và Nguyễn Thành Khang, và "Tối ưu tổ hộp" của Gil Kalai.

Chuyên mục Bài toán hay lời giải đẹp sẽ giới thiệu bài bất đẳng thức của IMO 1983 qua phần bình luận của Phùng Hồ Hải. Phần lịch sử toán học sẽ giới thiệu với độc giả đôi điều về hình học phi Euclid.

Đặc biệt trong số này, chúng tôi sẽ giới thiệu một số đề thi (cùng lời giải và bình luận) chọn đội tuyển của một số trường và một số tỉnh cho VMO 2016.

Cuối cùng phần kết của Epsilon số 5 sẽ là bài Ma trận ngẫu nhiên của Vũ Hà Văn – nơi thông báo hàng loạt các giả thuyết đã được chinh phục bởi Vũ và các đồng nghiệp của anh.

Hy vọng rằng, Epsilon sẽ vẫn nhận được sự ủng hộ của độc giả, và những đóng góp của các bạn sẽ luôn là động lực để những người thực hiện tiếp tục con đường dài phía trước.

Tháng 10, 2015,
Ban Biên tập Epsilon.

MỤC LỤC

Ban Biên tập Epsilon

Lời ngỏ cho Epsilon số 5 3

Ngô Bảo Châu

Chuẩn Euclid 7

Lý Ngọc Tuệ

Xấp xỉ Diophantine trên $\mathbb{R}^n$ - Phần 2: Quy tắc Dirichlet và hình học của các số 15

Vladimir Gurvich

Cân bằng Nash 25

Nguyễn Ngọc Giang

Mở rộng các bài toán hình học Euclid thành các bài toán hình học cầu và hình học Lobachevsky - Một phương phức sáng tạo các bài toán mới 33

William P. Thurston

Về chứng minh và tiến bộ trong toán học (tiếp theo) 53

Trần Nam Dũng, Đặng Nguyễn Đức Tiến

Luật Benford và những ứng dụng thú vị 61

Đỗ Thanh Sơn

Điều kiện ngoại tiếp của một tứ giác không lồi và ứng dụng 69

Trịnh Xuân Minh

Khoảng cách giữa tâm đường tròn Euler và tâm đường tròn Apollonius 75

Trần Quang Hùng, Phan Anh Quân

Tổng quát một bài toán thi vô địch Nga năm 2005 81

Đỗ Minh Khoa, Võ Quốc Bá Cẩn

Áp dụng dãy số vào giải các phương trình và bất phương trình hàm 85

Trần Nam Dũng

Giải tích và các bài toán cực trị 109

Nguyễn Hồng Lữ

Thặng dư bậc hai modulo M 131

Nguyễn Văn Lợi, Nguyễn Hải Đăng, Nguyễn Thành Khang

Về một phân hoạch tập các số tự nhiên thành hai tập hợp có tổng các phần tử bằng nhau . 151

Gil Kalai

Tối ưu tổ hợp I: Các bài toán tối ưu về hệ các tập hợp 167

Ban Biêp tập Epsilon

Bài toán hay - Lời giải đẹp 173

Trần Nam Dũng

Đôi điều về hình học phi Euclid 177

Ban Biên tập Epsilon

Giới thiệu một số đề thi chọn đội tuyển môn Toán năm 2015 - 2016 181

Trần Nam Dũng

Các vấn đề cổ điển và hiện đại 209

Vũ Hà Văn

Ma trận ngẫu nhiên (tiếp theo và hết) 231

CHUẨN EUCLID

Ngô Bảo Châu (Viện nghiên cứu cao cấp về toán - VIASM)

Bài viết này trích từ bài giảng "Lý thuyết số từ cổ điển đến hiện đại" ở Viện nghiên cứu cao cấp về toán, hè 2015. Nội dung của bài viết tập trung vào khái niệm chuẩn Euclid trong vành số nguyên, vành số nguyên Gauss và các hệ quả số học của nó.

1. Nguyên lý trật tự của tập các số tự nhiên

Đối tượng nghiên cứu của lý thuyết số về cơ bản là tập các số tự nhiên $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Vì các số tự nhiên dường như quá quen thuộc, chúng ta ít có ý thức rằng bản thân các số tự nhiên cũng cần được định nghĩa, được xây dựng, một cách chặt chẽ. Xây dựng các số tự nhiên một cách chặt chẽ là một vấn đề trung tâm hóc búa của cơ sở toán học. Ở đây ta sẽ không đề cập đến vấn đề này một cách có hệ thống mà chỉ điểm lại một số tính chất của tập các số tự nhiên mà ta sẽ công nhận như những tiên đề.

Tập số tự nhiên $\mathbb{N}$ chứa ít nhất hai phần tử 0 và 1. Tập này được trang bị phép cộng $(x, y) \mapsto x+y$. Quan hệ thứ tự $x < y$, cho bởi $x < y$ khi và chỉ khi tồn tại $z \in \mathbb{N}$ với $z \neq 0$ sao cho $x + z = y$, là một quan hệ thứ tự tuyến tính theo nghĩa với mọi $x \neq y$, hoặc $x < y$ hoặc $y < x$. Tập $\mathbb{N}$, với quan hệ thứ tự tuyến tính, thoả mãn nguyên lý trật tự (well-ordering principle): mọi tập con không rỗng $S \subset \mathbb{N}$ đều chứa một phần tử cực tiểu i.e. tồn tại $a \in S$ sao cho $a \leq x$ với mọi $x \in S$. Nguyên lý trật tự thực chất là một phiên bản của nguyên lý quy nạp quen thuộc.

2. Ước chung lớn nhất

Phép chia có dư của Euclid là một phép toán cơ bản của số học. Sự tồn tại của phép toán này dựa vào khẳng định: cho a, b là hai số nguyên với $b \neq 0$, khi đó tồn tại duy nhất $q, r \in \mathbb{Z}$ với

$$a = bq + r; \tag{2.1}$$

sao cho r thoả mãn $0 \leq r < |b|$.

Để chứng minh khẳng định này, ta xét tập S tất các số tự nhiên $x \in \mathbb{N}$ sao cho $x \equiv a \mod b$ (ta theo quy ước 0 là số tự nhiên). Tập S chứa a cho nên nó là tập không rỗng. Theo nguyên lý trật tự, S chứa một phần tử cực tiểu mà ta sẽ ký hiệu là r. Ta sẽ chứng minh $r < |b|$ bằng phản chứng. Thật vậy, nếu $r \geq |b|$ thì $r - |b|$ sẽ là một phần tử của S, nhỏ hơn hẳn r và do đó mâu thuẫn với giả thiết r là phần tử cực tiểu của S. Vì $r \equiv a \mod b$, tồn tại duy nhất $q \in \mathbb{Z}$ sao cho phương tình (2.1) thoả mãn.

Với mọi cặp số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, ước chung lớn nhất $\gcd(a, b)$ là số nguyên dương d lớn nhất sao cho cả a và b đều là bội của d.

Thực hiện nhiều lần phép chia có dư của Euclid là một phương pháp hiệu quả để tính ước chung lớn nhất. Nếu $a = bq + r$ như trong phương trình (2.1), ta dễ dàng kiểm tra $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$. Thay vì tính ước chúng lớn nhất của $a = a_0$ và $b = b_0$, ta chỉ cần tính ước chung lớn nhất của $b = a_1$ và $r = b_1$ với $0 < r < |b|$. Tiếp tục như vậy, ta sẽ có các cặp số nguyên (a_0, b_0), (a_1, b_1), ... sao cho

$$\gcd(a_0, b_0) = \gcd(a_1, b_1) = \cdots$$

với $|b_0| > b_1 > b_2 > \cdots > 0$. Dãy số này bắt buộc phải dừng ở một thời điểm nào đó, giả sử nó dừng ở (a_n, b_n). Ta chỉ không thực hiện được phép chia Euclid nữa khi số chia bằng không, có nghĩa là $b_n = 0$. Hiển nhiên nếu $b_n = 0$ thì ta có $\gcd(a_n, b_n) = a_n$, cho nên

$$\gcd(a, b) = \cdots = \gcd(a_n, b_n) = a_n.$$

Giải thuật trình bày ở trên gọi là thuật toán Euclid. Nhìn từ góc độ thực hành, thuật toán Euclid là một giải thuật hiệu quả để tính ước chung lớn nhất của hai số nguyên lớn. Nhìn từ góc độ lý thuyết, thuật toán Euclid kéo theo định lý sau, thường gọi là định lý Bezout:

Định lý 2.1. *Với mọi số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, ước chung lớn nhất $d = \gcd(a, b)$ biểu diễn được dưới dạng $d = xa + yb$ với $x, y \in \mathbb{Z}$.*

Thật vậy, theo quy nạp, tất cả các số $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n = 0$ xuất hiện trong thuật toán Euclid trình bày ở trên đều biểu diễn được dưới dạng $xa + yb$ và đặc biệt $d = a_n$ có dạng này.

Có một chứng minh hơi khác trong đó sử dụng nguyên lý trật tự thay cho thuật toán Euclid. Xét tập S các số nguyên dương n có dạng $n = xa + yb$ với $x, y \in Z$. Tập này có một phần tử cực tiểu ký hiệu là $e \in S$. Ta cần chứng minh rằng $d = e$.

Vì $d|a$ và $d|b$ cho nên $d|n$ với mọi $n \in S$. Vì vậy $d|e$. Để chứng minh $d = e$, ta chỉ cần chứng minh rằng bản thân e cũng là một ước chung của a và b. Giả sử không phải như thế, chẳng hạn như e không là ước của a. Khi đó thực hiện phép chia có dư Euclid của a chia cho e ta sẽ có $a = qe + r$ với $0 < r < e$. Hiển nhiên $r \in S$ vì cũng có dạng $xa + yb$ cho nên điều này sẽ mâu thuẫn với tính cực tiểu của e. Vì vậy e phải là ước chung của a và b.

Định lý 2.2. *Nếu $d|ab$ và $\gcd(d, a) = 1$ thì $d|b$.*

Nếu $\gcd(d, a) = 1$ thì sẽ tồn tại $x, y \in \mathbb{Z}$ sao cho $xd + ya = 1$. Khi đó $b = (xd + ya)b$ hiển nhiên là bội của d.

Định lý 2.3 (Định lý cơ bản của số học). *Mọi số tự nhiên $n > 1$ có thể phân tích một cách duy nhất thành tích các số nguyên tố.*

Phần tồn tại có thể suy ra từ nguyên lý trật tư. Phần duy nhất có thể suy ra từ khẳng đinh: nếu p là một số nguyên tố ước của ab thì hoặc $p|a$ hoặc $p|b$. Bản thân khẳng định này là một trường hợp đặc biệt của Định lý 2.2.

3. Vành có chuẩn Euclid

Vì định lý cơ bản của số học thực sự là công cụ cơ bản nhất để giải các bài toán số học, ta muốn tìm cách mở rộng nó ra một số vành giao hoán khác. Để mở rộng lập luận trình bày ở phần trước ra một vành R, ta cần trang bị cho R một chuẩn Euclid. Giả sử R là một miền nguyên (integral domain), K là trường các thương (fraction field) của R, chuẩn Euclid của R là một đồng cấu nhóm

$$| \, | : K^\times \to \mathbb{R}_+ \tag{3.1}$$

từ nhóm các phần tử khả nghịch trong K vào nhóm nhân các số dương thực sao cho

- với mọi $a \in R$ ta có $|a| \in \mathbb{N}$,
- với mọi $x \in K^\times$, tồn tại $a \in R$ sao cho $|x - a| < 1$.

Với các giả thiết này, phép chia có dư Euclid trong vành R luôn tồn tại, dầu rằng có thể không duy nhất: với mọi $a, b \in R$ với $B \neq 0$, tồn tại $q, r \in R$ với $|r| < |b|$ sao cho phương trình (2.1) được thoả mãn. Thật vậy, ta chọn $q \in \mathbb{R}$ sao cho $|\frac{a}{b} - q| < 1$, khi đó $r = a - bq$ sẽ thoả mãn $|r| < |b|$.

Định lý 3.1. *Trong một vành Euclid R, mọi ideal đều là ideal chính.*

Ta cần chứng minh rằng mọi ideal $I \subset R$ đều chứa một phần tử sinh $a \in I$. Theo nguyên lý trật tự tồn tại $a \in I$ sao cho với mọi $x \in I$ ta có $|a| \leq |x|$. Để chứng minh rằng a là một phần tử sinh, ta chứng minh rằng mọi phần tử $x \in I$ đều là bội của a. Nếu không như thế, tồn tại $q, r \in R$ sao cho $x = qa + r$ với $|r| < |a|$ và điều đó mâu thuẫn với tính cực tiểu của $|a|$.

Trong một miền nguyên R mà mọi ideal đều là ideal chính, ta có thể định nghĩa $\gcd(a, b)$ của hai phần tử $a, b \in R$ bất kỳ. Xét ideal $I = \{xa + yb | x, y \in \mathbb{Z}\}$ sinh bởi $a, b \in R$. Ideal này chứa ít nhất một phần tử sinh d và ta đặt $d = \gcd(a, b)$. Vì hai phần tử sinh của $d, d' \in I$ sai khác nhau một đơn vị $c \in R^\times$, có nghĩa là $d = cd'$, cho nên $\gcd(a, b)$ là một phần tử của R được xác định với sai khác là một phần tử $c \in R^\times$.

Tương tự như trong trường hợp vành các số nguyên, có thể chứng minh rằng các phần tử $n \in R$ có thể phân tích thành tích các phần tử nguyên tố; phân tích này là duy nhất với sai khác là các phần tử khả nghịch của R (một phần tử $a \in R$ được coi là nguyên tố nếu trong mọi phân tích $a = bc$ a thành tích hai phần tử $b, c \in R$, hoặc b hoặc c phải là phần tử khả nghịch).

Ngoài $\mathbb{Z}$, ví dụ cơ bản của vành Euclid là vành các đa thức $k[t]$ một biến t trên một trường k. Vành các số nguyên Gauss là một ví dụ thú vị khác:

$$R = \{x + iy | x, y \in \mathbb{Z}\}. \tag{3.2}$$

với i thoả mãn phương trình $i^2 = -1$. Trường các thương của R là

$$K = \{x + iy | x, y \in \mathbb{Q}\}. \tag{3.3}$$

Ta chọn chuẩn cho bởi $|x + iy| = x^2 + y^2$. Dễ thấy với mọi $a \in R$ ta có $|a| \in \mathbb{N}$ và với mọi $x \in K^\times$, hoặc tổng quát hơn, với mọi $x \in \mathbb{C}$, luôn tồn tại $a \in K$, sao cho $|x - a| < 1$. Thật vậy với mọi điểm x trong mặt phẳng phức, ta luôn tìm được một mắt trong lưới nguyên R với khoảng cách tới x không quá $1/\sqrt{2}$. Vì vậy ta có thể chứng minh khẳng định mạnh hơn: với mọi $x \in \mathbb{C}$, luôn tồn tại $a \in K$, sao cho $|x - a| \leq 1/2$.

Như vậy vành các số nguyên Gauss R là vành Euclid, mọi ideal của nó là ideal chính. Các phần tử của R có thể phân tích một cách duy nhất thành tích các phần tử nguyên tố với sai khác $R^{\times} = \{\pm 1, \pm i\}$.

Lập luận tương tự, ta có thể chứng minh được các vành

$$R_2 = \{x + y\sqrt{-2} \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \tag{3.4}$$

và

$$R_3 = \{x + y\frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \tag{3.5}$$

cũng có chuẩn Euclid. Thật vậy, nếu xem các phần tử R_2 (hoặc R_3) như mắt của một lưới trên mặt phẳng phức, thì lưới này đủ dầy để sao cho mọi số phức $z \in \mathbb{C}$, tồn tại ít nhất một mắt của lưới $a \in R_2$ (hoặc $a \in R_3$) sao cho $|z - a| < 1$.

Lập luận này không còn đúng nữa với

$$R_5 = \{x + y\sqrt{-5} \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \tag{3.6}$$

vì lưới R_5 quá thưa trong mặt phẳng phức: ta không thể đảm bảo được với mọi $z \in \mathbb{C}$, tồn tại $a \in R_5$ sao cho $|z - a| < 1$. Không những chuẩn thông thường $|x + y\sqrt{-5}| = x^2 + 5y^2$ của R_5 không phải là chuẩn Euclid, mà R_5 không thể có chuẩn Euclid vì tính chất phân tích duy nhất ra thừa số nguyên tố không được thoả mãn trong R_5. Thật vậy ta có đẳng thức

$$6 = 2.3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) \tag{3.7}$$

trong đó $2, 3, 1 + \sqrt{-5}, 1 - \sqrt{-5}$ là các phần tử nguyên tố của R_5. Như vậy 6 có hai cách phân tích khác nhau thành tích các phần tử nguyên tố.

Nói chung các vành giao hoán rất hiếm khi có chuẩn Euclid, nhưng khi có, chúng sẽ đem đến cho ta một số kết quả số học đơn giản và thú vị.

4. Tổng hai bình phương

Diophantus trong sách Arithmetica nhận xét rằng một số nguyên có dạng $4n + 3$ với $n \in \mathbb{Z}$ không thể viết được thành tổng của hai bình phương. Nói cách khác, với mọi $n \in \mathbb{Z}$, phương trình

$$x^2 + y^2 = 4n + 3 \tag{4.1}$$

không có nghiệm $x, y \in \mathbb{Z}$.

Phương trình trên thực ra không có nghiệm ở trong vành $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ các lớp đồng dư modulo 4. Thật vậy nếu x là một số chẵn, ta có $x \equiv 0 \mod 4$, còn nếu nó là một số lẻ, ta có $x \equiv 1 \mod 4$. Vì vậy trong mọi trường hợp $x^2 + y^2$ chỉ có thể đồng dư với 0, 1 hoặc 2 modulo 4. Như vậy, phương trình (4.1) không có nghiệm $x, y \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ và càng không thể có nghiệm trong $\mathbb{Z}$.

Fermat tìm ra điều kiện cần và đủ để một số nguyên có thể viết được dưới dạng tổng của hai bình phương.

Định lý 4.1. *Một số tự nhiên n viết được thành tổng của hai bình phương $n = x^2 + y^2$ với $x, y \in Z$ khi và chỉ khi trong phân tích n thành tích các thừa số nguyên tố*

$$n = 2^e p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r} \tag{4.2}$$

với $p_1, \dots, p_r$ là các số nguyên tố lẻ đôi một khác nhau, mọi thừa số nguyên tố p_i đồng dư với 3 modulo 4, đều có số mũ e_i chẵn.

Trước hết ta nhận xét rằng nếu hai số nguyên biểu diễn được dưới dạng tổng hai bình phương thì tích của chúng cũng như thế. Nếu $n_1 = x_1^2 + y_1^2$ và $n_2 = x_2^2 + y_2^2$ thì ta có

$$n_1 n_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2. \tag{4.3}$$

Trong trường hợp x_1, x_2, y_1, y_2 là các số nguyên, nếu $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ là các số nguyên Gauss tương ứng, thì ta có $n_1 = |z_1|$, $n_2 = |z_2|$ và $n_1 n_2 = |z_1 z_2|$ với $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$. Nhờ vào nhận xét này, định lý Fermat về tổng hai bình phương có thể quy về hai khẳng định liên quan đến số nguyên tố lẻ.

Định lý 4.2. *Nếu p là một số nguyên tố lẻ với $p \equiv 3 \mod 4$ và $x, y \in \mathbb{Z}$ sao cho $x^2 + y^2 \equiv 0 \mod p$ thì cả x và y đều là bội của p.*

Định lý 4.3. *Nếu p là một số nguyên tố lẻ với $p \equiv 1 \mod 4$ thì tồn tại $x, y \in \mathbb{Z}$ sao cho $x^2 + y^2 = p$.*

Sử dụng Định lý 4.2, ta chứng minh được rằng nếu n là tổng hai bình phương mà phân tích thành tích các thừa số nguyên tố như trong công thức (4.2), thì mọi thừa số nguyên tố p_i đồng dư với 3 modulo 4 trong số các thừa số nguyên tố $p_1, \dots, p_r$ đều có số mũ e_i chẵn. Ngược lại nếu mọi thừa số nguyên tố p_i đồng dư với 3 modulo 4 đều có số mũ e_i chẵn thì ta có thể sử dụng Định lý 4.3 để chứng minh rằng n có thể biểu diễn thành tổng hai bình phương.

Định lý 4.2 là một bài toán đồng dư. Ta thực chất làm việc trong trường $\mathbb{F}_p$ các lớp đồng dư moduo p. Giả sử y không là bội của của p, khi đó lớp đồng dư của y là một phần tử khác không, cho nên khả nghịch, của $\mathbb{F}_p$. Khi đó phương trình $x^2 + y^2 \equiv 0 \mod p$ kéo theo sự tồn tại của $z \mod p$ sao cho

$$z^2 \equiv -1 \mod p \tag{4.4}$$

Theo Định lý Fermat nhỏ, ta có đồng dư $z^{p-1} \equiv 1 \mod p$. Đồng dư (4.4) kéo theo

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \mod p. \tag{4.5}$$

Vì đồng dư này không đúng với các số nguyên tố $p \equiv 3 \mod 4$, cho nên trong trường hợp đó quan hệ đồng dư $x^2 + y^2 \equiv 0 \mod p$ sẽ kéo theo $p|x$ và $p|y$.

Bước đầu tiên trong chứng minh Định lý 4.3 là nhật xét trong trường hợp $p \equiv 1 \mod 4$ phương trình đồng dư (4.4) có nghiệm. Có ít nhất hai phương cách để chứng minh khẳng định này. Phương cách thứ nhất là sử dụng định lý Wilson:

$$(p-1)! \equiv -1 \mod p. \tag{4.6}$$

Phương cách thứ hai là sử dụng nhận xét nhóm $\mathbb{F}_p^\times$ các phần tử khả nghịch là nhóm xích, tức là nhóm Abel chứa ít nhất một phần tử sinh. Phương cách thứ nhất sơ cấp hơn, còn phương cách thứ hai thì phần nào thực chất hơn.

Để suy từ việc tồn tại nghiệm của phương trình đồng dư (4.4) ra việc phương trình $p = x^2 + y^2$ có nghiệm nguyên, ta cần dùng đến chuẩn Euclid của vành các số nguyên Gauss $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$. Cho z là một số nguyên sao cho $z^2 + 1 \equiv 0 \mod p$. Nếu cần thiết thay z bằng $z + p$ ta có thể giả thiết

$$z^2 + 1 \not\equiv 0 \mod p^2. \tag{4.7}$$

Xét ước chung lớn nhất của $z + i$ và p trong R. Vì R là vành Euclid, ước chung lớn nhất tồn tại và duy nhất với sai khác là phần tử của $R^\times = \{\pm 1, \pm i\}$, vì vậy ta có

$$\gcd(z + i, p) = x + iy \tag{4.8}$$

Khi đó ta có

$$x^2 + y^2 = |x + iy| = \gcd(|z + i|, p) = \gcd(z^2 + 1, p^2) = p. \tag{4.9}$$

Như vậy phương trình $x^2 + y^2 = p$ có nghiệm nguyên với mọi số nguyên tố p với $p \equiv 1 \mod 4$.

5. Về phương trình có dạng $n = x^2 + dy^2$

Phương trình $n = x^2 + 2y^2$ có thể được giải bằng phương pháp hoàn toàn tương tự như với phương trình $n = x^2 + y^2$. Các số phức có dạng $x + y\sqrt{-2}$ với $x, y \in \mathbb{Z}$ tạo nên một miền nguyên ký hiệu là $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$. Trường các thương của R là trường K các số phức có dạng $x + y\sqrt{-2}$ với $x, y \in \mathbb{Q}$. Ta có ánh xạ chuẩn $K^\times \to \mathbb{Q}^\times$ cho bởi

$$z = x + y\sqrt{-2} \mapsto |x + y\sqrt{-2}| = x^2 + 2y^2. \tag{5.1}$$

Vì chuẩn là một đồng cấu nhóm: với mọi $z_1, z_2 \in K^\times$ ta có $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ cho nên, về cơ bản, giải phương trình $n = x^2 + 2y^2$ quy về trường hợp n là số nguyên tố.

Định lý 5.1.

1. *Nếu p là một số nguyên tố đồng dư với 5 hoặc 7 modulo 8, phương trình đồng dư $x + 2y^2 \equiv 0 \mod p$ kéo theo $p|x$ và $p|y$.*

2. *Nếu p là một số nguyên tố đồng dư với 1 hoặc 3 modulo 8, phương trình $x^2 + 2y^2 = p$ có nghiệm nguyên.*

3. *Số tự nhiên n với phân tích thành tích các thừa số nguyên tố ở dạng (4.2) có thể biểu diễn ở dạng $n = x^2 + py^2$ khi và chỉ khi mọi thừa số nguyên tố p_i, đồng dư với 5 hoặc 7 modulo 8, đều có số mũ e_i là số chẵn.*

Khẳng định thứ ba có thể dễ dàng suy ra từ hai khẳng định đầu.

Khẳng định thứ nhất quy về bài toán đòng dư: khi nào phương trình đồng dư $z^2 \equiv -2 \mod p$ có nghiệm. Lời giải của bài toán đồng dư này thực ra là một bộ phận của luật thuận nghịch cấp hai (quadratic reciprocity law) của Gauss. Cũng chính vì vậy mà bài toán đồng dư $x^2 + dy^2 \equiv 0 \mod p$ có thể giải được cho mọi $d \in \mathbb{N}$ dựa vào luật thuận nghịch.

Khẳng định thứ hai có thể được chứng minh hoàn toàn tương tự như với bài toán $p = x^2 + y^2$, dựa vào sự tồn tại của chuẩn Euclid trên $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$ và sự tồn tại của ước chung lớn nhất trong vành này.

Vì chuẩn thông thường trên $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ vẫn là chuẩn Euclid cho nên bài toán $n = x^2 + 3y^2$ có thể giải được bằng phương pháp hoàn toàn tương tự như trên. Tuy vậy đối với một số tự nhiên d tổng quát, đặc biệt với $d = 5$, chuẩn thông thường trên $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ không còn là chuẩn Euclid nữa. Tệ hơn nữa, vành các phần tử nguyên của $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ không là vành chính, nó có những ideal không thể sinh bởi chỉ một phần tử. Vì vậy lập luận cơ bản như trong khẳng định thứ hai sử dụng khái niệm ước chung lớn nhất không còn đúng trong các trường hợp này.

Để khắc phục khó khăn này, trước hết cần nhận thấy ta vẫn có thể định nghĩa được "ước chung lớn nhất" như một ideal thay vì như một số: ước chung lớn nhất của a và b chỉ đơn giản là ideal sinh bởi a và b. Nhận xét này có thể xem như điểm khởi thuỷ của lý thuyết các miền Dedekind. Trong các miền Dedekind, mà điển hình là miền các phần tử nguyên trong một mở rộng hữu hạn K của $\mathbb{Q}$, định lý phân tích duy nhất thành tích các thừa số nguyên tố không còn đúng nữa. Tuy thế, định lý tương tự với các số được thay bằng các ideal, các số nguyên tố bằng các ideal nguyên tố, thì vẫn đúng.

Nhờ vào lý thuyết các ideal trong miền Dedekind, ta có thể định vị cái "khó" của ta như một phần tử của nhóm các lớp $\mathrm{Cl}(K)$ các ideal modulo các ideal chính. Nhóm các lớp $\mathrm{Cl}(K)$, mà khởi thuỷ là chỗ chứa cái khó, cái "khổ" của lý thuyết số sơ cấp, sẽ trở thành đối tượng nghiên cứu chính, cái "sướng", của lý thuyết số đại số. Chúng ta sẽ đề cập đến vấn đề này trong một bài viết khác. Trong lúc chờ đợi, bạn đọc có thể tìm đọc quyển sách rất thú vị của D. Cox có nhan đề "On primes of the form $x^2 + ny^2$.

Epsilon
Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

XẤP XỈ DIOPHANTINE TRÊN $\mathbb{R}^n$ - PHẦN 2: QUY TẮC DIRICHLET VÀ HÌNH HỌC CỦA CÁC SỐ

Lý Ngọc Tuệ - Đại học Brandeis, Massachusetts, Mỹ

1. Định lý Dirichlet

Trong phần trước [11], với công cụ chính là liên phân số, chúng ta đã có được câu trả lời cho câu hỏi: "Các số hữu tỉ có thể xấp xỉ các số vô tỉ tốt đến thế nào?" qua định lý sau của Euler:

Định lý 1.1 (Euler 1748 [4]). Với mọi số vô tỉ $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tồn tại vô số số hữu tỉ $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ với $q > 0$ sao cho:

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}. \tag{1.1}$$

Tuy nhiên, cho đến tận bây giờ vẫn chưa có được một cách xây dựng liên phân số trong không gian nhiều chiều $\mathbb{R}^n$ có đầy đủ các tính chất để có thể trả lời câu hỏi về khả năng xấp xỉ các véc tơ trên $\mathbb{R}^n$ bằng các véc tơ hữu tỉ $\mathbb{Q}^n$. Phải đến gần 100 năm sau, Định lý 1.1 mới được mở rộng lên $\mathbb{R}^n$ bởi nhà toán học Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Kết quả này được xem như là xuất phát điểm cho lý thuyết xấp xỉ Diophantine phát triển. Vì thế nên Định lý 1.1 vẫn thường được gọi là Định lý Dirichlet (trên $\mathbb{R}$).

Trên không gian véc tơ $\mathbb{R}^n$, giá trị tuyệt đối trên $\mathbb{R}$ trong bất đẳng thức (1.1) sẽ được thay thế bởi sup norm:

$$\|\vec{x}\| := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \quad \text{với } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Lưu ý rằng sup norm tương đương với Euclidean norm:

$$\|\vec{x}\|_2 := \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

vẫn thường dùng để định nghĩa khoảng cách trên $\mathbb{R}^n$ như sau:

$$\|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\| \leq \sqrt{n} \cdot \|\vec{x}\|_2.$$

Định lý Dirichlet cho $\mathbb{R}^n$ có thể được phát biểu như sau:

Định lý 1.2 (Dirichlet 1842 [3]). Với mọi véc tơ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$, tồn tại vô số véc tơ hữu tỉ $\frac{\vec{p}}{q} = \left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \dots, \frac{p_n}{q} \right) \in \mathbb{Q}^n$ với $\vec{p} \in \mathbb{Z}^n$ và $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, sao cho:

$$\left\| \vec{x} - \frac{\vec{p}}{q} \right\| < \frac{1}{|q|^{1+\frac{1}{n}}}. \tag{1.2}$$

Dirichlet chứng minh Định lý 1.2 thông qua Định lý sau:

Định lý 1.3 (Dirichlet 1842 [3]). Với mọi $Q \geq 1$ và với mọi $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, tồn tại $\vec{p} \in \mathbb{Z}^n$ và $q \in \mathbb{Z}$, $0 < |q| \leq Q^n$ sao cho:

$$\|q\vec{x} - \vec{p}\| < \frac{1}{Q}. \tag{1.3}$$

Chứng minh Định lý 1.2 dựa vào Định lý 1.3. Với mỗi $Q \geq 1$ cố định, áp dụng Định lý 1.3, ta có thể tìm được $\vec{p} \in \mathbb{Z}^n$ và $q \in \mathbb{Z}$, $0 < |q| \leq Q^n$ sao cho:

$$\left\|\vec{x} - \frac{\vec{p}}{q}\right\| = \frac{1}{|q|}\|q\vec{x} - \vec{p}\| < \frac{1}{Q|q|} \leq \frac{1}{|q|^{1+\frac{1}{n}}}.$$

Vì $\vec{x} \notin \mathbb{Q}^n$, $\vec{x} - \frac{\vec{p}}{q} \neq 0$, nên với $Q' > 0$ sao cho

$$\frac{1}{Q'} < \left\|\vec{x} - \frac{\vec{p}}{q}\right\|,$$

$\vec{p}'$ và q' tìm được theo Định lý 1.3 tương ứng với Q' thỏa mãn điều kiện:

$$\left\|\vec{x} - \frac{\vec{p}'}{q'}\right\| < \frac{1}{Q'|q'|} \leq \frac{1}{Q'} < \left\|\vec{x} - \frac{\vec{p}}{q}\right\|.$$

Điều này dẫn đến:

$$\frac{\vec{p}'}{q'} \neq \frac{\vec{p}}{q}.$$

Vì vậy, khi $Q \to \infty$, ta sẽ có được vô số $\frac{\vec{p}}{q}$ khác nhau thỏa mãn (1.2). □

Lưu ý 1.4. Định lý 1.3 còn được gọi là *Định lý Dirichlet mạnh* và Định lý 1.2 còn được gọi là *Định lý Dirichlet yếu* .

Để chứng minh Định lý 1.3, Dirichlet sử dụng quy tắc nhốt thỏ vào chuồng (Dirichlet gọi là *Nguyên tắc ngăn kéo - Schubfachprinzip*), hay còn gọi là nguyên lý Dirichlet như sau:

Nguyên lý Dirichlet. Nếu như chúng ta có k con thỏ bị nhốt trong l cái chuồng, và $k > l$, thì sẽ có một chuồng có ít nhất 2 con thỏ.

Lưu ý 1.5. Nguyên tắc trên đã được biết đến bởi các nhà toán học trước Dirichlet (ss. [8]), nhưng bài báo của Dirichlet là lần đầu tiên nguyên tắc này được áp dụng vào chứng minh một kết quả quan trọng trong toán, nên nó đã được gắn với tên của ông.

Để minh họa ý tưởng chính, chúng ta sẽ chứng minh Định lý 1.3 cho trường hợp $n = 1$ như sau:

Chứng minh Định lý 1.3 với $n = 1$. Với mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$, chúng ta sử dụng ký hiệu phần nguyên và phần thập phân của x như sau:

$$\lfloor x \rfloor := \max\{a \in \mathbb{Z} : a \leq x\} \quad \text{và} \quad \{x\} := x - \lfloor x \rfloor.$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử như Q là một số nguyên dương (thay Q bởi $\lfloor Q \rfloor$ nếu cần), và chia đoạn $[0,1)$ ra thành Q đoạn:

$$\left[0,\frac{1}{Q}\right),\left[\frac{1}{Q},\frac{2}{Q}\right),\ldots,\left[\frac{Q-1}{Q},1\right),$$

mỗi đoạn có độ dài $\frac{1}{Q}$.

Xét $Q+1$ số thực $0,\{x\},\{2x\},\ldots,\{Qx\}$. Vì $Q+1>Q$, theo Nguyên lý Dirichlet, tồn tại một đoạn $\left[\frac{a}{Q},\frac{a+1}{Q}\right)$, $0\le a<Q$ và $0\le q_1,q_2\le Q$, $q_1\ne q_2$ sao cho:

$$\{q_1x\},\{q_2x\}\in\left[\frac{a}{Q},\frac{a+1}{Q}\right).$$

Vậy nếu đặt $p_1=\lfloor q_1x\rfloor$, $p_2=\lfloor q_2x\rfloor$, ta sẽ có được:

$$|(q_1x-p_1)-(q_2x-p_2)|=|\{q_1x\}-\{q_2x\}|<\frac{1}{Q}.$$

Và (1.3) sẽ thỏa mãn với $q=q_1-q_2$ và $p=p_1-p_2$. □

Chứng minh trên có thể dễ dàng mở rộng ra cho $n\ge 1$ bất kỳ như sau:

Chứng minh Định lý 1.3 với $n\ge 1$. Tương tự như trên, ta có thể giả sử rằng $Q>0$ là một số nguyên dương. Chia hình hộp vuông $[0,1)^n$ ra thành Q^n hình hộp vuông nhỏ hơn có độ dài mỗi cạnh bằng $\frac{1}{Q}$:

$$\left[\frac{a_1}{Q},\frac{a_1+1}{Q}\right)\times\ldots\times\left[\frac{a_n}{Q},\frac{a_n+1}{Q}\right)\quad \text{với } 0\le a_1,\ldots,a_n<Q. \tag{1.4}$$

Và xét Q^n+1 véc tơ dạng:

$$0,(\{x_1\},\ldots,\{x_n\}),(\{2x_1\},\ldots,\{2x_n\}),\ldots,(\{Q^nx_1\},\ldots,\{Q^nx_n\}).$$

Theo Nguyên lý Dirichlet, ta sẽ tìm được 2 véc tơ cùng nằm trong một trong một hộp vuông nhỏ (1.4). Và lập luận tương tự như ở trên, ta có thể tìm được $\vec{p}\in\mathbb{Z}^n$ và $q\in\mathbb{Z}$ với $0<|q|\le Q^n$ sao cho:

$$\|q\vec{x}+\vec{p}\|<\frac{1}{Q}.$$

□

Bài tập 1.6. Gọi $M_{m,n}(\mathbb{R})$ là tập các ma trận m dòng n cột với hệ số thực. Định lý 1.2 có thể được mở rộng ra $M_{m,n}(\mathbb{R})$ thành dạng mệnh đề như sau: Nếu như ma trận $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A\vec{q}\notin\mathbb{Z}^m$ với mọi $\vec{q}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$, thì tồn tại vô số $(\vec{p},\vec{q})\in\mathbb{Z}^m\times\mathbb{Z}^n$ với $\vec{q}\ne 0$ và

$$\|A\vec{q}-\vec{p}\|<\frac{1}{\|\vec{q}\|^{\kappa}}.$$

Tìm κ cho Định lý Dirichlet trên $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

2. Hình học số của Minkowski

Cũng như trên $\mathbb{R}$, tính tối ưu của hàm $|q|^{-(1+\frac{1}{n})}$ trong Định lý 1.2 có thể được chứng minh bởi sự tồn tại của các véc tơ $\vec{x}$ *xấp xỉ kém* được định nghĩa bởi tính chất sau: tồn tại $c > 0$ sao cho với mọi véc tơ hữu tỉ $\dfrac{\vec{p}}{q} \in \mathbb{Q}^n$,

$$\left\| \vec{x} - \frac{\vec{p}}{q} \right\| > \frac{c}{|q|^{1+\frac{1}{n}}}. \tag{2.1}$$

Tuy nhiên không giống như trong trường hợp $\mathbb{R}$, khi $n > 1$, chúng ta không có được công cụ liên phân số để mô tả và qua đó chứng minh sự tồn tại của các véc tơ xấp xỉ kém. Tập các véc tơ xấp xỉ kém trên $\mathbb{R}^n$ là một đối tượng nghiên cứu quan trọng trong lý thuyết xấp xỉ Diophantine. Chúng tôi sẽ có một bài viết riêng về tập này trong một số báo sau.

Cũng bởi không có công cụ liên phân số hoàn thiện trong không gian nhiều chiều, chúng ta sẽ phải sử dụng công cụ khác để cải thiện hằng số 1 trong Định lý 1.2. Công cụ mà chúng tôi sẽ giới thiệu trong phần còn lại của bài là Hình học các số (Geometry of Numbers) của Minkowski.

Hình học số (Geometry of Numbers) được phát triển vào cuối thế kỷ 19, đầu thế kỷ 20 bởi nhà toán học Hermann Minkowski [7] nhằm đưa đại số tuyến tính và hình học vào giải một số vấn đề trong lý thuyết số đại số . Hình học số của Minkowski nhanh chóng tìm được ứng dụng trong xấp xỉ Diophantine, và trở thành một trong những công cụ cơ bản vô cùng quan trọng.

Một số tài liệu tham khảo cho Hình học số: Cassels [2], Siegel [10], Gruber & Lekkerkerker [5].

2.1. Vật lồi (Convex Body)

Một trong những đối tượng nghiên cứu chính của Hình học các số là các tập *lồi* trong $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa như sau: Tập hợp $E \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là tập *lồi* nếu như với 2 điểm bất kỳ $\vec{x}, \vec{y} \in E$ bất kỳ, đoạn thẳng nối $\vec{x}$ và $\vec{y}$ cũng nằm trong E:

$$\vec{x}, \vec{y} \in E \Rightarrow t\vec{x} + (1-t)\vec{y} \in E \quad \text{với mọi } 0 \le t \le 1.$$

E được gọi là *đối xứng tâm* nếu như:

$$\vec{x} \in E \Rightarrow -\vec{x} \in E.$$

Bài tập 2.1. Phân loại tất cả các tập lồi trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2.2. (i) Tập $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$ là một tập lồi trên $\mathbb{R}^2$.

(ii) Tập $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ không phải là một tập lồi trên $\mathbb{R}^2$.

(iii) Tập $\left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le 1\right\}$ là một tập lồi trên $\mathbb{R}^n$.

(iv) Tập $\left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \prod_{i=1}^{n} |x_i| < 1\right\}$ không phải là một tập lồi trên $\mathbb{R}^n$ với $n \ge 2$.

Bài tập 2.3. Chứng minh ví dụ 2.2.

Với mỗi tập $E \subset \mathbb{R}^n$, ký hiệu χ_E là hàm đặc trưng của E:

$$\chi_E(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & , \vec{x} \in E \\ 0 & , \vec{x} \notin E \end{cases}$$

và $\mathrm{vol}(E)$ là thể tích trên $\mathbb{R}^n$ của E (độ đo Lebesgue của E):

$$\mathrm{vol}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(\vec{x}) d(\vec{x}).$$

Định lý sau của Minkowski, một trong những kết quả căn bản trong Hình học các số, cho ta biết được điều kiện đủ để một tập lồi có chứa điểm có tọa độ nguyên:

Định lý 2.4 (Định lý hình lồi của Minkowski). Gọi $E \subseteq \mathbb{R}^n$ là một tập lồi, đối xứng tâm và bị chặn trên $\mathbb{R}^n$. Nếu như:

(i) $\mathrm{vol}(E) > 2^n$, hoặc

(ii) $\mathrm{vol}(E) = 2^n$ và E compact,

thì E có chứa ít nhất một điểm tọa độ nguyên khác 0:

$$E \cap \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \neq \emptyset.$$

Để chứng minh Định lý 2.4, ta sẽ cần đến Quy tắc Blichfeldt trong Hình học số (Định lý 2.6) và Bổ đề sau:

Bổ đề 2.5. Giả sử như $f(\vec{x})$ là một hàm khả tích không âm trên $\mathbb{R}^n$ với:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) d(\vec{x}) < \infty.$$

Tồn tại $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ sao cho:

$$\sum_{\vec{p} \in \mathbb{Z}^n} f(\vec{y} + \vec{p}) \geq \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) d(\vec{x}).$$

Chứng minh. Nếu như chuỗi ở vế bên trái không bị chặn đều theo $\vec{y}$ thì kết luận của Bổ đề là hiển nhiên. Giả sử như chuỗi ở vế bên trái bị chặn đều theo $\vec{y}$, theo Định lý hội tụ mạnh của Lebesgue, ta có được:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) d(\vec{x}) &= \sum_{\vec{p} \in \mathbb{Z}^n} \int_{[0,1)^n} f(\vec{x} + \vec{p}) d(\vec{x}) \\ &= \int_{[0,1)^n} \sum_{\vec{p} \in \mathbb{Z}^n} f(\vec{x} + \vec{p}) d(\vec{x}) \\ &\leq \mathrm{vol}([0,1)^n) \cdot \sup_{\vec{x} \in [0,1)^n} \sum_{\vec{p} \in \mathbb{Z}^n} f(\vec{x} + \vec{p}) \\ &= \sup_{\vec{x} \in [0,1)^n} \sum_{\vec{p} \in \mathbb{Z}^n} f(\vec{x} + \vec{p}). \end{aligned}$$

Nếu như:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})d(\vec{x}) < \sup_{\vec{x}\in[0,1)^n} \sum_{\vec{p}\in\mathbb{Z}^n} f(\vec{x}+\vec{p})$$

thì ta có thể tìm được $\vec{y} \in [0,1)^n$ sao cho:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})d(\vec{x}) \le \sum_{\vec{p}\in\mathbb{Z}^n} f(\vec{y}+\vec{p}) < \sup_{\vec{x}\in[0,1)^n} \sum_{\vec{p}\in\mathbb{Z}^n} f(\vec{x}+\vec{p}).$$

Còn nếu như:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})d(\vec{x}) = \sup_{\vec{x}\in[0,1)^n} \sum_{\vec{p}\in\mathbb{Z}^n} f(\vec{x}+\vec{p})$$

thì

$$\operatorname{vol}\left(\left\{\vec{y} \in [0,1)^n : \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})d(\vec{x}) = \sum_{\vec{p}\in\mathbb{Z}^n} f(\vec{y}+\vec{p})\right\}\right) = 1,$$

nghĩa là hầu hết $\vec{y} \in [0,1)^n$ thỏa mãn Bổ đề. □

Định lý 2.6 (Blichfeldt 1914 [1]). Nếu như E là một tập đo được trên $\mathbb{R}^n$ với $\operatorname{vol}(E) > 1$ thì tồn tại 2 véc tơ khác nhau $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in S$ sao cho $\vec{x}_2 - \vec{x}_1 \in \mathbb{Z}^n$.

Chứng minh. Áp dụng Bổ đề 2.5 với $f = \chi_E$, ta có thể tìm được $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ sao cho:

$$\sum_{\vec{p}\in\mathbb{Z}^n} \chi_E(\vec{y}+\vec{p}) \ge \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(\vec{x})d(\vec{x}) = \operatorname{vol}(E) > 1.$$

Vì vậy, tồn tại $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in \mathbb{Z}^n$ khác nhau sao cho $\vec{y}+\vec{p}_1, \vec{y}+\vec{p}_2 \in S$. Đặt $\vec{x}_1 = \vec{y}+\vec{p}_1$, $\vec{x}_2 = \vec{y}+\vec{p}_2$, ta có được 2 véc tơ thỏa mãn Định lý. □

Chứng minh Định lý Vật lồi của Minkowski 2.4. Đầu tiên ta sẽ chứng minh cho trường hợp $\operatorname{vol}(E) > 2^n$. Đặt $S = \{\vec{x} : 2\vec{x} \in E\}$, thể tích của S là:

$$\operatorname{vol}(S) = \frac{1}{2^n}\operatorname{vol}(E) > 1.$$

Vì thế theo Định lý 2.6, ta có thể tìm được $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in S$ khác nhau sao cho $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \mathbb{Z}^n$. Vì S cũng đối xứng tâm, $-\vec{x}_2 \in S$, và vì S cũng là một tập lồi:

$$t\vec{x}_1 + (1-t)(-\vec{x}_2) \in S \quad \text{với mọi } 0 \le t \le 1.$$

Với $t = \dfrac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2}\vec{x}_1 - \frac{1}{2}\vec{x}_2 \in S.$$

Theo định nghĩa của tập S:

$$2\left(\frac{1}{2}\vec{x}_1 - \frac{1}{2}\vec{x}_2\right) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in E.$$

Vậy, véc tơ $\vec{p} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ là một véc tơ tọa độ nguyên trong E.

Với trường hợp $\text{vol}(E) = 2^n$ và E compact, xét dãy $E_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)E = \left\{\vec{x} : \frac{k}{1+k}\vec{x} \in E\right\}$. $\text{vol}(E_k) > 2^n$ với mọi k, nên ta có thể áp dụng trường hợp đầu tiên cho E_k để có được 1 dãy $\vec{p}_k \in \mathbb{Z}^n \cap E_k$. Vì các tập E_k bị chặn đều, dãy $\vec{p}_k$ là một dãy bị chặn, nên theo Định lý Bolzano-Weierstrass, tồn tại một dãy con hội tụ. Vì $\mathbb{Z}^n$ là một tập rời rạc và $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, mỗi dãy con hội tụ của p_k sẽ cho ta 1 véc tơ tọa độ nguyên trong E. □

Lưu ý 2.7. Điều kiện về thể tích trong Định lý 2.4 là tối ưu qua ví dụ sau: tập $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\| < 1\}$ là một tập lồi, đối xứng tâm và có thể tích bằng 2^n, nhưng $E \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$.

2.2. Dạng tuyến tính (Linear Forms)

Xét hệ bất phương trình tuyến tính n ẩn n bất phương trình như sau:

$$\begin{array}{rcccccl} |a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n| & < & c_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ |a_{n-1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{n-1,n}x_n| & < & c_{n-1} \\ |a_{n,1}x_1 & + & \dots & + & a_{n,n}x_n| & \leq & c_n \end{array} \tag{2.2}$$

Áp dụng kết quả về tập lồi cho phép ta tìm được nghiệm nguyên không hiển nhiên cho hệ bất phương trình tuyến tính trên:

Định lý 2.8 (Định lý Dạng tuyến tính của Minkowski). Giả sử như ma trận $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ có $|\det(A)| = 1, c_1, c_2, \dots, c_n > 0$ và $\prod_{i=1}^{n} c_i \geq 1$. Thì hệ bất phương trình tuyến tính (2.2) có ít nhất 1 bộ nghiệm nguyên khác 0.

Chứng minh. Với mỗi $1 \leq i \leq n$, gọi $A_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$ véc tơ dòng thứ i của ma trận A. Và với $k = 1, 2, \dots$, xét các hình bình hành nhiều chiều sau:

$$E_k := \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |A_i \cdot \vec{x}| < c_i \text{ với } 1 \leq i \leq n-1, |A_n \cdot \vec{x}| < c_n + \frac{1}{k}\right\}.$$

Bài tập 2.9. Chứng minh rằng các tập E_k là tập lồi, đối xứng tâm, và có thể tích:

$$\text{vol}(E_k) = 2^n c_1 c_2 \dots c_{n-1}\left(c_n + \frac{1}{k}\right) > 2^n.$$

Theo Định lý 2.4, ta có thể tìm được một dãy các véc tơ tọa độ nguyên $\vec{z}_k \in E_k$ khác 0. Lập luận như trong chứng minh của Định lý 2.4 ta có được véc tơ tọa độ nguyên cần tìm. □

Chúng ta có thể áp dụng Định lý Dạng tuyến tính để có một chứng minh khác cho Định lý Dirichlet:

Chứng minh khác cho Định lý 1.3. Với mỗi véc tơ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, xét ma trận $A \in M_{n+1,n+1}(\mathbb{R})$ như sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -x_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \\ A_{n+1} \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Với mỗi $Q \geq 1$, áp dụng Định lý 2.8, ta có thể tìm được một véc tơ tọa độ nguyên:

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus 0$$

sao cho

$$|qx_i - p| = \left|A_i \cdot \vec{z}\right| < \frac{1}{Q} \quad \text{với } 1 \leq i \leq n \quad \text{và} \quad |q| = \left|A_{n+1} \cdot \vec{z}\right| \leq Q^n.$$

Ta chỉ cần phải chứng minh rằng $q \neq 0$. Giả sử như $q = 0$, vì $\vec{z} \neq 0$, nên tồn tại $p_i \neq 0$. Điều đó dẫn đến:

$$1 \leq |p_i| = \left|A_i \cdot \vec{z}\right| < \frac{1}{Q} \leq 1 \quad \text{(Vô lý)}.$$

Vậy ta có được véc tơ $\vec{p} = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{Z}^n$ và $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ cần tìm. □

2.3. Cải thiện hằng số trong Định lý Dirichlet trên $\mathbb{R}^n$

Định lý 2.10 (Minkowski 1910). Với mọi véc tơ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$, tồn tại vô số véc tơ hữu tỉ $\frac{\vec{p}}{q} = \left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, ..., \frac{p_n}{q}\right) \in \mathbb{Q}^n$ với $\vec{p} \in \mathbb{Z}^n$ và $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, sao cho:

$$\left\|\vec{x} - \frac{\vec{p}}{q}\right\| < \frac{C_n}{|q|^{1+\frac{1}{n}}} \quad \text{với } C_n = \frac{n}{n+1}. \tag{2.4}$$

Lưu ý 2.11. Khi $n = 1$, ta có được $C_1 = \frac{1}{2}$, không phải là hằng số tối ưu $\frac{1}{\sqrt{5}}$ như trong Định lý của Hurwitz (xem trong [11]). Có một số kết quả cho ra hằng số cho Định lý Dirichlet tốt hơn Định lý 2.10, chẳng hạn như Blitchfeldt [1] thay thế C_n bằng:

$$\frac{n}{n+1} \cdot \left(1 + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+3}\right)^{-\frac{1}{n}}.$$

Tuy nhiên hằng số tối ưu cho Định lý Dirichlet trên $\mathbb{R}^n$ với $n \geq 2$ vẫn là một câu hỏi mở quan trọng trong lý thuyết xấp xỉ Dirichlet và Hình học số.

Để chứng minh Định lý 2.10, với mỗi $Q > 0$ và $C > 0$, xét tập hợp $E_{Q,C}$ được định nghĩa bởi:

$$E_{Q,C} = \left\{(\vec{y}, z) = (y_1, ..., y_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : Q^{-n}|z| + Q\left\|\vec{y}\right\| \leq C\right\}.$$

Bổ đề 2.12. Với mỗi $Q > 0$ và $C > 0$, $E_{Q,C}$ là một tập compact, lồi, đối xứng tâm, và có thể tích:

$$\operatorname{vol}(E_{Q,C}) = \frac{(2C)^{n+1}}{n+1}.$$

Chứng minh. Xét hàm $f : E_{Q,C} \to E_{1,C}$, $(\vec{y}, z) \mapsto \left(Q^{-1}\vec{y}, Q^n z\right)$.

Bài tập 2.13. Chứng minh rằng f là một hàm tuyến tính, với định thức bằng 1, và là song ánh giữa $E_{Q,C}$ và $E_{1,C}$.

Vậy nên f và f^{-1} sẽ bảo tồn các tính chất compact, lồi và đối xứng tâm, và ta chỉ cần chứng minh trường hợp $Q = 1$.
Tính compact và đối xứng tâm của tập $E_{1,C}$ là hiển nhiên. Gọi $(\vec{y}, z)$ và $(\vec{y}', z')$ là 2 điểm trong $E_{1,C}$, với $0 \le t \le 1$, áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có được:

$$\begin{aligned}\left|tz + (1-t)z'\right| + \left\|t\vec{y} + (1-t)\vec{y}'\right\| &\le |tz| + \left|(1-t)z'\right| + \left\|t\vec{y}\right\| + \left\|(1-t)\vec{y}'\right\| \\ &= t\left(|z| + \left\|\vec{y}\right\|\right) + (1-t)\left(\left|z'\right| + \left\|\vec{y}'\right\|\right) \\ &\le C\end{aligned}$$

Vậy $t(\vec{y}, z) + (1-t)(\vec{y}', z') \in E_{1,C}$.
Cuối cùng ta có thể tính thể tích của E_1 (cũng là của mọi E_Q):

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(E_1) &= \int_{-C}^{C}\int_{|z|-C}^{C-|z|}\cdots\int_{|z|-C}^{C-|z|} dy_1\ldots dy_n dz \\ &= 2^{n+1}\int_0^C (C-z)^n dz \\ &= \frac{(2C)^{n+1}}{n+1}.\end{aligned}$$

□

Chứng minh Định lý 2.10. Đặt $C = (n+1)^{\frac{1}{n+1}}$ và ma trận A được định nghĩa như trong (2.3). Theo Bổ đề 2.12, tập $AE_{Q,C}$ là tập compact, lồi, đối xứng tâm, và có thể tích $\mathrm{vol}(AE_{Q,C}) = 2^{n+1}$. Áp dụng Định lý 2.4, ta có thể tìm được một véc tơ tọa độ nguyên $(\vec{p}_Q, q_Q)$ khác 0 nằm trong $AE_{Q,C}$, nghĩa là $(\vec{p}_Q, q_Q)$ thỏa mãn:

$$Q^{-n}\left|q_Q\right| + Q\left\|q_Q\vec{x} - \vec{p}_Q\right\| \le C.$$

Lưu ý rằng với mỗi véc tơ tọa độ nguyên $(\vec{p}, q)$, chỉ tồn tại hữu hạn $Q > 0$ thỏa mãn:

$$Q^{-n}|q| + Q\left\|q\vec{x} - \vec{p}\right\| = C.$$

Vậy nên ngoại trừ một số đếm được các $Q > 0$, bộ ba $Q, \vec{p}_Q, q_Q$ thỏa mãn bất đẳng thức:

$$Q^{-n}\left|q_Q\right| + Q\left\|q_Q\vec{x} - \vec{p}_Q\right\| < C. \tag{2.5}$$

Với những bộ $Q, \vec{p}_Q, q_Q$ thỏa mãn (2.5), áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân cho ta:

$$\begin{aligned}\left|q_Q\right|\cdot\left\|q_Q\vec{x} - \vec{p}_Q\right\|^n &= n^n\cdot\left(Q^{-n}\left|q_Q\right|\right)\cdot\left(\frac{Q}{n}\left\|q_Q\vec{x} - \vec{p}_Q\right\|\right)^n \\ &\le n^n\cdot\left(\frac{Q^{-n}\left|q_Q\right| + Q\left\|q_Q\vec{x} - \vec{p}_Q\right\|}{n+1}\right)^{n+1} \\ &< n^n\left(\frac{C}{n+1}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = C_n^n,$$

tương đương với (2.4).

Nếu như ta chọn $Q \leq C$ thì $q_Q \neq 0$, vì nếu như $q_Q = 0$, $\vec{p}_Q \neq 0$ và bất đẳng thức (2.5) dẫn đến:

$$\left\| q_Q \vec{x} - \vec{p}_Q \right\| = \left\| p_Q \right\| < C Q^{-1} \leq 1 \quad \text{(vô lý)}.$$

Lưu ý thêm rằng với mỗi $(\vec{p}, q)$, tập:

$$\left\{ Q > 0 : (\vec{p}, q) \in AE_{Q,C} \right\} = \left\{ Q > 0 : Q^{-n}|q| + Q\left\| q\vec{x} - \vec{p} \right\| \leq C \right\}$$

bị chặn. Vì vậy khi $Q \to \infty$, ta có thể tìm được vô số $(\vec{p}, q)$ thỏa mãn (2.4). Và với lập luận tương tự như trong chứng minh của Định lý 1.2 dựa vào Định lý 1.3, ta có thể tìm được vô số véc tơ hữu tỉ $\frac{\vec{p}}{q}$ thỏa mãn (2.4). □

Tài liệu tham khảo

[1] Blichfeldt, H., *A new principle in the geometry of numbers with some applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **15** (1914), pp. 227-235.

[2] Cassels, J. W. S., *An introduction to the Geometry of Numbers*, Springer (1959).

[3] Dirichlet, L. G. P., *Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen*, S. B. Preuss. Akad. Wiss. (1842), pp. 93–95.

[4] Euler, L., *Introductio in analysin infinitorum I*, (1748).

[5] Gruber, P., Lekkerkerker, C., *Geometry of Numbers*, North-Holland Mathematical Library (1987).

[6] Hardy, G., Wright, E. M., *An introduction to the theory of numbers*, 5th ed., Clarendon Press (1979).

[7] Minkowski, H., *Geometrie der Zahlen*, Teubner: Leipzig U. Berlin (1896 & 1910).

[8] Rittaud, B., Heeffer, A., *The Pigeonhole Principle - Two centuries before Dirichlet*, The Mathematical Intelligencer **36**, Springer (2014), pp. 27–29.

[9] Schmidt, W. M., *Diophantine approximation*, Lectures Notes in Mathematics **785**, Springer (1980).

[10] Siegel, C. L., *Lectures on the Geometry of Numbers*, Springer-Verlag (1989).

[11] Lý Ngọc Tuệ, *Xấp xỉ Diophantine trên $\mathbb{R}$ và Liên phân số*, Epsilon **4**, (2015).

CÂN BẰNG NASH

Vladimir Gurvich

Đề đề xuất cho Hội nghị mùa hè, Cuộc thi giữa các thành phố từ ngày 3 đến 11/8/2012.

1. Mở đầu

Điều gì là chung giữa cờ vây, cờ vua, cờ nhảy và cờ ca rô? Tất cả chúng đều là những trò chơi hữu hạn vị trí với thông tin hoàn hảo và không có vị trí của cơ hội. Ý cuối có nghĩa là "*tất cả các người chơi đều biết tất cả mọi thứ*" và do đó họ biết những điều giống nhau. Điều này không giống như chơi bài hay chơi domino, nơi mà một người chơi không biết quân bài của đối thủ. Trong cờ cá ngựa, có vị trí của cơ hội, khi ta tung con xúc sắc.

Từ "*vị trí*" có nghĩa có những bước đi từ vị trí này đến vị trí khác.

Từ "*hữu hạn*" có nghĩa là có hữu hạn các vị trí. Bất kỳ cấu hình nào của những viên sỏi là một vị trí trong cờ vây. Có rất nhiều (nhưng hữu hạn) các vị trí như vậy. Một ván cờ bắt đầu từ một vị trí ban đầu nào đó và kết thúc ở vị trí chung cuộc (mà ta gọi là vị trí kết thúc). Ví dụ, một nước chiếu bí là một vị trí kết thúc trong cờ vua. Điều quan trọng là phải nhận thấy rằng vị trí có thể được lặp đi lặp lại và một ván đấu có thể có vòng lặp. Tất cả các trò chơi nói trên đều là những trò chơi hai người có tổng bằng không (*zero-sum*).

Từ "*zero-sum*" có nghĩa là chiến thắng của một người là thất bại của người còn lại. Và nếu một người được một số điểm số thì người kia mất cùng một điểm số đó. Một cặp chiến lược là tối ưu nếu chúng tạo thành một trạng thái cân bằng, nghĩa là các kết quả tương ứng không thể được cải thiện bởi bất cứ một trong hai đối thủ. Tuy nhiên, mọi thứ trở nên phức tạp hơn nhiều khi có nhiều hơn hai người chơi (hoặc hai người chơi nhưng trò chơi không phải là zero-sum). Có thể xảy ra rằng mỗi người chơi chỉ có thể đảm bảo một kết quả rất kém, vì anh ta sẽ rất khó khăn để chiến đấu chống lại liên minh của tất cả các đấu thủ khác.

Bài tập 1.1. Có 10 que diêm và 3 người chơi lần lượt xoay vòng bốc các que diêm, mỗi lần có thể bốc 1, 2, 3, 4, hoặc 5 que. Người nào bốc que diêm cuối cùng sẽ phải đi rửa bát. Chứng minh rằng hai người bất kỳ, nếu thỏa thuận với nhau, có thể buộc đấu thủ thứ ba đi rửa bát. Giả sử rửa bát được tính là -2, trong khi những người còn lại $+1$. Tổng trong mỗi ván đều bằng 0. Ta cũng muốn xác định một trạng thái cân bằng trong trường hợp này, nghĩa là, đề xuất 3 chiến lược sao cho nếu một người chơi thay đổi chiến lược của mình, người đó sẽ không được lợi gì nếu hai đối thủ giữ chiến lược cũ của họ. Khái niệm này đã được giới thiệu bởi John Nash vào năm 1950 và nó được gọi là cân bằng Nash.

Bài tập 1.2. Đề xuất ba chiến thuật cho trò chơi nói trên. Họ các chiến thuật mà người duy nhất không chơi theo chiến thuật được gọi là cân bằng Nash (định nghĩa này cũng vẫn dùng được cho cả các trò chơi không đối kháng). Vấn đề chính của chúng ta là làm sao hiểu trò chơi nào là Nash - giải được (có nghĩa là, luôn luôn có điểm cân bằng Nash) và trò chơi nào không có. Cân bằng

Nash có thể mô tả là những quy luật mà việc tuân thủ nó có thể được thỏa thuận mà không cần cơ chế áp buộc từ bên ngoài.

Bài tập 1.3. "Gặp gỡ trong siêu thị:" Hai (hoặc ba) người bị lạc nhau trong một siêu thị mà không có sóng điện thoại di động. Họ có thể gặp nhau ở một trong 3 cửa ra vào, mỗi một người sẽ lựa chọn đi ra cửa nào để đi một cách độc lập và không biết lựa chọn của những người còn lại. Nếu tất cả gặp nhau, mỗi người nhận được $+1$, nếu không mỗi người -1. Cân bằng Nash trong trò chơi này là gì?

Lưu ý 1. Trò chơi này được cho trong hình thức bình thường (tất cả người chơi đưa ra lựa chọn cùng một lúc mà không biết lựa chọn của nhau. Sau khi những người chơi lựa chọn xong thì xác định thắng hay thua).

Lưu ý 2. Một số siêu thị treo các tấm bảng "*Nếu lạc nhau hãy gặp nhau ở quầy tính tiền số* 1".

Bài tập 1.4. Có hay không cân bằng Nash trong trò chơi ca-rô trên một bàn cờ kích thước 3×3. Hãy mô tả chúng.

Đầu tiên, chúng ta hãy chứng tỏ rằng rằng bất kỳ trường hợp không lặp (trong đó không có vị trì nào được lặp lại) là Nash - giải được. Chúng ta hãy gán cho một trò chơi một đồ thị có hướng, mà đỉnh là các vị trí và các cạnh có hướng (cung) là các nước đi. Các vị trí mà từ đó không di chuyển được nữa gọi là vị trí kết thúc. Ta gán cho mỗi một vị trí kết thúc số điểm mà người chơi nhận được khi đi vào vị trí này. Các vị trí còn lại được chia giữa những người chơi, mỗi vị trí ta đều biết người chơi nào sẽ đi ra từ vị trí đó. Giả sử từ vị trí P mọi nước đi đều dẫn đến vị trí kết thúc, và người chơi chọn nước đi thuận lợi nhất cho anh ta về vị trí T. Điểm của T có thể chuyển về P. Và bây giờ P cũng trở nên xác định như là vị trí kết thúc. Cách phân tích từ cuối như vậy sẽ làm cho mọi vị trí đều xác định, trong đó có cả vị trí đầu tiên. Chiến lược tối ưu sẽ là nước đi của người chơi đến vị trí mà điểm số của anh ta lớn nhất.

Bài tập 1.5. Chứng minh rằng với bất kỳ trò chơi không lặp những chiến lược tối ưu nói trên tạo thành một trạng thái cân bằng Nash.

Bây giờ chúng ta xây dựng một đồ thị của trò chơi cờ vua. Chúng ta đã hiểu rằng vị trí không chỉ là một cách sắp các quân cờ, mà còn là thứ tự nước đi (đến lượt bên nào đi). Ngoài ra ta cũng cần biết có quyền nhập thành, ăn tốt qua đường hay không, hay vị trí này đã được lặp lại trước đó chưa. Một trong những giải pháp để cung cấp cho vị trí các thông tin cần thiết là ta nhớ nó cùng với lịch sử trước đó. Khi đó các vị trí lặp lại sẽ không có, đồ thị không lặp và trong đó cả hai người chơi đều có chiến thuật tối ưu.

Nhưng cách hiểu như vậy là không thú vị đối với chúng ta. Luật lặp lại ba lần của một vị trí hiểu vị trí một cách khác. Cụ thể, sự sắp xếp của các quân cờ, thứ tự nước đi, có hay không quyền nhập thành, bắt tốt qua đường. Khi đó trong đồ thị có những chu trình có hướng, và phân tích từ cuối không thể thực hiện. Ta làm rõ khái niệm chiến thuật.

Ta gọi quy tắc chọn một nước đi xác định trong mỗi vị trí đến lượt đi của người chơi là chiến thuật ổn định. Ví dụ trong trò chơi với những que diêm chiến thuật tham lam chỉ đạo mỗi lần bốc nhiều số que diêm nhất có thể.

Ta chú ý rằng chiến thuật ổn định không phụ thuộc vào lịch sử trước đó, vì thế, nếu mỗi người chơi chơi theo chiến thuận ổn định, thì khi một vị trí lặp lại ván đấu sẽ lặp lại. Ta biết rằng trong cờ vua thì sự lặp lại nghĩa là hòa. Tuy nhiên ta có thể thỏa thuận là vòng lặp cũng có giá của nó (ví dụ khi xảy ra lặp thì tất cả cùng thua). Trong các trò chơi có vòng lặp ta biết rất ít về cân bằng Nash.

Bài tập 1.6. Có hay không cân bằng Nash trong cờ vua? Và nếu như bỏ đi luật hòa nếu một vị trí lặp lại 3 lần hay 50 nước không ăn quân hoặc tấn tốt?

Từ đầu đến nay ta mới chỉ xét các trò chơi có kết thúc, khi mà kết quả của trò chơi (chi trả) được xác định chỉ bởi vị trí kết thúc hoặc vòng lặp. Trong một số trò chơi, ngoài điều này, người chơi còn được nhận hoặc phải trả qua từng nước đi, và kết quả cuối cùng được xác định cho người chơi là tổng tất cả các thu chi.

Bài tập 1.7. Trên bàn có 5 que diêm. Ba người lần lượt bốc 1 hoặc 2 que diêm. Người bốc que diêm cuối cùng sẽ được thưởng 3 que diêm. Số điểm sẽ bằng số que diêm bốc được. Hãy xây dựng đồ thị trò chơi và tìm chiến thuật tối ưu cho tất cả các người chơi.

Nếu trò chơi kết thúc bởi vòng lặp thì ta sẽ giả sử rằng vòng lặp sẽ diễn ra vô hạn lần. Khi đó kết quả của người chơi sẽ hữu hạn khi và chỉ khi tổng thu chi của anh ta bằng 0. Trái lại tổng sẽ bằng $+\infty$ hoặc $-\infty$.

Bài tập 1.8. Có 100 tên cướp khát máu cướp nhà băng được 1 triệu đô-la và ngồi chia tiền. Đầu tiên, người thứ nhất đề xuất phương án: Tôi được chừng này, người thứ hai được chừng này, người thứ ba được chừng này ... sau đó cả 100 người biểu quyết. Nếu có ít nhất 1 nửa đồng ý thì đề xuất được chấp thuận và họ sẽ chia tiền theo phương án đó và giải tán. Nếu có trên một nửa chống, bọn cướp sẽ thủ tiêu người thứ nhất và người thứ hai lại đề xuất phương án chia mới, cứ như thế ... Mỗi một tên cướp được chỉ đạo bởi mong muốn trước tiên là được sống, sau đó (nếu mạng sống không bị de dọa) là được nhiều tiền và cuối cùng (nếu như mạng sống và số tiền không bị ảnh hưởng) – thủ tiêu được càng nhiều càng tốt (dân xã hội đen mà). Hỏi tiền sẽ được chia thế nào nếu tất cả các tên cướp đều hành động và suy luận hoàn toàn logic (tức là hay tìm cân bằng Nash).

2. Dẫn nhập "không có những định nghĩa chặt chẽ"

Ta xét câu hỏi sau: *Những trò chơi vị trí với đầy đủ thông tin nào có cân bằng Nash trong các chiến thuật thuần túy ổn định*? Trong một số trường hợp câu trả lời đã được biết. Ta điểm qua các trường hợp như vậy, bỏ qua các định nghĩa chính xác.

Cân bằng Nash tồn tại cho các lớp sau:

(1) *Các trò chơi không lặp* : Trong các trò chơi này, các vị trí không thể lặp lại. Trong trường hợp này luôn tồn tại cân bằng. Thế nhưng trong Cờ vua và ngay cả Cờ vây thì có sự lặp lại của các vị trí.

(2) *Các trò chơi đối kháng hai người chơi* : Lớp này có cả Cờ vua và Cờ vây. Nhưng nếu lợi ích của hai bên không đối kháng thì sao? Hay số người chơi lớn hơn 2 thì sao?

(3) *Nếu như nước đi của người chơi phụ thuộc vào lịch sử trước đó* : Tuy nhiên chúng ta giới hạn người chơi chỉ dùng các chiến thuật ổn định. Nói cách khác, một nước đi chỉ phụ thuộc vào vị trí hiện tại và được chọn hoàn toàn xác định, không có một sự ngẫu nhiên nào. Ví dụ các trò chơi có dùng quân xúc sắc bị loại bỏ.

Chú ý rằng trong các trường hợp (1), (2) và (3) cân bằng tồn tại ngay cả khi có những nước đi ngẫu nhiên. Tuy nhiên ta biết rằng cân bằng có thể không tồn tại trong các trò chơi không có thông tin đầy đủ (ví dụ các trò chơi bài hoặc domino). Nhưng ta sẽ không xét những trò chơi như vậy, thậm chí còn không định nghĩa chúng.

Tóm tắt lại: *Ta giới hạn việc xem xét các trò chơi với thông tin đầy đủ, không có các nước đi ngẫu nhiên và với chiến thuật thuần túy ổn định. Trong đó số người chơi có thể lớn hơn* 2 *và trong trường hợp* 2 *người thì lợi ích của họ không nhất thiết phải đối kháng.*

Rất đáng ngạc nhiên là ngay cả trong trường hợp này ta cũng chưa có nhiều tiến triển. Có một số cách tiếp cận, trong đó đơn giản nhất chính là cân bằng Nash (ta sẽ định nghĩa dưới đây). Mặc dù các công trình về cân bằng Nash đã được đến 5 giải thưởng Nobel về kinh tế nhưng có cảm nhận rằng những câu hỏi toán học "*đơn giản*" và tự nhiên nhất cho đến nay vẫn là những câu hỏi mở. Ở đây tôi sẽ đề xuất hai câu hỏi - giả thuyết như vậy. Các giả thuyết này đã được kiểm chứng, với sự trợ giúp của máy tính với những ví dụ đủ lớn (nhưng không quá lớn). Tôi hy vọng sẽ có những câu trả lời khẳng định, nhưng cũng không ngạc nhiên nếu có những phản ví dụ. Trong những giả thuyết này có những trường hợp riêng tương đối đơn giản mà ta có thể luyện tập. Tuy nhiên, các trường hợp riêng khác khá phức tạp và có một số trường hợp ta chưa biết kết quả giống như ở trường hợp tổng quát.

3. Các định nghĩa cơ bản

Tôi có cảm nhận rằng các định nghĩa dưới đây đều hiển nhiên một cách trực giác. Tuy nhiên, cách phát biểu hình thức có thể làm ai đó "*sợ*". Nếu quả là như vậy, hãy bỏ qua việc đọc phần này trong lần đọc đầu tiên và hãy sử dụng nó như từ điển hoặc sổ tay tra cứu.

3.1. Đồ thị trò chơi, vị trí và nước đi

Cho một đồ thị có hướng hữu hạn $G = (V;\ E)$. Mỗi một đỉnh $v \in V$ là một vị trí của trò chơi và cạnh có hướng $e = (v,\ v^{'})$ là một nước đi có thể ở vị trí v. Các vị trí $V_T \subset V$, mà ở đó không có nước đi, được gọi là các vị trí kết thúc. Ta cũng chọn vị trí khởi đầu $v_0 \in V\ V_T$.

Mỗi một vị trí không kết thúc $v \in V \setminus V_T$ ta cho tương ứng với người chơi i

$$I \in I = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\},$$

người sẽ chọn nước đi ở vị trí v. Ta sẽ nói i kiểm soát v và viết $i = \phi(v)$. Nói cách khác, ánh xạ $\phi : V \setminus V_T \to I$ phân phối các vị trí không kết thúc cho các người chơi. Bộ ba $\{G,\ \phi, v_0\}$ được gọi là cấu trúc vị trí.

3.2. Chiến thuật và tình huống.

Chiến thuật x_i của người chơi $i \in I$ là kế hoạch cho phép chọn nước đi $e = (v,\ v^{'})$ trong mọi vị trí $v \in \phi^{-1}(i)$, điểm kiểm soát bởi i, nói cách khác ánh xạ x_i cho tương ứng mỗi vị trí $v \in \phi^{-1}(i)$ một nước đi $e = (v,\ v^{'})$ từ v. Đây chính là chiến thuật thuần túy ổn định. Như đã nói trước đây, các chiến thuật khác ta sẽ không xét đến và cũng không định nghĩa.

Các ván đấu : Ta giả sử người chơi thứ i sẽ chọn chiến thuật x_i, và bộ các chiến thuật $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ được gọi là gói chiến thuật hay tình huống. Mỗi một tình huống một xác định một cách duy nhất ván đấu $p(x)$, vì mọi người chơi $i \in I$ trong mọi vị trí $v \in \phi^{-1}(i)$ biết anh ta phải đi nước nào (người tương ứng với chiến thuật x_i). Ván đấu $p(x)$ bắt đầu ở v_0 và hoặc sẽ kết thúc ở một vị trí kết thúc $v \in V_T$ hoặc bị lặp, tức là xuất hiện chu trình có hướng C mà sau đó sẽ lặp lại vô hạn (ván đấu $p(x)$ không thể thoát khỏi C, vì tất cả các chiến thuật là ổn định).

Như vậy chúng ta thu được ánh xạ $g : X \to P$ mà mỗi một tình huống $x \in X$ được cho tương ứng với một ván đấu $p \in P$. Các ánh xạ như vậy được gọi là thể thức chơi.

3.3. Hàm lượng giá

Mỗi một người chơi $i \in I$ sau mỗi nước đi $e \in E$ trả một khoảng phí $c(i, e) \in R$. Số thực này gọi là giá địa phương (nếu như $c(I, e) < 0$, thì i không trả mà ngược lại được nhận $|c(I, e)|$).

Cấu trúc vị trí và thanh toán địa phương xác định trò chơi trong hình thức vị trí. Giá hiệu quả của ván đấu $p = p(x)$ được định nghĩa cho từng người chơi $i \in I$ như sau. Nếu p kết thúc ở vị trí $v \in V_T$ thì giá của nó $c(i, p) = \sum\limits_{e \in p} c(i, e)$ là cộng tính, tức là bằng tổng giá của tất cả các nước đi của p. Nếu p bị lặp, thì ta cần tính giá $c(i, C) = \sum\limits_{e \in C} c(i, e)$ của xích C tương ứng đối với i. Nếu như $c(i, C) \geqslant 0$, thì $c(i, p) = \infty$ và $c(i, p) = -\infty$, nếu như $c(i, C) < 0$.

Định nghĩa này là tự nhiên, vì chu trình sẽ lặp lại vô hạn lần, còn các giá địa phương sẽ được cộng lại. Tuy nhiên, nếu như ván đấu bị lặp ở "*chu trình* 0", $c(i, C) = 0$, ta vẫn đặt $c(i, p) = \infty$. Đây chỉ là một quy ước cho tiện lợi.

Thể thức chơi g và giá hiệu quả c xác định trò chơi (g, c) ở dạng chuẩn. Tất nhiên, mội một người chơi i đều cố gắng tối thiểu hoái giá hiệu quả $c(i, p)$ của mình.

Trò chơi kết thúc: Nước đi $e = (v, v')$ được gọi là nước kết thúc nếu $v' \in V_T$. Chú ý rằng nước kết thúc không thể thuộc vào một chu trình nào. Hàm lượng giá (và cả trò chơi) được gọi là kết thúc nếu $c(i, e) \equiv 0$ với mọi người chơi i và với mọi nước đi không kết thúc e. Trong trường hợp này, giá của trò chơi sẽ chỉ phụ thuộc vào vị trí kết thúc. Nếu ván đấu p bị lặp thì giá sẽ bằng ∞ hoặc $-\infty$.

Trò chơi với tổng 0: Hàm lượng giá (và chính trò chơi) có tổng 0 nếu $\sum\limits_{i \in I} c(i, e) = 0$ với mọi nước $e \in E$. Trò chơi cho 2 người, $n = 2$ với tổng 0 đóng một vai trò rất quan trọng cả về mặt lịch sử lẫn theo bản chất. Mọi trò chơi với n người có thể chuyển dễ dàng thành trò chơi $n + 1$ người với tổng 0. Chỉ cần đưa vào người chơi thứ $n + 1$ – "*ông tám*" (người không kiểm soát một vị trí nào) và xác định giá địa phương của anh ta theo công thức $c(n + 1, e) = -\sum\limits_{i=1}^{n} c(i, e)$.

Trò chơi ở dạng chuẩn: Định nghĩa chung.

Ta giả sử $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ là tập hợp các người chơi, X_i – tập hữu hạn các chiến thuật của người chơi thứ $i \in I$ và $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ là tích Đề-các của chúng, tức là tập hợp các tình huống.

Tiếp theo, giả sử P là một tập hợp bất kỳ các kết quả của trò chơi (trong trường hợp của chúng ta là ván đấu). Mọi ánh xạ $g : X \to P$ được gọi là thể thức chơi.

Cuối cùng, giả sử có hàm lượng giá $c : I \times P \to R$. Các giá trị thực $c(i, p)$ của nó sẽ cho ta biết người chơi $i \in I$ sẽ phải trả bao nhiêu tiền cho ván đấu $p \in P$. Cặp (g, c) xác định trò chơi ở dạng chuẩn.

Cân bằng Nask và điểm yên ngựa: Tình huống $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \times X_1 \times \cdots \times X_n = X$ được gọi là cân bằng Nash nếu như sự thay đổi chiến thuật bởi mọi người chơi $i \in I$ (nhưng chỉ một người) đều không đem lại lợi ích cho anh ta, tức là không làm giảm giá đối với anh ta. Một hình hình thức có thể viết thế này: $c(I, g(x)) \leq c(I, g(x^{'}))$ với mọi người chơi $i \in I$ và mọi tình huống $x^{'} \in X$ mà mọi tọa độ (chiến thuật) của nó vẫn giống như của x ngoại trừ có thể là tại tọa độ I, nói cách khác, chỉ có $x_i^{'}$ có thể khác x_i.

Khái niệm này được đưa ra nởi John Nash năm 1950. Trong trường hợp các trò chơi 2 người với tổng 0 cân bằng Nash có tên là điểm yên ngựa. Khái niệm này đã ra đời từ 200 năm trước đó.

Khác với điểm yên ngựa, khái niệm cân bằng Nash khá nhạy cảm đối với các chỉ trích. Thông thường thì hai người chơi có thể thay đổi chiến thuật cùng một lúc và cả hai đều đoán. Hơn thế, thỉnh thoảng điều này có thể xảy ra với cả n người chơi. Tình huống cân bằng (trong các chiến thuật thuần túy) có thể không tồn tại nói chung. Và nếu tồn tại thì chín có thể có nhiều. Hơn nữ, không chỉ là các cân bằng mà các thanh toán cân bằng cũng có thể có nhiều. Điểm yên ngựa không có đa số những điểm yếu này. Tuy nhiên, đả phá Nash không phải là mục tiêu của chúng ta (chúng ta cũng nhờ về 5 giải Nobel).

Cân bằng Nash thuần nhất: Tình huống $x \in X$ được gọi là cân bằng Nash thuần nhất nếu như nó cân bằng không nhưng chỉ với vị trí khởi đầu đã cho $v_0 \in V$, mà với mọi vị trí kết thúc $v_0^{'} \in V$ khác.

4. Các bài toán và giả thiết

Chúng ta sẽ quan tâm đến các định lý tồn tại cân bằng Nash (tức là giải được theo Nash) của các trò chơi vị trí đã được định nghĩa ở trên (độ phức tạp của bài toán tôi đánh giá bằng số điểm tôi viết ở trong ngoặc).

Giả thuyết 1 (500). Có phải chăng mọi trò chơi vị trí cho 2 người đều giải được theo Nash?

Bài toán 1 (10). Hãy chứng tỏ rằng, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng không có các "*chu trình* 0", nói chặt chẽ hơn là các chu trình có hướng với tổng giá địa phương bằng 0. Nói các khác, có thể không mất tổng quát giả sử rằng $\sum_{e \in C} c(i, e) \neq 0$ với mọi chu trình có hướng C và với mọi người chơi $i \in I = \{1, 2\}$.

Nhắc lại là giá hiệu quả của mọi ván đấu có lặp bằng $+\infty$ hoặc $-\infty$.

Đây là một giả thuyết hoàn toàn mới. Vladimir Udalov đã viết chương trình khẳng định giả thuyết đúng cho nhiều đồ thị có hướng với $10 - 18$ đỉnh.

Bài toán 2 (25). Giả thuyết 1 không tổng quát được lên cho trường hợp 3 người chơi. Hãy xây dựng ví dụ.

Đối với các trò chơi cho 2 người với tổng bằng 0 giả thuyết là đúng nhưng chứng minh rất phức tạp. Hơn thế, trong trường hợp này có thể đưa vào giá hiệu quả hữu hạn của mỗi ván đấu p, kết thúc bằng "*chu trình* 0" C, sao cho điểm yên ngựa luôn tồn tại (nhắc lại rằng theo định nghĩa $c(i, p) = +\infty$ trong trường hợp này). Tuy nhiên một tái định nghĩa như vậy không đơn giản.

Bài toán 3 (70). Hãy thử tìm định nghĩa đó và chứng minh tính giải được. Chứng tỏ rằng các "*cố gắng đơn giản*" không qua được cửa này. Ví dụ nếu đặt $c(i, p) = 0$ hay $c(i, p) = \sum_{e \in p} c(i, e)$ thì có thể không có điểm yên ngựa. Hãy xây dựng ví dụ.

Giả thuyết 2 (500). Có phải chăng mọi trò chơi vị trí với n người chơi, trong đó mọi giá địa phương đều không âm đều giải được theo Nash?

Bài toán 3a (5). Chứng minh rằng ta chỉ cần xét trường hợp giá địa phương lớn hơn 0. Giả thuyết này chưa được chứng minh ngay cả trong các trường hợp "*rất riêng*".

Giả thuyết 2a (300). Thanh toán kết thúc. Trong đó giá hiệu quả của mọi ván đấu lặp đối với mỗi người chơi bằng $+\infty$.

Giả thuyết 2b (400). Thanh toán kết thúc. Trong đó vẫn như cũng mọi chu trình đều tạo ra cùng một kết quả, *NHƯNG* không nhất thiết là kết quả tệ nhất cho mọi người chơi. Thay vì điều này, bây giờ ta sẽ giả sử rằng mỗi một người chơi để sắp xếp tất cả các vị trí kết thúc và kết quả chu trình một cách tùy ý.

Giả thuyết 2c (300). Trường hợp hai người chơi $n = 2$. Trong trường hợp này ta gom hai Mệnh đề của giả thuyết 1 và 2 lại.

Bài toán 4 (100). Chứng minh rằng trong trường hợp hai người chơi và hàm giá kết thúc Giả thuyết 2 vẫn đúng.

Kết quả này có thể được suy ra từ một định lý cũ của tôi, năm 1975.

Theo định nghĩa, thể thức trò chơi cho n người $g : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to P$ giải được theo Nash nếu trò chơi tương ứng (g, c) có ít nhất một cân bằng Nash với mọi hàm lượng giá $c : I \times P \to R$. Ở đây $c(i, p)$ – giá của kết quả $p \in P$ cho người chơi $i \in I$.

Trong trường hợp 2 người chơi $I = \{1, 2\}$ bên cạnh với định nghĩa tổng quát về tính giải được ta cũng xét các tính chất yếu hơn: Thể thức chơi hai người g được gọi là giải được đối kháng nếu nó giải được trong lớp các trò chơi với tổng 0. Cuối cùng g được gọi là ± 1 giải được nếu nó giải được trong lớp các trò chơi 2 người với tổng 0, trong đó hàm lượng giá chỉ nhận 2 giá trị: $+1$ hay -1.

Bài toán 5 (100). Chứng minh rằng tất cả ba tính chất (giải được, giải được đối kháng và giải được ± 1) là tương đương.

Sự tương đương của hai tính chất cuối cùng tôi đã chứng minh nhiều năm trước đây, vào năm 1973, nhưng còn trước đó hơn nữa, Edmonds, J.; Fulkerson đã chứng minh được. Edmonds, J.; Fulkerson, D. R. (1970), "*Bottleneck extrema*", Journal of Combinatorial Theory $8 : 3\,(1970)\,299 - 306$. Rất đáng tiếc, kết luận của bài toán 5 không tổng quát hóa được lên cho trường hợp trò chơi 3 người. Ta phát biểu điều này chặt chẽ hơn. Mọi thể thức chơi n người, $I = \{1,, 2, \ldots, n\}$ có thể cho tương ứng với n thể thức chơi cho 2 người, trong đó người chơi i chơi với $I \setminus \{i\}$ với $i \in I$.

Bài toán 5a (50). Hãy nêu ví dụ một thể thức chơi với 3 người chơi, không giải được theo Nash, sao cho 3 thể thức chơi 2 người tương ứng với nó giải được.

Bài toán 5b (20) Hãy nêu một ví dụ ngược lại, một trò chơi 3 người giải được theo Nash nhưng các thể thức chơi 2 người tương ứng với nó không giải được.

Bài toán 6 (20). Hãy chứng tỏ rằng bài toán 4 có thể đưa về bài toán 5.

Bài toán 7 (15). Chứng minh rằng cân bằng Nash tồn tại nếu như đồ thị G không lặp (không có chu trình có hướng).

Hướng dẫn: Hãy sử dụng quy hoạch động. Trong lý thuyết trò chơi vị trí cái này gọi là "*quy nạp ngược*".

Kết quả này thu được bở Harold Kun (1952) và David Geil (1953) ngay sau khi Nash đưa ra khái niệm cân bằng.

Bài toán 7a (20). Chứng minh rằng với các trò chơi không lặp cân bằng Nash tồn tại ngay cả trong trường hợp cho phép có những vị trí may mắn (trong đó được cho phân phối xác suất). Tất nhiên, để giải được cả hai bài này ta chỉ được 20 điểm tối đa, chứ không phải 35.

Bài toán 8 (40). Chứng minh rằng cân bằng Nash (điểm yên ngựa) tồn tại cho các trò chơi vị trí hai người với tổng 0.

Nói riêng kết quả này áp dụng cho cờ vua và cờ vây. Kết quả này Ernst Zermelo đã báo cáo trên Đại hội toán học thế giới lần thứ 5 vào năm 1912. Báo cáo của ông có tên "*Về ứng dụng của lý thuyết tập hợp vào cờ vua*".

Tôi lưu ý rằng là ngay trong trường hợp này, kết quả có thể mở rộng, cho phép các vị trí may mắn. Tuy nhiên điều này sẽ đưa chúng ta đi xa về phía các trò chơi ngẫu nhiên. Vì vậy sau này ta để hướng này qua một bên, dành cho lần khác.

Bài toán 9 (10). Ta quy ước kết thúc trò chơi ngay từ lần đầu tiên vị trí được lặp lại. Và kết quả của trò chơi chính là chu trình thu được. Hãy chứng minh rằng trong trường hợp này đồ thị hữu hạn có thể được thay thế bởi cây hữu hạn (trong đó sẽ không chỉ không có các chu trình có hướng, mà nói chung là không có chu trình). Tại sao Giả thuyết 1 và 2 không thể suy ra từ bài toán 7?

Bài toán 10 (15) Hãy nêu ví dụ trò chơi kết thúc của hai người chơi trong đó chỉ có 1 chu trình và không có cân bằng thuần nhất (chu trình không nhất thiết phải là kết quả tệ nhất cho cả hai đối thủ. Mỗi một người trong họ sắp xếp các vị trí kết thúc và chu trình một cách tùy ý).

Bài toán 11 (100) Hãy nêu ví dụ một tro chơi kết thúc hai người chơi trong đó không có cân bằng thuần nhất và chỉ có đúng một chu trình, là kết quả tệ nhất cho cả hai đối thủ.

Bài toán 12 (25) Hãy nêu ví dụ tương tự một trò chơi kết thúc 3 người chơi: Trong đó không có cần bằng thuần nhất và chỉ có một chu trình là kết quả tê nhất cho cả 3 người chơi.

Các ví dụ như vậy được xây dựng cách đây không lâu: Bài toán 11 vào năm 2003, còn bài toán 12 năm 2008. Tất nhiên, trong tất cả 3 trường hợp (Bài toán 10, 11, 12) đối với mọi vị trí khởi đầu cố định, cân bằng tồn tại. Nếu không thì Giả thuyết 2 đã bị bác bỏ rồi.

MỞ RỘNG CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC EUCLID THÀNH CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC CẦU VÀ HÌNH HỌC LOBACHEVSKY - MỘT PHƯƠNG THỨC SÁNG TẠO CÁC BÀI TOÁN MỚI

Nguyễn Ngọc Giang – TP Hồ Chí Minh

TÓM TẮT

Sáng tạo các bài toán mới luôn là niềm đam mê và đích tới của các nhà toán học. Tuy nhiên một câu hỏi luôn đặt ra là, làm thế nào để phát hiện được các bài toán mới? Để trả lời câu hỏi này, chúng ta cần đến phương pháp phát triển và mở rộng các bài toán. Ở bậc đại học, chúng ta đã được học một trong các phương pháp như thế, đó là phương pháp afin-xạ ảnh. Tuy nhiên, phương pháp afin-xạ ảnh không phải là phương pháp duy nhất. Có một phương pháp còn hay hơn và hấp dẫn hơn phương pháp afin-xạ ảnh, đó là phương pháp mở rộng các bài toán hình học Euclid[1] thành các bài toán hình học cầu và hình học Lobachevsky. Nội dung của phương pháp là đi tìm và chứng minh bài toán tổng quát của hình học Euclid trong hình học cầu và hình học Lobachevsky. Trong bài báo này chúng ta sẽ tìm hiểu các bài toán, các khái niệm, tính chất và so sánh chúng bằng cả ba thứ hình học. Đặc biệt, các bài toán, các khái niệm, tính chất đều được nhìn bằng ”con mắt” Euclid nên dễ hiểu, dễ tiếp nhận.

1. So sánh hình học Euclid, hình học cầu và hình học Lobachevsky

Trong hình học cầu, bán kính cầu R cho ta biết một điều, bán kính R càng lớn thì hình học trong phạm vi đó càng gần hình học Euclid. Vì vậy bán kính mặt cầu R còn được gọi là bán kính cong. Người ta đã chứng minh được rằng $\frac{1}{R^2}$ là độ cong toàn phần không đổi của mặt cầu và $-\frac{1}{R^2}$ là độ cong toàn phần của mặt phẳng Lobachevsky. Ta thêm dấu trừ để chỉ sự khác biệt với hình học Euclid. Hình học Lobachevsky diễn ra theo hướng ngược với hình học cầu so với hình học Euclid. Hình học Euclid (hai chiều) là hình học trên một mặt phẳng có độ cong toàn phần bằng không. Như vậy, hình học Euclid là trường hợp giới hạn của hình học trên một mặt cầu (khi $R \to \infty$) và cũng là giới hạn của hình học trên một mặt cong có độ cong toàn phần âm không đổi $-\frac{1}{R^2}$ (khi $R \to \infty$).

Ta quy ước các khái niệm thông thường như đường thẳng, tam giác, tiếp tuyến, đường tròn, cung

[1]Ghi chú: Thuật ngữ hình học Euclid trong tiếng Anh là Euclidean Geometry. Đôi chỗ vẫn có tài liệu ghi là Euclide thay vì Euclid. Ở đây, để thống nhất với hai bài viết trong cùng số Epsilon này, cũng như phù hợp với tên tiếng Anh của nhà toán học lừng danh người Hy Lạp, chúng tôi chọn tên Euclid và hình học Euclid cho toàn bộ bài viết. Chú thích của Ban Biên tập.

tròn . . . *mà không nói gì thêm* có nghĩa là *các khái niệm này ở trong hình học Euclid.* Ta quy ước các khái niệm đường thẳng, đường tròn . . . trong hình học Lobachevsky sẽ có thêm kí hiệu L đi kèm. Ví dụ đường thẳng $L - A$, $L - AB$ có nghĩa là đường thẳng đi qua A, đường thẳng AB trong hình học Lobachevsky, đường tròn $L - (O; OA)$ là đường tròn tâm O bán kính OA trong hình học Lobachevsky. Đường thẳng, đường tròn, . . . trong hình học cầu sẽ có thêm kí hiệu S đi kèm. Ví dụ đường thẳng $S - AB$ có nghĩa là đường thẳng AB trong hình học cầu. Ta cũng quy ước $\sin\dfrac{\overline{AB}}{R}$, $\tan\dfrac{\overline{AB}}{R}$ lần lượt là $\sin\left(S - \dfrac{\overline{AB}}{R}\right)$, $\tan\left(S - \dfrac{\overline{AB}}{R}\right)$; $\sinh\dfrac{\overline{AB}}{R}$, $\tanh\dfrac{\overline{AB}}{R}$ lần lượt là $\sinh\left(L - \dfrac{\overline{AB}}{R}\right)$, $\tanh\left(L - \dfrac{\overline{AB}}{R}\right)$.

Ta quy ước các mục 1.1, 2.1, 3.1, . . . , n.1, . . . là các khái niệm, định lí trong hình học Euclid; các mục 1.2, 2.2, 3.2, . . . , n.2, . . . là các khái niệm trong hình học cầu; các mục 1.3, 2.3, 3.3, . . . , n.3, . . . là các mục trong hình học Lobachevsky. Sau đây là các mục so sánh các khái niệm, tính chất, hệ thức, định lí cũng như cách dựng các đối tượng của ba thứ hình học Euclid, cầu và Lobachevsky [4]:

1.1. Điểm.

1.2. Điểm nằm trên mặt cầu.

1.3. Điểm nằm phía trên trục-x cho trước.

2.1. Điểm ở vô tận (trong mặt phẳng Euclid mở rộng).

2.2. Không có gì tương ứng.

2.3. Điểm thuộc trục-x.

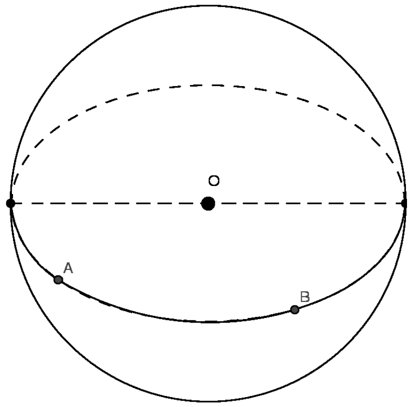
3.1. Không có gì tương ứng.

3.2. Không có gì tương ứng.

3.3. Điểm nằm phía dưới trục-x.

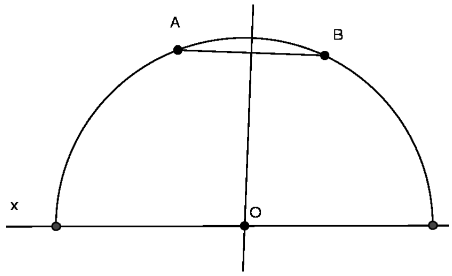
4.1. Đường thẳng AB.

4.2. Đường tròn lớn đi qua A, B là giao của mặt phẳng (OAB) với mặt cầu chính là đường thẳng $S - AB$.



4.3. Nửa đường tròn có tâm trên trục-x đi qua A, B là đường thẳng $L - AB$. Cách dựng như sau:

- Dựng đường trung trực của đoạn AB cắt trục-x tại O. Nửa đường tròn $(O; OA)$ đi qua A, B là nửa đường tròn cần dựng.
- Nửa đường tròn này là đường thẳng $L - AB$



5.1. Đoạn thẳng AB.

5.2. Cung $\widehat{AB}$ (cung nhỏ) là đoạn thẳng $S - AB$.

5.3. Cung $\widehat{AB}$ của nửa đường tròn có tâm trên trục-x đi qua A, B là đoạn thẳng $L - AB$.

6.1. Độ dài đoạn thẳng AB.

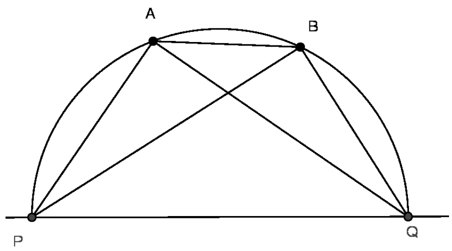
6.2. Độ dài cung $\widehat{AB}$ là độ dài đoạn thẳng $S - AB$.

6.3. - Dựng cung $\widehat{AB}$ của nửa đường tròn có tâm trên trục-x đi qua A, B cắt trục-x tại hai điểm ở vô tận P, Q.

- Đo độ dài các đoạn thẳng $\overline{AP}, \overline{AQ}, \overline{BP}, \overline{BQ}$.

- Gọi *tỉ số kép* của (AB, PQ) là $(AB, PQ) = \dfrac{\overline{AP}/\overline{AQ}}{\overline{BP}/\overline{BQ}}$.

- Đặt $d = |\ln(AB, PQ)|$ thì d là độ dài đoạn thẳng $L - AB$.



7.1. Định lí: Có một và chỉ một đường thẳng qua một điểm và song song với đường thẳng cho trước.

7.2. Không có đường thẳng song song trong hình học cầu. Hai đường thẳng bất kì luôn cắt nhau.

7.3. - Có hai đường thẳng đi qua một điểm và song song với một đường thẳng cho trước.

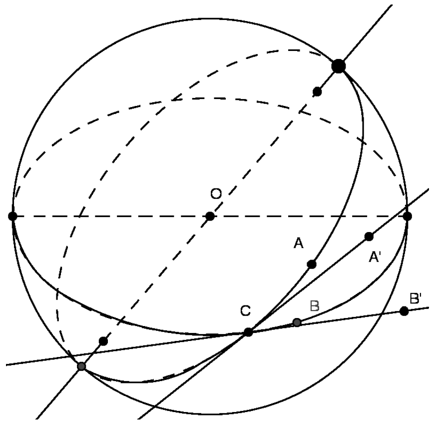
- Hai đường thẳng bất kì hoặc là cắt nhau, hoặc là song song hoặc là phân kì.

- Có vô số đường thẳng đi qua một điểm và không có điểm chung với đường thẳng cho trước.

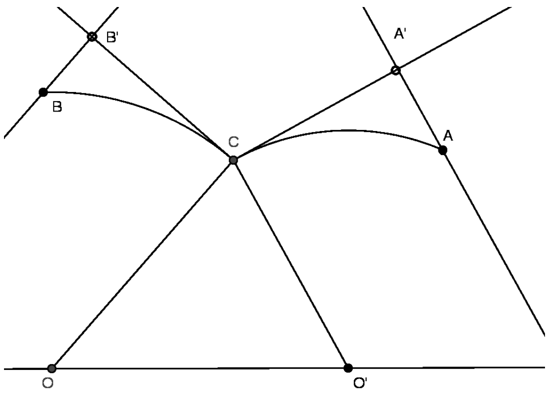
8.1. Độ lớn góc $\widehat{ACB}$

8.2. - Cho hai cung tròn $\widehat{CA}, \widehat{CB}$ thuộc các đường tròn lớn của mặt cầu.

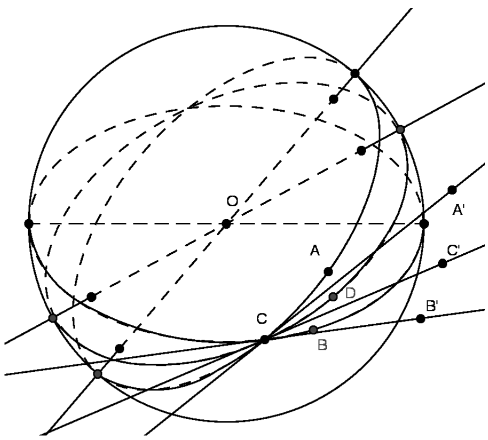
- Độ lớn của góc tạo bởi hai tiếp tuyến CA', CB' với hai cung $\widehat{CA}, \widehat{CB}$ tại C là độ lớn của $S - \widehat{ACB}$ (hình vẽ).



8.3. - Dựng hai cung tròn $\widehat{CA}, \widehat{CB}$ là hai đoạn thẳng $L - CA, L - CB$. (Xem 5.3).
- Dựng hai tiếp tuyến CA', CB' với hai cung tròn tại C $(BB' \perp CB', AA' \perp CA')$.
- Độ lớn góc $\widehat{A'CB'}$ chính là độ lớn $L - \widehat{ACB}$.

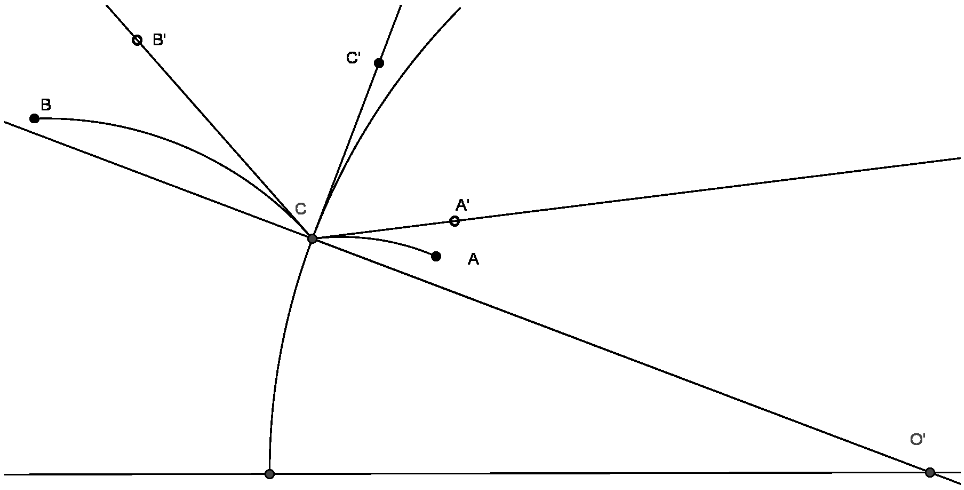


9.1. Đường phân giác CC' của góc $\widehat{ACB}$.
9.2. - Dựng góc $S - \widehat{ACB}$ là $\widehat{A'CB'}$.
- Dựng phân giác CC' của góc $\widehat{A'CB'}$.
- Dựng đường tròn lớn (OCD) qua C tiếp xúc với CC' tại C thì CD là phân giác của góc $S - \widehat{ACB}$.

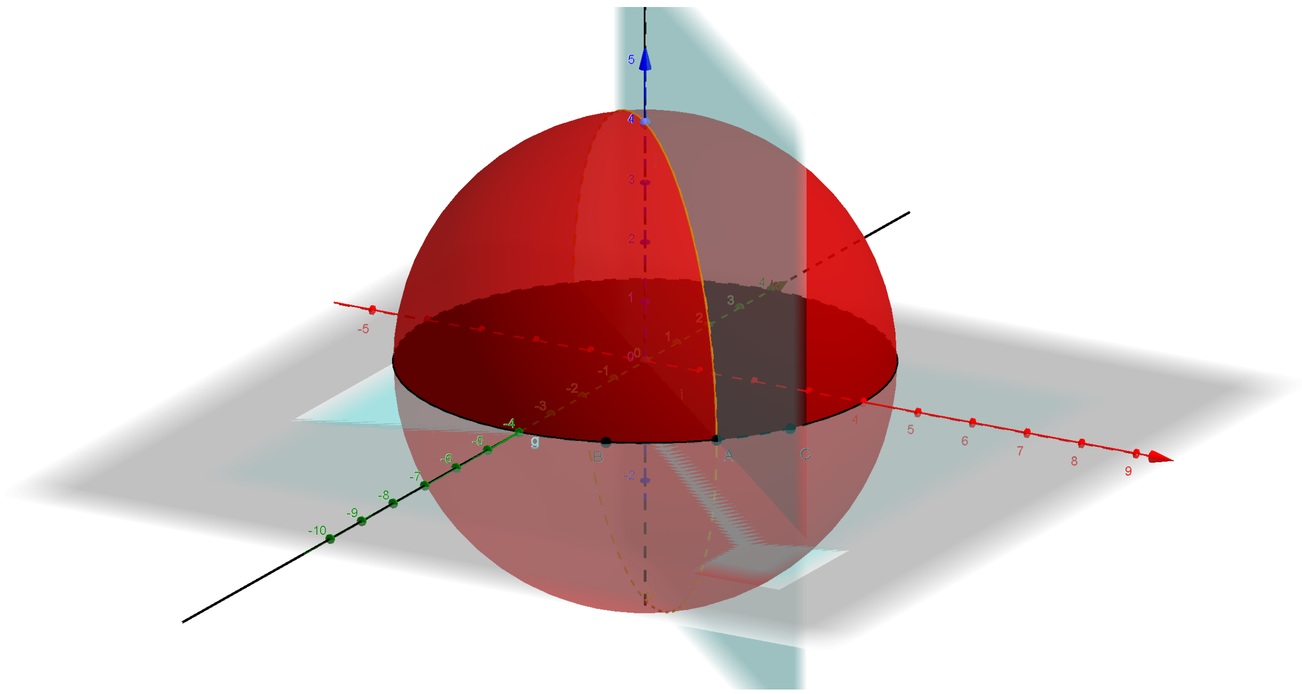


9.3. - Dựng góc $L - \widehat{ACB}$ bằng góc $\widehat{A'CB'}$ với CA', CB' được dựng như 8.3.
- Dựng phân giác CC' của góc $\widehat{A'CB'}$.

- Dựng đường thẳng $d \perp CC'$.
- d cắt trục-x tại O'.
- Nửa trên của đường tròn $(O'; O'C)$ chính là đường phân giác CC' của $L - \widehat{ACB}$.

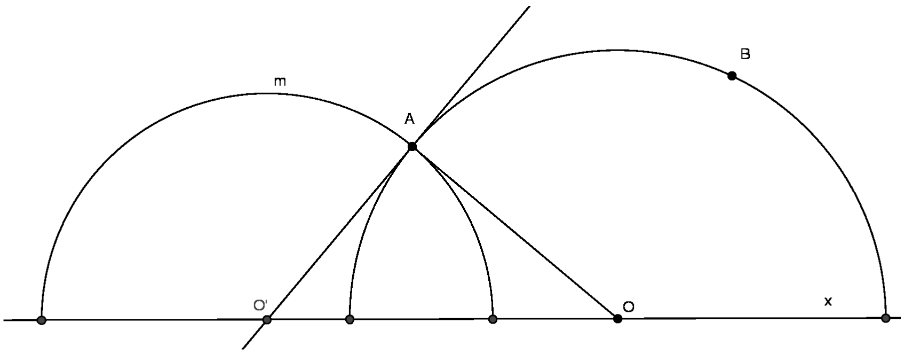


10.1. Đường thẳng vuông góc với đường thẳng cho trước tại điểm nằm trên đường thẳng.
10.2. - Đường tròn lớn đi qua hai điểm B, C là đường thẳng $S - BC$.
- Gọi A là điểm nằm trên đường thẳng $S - BC$.
- Qua O dựng đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn lớn qua hai điểm B, C.
- Mặt phẳng (A, d) cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn lớn qua A. Đường tròn này chính là đường thẳng $L - A$ đi qua A và vuông góc với BC.

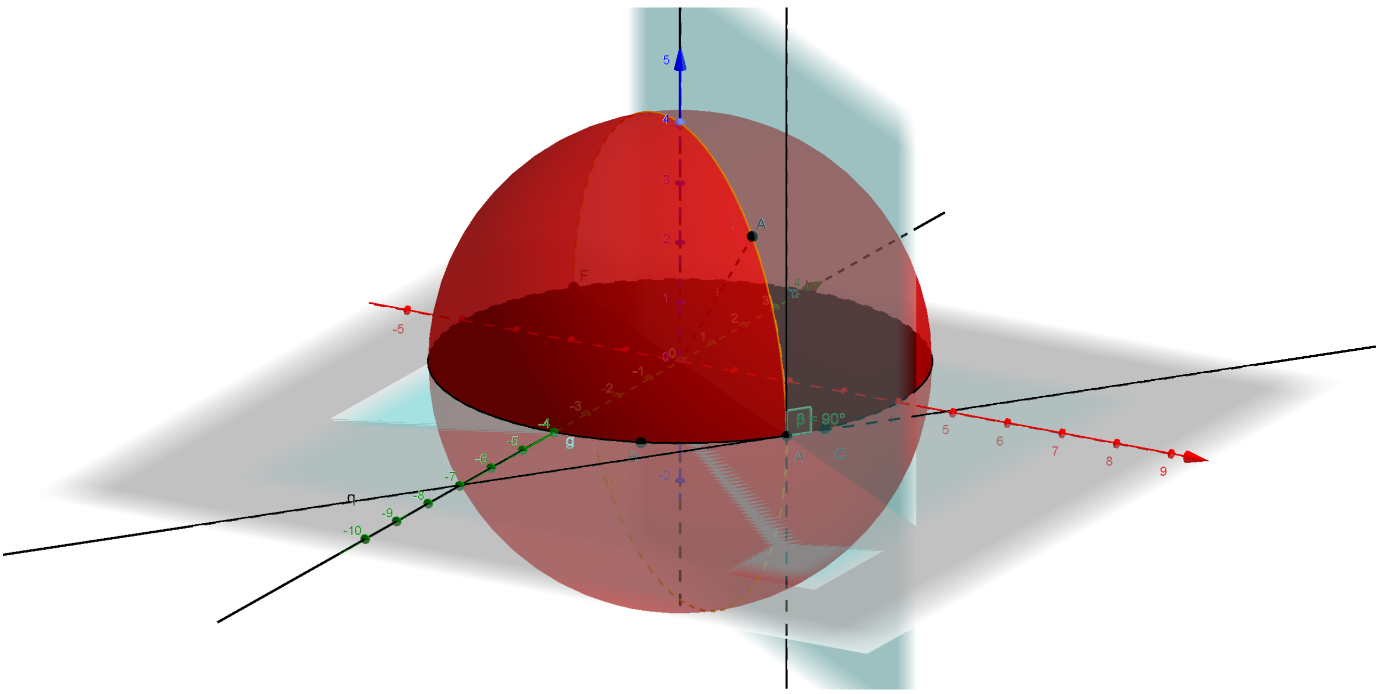


10.3. - Dựng đường thẳng $L - AB$.

- Gọi O là tâm đường tròn nằm trên trục-x đi qua hai điểm A, B.
- Nối OA.
- Gọi O' là điểm trên trục-x sao cho $O'A \perp OA$.
- Dựng đường tròn $(O'; O'A)$ thì nửa đường tròn trên trục-x đi qua A là đường thẳng $L - A$ cần dựng.

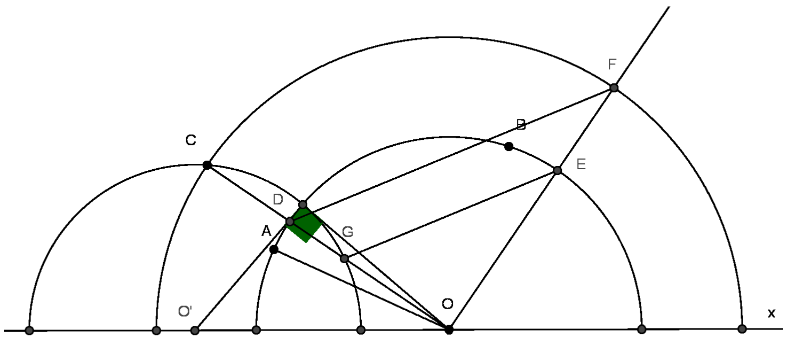


11.1. Đường thẳng vuông góc với đường thẳng cho trước tại một điểm không nằm trên đường thẳng.
11.2. - Đường tròn lớn đi qua hai điểm B, C là đường thẳng $S - BC$.
- Gọi A là điểm nằm ngoài đường thẳng $S - BC$.
- Qua O dựng đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn lớn qua hai điểm B, C.
- Mặt phẳng (A, d) cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn lớn qua A. Đường tròn này chính là đường thẳng $S - A$ đi qua A và vuông góc với $S - BC$.

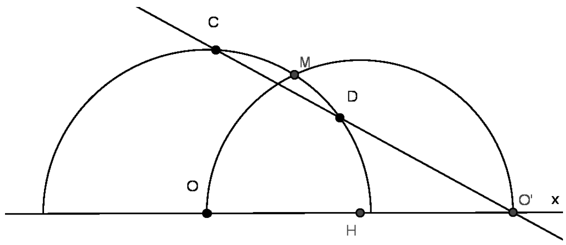


11.3. - Dựng đường tròn (O) đi qua hai điểm A, B có tâm O trên trục-x. Nửa đường tròn phía trên trục-x này là đường thẳng $L - AB$.
- Dựng đường tròn $(O; OC)$.

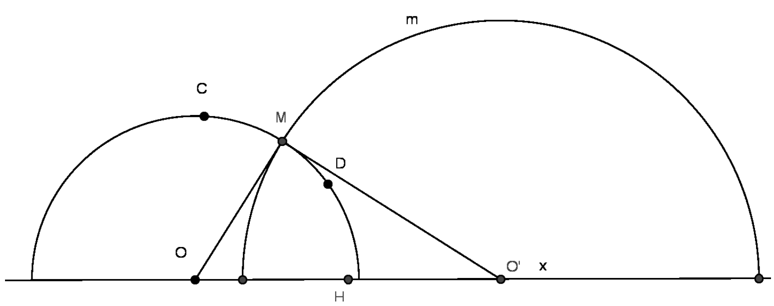
- Dựng qua O đường vuông góc với OC cắt nửa đường tròn phía trên $(O; OC)$ tại F.
- OC, OF lần lượt cắt đường thẳng $L - AB$ tại D, E.
- Dựng qua E đường thẳng song song với DF cắt OC tại G.
- Gọi O' là giao của đường trung trực đoạn CG với trục-x.
- Nửa đường tròn $(O'; O'C)$ phía trên trục-x chính là đường thẳng $L - C$ đi qua C và vuông góc với $L - AB$ cần dựng.



12.1. Trung điểm M của đoạn thẳng CD.
12.2. - Cho đoạn thẳng $S - CD$.
- Gọi M' là trung điểm của đoạn thẳng CD.
- Tia OM' cắt đoạn thẳng $S - CD$ tại M thì M chính là trung điểm của đoạn thẳng $S - CD$.
12.3. - Gọi đường tròn đi qua hai điểm C, D có tâm nằm trên trục-x là (O). Nửa đường tròn phía trên chứa C, D chính là đường thẳng $L - CD$.
- Đường thẳng CD cắt trục-x tại O'.
- Gọi H là trung điểm của OO'.
- Đường tròn $(H; HO)$ cắt đường thẳng $L - CD$ tại M thì M là trung điểm cần dựng.



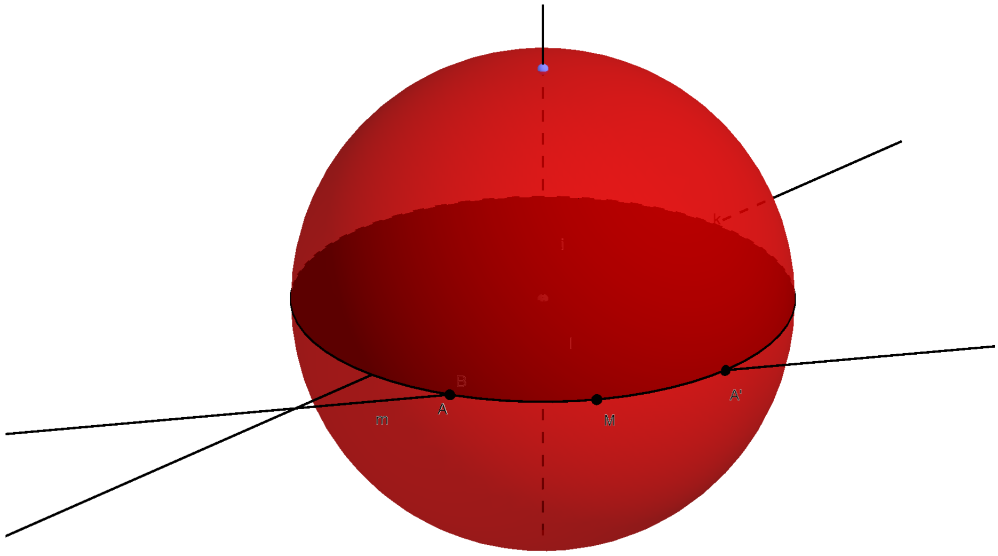
13.1. Trung trực của đoạn thẳng CD.
13.2. - Dựng trung điểm M của đoạn thẳng $S - CD$ như cách dựng 12.2.
- Dựng đường thẳng qua M vuông góc với $S - CD$ tại M như cách dựng 10.2.
13.3. - Dựng trung điểm M của đoạn thẳng $L - CD$ như cách dựng 12.3.
- Dựng đường thẳng $L - M$ đi qua M và vuông góc với $L - CD$ tại M như cách dựng 10.3.



14.1. Ảnh đối xứng A' của điểm A qua đường thẳng đi qua M và vuông góc với AM cho trước.

14.2. - Dựng đường thẳng $S - AM$; $S - m$ vuông góc với $S - AM$ tại M.

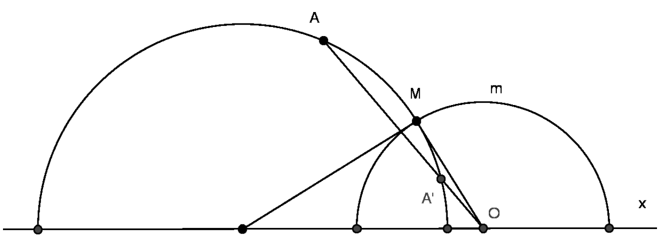
- Dựng đường thẳng qua A vuông góc với OM cắt đường thẳng $S - AM$ tại A'. Thế thì A' là điểm sao cho các đoạn thẳng $S - AM$, $S - A'M$ bằng nhau, nghĩa là $S - AM \cong S - A'M$.



14.3. - Dựng đường thẳng $L - AM$.

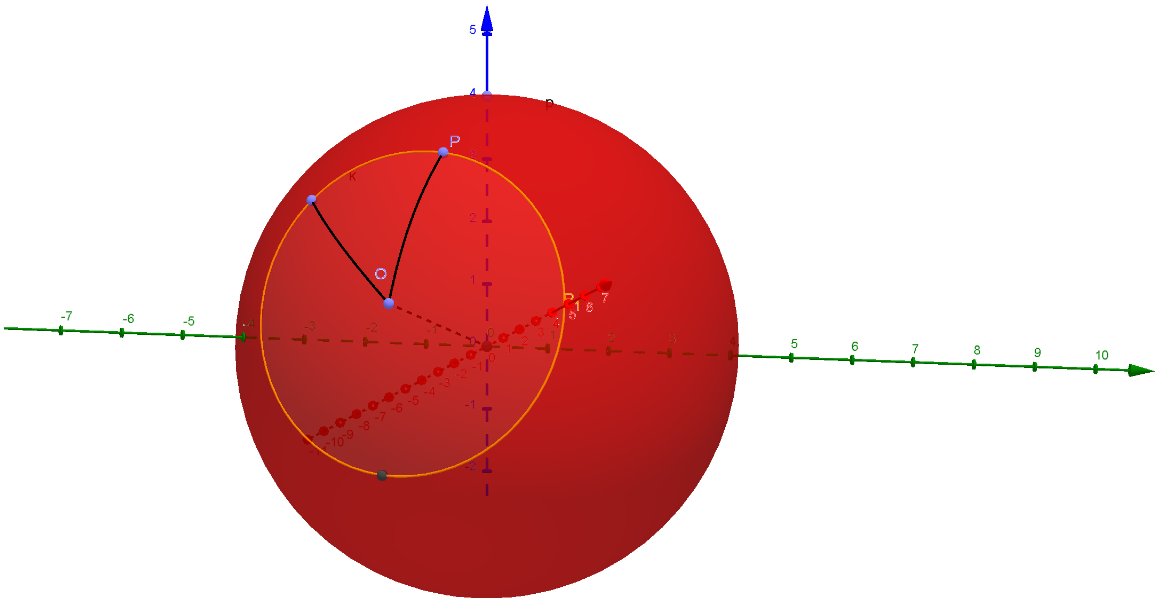
- Dựng đường thẳng $L - m$ qua M vuông góc với đường thẳng $L - AM$ như cách dựng 10.3. Đường thẳng $L - m$ là nửa trên đường tròn có tâm trên trục-x là O.

- Dựng đường thẳng OA cắt đường thẳng $L - AM$ tại điểm A'. Thế thì A' là điểm cần dựng.

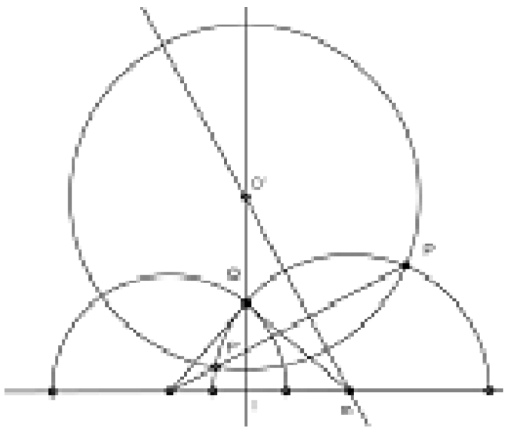


15.1. Đường tròn tâm O bán kính OP.

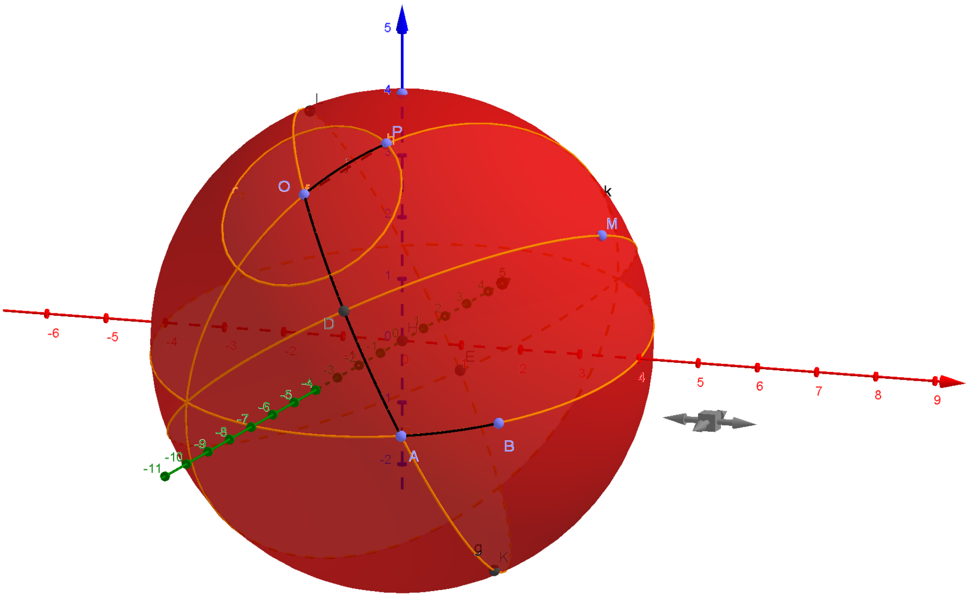
15.2. - Dựng mặt phẳng qua P vuông góc với đường nối tâm mặt cầu và điểm O. Mặt phẳng cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn trên mặt cầu thì đường tròn này chính là đường tròn $S - (O; OP)$.



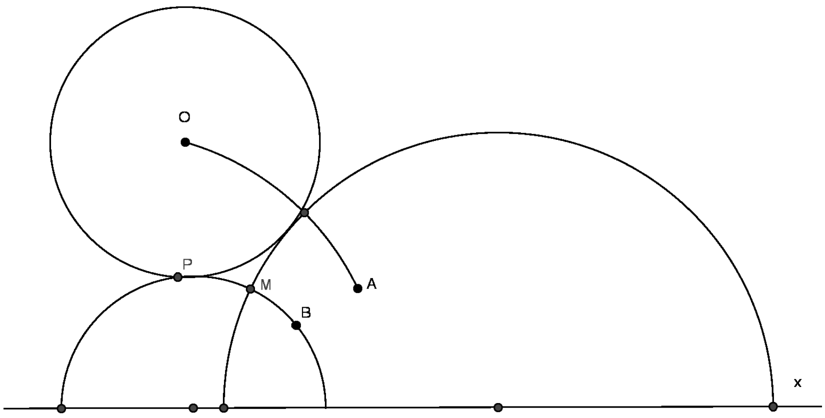
15.3. Cho điểm O và điểm P. Dựng đường tròn $L-(O;OP)$.
- Dựng đường thẳng l đi qua O và vuông góc với trục-x.
- Dựng P' là ảnh của P qua đường thẳng $L-O$ vuông góc với đường thẳng $L-OP$ tại O như cách dựng 14.3. Thế thì $L-OP \cong L-OP'$.
- Dựng đường trung trực đoạn PP' cắt l tại O'.
- Đường tròn $(O';O'P)$ là đường tròn cần dựng.



16.1. Đường tròn tâm O có bán kính R bằng đoạn thẳng AB cho trước.
16.2. Cho điểm O và đoạn thẳng $S-AB$.
- Dựng đường trung trực $S-d$ của đoạn $S-OA$ như cách dựng 13.2.
- Lấy điểm P đối xứng với điểm B qua mặt phẳng chứa đường trung trực $S-OA$.
- Đường tròn $S-(O;OP)$ chính là đường tròn cần dựng.



16.3. Cho điểm O, dựng đường tròn $L-(O;OP)$ với OP bằng độ dài đoạn thẳng AB cho trước $L-OP \cong L-AB$.
- Dựng đoạn thẳng $L-OA$. Dựng $L-l$ là đường trung trực của đoạn thẳng $L-OA$ như cách dựng 13.3 ở trên.
- Dựng đường thẳng $L-m$ qua B và vuông góc với đường thẳng $L-l$ tại điểm M.
- Gọi P là ảnh của B nằm trên đường thẳng $L-m$ đi qua M.
- Đường tròn $L-(O;OP)$ là đường tròn cần dựng như cách dựng 15.3.



17.1. Định lí hàm số côsin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

17.2. Định lí côsin-S: $\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A$. (Chứng minh: [2])

17.3. Định lí côsin-L: $\cosh\frac{a}{R} = \cosh\frac{b}{R}\cosh\frac{c}{R} - \sinh\frac{b}{R}\sinh\frac{c}{R}\cos A$ (Chứng minh: [1])

18.1. Định lí hàm số sin: $\frac{a}{sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

18.2. Định lí sin-S: $\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{b}{R}}{\sin B} = \frac{\sin\frac{c}{R}}{\sin C}$.

18.3. Định lí sin-L: $\frac{\sinh\frac{a}{R}}{\sin A} = \frac{\sinh\frac{b}{R}}{\sin B} = \frac{\sinh\frac{c}{R}}{\sin C}$.

19.1. Định lí Phương tích của một điểm đối với một đường tròn: Nếu từ điểm P ta kẻ hai cát tuyến PMM', PNN' tới đường tròn cắt đường tròn tại các cặp điểm M, M'; N, N' thì ta có hệ thức

$$PM.PM' = PN.PN'.$$

19.2. Nếu từ điểm P ta kẻ hai cát tuyến $S-PMM'$, $S-PNN'$ tới đường tròn cắt đường tròn tại các cặp điểm M, M'; N, N' thì ta có hệ thức:

$$\tan\frac{\overline{PM}}{2R}.\tan\frac{\overline{PM'}}{2R} = \tan\frac{\overline{PN}}{2R}.\tan\frac{\overline{PN'}}{2R}.$$

19.3. - Nếu từ điểm P ta kẻ hai cát tuyến $L-PMM'$, $L-PNN'$ tới đường tròn cắt đường tròn tại các cặp điểm M, M'; N, N' thì ta có hệ thức

$$\tanh\frac{\overline{PM}}{2R}.\tanh\frac{\overline{PM'}}{2R} = \tanh\frac{\overline{PN}}{2R}.\tanh\frac{\overline{PN'}}{2R}.$$

20.1. Định lí Ménélaus.

20.2. Điều kiện cần và đủ để ba điểm A', B', C' theo thứ tự nằm trên ba cạnh $S-BC, S-CA, S-AB$ của tam giác $S-ABC$ thẳng hàng là

$$\frac{\sin\frac{\overline{A'B}}{R}}{\sin\frac{\overline{A'C}}{R}}.\frac{\sin\frac{\overline{B'C}}{R}}{\sin\frac{\overline{B'A}}{R}}.\frac{\sin\frac{\overline{C'A}}{R}}{\sin\frac{\overline{C'B}}{R}} = 1.$$

20.3. Điều kiện cần và đủ để ba điểm A', B', C' theo thứ tự nằm trên ba cạnh $L-BC, L-CA, L-AB$ của tam giác $L-ABC$ thẳng hàng là

$$\frac{\sinh\frac{\overline{A'B}}{R}}{\sinh\frac{\overline{A'C}}{R}}.\frac{\sinh\frac{\overline{B'C}}{R}}{\sinh\frac{\overline{B'A}}{R}}.\frac{\sinh\frac{\overline{C'A}}{R}}{\sinh\frac{\overline{C'B}}{R}} = 1.$$

21.1. Định lí Céva.

21.2. Điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng $S-AA', S-BB', S-CC'$ theo thứ tự nối các đỉnh A, B, C với các điểm A', B', C' nằm trên ba cạnh $S-BC, S-CA, S-AB$ của tam giác $S-ABC$ đồng quy là

$$\frac{\sin\frac{\overline{A'B}}{R}}{\sin\frac{\overline{A'C}}{R}}.\frac{\sin\frac{\overline{B'C}}{R}}{\sin\frac{\overline{B'A}}{R}}.\frac{\sin\frac{\overline{C'A}}{R}}{\sin\frac{\overline{C'B}}{R}} = -1.$$

21.3. Điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng $L-AA', L-BB', L-CC'$ theo thứ tự nối các đỉnh A, B, C với các điểm A', B', C' nằm trên ba cạnh $L-BC, L-CA, L-AB$ của tam giác $L-ABC$ đồng quy là

$$\frac{\sinh\frac{\overline{A'B}}{R}}{\sinh\frac{\overline{A'C}}{R}}.\frac{\sinh\frac{\overline{B'C}}{R}}{\sinh\frac{\overline{B'A}}{R}}.\frac{\sinh\frac{\overline{C'A}}{R}}{\sinh\frac{\overline{C'B}}{R}} = -1.$$

22.1. Định lí ba đường cao.

22.2. Ba đường cao trong hình học-S đồng quy.

22.3. Ba đường cao của một tam giác trong hình học-L đồng quy nghĩa là ba đường cao cùng thuộc một chùm. Điểm đồng quy có thể là một điểm thông thường, điểm lý tưởng hay điểm ở vô tận. Cụ thể là:

- Nếu hai đường cao nào đó cắt nhau ở một điểm O thì đường cao thứ ba cũng đi qua O.
- Nếu hai đường cao nào đó phân kì thì đường cao thứ ba cũng phân kì với chúng. Cả ba nhận chung một đường vuông góc.
- Nếu hai đường cao nào đó song song với nhau về một phía nào đó thì đường cao thứ ba cũng song song với chúng về phía đó.

23.1. Định lí ba đường trung tuyến.
23.2. Ba đường trung tuyến-S của tam giác-S đồng quy.
23.3. Ba đường trung tuyến-L của tam giác-L đồng quy.
24.1. Định lí ba đường phân giác trong.
24.2. Ba đường phân giác trong-S của tam giác-S đồng quy.
24.3. Ba đường phân giác trong-L của tam giác-L đồng quy.
25.1. Định lí hai đường phân giác ngoài và một đường phân giác trong.
25.2. Trong một tam giác-S, hai đường phân giác ngoài-S và đường phân giác trong-S thứ ba đồng quy.
25.3. Trong một tam giác-L, hai đường phân giác ngoài-L và đường phân giác trong-L thứ ba đồng quy.
26.1. Định lí ba đường trung trực.
26.2. Trong một tam giác-S, ba đường trung trực-S đồng quy.
26.3. Trong một tam giác-L, ba đường trung trực-L đồng quy.

2. Dùng hình học cầu chứng minh hình học Lobachevsky

2.1. Phương pháp

Để chứng minh một định lí trong hình học Lobachevsky, ta có thể chứng minh định lí trong hình học cầu nhờ các hàm lượng giác của các tỉ số $\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}, v, v, \ldots$ với a, b, c *là độ dài các đoạn thẳng cầu. Bây giờ, trong chứng minh đó ta thay mọi* R *bằng* Ri *thì ta lại được một chứng minh khác cho phép ta khẳng định, định lí trong hình học Lobachevsky cũng đúng.*

2.2. Ví dụ minh họa

Bài toán 1. *(Định lý Céva-L).*
Điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng $L-AA', L-BB', L-CC'$ *theo thứ tự nối các đỉnh* A, B, C *với các điểm* A', B', C' *nằm trên ba cạnh* $L-BC, L-CA, L-AB$ *của tam giác* $L-ABC$ *đồng quy là*

$$\frac{\sinh\frac{\overline{A'B}}{R}}{\sinh\frac{\overline{A'C}}{R}}.\frac{\sinh\frac{\overline{B'C}}{R}}{\sinh\frac{\overline{B'A}}{R}}.\frac{\sinh\frac{\overline{C'A}}{R}}{\sinh\frac{\overline{C'B}}{R}}=-1.$$

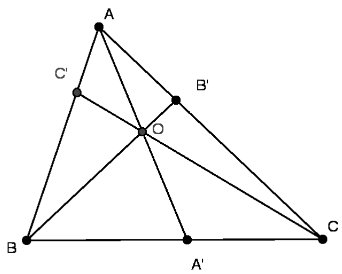
Lời giải. Để chứng minh định lí Céva-L ta sẽ đi chứng minh cho định lí Céva-S. Trong chứng minh định lí Céva-S, ta chỉ sử dụng các hàm lượng giác. Sau đó thay R bởi Ri ta được chứng minh cho định lí Céva-L.

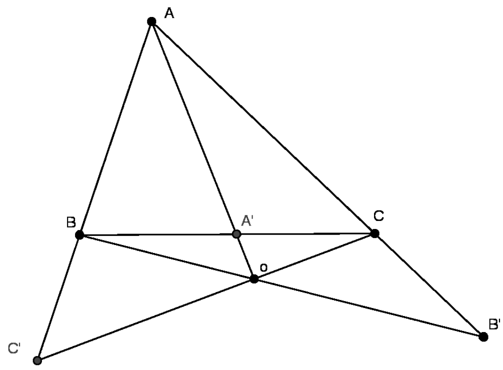
Bài toán 2. *(Định lí Céva-S).*

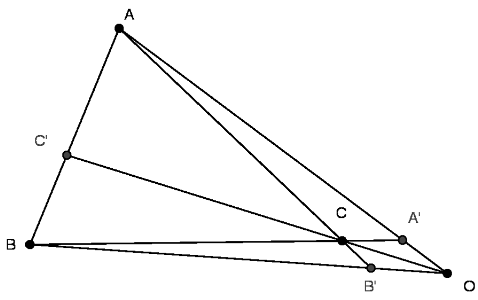
Điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng $S - AA'$, $S - BB'$, $S - CC'$ theo thứ tự nối các đỉnh A, B, C với các điểm A', B', C' nằm trên ba cạnh $S - BC$, $S - CA$, $S - AB$ của tam giác $S - ABC$ đồng quy là

$$\frac{\sin\frac{\overline{A'B}}{R}}{\sin\frac{\overline{A'C}}{R}}.\frac{\sin\frac{\overline{B'C}}{R}}{\sin\frac{\overline{B'A}}{R}}.\frac{\sin\frac{\overline{C'A}}{R}}{\sin\frac{\overline{C'B}}{R}} = -1.$$

Điều kiện cần: Các trường hợp được biểu diễn như hình vẽ







Từ các hình vẽ đang xét, bỏ qua việc xét dấu, ta có: $\dfrac{\sin\frac{A'B}{R}}{\sin\widehat{BOA'}} = \dfrac{\sin\frac{OB}{R}}{\sin\widehat{OA'B}}$ và $\dfrac{\sin\frac{A'C}{R}}{\sin\widehat{COA'}} = \dfrac{\sin\frac{OC}{R}}{\sin\widehat{OA'B}}$(bởi vì các góc $S - \widehat{OA'B}$ và $S - \widehat{OA'C}$ là bằng nhau hoặc là bù nhau).

Tương tự, ta có:

$\sin\dfrac{A'B}{R} = \dfrac{\sin\frac{OB}{R}.\sin\widehat{BOA'}}{\sin\widehat{OA'B}}$ và $\sin\dfrac{A'C}{R} = \dfrac{\sin\frac{OC}{R}.\sin\widehat{COA'}}{\sin\widehat{OA'B}}$.

Tiếp theo: $\dfrac{\sin\frac{A'B}{R}}{\sin\frac{A'C}{R}} = \dfrac{\sin\frac{OB}{R}}{\sin\frac{OC}{R}}.\dfrac{\sin\widehat{BOA'}}{\sin\widehat{COA'}}(1)$

Các tam giác $S-OCB'$ và $S-OAB'$ cho:

$$\frac{\sin\frac{B'C}{R}}{\sin\frac{B'A}{R}}=\frac{\sin\frac{OC}{R}}{\sin\frac{OA}{R}}.\frac{\sin\widehat{COB'}}{\sin\widehat{AOB'}}(2)$$

Các tam giác $S-AOC'$ và $S-BOC'$: $\frac{\sin\frac{C'A}{R}}{\sin\frac{C'B}{R}}=\frac{\sin\frac{OA}{R}}{\sin\frac{OB}{R}}.\frac{\sin\widehat{AOC'}}{\sin\widehat{BOC'}}(3)$

Nhân vế theo vế các hệ thức (1), (2) và (3), ta có:

$$\frac{\sin\frac{A'B}{R}.\sin\frac{B'C}{R}.\sin\frac{C'A}{R}}{\sin\frac{A'C}{R}.\sin\frac{B'A}{R}.\sin\frac{C'B}{R}}=\frac{\sin\frac{OB}{R}.\sin\frac{OC}{R}.\sin\frac{OA}{R}.\sin\widehat{BOA'}\sin\widehat{COB'}.\sin\widehat{AOC'}}{\sin\frac{OC}{R}.\sin\frac{OA}{R}.\sin\frac{OB}{R}.\sin\widehat{COA'}\sin\widehat{AOB'}.\sin\widehat{BOC'}}.$$

Nói cách khác: $\frac{\sin\frac{A'B}{R}}{\sin\frac{A'C}{R}}.\frac{\sin\frac{B'C}{R}}{\sin\frac{B'A}{R}}.\frac{\sin\frac{C'A}{R}}{\sin\frac{C'B}{R}}=1(4)$ (bởi vì các góc $S-BOA', S-AOB'; S-COB', S-BOC'; S-AOC', S-COA'$ hoặc đôi một bằng nhau hoặc đôi một bù nhau).

Hệ thức này ta đã chứng minh đúng trong trường hợp giá trị tuyệt đối. Bây giờ ta cần xét dấu của nó.

Trong trường hợp hình vẽ đầu tiên bên trái, các tỉ số ở vế trái của (4) đều âm, nên tích chúng lại là âm.

Trong trường hợp hai hình vẽ còn lại, hai tỉ số trong ba tỉ số ở vế trái của (4) dương còn tỉ số còn lại là âm nên tích chúng lại là âm.

Cuối cùng ta có thể viết: $\frac{\sin\overline{\frac{A'B}{R}}}{\sin\overline{\frac{A'C}{R}}}.\frac{\sin\overline{\frac{B'C}{R}}}{\sin\overline{\frac{B'A}{R}}}.\frac{\sin\overline{\frac{C'A}{R}}}{\sin\overline{\frac{C'B}{R}}}=-1.$

Điều kiện đủ:

Giả sử ta đã có được hệ thức: $\frac{\sin\overline{\frac{A'B}{R}}}{\sin\overline{\frac{A'C}{R}}}.\frac{\sin\overline{\frac{B'C}{R}}}{\sin\overline{\frac{B'A}{R}}}.\frac{\sin\overline{\frac{C'A}{R}}}{\sin\overline{\frac{C'B}{R}}}=-1(5)$

Gọi O là giao điểm của các đường thẳng $S-AA'$ và $S-BB'$. Gọi giao điểm của $S-CO$ với đường thẳng $S-AB$ là C''.

Áp dụng điều kiện cần ta có: $\frac{\sin\overline{\frac{A'B}{R}}}{\sin\overline{\frac{A'C}{R}}}.\frac{\sin\overline{\frac{B'C}{R}}}{\sin\overline{\frac{B'A}{R}}}.\frac{\sin\overline{\frac{C''A}{R}}}{\sin\overline{\frac{C''B}{R}}}=-1(6)$

Từ (5) và (6) ta có: $\frac{\sin\overline{\frac{C''A}{R}}}{\sin\overline{\frac{C''B}{R}}}=\frac{\sin\overline{\frac{C'A}{R}}}{\sin\overline{\frac{C'B}{R}}}(7)$

Từ hệ thức (7) ta có các điểm C', C'' trùng nhau.

Thay R bởi Ri ta được chứng minh cho định lí Céva-L. Vậy ta đã chứng minh được định lí Céva-L bằng cách sử dụng chứng minh định lí Céva-S.

3. Dùng hình học Euclid chứng minh hình học Lobachevsky

3.1. Phương pháp

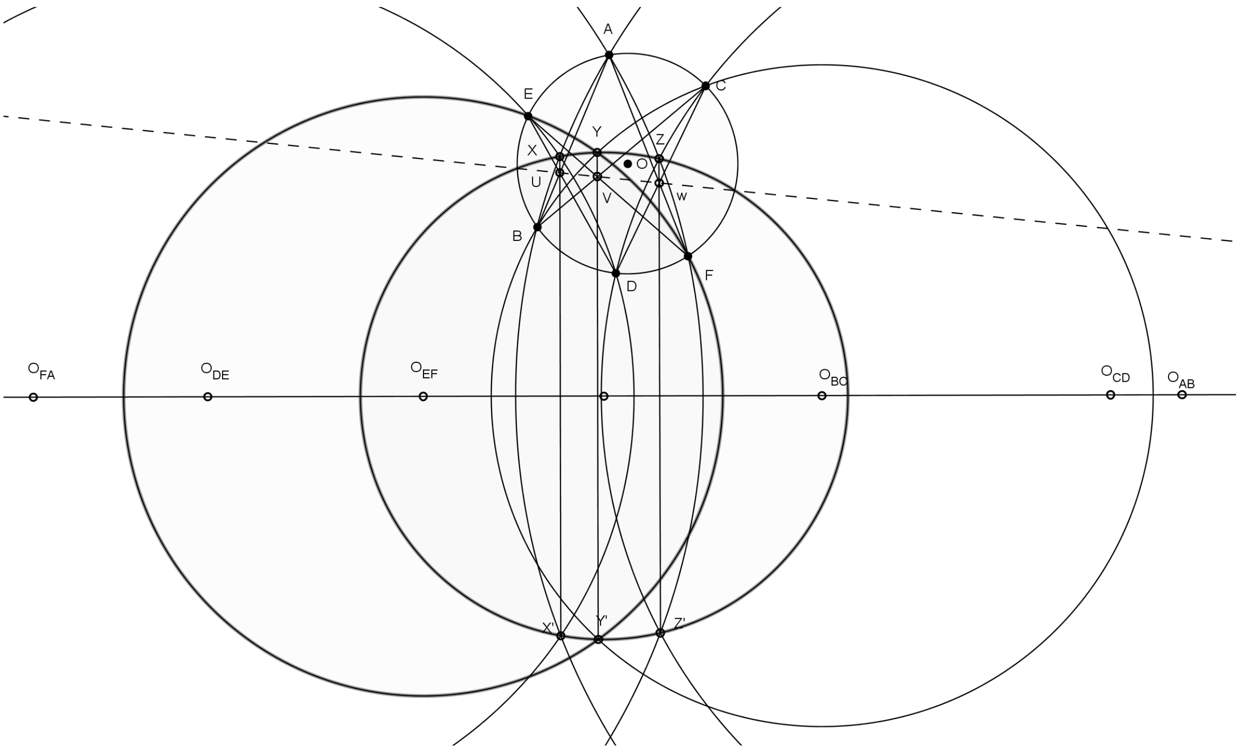
Để chứng minh bài toán trong hình học Lobachevsky, ta có thể sử dụng mô hình Poincaré để đưa bài toán trong hình học Lobachevsky về hình học Euclid. Sau đó ta chứng minh bài toán hình học Euclid. Như thế ta đã chứng minh được bài toán trong hình học Lobachevsky.

3.2. Ví dụ minh họa

Bài toán 3. *(Định lí Pascal Lobachevsky).*
Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F nằm trên đường tròn $L-(O)$. Giả sử $L-AB \cap L-DE = X; L-BC \cap L-EF = Y, L-CD \cap L-FA = Z$. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng.

Lời giải. Để chứng minh định lí Pascal-L, ta sử dụng mô hình Poincaré để đưa về bài toán Euclid. Bây giờ, ta chứng minh bài toán sau

Bài toán 4. *Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F nằm trên đường tròn (O). l là đường thẳng bất kì không đi qua tâm $O.(O_{AB}), (O_{DE}), (O_{BC}), (O_{EF}), (O_{CD}), (O_{FA})$ là các đường tròn có tâm thuộc l và đi qua $A, B; D, E; B, C; E, F; C, D; F, A$. Giả sử $(O_{AB}) \cap (O_{DE}) = X, X'$; $(O_{BC}) \cap (O_{EF}) = Y, Y'$; $(O_{CD}) \cap (O_{FA}) = Z, Z'$. Chứng minh rằng $X, X'; Y, Y'; Z, Z'$ cùng thuộc một đường tròn có tâm thuộc l.*

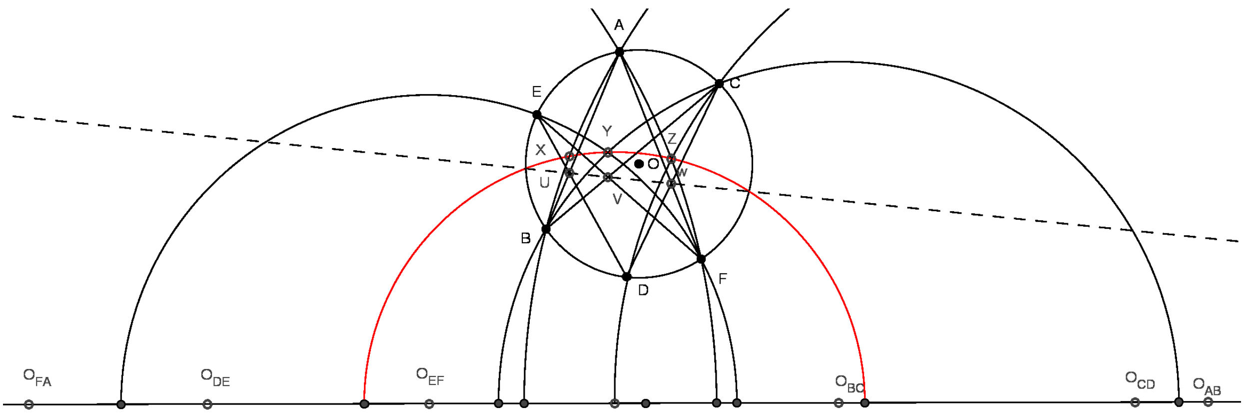


Chứng minh của Ngô Quang Dương. Gọi U, V, W là giao điểm của AB và DE, BC và EF, CD và FA.
Dễ thấy XX' là trục đẳng phương của (O_{AB}) và (O_{DE}).
Phương tích của U tới (O_{AB}) và (O_{DE}) lần lượt là $UA.UB$ và $UD.UE$.
Do A, B, D, E đồng viên nên $UA.UB = UD.UE$ suy ra X, U, X' thẳng hàng và $UX.UX' = UA.UB = UD.UE$.
Điều này dẫn tới phương tích của U tới $(XX'YY')$ và (O) bằng nhau. Tương tự, phương tích của V tới $(XX'YY'), (O)$ bằng nhau nên UV là trục đẳng phương của (O) và $(XX'YY')$.
Hoàn toàn tương tự UVW là trục đẳng phương của $(YY'ZZ'), (ZZ'XX')$ với (O).
Suy ra $(XX'YY'), (YY'ZZ'), (ZZ'XX')$ đồng trục, hay 6 điểm X, X', Y, Y', Z, Z' đồng viên.
Với nhận xét đơn giản là X, Y, Z và X', Y', Z' đối xứng nhau qua l, thì tâm đường tròn đi qua 6 điểm này thuộc l.

Nhận xét.

1. Để cho thuận tiện, từ giờ trở về sau ta gọi đường tròn $(XX'YY'ZZ')$ là "đường tròn Pascal" của 6 điểm có thứ tự A, B, C, D, E, F.

2. Khi đường tròn (O) nằm trên l và ta chỉ lấy các nửa trên của các đường tròn $(O_{AB}), (O_{DE}), (O_{BC}), (O_{EF}), (O_{CD}), (O_{FA}), (O_{XX'YY'ZZ'})$ và tương giao của chúng (hình vẽ)



thế thì bài toán 4 trở thành bài toán 3. Vậy ta đã chứng minh được bài toán Pascal trong hình học Lobachevsky.

Bài toán 5. *(Định lí Steiner-L).*

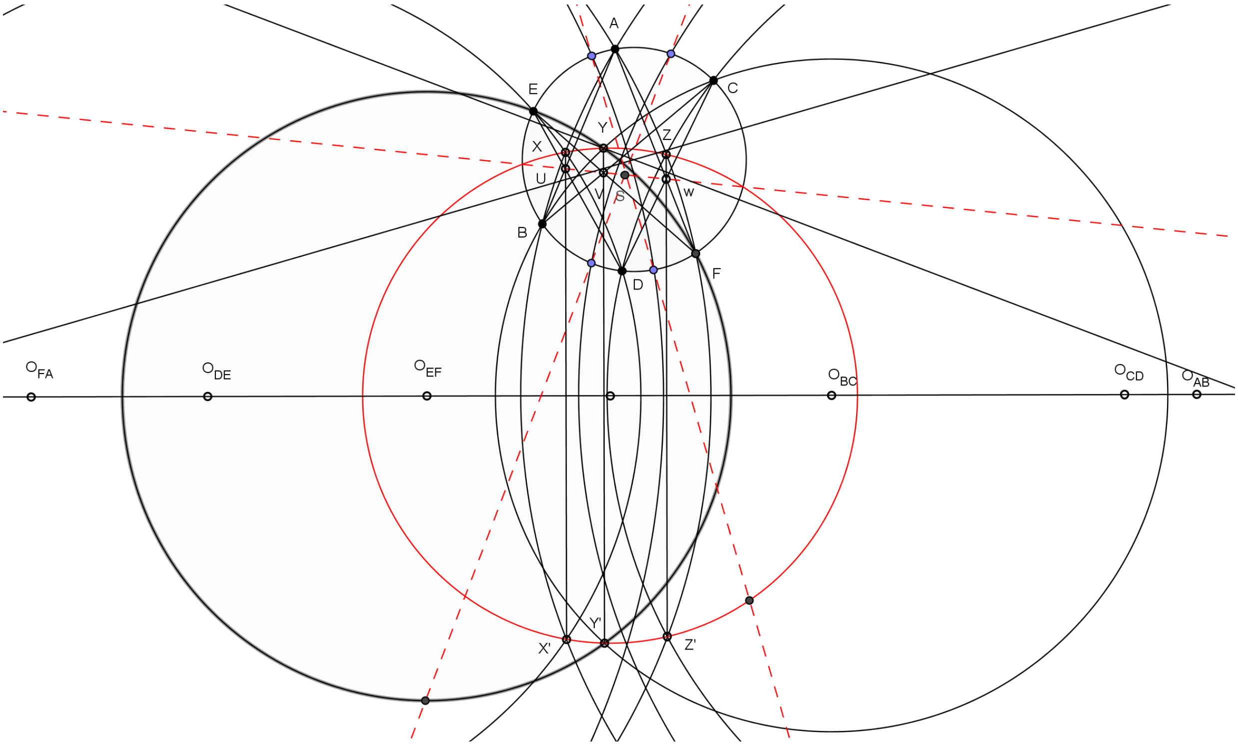
Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F thuộc đường tròn $L-(O)$. Chứng minh rằng các đường thẳng Pascal-L $ABCDEF, EDAFBC, CEFBAD$ đồng quy.

Để chứng minh định lí Steiner-L, ta sử dụng mô hình Poincaré để đưa về bài toán Euclid.

Bây giờ, ta chứng minh bài toán sau trong hình học Euclid

Bài toán 6. *Trong mặt phẳng cho 6 điểm A, B, C, D, E, F thuộc đường tròn (O) và l là đường thẳng không đi qua tâm. Chứng minh rằng "đường tròn Pascal" của các bộ 6 điểm có thứ tự $ABCDEF, EDAFBC, CEFBAD$ đồng trục.*

Chứng minh của Ngô Quang Dương.



Theo chứng minh của bài toán 4, đường thẳng Pascal của $ABCDEF$ là trục đẳng phương của (O) với đường tròn Pascal của $ABCDEF$.
Đường thẳng Pascal của $EDAFBC$ là trục đẳng phương của (O) với đường tròn Pascal của $EDAFBC$.
Đường thẳng Pascal của $CEFBAD$ là trục đẳng phương của (O) với đường tròn Pascal của $CEFBAD$.
Theo định lý Steiner, đường thẳng Pascal của $ABCDEF$, $EDAFBC$, $CEFBAD$ đồng quy. Ta gọi điểm đồng quy là S. Vậy nên S có cùng phương tích với 3 "đường tròn Pascal". 3 "đường tròn Pascal" có tâm thuộc l nên nếu lấy m là đường thẳng qua S vuông góc với l thì m là trục đẳng phương của 3 "đường tròn Pascal". Điều này có nghĩa là 3 "đường tròn Pascal" đồng trục.
Nhận xét. Khi đường tròn (O) nằm phía trên đường thẳng l và ta chỉ lấy các nửa trên của tất cả các đường tròn (trừ đường tròn (O)) như$(O_{AB}), (O_{DE}), (O_{BC}), (O_{EF}), (O_{CD}), (O_{FA}), \ldots$ và tương giao của các nửa đường tròn thì bài toán 6 trở thành bài toán 5. Vậy ta đã chứng minh được bài toán Steiner trong hình học Lobachevsky.

4. Mở rộng bài toán từ hình học Euclid thành hình học cầu và hình học Lobachevsky

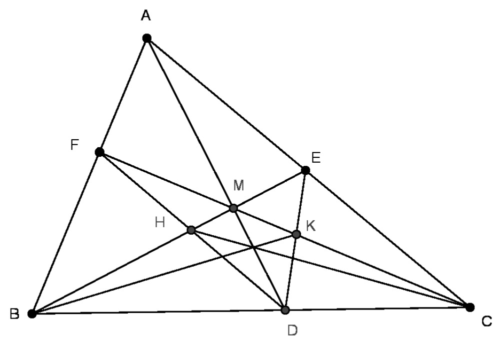
4.1. Phương pháp

Xuất phát từ bài toán trong hình học Euclid, mở rộng bài toán thành bài toán trong hình học cầu và hình học Lobachevsky. Chú ý sử dụng phương pháp chứng minh Euclid áp dụng cho chứng minh hình học cầu và hình học Lobachevsky (nếu được).

4.2. Ví dụ minh họa

Bài toán 7. *(Bài T4/285 – Tạp chí toán học và tuổi trẻ).*
Cho tam giác ABC với điểm M nằm trong tam giác. Các tia AM, BM, CM cắt các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F. Gọi K là giao điểm của DE và CM, gọi H là giao điểm của DF và BM. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BK, CH đồng quy.

Ta chứng minh bài toán như sau



Áp dụng định lí Ménélaus cho tam giác AMC (với bộ ba điểm thẳng hàng E, K, D) và tam giác AMB (với bộ ba điểm thẳng hàng F, H, D) ta có

$$\frac{\overline{KM}}{\overline{KC}}.\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}.\frac{\overline{DA}}{\overline{DM}} = 1, \frac{\overline{HB}}{\overline{HM}}.\frac{\overline{DM}}{\overline{DA}}.\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1.$$

Suy ra: $\frac{\overline{KM}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}.\frac{\overline{DM}}{\overline{DA}}, \frac{\overline{HB}}{\overline{HM}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}}.\frac{\overline{DA}}{\overline{DM}}$(1)
Áp dụng định lí Céva cho tam giác ABC với bộ ba đường thẳng đồng quy AD, BE, CF:

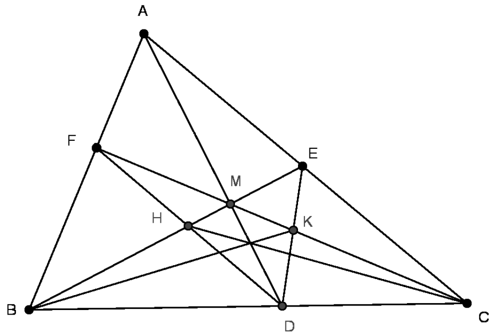
$$\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}}.\frac{\overline{FB}}{\overline{FA}}.\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = -1.$$

Từ đó: $\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = -\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}.\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}$(2)
Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{\overline{KM}}{\overline{KC}}.\frac{\overline{HB}}{\overline{HM}}.\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = -1.$$

Vậy theo phần đảo của định lí Céva, BK, CH, MD đồng quy. Hay AD, BK, CH đồng quy.

Bài toán 8. *(Mở rộng bài toán 7 trong hình học cầu).*
Cho tam giác $S-ABC$ với điểm M nằm trong tam giác. Các tia $S-AM, S-BM, S-CM$ cắt các cạnh $S-BC, S-CA, S-AB$ tương ứng tại D, E, F. Gọi K là giao điểm của $S-DE$ và $S-CM$, gọi H là giao điểm của $S-DF$ và $S-BM$. Chứng minh rằng các đường thẳng $S-AD, S-BK, S-CH$ đồng quy.



Áp dụng định lí Ménélaus cho tam giác $S-AMC$ (với bộ ba điểm thẳng hàng E, K, D) và tam giác $S-AMB$ (với bộ ba điểm thẳng hàng F, H, D) ta có

$$\frac{\sin\frac{\overline{KM}}{R}}{\sin\frac{\overline{KC}}{R}}.\frac{\sin\frac{\overline{EC}}{R}}{\sin\frac{\overline{EA}}{R}}.\frac{\sin\frac{\overline{DA}}{R}}{\sin\frac{\overline{DM}}{R}}=1, \frac{\sin\frac{\overline{HB}}{R}}{\sin\frac{\overline{HM}}{R}}.\frac{\sin\frac{\overline{DM}}{R}}{\sin\frac{\overline{DA}}{R}}.\frac{\sin\frac{\overline{FA}}{R}}{\sin\frac{\overline{FB}}{R}}=1.$$

Suy ra: $\dfrac{\sin\frac{\overline{KM}}{R}}{\sin\frac{\overline{KC}}{R}}=\dfrac{\sin\frac{\overline{EA}}{R}}{\sin\frac{\overline{EC}}{R}}.\dfrac{\sin\frac{\overline{DM}}{R}}{\sin\frac{\overline{DA}}{R}}, \dfrac{\sin\frac{\overline{HB}}{R}}{\sin\frac{\overline{HM}}{R}}=\dfrac{\sin\frac{\overline{FB}}{R}}{\sin\frac{\overline{FA}}{R}}.\dfrac{\sin\frac{\overline{DA}}{R}}{\sin\frac{\overline{DM}}{R}}(1)$

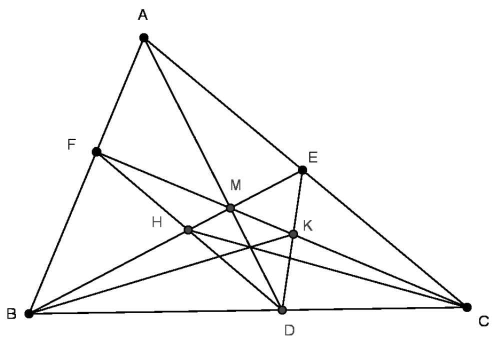
Áp dụng định lí Céva cho tam giác $S-ABC$ với bộ ba đường thẳng đồng quy $S-AD, S-BE, S-CF$: $\dfrac{\sin\frac{\overline{DC}}{R}}{\sin\frac{\overline{DB}}{R}}.\dfrac{\sin\frac{\overline{FB}}{R}}{\sin\frac{\overline{FA}}{R}}.\dfrac{\sin\frac{\overline{EA}}{R}}{\sin\frac{\overline{EC}}{R}}=-1.$

Từ đó: $\dfrac{\sin\frac{\overline{DC}}{R}}{\sin\frac{\overline{DB}}{R}}=-\dfrac{\sin\frac{\overline{FA}}{R}}{\sin\frac{\overline{FB}}{R}}.\dfrac{\sin\frac{\overline{EC}}{R}}{\sin\frac{\overline{EA}}{R}}(2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{\sin\frac{\overline{KM}}{R}}{\sin\frac{\overline{KC}}{R}}.\dfrac{\sin\frac{\overline{HB}}{R}}{\sin\frac{\overline{HM}}{R}}.\dfrac{\sin\frac{\overline{DC}}{R}}{\sin\frac{\overline{DB}}{R}}=-1.$

Vậy theo phần đảo của định lí Céva, $S-BK, S-CH, S-MD$ đồng quy. Hay $S-AD, S-BK, S-CH$ đồng quy.

Bài toán 9. *(Mở rộng bài toán 7 trong hình học Lobachevsky)*
Cho tam giác $L-ABC$ với điểm M nằm trong tam giác. Các tia $L-AM, L-BM, L-CM$ cắt các cạnh $L-BC, L-CA, L-AB$ tương ứng tại D, E, F. Gọi K là giao điểm của $L-DE$ và $L-CM$, gọi H là giao điểm của $L-DF$ và $L-BM$. Chứng minh rằng các đường thẳng $L-AD, L-BK, L-CH$ đồng quy.



Áp dụng định lí Ménélaus cho tam giác $L - AMC$ (với bộ ba điểm thẳng hàng E, K, D) và tam giác $L - AMB$ (với bộ ba điểm thẳng hàng F, H, D) ta có

$$\frac{\sinh\frac{KM}{R}}{\sinh\frac{KC}{R}}.\frac{\sinh\frac{EC}{R}}{\sinh\frac{EA}{R}}.\frac{\sinh\frac{DA}{R}}{\sinh\frac{DM}{R}} = 1, \frac{\sinh\frac{HB}{R}}{\sinh\frac{HM}{R}}.\frac{\sinh\frac{DM}{R}}{\sinh\frac{DA}{R}}.\frac{\sinh\frac{FA}{R}}{\sinh\frac{FB}{R}} = 1.$$

Suy ra:

$$\frac{\sinh\frac{KM}{R}}{\sinh\frac{KC}{R}} = \frac{\sinh\frac{EA}{R}}{\sinh\frac{EC}{R}}.\frac{\sinh\frac{DM}{R}}{\sinh\frac{DA}{R}}, \frac{\sinh\frac{HB}{R}}{\sinh\frac{HM}{R}} = \frac{\sinh\frac{FB}{R}}{\sinh\frac{FA}{R}}.\frac{\sinh\frac{DA}{R}}{\sinh\frac{DM}{R}}(1)$$

Áp dụng định lí Céva cho tam giác $L - ABC$ với bộ ba đường thẳng đồng quy $L - AD, L - BE, L - CF$:

$$\frac{\sinh\frac{DC}{R}}{\sinh\frac{DB}{R}}.\frac{\sinh\frac{FB}{R}}{\sinh\frac{FA}{R}}.\frac{\sinh\frac{EA}{R}}{\sinh\frac{EC}{R}} = -1.$$

Từ đó:

$$\frac{\sinh\frac{DC}{R}}{\sinh\frac{DB}{R}} = -\frac{\sinh\frac{FA}{R}}{\sinh\frac{FB}{R}}.\frac{\sinh\frac{EC}{R}}{\sinh\frac{EA}{R}}(2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{\sinh\frac{KM}{R}}{\sinh\frac{KC}{R}}.\frac{\sinh\frac{HB}{R}}{\sinh\frac{HM}{R}}.\frac{\sinh\frac{DC}{R}}{\sinh\frac{DB}{R}} = -1.$

Vậy theo phần đảo của định lí Céva, $L - BK, L - CH, L - MD$ đồng quy. Hay $L - AD, L - BK, L - CH$ đồng quy.

5. Kết luận

Chúng ta vừa có một số khám phá mở rộng thú vị từ hình học Euclid sang hình học cầu và hình học Lobachevsky. Phương pháp mở rộng này là một phương pháp phát hiện các bài toán mới. Chính vì thế, phương pháp rất quan trọng đối với phát triển tư duy. Bài viết này cần trao đổi gì thêm? Mong được sự chia sẻ của các bạn.

Tài liệu tham khảo

[1] N.V.Efimov (1980), *Higher geometry*, Mir Publishers Moscow.

[2] P. Constan (1941), *Cours de Trigonométrie Sphérique*, Paris Société D'Éditions.

[3] Tạp chí Toán học và tuổi trẻ

[4] Steve Szydlik, *Hyperbolic constructions in Geometer's Sketchpad*, http://www.maa.org.

VỀ CHỨNG MINH VÀ TIẾN BỘ TRONG TOÁN HỌC (tiếp theo)

William P. Thurston – Nguyễn Dzuy Khánh dịch

5. Điều gì khích lệ con người nghiên cứu toán học?

Có một niềm vui thực sự khi làm toán, trong việc học những cách tư duy diễn giải, tổ chức và đơn giản hóa. Bạn có thể cảm thấy niềm vui khám phá toán học mới, tái khám phá toán học cổ xưa, học một cách tư duy từ ai đó hay từ tài liệu, tìm ra một cách giải thích mới, thú vị để nhìn nhận một cấu trúc toán học cũ.

Động lực nội tại có thể hướng chúng ta nghĩ rằng chúng ta làm toán hoàn toàn vì lợi ích của chính nó. Điều này không chính xác: môi trường xã hội là cực kỳ quan trọng. Chúng ta được truyền cảm hứng bởi những người khác, được đánh giá cao bởi những người khác và chúng ta thích giúp đỡ những người khác giải quyết các vấn đề toán học của họ. Những điều chúng ta ưa thích thay đổi tương ứng với những người khác. Tương tác xã hội xảy ra qua những buổi gặp mặt trực tiếp. Nó cũng xảy ra qua những thư và thư điện tử điện tử, các tiền ấn phẩm và các bài báo trên các tạp chí. Một hiệu ứng của hệ thống toán học mang tính xã hội cao này là khuynh hướng các nhà toán học đi theo những vấn đề hợp mốt. Vì mục đích tạo ra các định lý toán học mới có lẽ là không mấy hiệu quả: sẽ tốt hơn nếu chúng ta có những nhà toán học phủ các lĩnh vực tri thức đồng đều hơn. Nhưng hầu hết các nhà toán học không thích đơn độc, và họ gặp vấn đề với việc mãi phấn khích với một chủ đề, ngay cả khi họ đã đạt được những tiến triển cá nhân, trừ phi họ có những đồng nghiệp để chia sẻ sự phấn khích của họ.

Ngoài động lực nội tại và động lực mang tính xã hội không chính thức cho việc làm toán, chúng ta cũng được dẫn dắt bởi những lý do kinh tế và địa vị. Các nhà toán học, cũng giống như nhiều nhà khoa học khác, thực hiện rất nhiều đánh giá và bị đánh giá rất nhiều. Bắt đầu với những mức điểm, và tiếp tục qua những thư tiến cử, quyết định tuyển, quyết định đề bạt, báo cáo thẩm định, lời mời báo cáo, giải thưởng, ... chúng ta tham gia vào rất nhiều đánh giá, trong một hệ thống cạnh tranh khốc liệt.

Jaffe và Quinn phân tích động lực để làm toán qua một hệ thống tiền tệ chung mà rất nhiều nhà toán học tin tưởng: sự trả công cho các định lý.

Tôi nghĩ rằng sự nhấn mạnh chung của chúng ta vào sự trả công cho các định lý có một ảnh hưởng xấu lên tiến bộ của toán học. Nếu điều chúng ta đang thực hiện đẩy mạnh hiểu biết của con người về toán học, thì chúng ta sẽ được nhận biết và được đánh giá tốt hơn trong một hoạt động có phạm vi rộng hơn rất nhiều. Những người nhìn thấy cách chứng minh các định lý đang thực hiện nó trong phạm vi một cộng đồng toán học; họ không tự làm nó. Họ phụ thuộc vào hiểu biết toán học mà họ thu lượm được từ những nhà toán học khác. Một khi một định lý được chứng minh, cộng đồng toán học phụ thuộc vào mạng lưới xã hội để phân phối những ý tưởng tới những người mà có thể sử dụng chúng nhiều hơn – phương tiện in ấn là quá mờ mịt và cồng kềnh.

Thậm chí nếu ai đó có một quan điểm hẹp hòi rằng cái mà chúng ta đang tạo ra là các định lý, thì tập thể vẫn là quan trọng. Bóng đá có thể coi là một ẩn dụ. Có thể có một hoặc hai bàn thắng thôi trong suốt cả trận đấu, được ghi bởi một hoặc hai cầu thủ. Nhưng điều đó không có nghĩa rằng những nỗ lực của tất cả các thủ khác là vô giá trị. Chúng ta không đánh giá các cầu thủ trong một đội bóng chỉ bởi việc họ có tự ghi bàn hay không; chúng ta đánh giá một đội bóng qua cách nó vận hành như một đội bóng.

Trong toán học, thường xảy ra chuyện rằng một nhóm các nhà toán học đạt được sự tiến bộ với một tập hợp các ý tưởng nhất định. Có những định lý trên đường tiến bộ đó mà hầu như chắc chắn được chứng minh bởi một người này, hay người khác. Đôi khi nhóm các nhà toán học thậm chí có thể tiên đoán rằng những định lý này tựa như thế nào. Việc này khó hơn rất nhiều so với việc dự đoán xem ai sẽ thực sự chứng minh được định lý, mặc dù thường có một số ít "người nổi bật" mà có khả năng cao sẽ ghi điểm. Tuy nhiên, họ đang ở một vị trí mà có thể chứng minh những định lý kia nhờ tập hợp những nỗ lực của toàn đội. Toàn đội có một chức năng nữa, trong việc tiếp thu và sử dụng các định lý một khi chúng được chứng minh. Thậm chí nếu một người nào đó có thể chứng minh tất cả các định lý trên đường đi mà không cần trợ giúp, thì chúng sẽ bị bỏ phí nếu không còn ai khác học chúng.

Có một hiện tượng thú vị liên quan tới những người "nổi bật". Thường xảy ra rằng ai đó ở mức trung bình chứng minh một định lý mà được chấp nhận rộng rãi như một kết quả giá trị. Vị thế của họ trong cộng đồng - thứ bậc của họ - ngay lập tức tăng đột ngột. Khi điều này xảy ra, họ nhanh chóng đạt hiệu suất cao hơn rất nhiều như một trung tâm của các ý tưởng và một nguồn cho các định lý. Tại sao? Trước tiên, có một sự tăng tiến lớn trong niềm tự tôn của bản thân, và sự tăng tiến hệ quả trong hiệu suất công việc. Thứ hai, khi vị thế của họ lớn mạnh hơn, mọi người đang ở gần trung tâm mạng lưới các ý tưởng-những người khác sẽ nhìn nhận họ nghiêm túc hơn. Điểm cuối cùng và có lẽ là quan trọng nhất, một đột phá toán học thường thể hiện một cách tư duy mới, và những phương cách hiệu quả của tư duy thường có thể áp dụng vào nhiều hơn một tình huống.

Hiện tượng này thuyết phục tôi rằng cả cộng đồng toán học sẽ trở nên dần đạt hiệu suất cao hơn rất nhiều nếu chúng ta mở rộng tâm hồn vào những giá trị thực của công việc mà chúng ta đang thực hiện. Jaffe và Quinn đề xuất một hệ thống nhận biết các vai trò chia nhỏ thành "ức đoán" và "chứng minh". Một phép phân chia như vậy có thể duy trì niềm tin hoang đường rằng tiến bộ của chúng ta được đo bởi những đơn vị cho những định lý chuẩn được tìm ra. Nghe hơi có vẻ giống như sự ngụy biện của một người mà đã in ra một bảng 10000 số nguyên tố. Thứ mà chúng ta làm ra được là hiểu biết của con người. Chúng ta có rất nhiều cách khác nhau để hiểu và rất nhiều quá trình khác nhau mà góp phần xây dựng nên hiểu biết của chúng ta. Ta sẽ thỏa mãn hơn, có hiệu suất cao hơn, và hạnh phúc hơn nếu chúng ta ghi nhận và tập trung vào việc này.

6. Một số kinh nghiệm cá nhân

Bởi vì bài viết này nảy sinh từ sự phản chiếu giữa sự không tương thích trong kinh nghiệm của tôi với những mô tả của Jaffe và Quinn, tôi sẽ bàn về hai kinh nghiệm cá nhân, bao gồm cả kinh nghiệm mà họ đã ám chỉ tới.

Tôi cảm thấy có gì đó ngu ngốc trong việc này, bởi vì tôi thực sự hối hận về những khía cạnh trong nghề nghiệp của mình: nếu tôi có thể làm mọi thứ một lần nữa với lợi ích từ những hiểu biết hiện tại về bản thân tôi và về tiến trình của toán học, thì có rất nhiều điều mà tôi hi vọng mình sẽ làm khác đi. Tôi hi vọng rằng qua việc kể về những kinh nghiệm này một cách thẳng thắn như tôi còn nhớ và hiểu về nó, tôi có thể giúp những người khác hiểu tốt hơn về tiến trình của toán học và học trước từ đó.

Đầu tiên tôi sẽ bàn luận ngắn gọn về lý thuyết phân lá, chính là chủ đề đầu tiên mà tôi bắt đầu khi còn là học viên sau đại học (ở đây không quan trọng bạn có biết lý thuyết phân lá là gì hay không) Ở thời điểm đó, lý thuyết phân lá đã trở thành trung tâm của sự chú ý của các nhà tôpô hình học, những người nghiên cứu hệ động lực và các nhà hình học vi phân. Khá nhanh chóng, tôi đã chứng minh được một số định lý theo một cách rất ấn tượng. Tôi đã chứng minh một định lý phân loại cho sự phân lá, đưa ra điều kiện cần và đủ cho một đa tạp có một sự phân lá. Tôi đã chứng minh một số định lý đáng chú ý khác. Tôi viết một số bài báo đáng được kính nể và công bố những định lý quan trọng nhất. Thật khó để có đủ thời gian để viết để duy trì những gì tôi có thể chứng minh, và tôi đã xây dựng phần lưu trữ.

Một hiện tượng thú vị đã xảy ra. Trong vòng vài năm một cuộc tháo lui đột ngột trong ngành đã bắt đầu diễn ra. Tôi đã nghe được từ khá nhiều các nhà toán học là họ đã đưa ra hay nhận được lời khuyên rằng đừng đi vào lý thuyết phân lá– họ đã nói rằng Thurston đã giải quyết sạch sẽ lý thuyết này rồi. Người ta nói với tôi rằng (không phải phàn nàn, mà là một lời khen) tôi đã giết chết lĩnh vực này. Những học viên sau đại học ngừng nghiên cứu lý thuyết phân lá, và khá nhanh chóng, tôi cũng hướng sự ưa thích của mình sang lĩnh vực khác.

Tôi không tin rằng sự tháo lui xảy ra bởi vì lĩnh vực này đã cạn kiệt tiềm năng tri thức. Đã có (và vẫn còn) nhiều những câu hỏi thú vị và có lẽ là có thể tiếp cận được. Kể từ những năm tháng ấy, đã có những phát triển thú vị được một số ít các nhà toán học khác đưa ra, những người vẫn còn làm việc trong ngành hay mới tham gia, và vẫn có những tiến triển quan trọng trong những địa hạt lân cận mà tôi nghĩ rằng chúng sẽ tăng tốc cực nhanh nếu các nhà toán học vẫn tiếp tục theo đuổi lý thuyết phân lá một cách mạnh mẽ. Ngày nay, tôi nghĩ rằng có ít các nhà toán học, những người hiểu về bất kỳ thứ gì tiếp cận được trạng thái của nghệ thuật của sự phân lá như là nó đã tồn tại ở thời điểm đó, mặc dù có một vài phần trong lý thuyết phân lá, bao gồm cả những phát triển kể từ thời ấy, vẫn đang phát triển mạnh.

Tôi tin rằng hai hiệu ứng mang tính sinh thái học là quan trọng hơn rất nhiều trong việc làm ngã lòng mọi người trong chủ đề này so với việc cạn kiệt nguồn tri thức đã xảy ra.

Trước tiên, những kết quả mà tôi đã chứng minh (cũng như một số kết quả quan trọng của những người khác) đã được ghi lại theo một phong cách kinh khủng, thường thấy của các nhà toán học. Nó phụ thuộc nặng nề vào những người đọc mà chia sẻ được kiến thức căn bản và một số nhận thức nhất định. Lý thuyết phân lá còn non trẻ, là một ngành hẹp có nhiều cơ hội, và nền tảng của nó vẫn chưa được chuẩn hóa. Tôi không do dự trong việc vẽ ra bất kỳ thứ toán học nào mà tôi đã học được từ người khác. Những bài báo tôi viết đã không (và không thể) dành nhiều thời gian để giải thích nền tảng văn hóa. Chúng được ghi chép lại ở mức tư duy và kết luận đỉnh cao nhất mà tôi thường đạt được sau nhiều ngẫm nghĩ và nỗ lực. Tôi cũng bỏ đi những thông tin ngắn có giá trị hàm ẩn trong suy luận, chẳng hạn như "bất biến Godbillon-Vey đo mức nghiêng xoắn ốc của một sự phân lá", mà vẫn còn bí ẩn với hầu hết những nhà toán học đã đọc nó. Việc này tạo ra một chướng ngại lớn: tôi nghĩ rằng hầu hết các học viên sau đại học và các nhà toán học đều bị nản lòng rằng quá khó để học và hiểu được các chứng minh của những định lý cốt yếu.

Thứ hai là vấn đề rằng có gì trong ngành dành cho những người khác. Khi tôi bắt đầu làm việc với lý thuyết phân lá, tôi đã nghĩ rằng điều mà họ theo đuổi là một tập hợp các định lý mạnh đã được chứng minh mà có thể áp dụng để trả lời những vấn đề toán học lớn hơn. Nhưng đó chỉ là một phần của câu chuyện mà thôi. Hơn cả tri thức, mọi người muốn có được sự thấu hiểu mang tính cá nhân. Và trong hệ đánh giá đã đưa ra của chúng ta, họ cũng muốn và cần sự ghi nhận qua các định lý.

Tôi sẽ bỏ qua vài năm để đến với chủ đề mà Jaffe và Quinn đã ám chỉ tới, khi tôi bắt đầu nghiên cứu các đa tạp ba chiều và quan hệ của chúng với hình học hyperbolic. (Một lần nữa, không có vấn đề gì lắm nếu bạn không biết đây là gì.) Tôi dần dần xây dựng được trong vài năm một trực quan nhất định với 3-đa tạp hyperbolic, với một tập hợp những cách xây dựng, các ví dụ và phép chứng minh (quá trình này thực ra bắt đầu khi tôi còn là sinh viên, và đã được ủng hộ rất mạnh bởi các áp dụng vào lý thuyết phân lá). Sau một thời gian, tôi đã đặt giả thuyết hay ước đoán rằng tất cả các 3-đa tạp đều có một cấu trúc hình học nhất định, giả thuyết này cuối cùng được biết đến dưới tên gọi giả thuyết hình học hóa. Khoảng hai hay ba năm sau đó, tôi đã chứng minh giả thuyết hình học hóa cho các đa tạp Haken. Nó là một định lý khó, và tôi đã dành một nỗ lực khổng lồ để nghĩ về nó. Khi tôi hoàn thiện phép chứng minh, tôi cũng đã dành nhiều công sức hơn nữa để kiểm tra phép chứng minh, tìm kiếm những điểm khó khăn và kiểm chứng nó một lần nữa trước những thông tin độc lập.

Tôi muốn viết chi tiết hơn nữa về ý tưởng của mình khi tôi nói tôi đã chứng minh định lý này. Nó có nghĩa rằng tôi đã có một dòng các ý tưởng sáng sủa và hoàn thiện, bao gồm cả các chi tiết mà đã đứng vững trước rất nhiều lần kiểm tra của cả tôi và những người khác. Các nhà toán học có những phong cách tư duy khác nhau. Phong cách của tôi không phải là đưa ra các tổng quát hóa rộng nhưng bất cẩn mang tính định hướng và tạo cảm hứng: tôi thiết lập những mô hình tư duy cụ thể, và tôi tư duy về mọi điều qua đó. Vì thế chứng minh của tôi là khá đáng tin cậy. Tôi chưa gặp vấn đề với việc sao lưu lại những mệnh đề hay đưa ra những chi tiết về những thứ mà tôi đã chứng minh. Tôi làm khá tốt việc phát hiện lỗi sai trong suy luận của chính mình cũng như của những người khác.

Tuy nhiên, đôi khi cũng có một yếu tố bị phát triển quá mạnh qua việc phiên dịch từ những mã hóa trong tư duy của riêng tôi tới những gì mà có thể truyền tải sang ai đó khác. Nền tảng giáo dục toán học của tôi là hơi độc lập và theo phong cách riêng, mà trong nhiều năm ròng tôi đã tự học rất nhiều thứ, tự phát triển các hình mẫu tư duyriêng cho việc nên nghĩ về toán học như thế nào. Việc này thường là một lợi thế rất lớn cho tôi trong việc tư duy về toán học, bởi vì sau này sẽ dễ dàng tiếp nhận những hình mẫu tư duy chuẩn được chia sẻ bởi những nhóm các nhà toán học khác. Điều này có nghĩa rằng một số khái niệm mà tôi sử dụng một cách tự do và tự nhiên trong tư duy của tôi lại là xa lạ với hầu hết các nhà toán học khác mà tôi nói chuyện cùng. Những hình mẫu và cấu trúc tư duycủa cá nhân tôi là tương tự về mặt đặc tính với những kiểu mẫu hình mà các nhóm các nhà toán học khác chia sẻ - nhưng chúng thường là những hình mẫu khác nhau. Ở thời điểm mà tôi hệ thống hóa giả thuyết hình học hóa, hiểu biết của tôi về hình học hyperbolic là một ví dụ tốt. Một ví dụ ngẫu nhiên tiếp theo là hiểu biết về các không gian tô pô hữu hạn, một chủ đề kỳ quặc mà có thể cho mượn ý tưởng tốt vào một mớ các câu hỏi nhưng nó không hoàn toàn đáng để phát triển trong bất kỳ trường hợp nào bởi vì có những lối diễn đạt loanh quanh luẩn quẩn ngăn trở nó.

Không phải giả thuyết hình học hóa và cũng không phải chứng minh của nó cho các đa tạp Haken nằm trên đường đi của bất kỳ nhóm các nhà toán học nào vào thời điểm đó – nó đi ngược lại với các xu hướng trong tôpô 30 năm trước đó, và nó đã làm mọi người ngạc nhiên. Với hầu hết các nhà tôpô vào thời điểm đó, hình học hyperbolic là một ngành cần phải biết của toán học, mặc dù có những nhóm các nhà toán học khác như các nhà hình học vi phân, họ không hề hiểu nó dưới một số góc độ nhất định. Các nhà tôpô cần tốn một chút thời gian để hiểu giả thuyết hình học hóa là gì, nó có gì tốt, và tại sao nó lại xác đáng.

Cùng thời điểm đó, tôi bắt đầu viết những ghi chép về hình học và tôpô của 3-đa tạp, cũng dùng cho khóa học sau đại học mà tôi đang dạy. Tôi phát nó cho một số ít người, rất lâu trước khi những người khác trên thế giới bắt đầu chép lại những bản sao. Danh sách thư điện tử lớn lên tới khoảng 1200 người, những người mà tôi đã gửi các ghi chép vài tháng một lần. Tôi cố gắng trao đổi các ý tưởng thực sự của tôi trong những ghi chép ấy. Mọi người thực hiện nhiều seminar dựa trên các ghi chép của tôi và tôi nhận được rất nhiều phản hồi. Tràn ngập trong các phản hồi là những câu đại loại như "Những ghi chép của ông thật đầy cảm hứng và đẹp đẽ, nhưng tôi phải nói với ông rằng chúng tôi đã phải dành tới ba tuần trong seminar của mình để hiểu những chi tiết trong §n.n. Chắc chắn là cần thêm những giải thích."

Tôi cũng dành nhiều lời giới thiệu tới những nhóm các nhà toán học về ý tưởng nghiên cứu các 3-đa tạp từ quan điểm hình học và về chứng minh của giả thuyết hình học hóa cho các đa tạp Haken. Ban đầu, chủ đề này là xa lạ với hầu hết mọi người. Thật khó để trao đổi những cơ sở nằm trong đầu tôi, không phải trong cộng đồng toán học. Có một vài lý thuyết toán học mà có ảnh hưởng lên đám những ý tưởng này: tôpô ba-đa tạp, những nhóm Klein, các hệ động lực, tôpô hình học, các nhóm con rời rạc của những nhóm Lie rời rạc, lý thuyết phân lá, các không gian Teichmüller, đồng phôi giả Anosov, lý thuyết nhóm hình học, cũng như là hình học hyperbolic.

Chúng tôi tổ chức một workshop của Hiệp hội Toán học Mỹ ở Bowdoin vào năm 1980, nơi nhiều nhà toán học trong những ngành hẹp như tôpô số chiều thấp, hệ động lực và nhóm Klein tham dự.

Đó là một kinh nghiệm thú vị trong việc trao đổi văn hóa. Câu chuyện đột ngột trở nên rõ ràng rằng các phép chứng minh phụ thuộc thế nào vào các thính giả. Chúng ta chứng minh vài thứ gì đó trong một bối cảnh xã hội và nhắm tới một số thính giả nhất định. Một vài phần của phép chứng minh này tôi có thể trao đổi trong vòng hai phút với các nhà tôpô nhưng các nhà giải tích sẽ cần tới một bài giảng dài một giờ để họ có thể bắt đầu hiểu được. Tương tự như vậy, cũng có một vài thứ mà có thể nói trong vòng hai phút cho các nhà giải tích mà sẽ tốn mất một giờ trước khi các nhà tôpô bắt đầu nhận thức được. Và cũng có rất nhiều phần khác trong phép chứng minh cần hai phút để diễn đạt trong phần tóm tắt, nhưng không ai trong số các thính giả ở thời điểm đó có đủ cơ sở trí tuệ để có thể hiểu trong ít hơn một giờ.

Ở thời điểm đó, thực tế không hề có cơ sở và ngữ cảnh nào cho định lý này, do vậy sự phát triển từ việc làm thế nào mà một ý tưởng khởi nguồn từ tâm trí của tôi tới những gì tôi phải nói để khiến nó trở nên có thể hiểu được, không đề cập tới chuyện thính giả phải hi sinh để hiểu nó, là rất ấn tượng.

Dựa trên kinh nghiệm của tôi về lý thuyết phân lá và để đáp trả những áp lực xã hội, tôi tập trung hầu hết sự chú ý của mình vào việc phát triển và giới thiệu cơ sở của những gì tôi viết và những gì tôi nói với mọi người. Tôi đã giải thích chi tiết cho vài người đã "sẵn sàng" với nó. Tôi viết một số bài báo, đưa ra những phần tồn tại độc lập trong chứng minh của giả thuyết hình học hóa cho các đa tạp Haken – với những bài báo này, tôi gần như không nhận được phản hồi nào cả.

Tương tự như vậy, mãi tới sau này, một vài người mới thực sự vượt qua những phần khó nhất và sâu sắc nhất trong những ghi chép của tôi.

Kết quả là bây giờ khá nhiều các nhà toán học đã có những hiểu biết mà họ đã rất thiếu khi mới bắt đầu: một hiểu biết có hiệu lực về những khái niệm và cơ sở mà là tự nhiên với ngành này. Đã từng có và sẽ còn tiếp tục có nhiều hoạt động toán học lớn mạnh. Bằng cách tập trung vào xây dựng cơ sở, giải thích và công bố các định nghĩa và cách thức tư duy nhưng chậm rãi trong việc phát biểu và công bố các phép chứng minh của tất cả các "định lý" mà tôi đã biết làm thế nào để chứng minh, tôi dành cơ hội cho mọi người để nhận lấy danh tiếng. Vẫn còn cơ hội cho mọi người để khám phá và công bố các chứng minh khác của định lý hình học hóa. Những chứng minh này giúp phát triển các khái niệm toán học mà tự thân là khá thú vị và thúc đẩy toán học đi xa hơn.

Điều mà các nhà toán học muốn và cần nhất từ tôi đó là học cách tư duy chứ thực tế không phải là học cách chứng minh giả thuyết hình học hóa cho các đa tạp Haken. Không mấy chắc chắn rằng chứng minh của giả thuyết hình học hóa tổng quát sẽ bao hàm cả việc đẩy chính nó đi xa hơn. Một vấn đề nữa là đôi khi người ta cần hay muốn một kết quả được chấp nhận và chính xác không chỉ bởi vì để học nó, mà còn là từ đó họ có thể trích dẫn lại nó hay dựa trên nó.

Các nhà toán học thực ra đã rất nhanh chóng chấp nhận phép chứng minh của tôi, và để bắt đầu trích dẫn hay sử dụng nó dựa trên bất cứ tài liệu nào sẵn có, trên kinh nghiệm của họ cùng niềm tin ở tôi và trên sự chấp thuận và ý kiến riêng của các chuyên gia, những người mà tôi đã sử dụng rất nhiều thời gian để thảo luận về phép chứng minh. Định lý này giờ đã được ghi lại, qua những nguồn được công bố, với tôi và một số người khác là tác giả, nên hầu hết mọi người đều cảm thấy an toàn khi trích dẫn lại nó; những người trong ngành chắc chắn sẽ không đòi hỏi tôi về tính chính xác của nó, hay biểu lộ cho tôi thấy sự cần thiết về các chi tiết mà không có sẵn.

Không phải tất cả các phép chứng minh đều có cùng một vai trò trong giàn ý logic mà chúng ta đang xây dựng cho toán học. Phép chứng minh đặc thù này có lẽ chỉ có một giá trị logic tạm thời, mặc dù nó có một giá trị động lực lớn lao trong việc giúp đỡ ủng hộ một cái nhìn nhất định vào cấu trúc của 3-đa tạp. Giả thuyết hình học hóa tổng quát vẫn là một giả thuyết. Nó đã được chứng minh trong rất nhiều trường hợp, và nó cũng được ủng hộ bởi nhiều bằng chứng bằng máy tính, nhưng nó vẫn chưa được chứng minh trong trường hợp tổng quát. Tôi bị thuyết phục rằng phép chứng minh tổng quát sẽ được khám phá ra; tôi hi vọng thế đã từ rất rất nhiều năm trước đây rồi. Ở điểm này, phép chứng minh của các trường hợp đặc biệt thì gần như sẽ trở nên lỗi thời.

Trong khi đó, những người muốn hiểu các kỹ thuật hình học thì tốt hơn là nên bắt đầu với giả định: "Cho M3 là một đa tạp mà có nhận một phân rã hình học" bởi vì nó tổng quát hơn "Cho M3 là một đa tạp Haken". Những người không muốn sử dụng kỹ thuật hay những ai đang nghi ngờ nó có thể lờ nó đi. Thậm chí là cả khi một định lý về các đa tạp Haken có thể được chứng minh bằng các kỹ thuật hình học, việc tìm kiếm những kỹ thuật tôpô để chứng minh nó vẫn có giá trị cao.

Trong tình huống này (mà vẫn còn tiếp tục) tôi nghĩ rằng tôi phải cố gắng để loại bỏ hai kết quả xấu nhất cho mình: hoặc không hé lộ những gì tôi đã khám phá, giữ nó cho riêng mình (có lẽ cả với niềm hi vọng chứng minh giả thuyết Poincare) hay là để giới thiệu một lý thuyết kín kẽ và rất khó học mà có người nào để giữ nó tồn tại và phát triển.

Tôi có thể dễ dàng nói rõ về những tiếc nuối trong sự nghiệp của mình. Tôi đã không công bố nhiều đến mức nên làm. Có một số dự án toán học ngoài giả thuyết hình học hóa cho các đa tạp

Haken mà tôi đã không phát biểu thật tốt trước cộng đồng toán học. Khi tập trung hơn vào phát triển cơ sở thay vì những định lý ở cấp cao nhất trong lý thuyết hình học của 3-đa tạp, tôi trở nên hơi xa rời trong khi chủ đề này vẫn tiếp tục phát triển và tôi đã không thúc đẩy một cách tích cực cũng như hiệu quả của ngành này, hay các sự nghiệp của những người tham gia nghiên cứu nó. (Nhưng có vẻ với tôi, một vài mức độ xa rời gần như là một sản phẩm phụ không thể tránh được trong việc hướng dẫn các học viên sau đại học và số khác: để thực sự chuyển các hướng nghiên cứu đích thực sang những lĩnh vực khác, cần phải gạt bỏ và chặn lại những nghĩ nặng nề về những chuyện ấy).

Mặt khác, tôi đã trở nên bận bịu và có hiệu suất cao hơn, trong nhiều hoạt động khác. Hệ thống của chúng ta không tạo được thêm thời gian cho những người như tôi sử dụng để viết và nghiên cứu; thay vào đó nó làm tràn ngập chúng tôi bởi rất nhiều cơ hội cho việc làm thêm và phản ứng chính của tôi là nói "có" với tất cả những yêu cầu và cơ hội đó. Tôi đã dành nhiều nỗ lực vào các hoạt động không tạo ra danh tiếng mà tôi coi trọng như là tôi coi trọng việc chứng minh các định lý: nền chính trị toán học, chỉnh sửa các ghi chép của tôi thành một quyển sách với một tiêu chuẩn cao của sự trao đổi, khám phá về tính toán trong toán học, giáo dục toán học, phát triển những hình thức trao đổi toán học mới qua Trung tâm Hình học (giống như thí nghiệm đầu tiên của chúng tôi, video "Not Knot", chỉ đạo MSRI, v.v...

Tôi nghĩ rằng những gì tôi đã làm không thể cực đại hóa "danh tiếng" của tôi được. Tôi đã ở trong một vị trí mà không có một nhu cầu lớn phải cạnh tranh để giành nhiều hơn sự công nhận. Thực ra tôi bắt đầu thấy cảm thấy bị thách thức mạnh mẽ từ những thứ khác, bên cạnh việc chứng minh những định lý mới.

Tôi thực sự tin rằng những hoạt động của tôi đã làm tốt việc khuyến khích toán học.

LUẬT BENFORD VÀ NHỮNG ỨNG DỤNG THÚ VỊ

Trần Nam Dũng - Đặng Nguyễn Đức Tiến
(Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG-TP.HCM - Đại học Trento, Italia)

LỜI GIỚI THIỆU

Luật Benford (Benford Law) hay còn gọi luật chữ số thứ nhất (First Ditgit Law) là một luật khá nổi tiếng trong toán học và đã được giới thiệu trong nhiều bài viết trên các diễn đàn cũng như ở một số giáo trình toán học ở bậc đại học. Trong bài viết này của Epsilon, chúng tôi muốn giới thiệu với độc giả một cách tiếp cận với định luật kỳ lạ này thông qua một bài giảng toán học của nhà toán học nổi tiếng Vladimir Arnold mà người viết may mắn có dịp được nghe trực tiếp. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng nhân bài viết này giới thiệu với độc giả một số ứng dụng rất thú vị của định luật tưởng chừng như "vô bổ" này!

1. Câu chuyện của nhà toán học Vladimir Arnold

Câu chuyện dưới đây tôi, Trần Nam Dũng, được nghe trực tiếp từ Vladimir Arnold, nhà toán học nổi tiếng người Nga khi ông nói chuyện với học sinh chuyên toán ở Mát-xcơ-va (Moscow, thủ đô nước Nga hiện nay). Câu chuyện này khá sâu sắc và đòi hỏi những kiến thức toán học nhất định.

Vladimir Arnold bắt đầu buổi nói chuyện bằng câu hỏi: *“Em nào cho tôi biết, 2^{100} bắt đầu bằng chữ số nào?”*

Ái chà, câu này lạ đây. Nếu tìm chữ số tận cùng của 2^{100} thì dễ, cái này học sinh lớp 7 cũng biết. Chữ số tận cùng của 2^n khi $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots$ sẽ lần lượt là $2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2 \dots$ có nghĩa là chúng tuần hoàn với chu kỳ 4 và ta có ngay 2^{100} tận cùng bằng 6.

Ta thử tìm xem chữ số đầu tiên của 2^n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ có quy luật tuần hoàn gì không:

1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, **1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5**, 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, **1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5** . . .

Dường như là cũng có quy luật, cụ thể là dãy số 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5 (độ dài 10) được lặp lại. Như vậy đáp số là 1!

Một học sinh giơ tay: *“Dạ thưa giáo sư, đáp số là 1 ạ!”*.

“Đúng! Giỏi lắm! Em có thể giải thích tại sao?”

“Dạ thưa, em quan sát thấy dãy các chữ số đầu tiên của 2^n là tuần hoàn với chu kỳ 10, từ đó em tính được 2^{100} có chữ số đầu tiên giống 2^0, 2^{10}, 2^{20} và bằng 1 ạ.”

“Một nhận xét không tồi! Nhưng em có thể chứng minh được nhận xét đó không?”

"Dạ em chưa chứng minh được, nhưng em nghĩ là nó đúng, em đã thử đến tận $n = 40$ *rồi ạ!"*

"Đúng là có quá nhiều nguyên nhân để em tin dự đoán của mình là đúng. Em đã thử đến 40 và thấy quy luật lặp đi lặp lại. Hơn nữa tôi lại báo cho em biết là em đã nói đáp số đúng. Tuy nhiên, trong toán học, nếu một dự đoán chưa được chứng minh thì nó vẫn chỉ là dự đoán, cho dù nó được thử cho đến 1 triệu hay 1 tỉ. Có những mệnh đề chỉ sai ở bước thứ một triệu lẻ một!"

"Nhưng thưa giáo sư, trong trường hợp của chúng ta thì phát biểu của bạn Kolia đúng hay sai ạ?" Một học sinh nôn nóng hỏi.

"Các em thử tính tiếp xem sao!"

"Ôi, sai rồi ạ! Ở hàng chục thứ 5, từ 2^{40} *đến* 2^{49}*, các chữ số đầu tiên là 1, 2, 4, 8, 1, 3,* ***7****, 1, 2, 5."* Xuất hiện chữ số 7 ngoại lai nằm ngoài quy luật.

Tiếp tục tính các chục tiếp theo, ta lần lượt được:

50-59: 1, 2, 4, **9**, 1, 3, **7**, 1, 2, 5
60-69: 1, 2, 4, **9**, 1, 3, **7**, 1, 2, 5
70-79: 1, 2, 4, **9**, 1, 3, **7**, 1, **3, 6**
80-89: 1, 2, 4, **9**, 1, 3, **7**, 1, **3, 6**
90-100: 1, 2, 4, **9**, 1, 3, **7**, 1, **3, 6, (1)**

Như vậy các số trệch theo quy luật dự đoán ban đầu ngày càng nhiều.

Tuy nhiên, dường như các chữ số 1 thì không bị lệch quy luật.

"Thưa giáo sư, dường như các chữ số đầu tiên ở các lũy thừa 2^n *với* $n \equiv 0, 4, 7$ *mod 10 luôn bằng 1".*

"Dự đoán vẫn chỉ là dự đoán! Các em hãy kiên nhẫn tính thêm 10 số nữa!"

Và 10 con số tiếp theo là:

100-109: 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6

Như vậy dường như quy luật bị lệch pha và các khẳng định của chúng ta không đúng. Chú ý rằng, khác với trường hợp chữ số tận cùng, ở đây trong quá trình tính toán, ta không thể "cắt đuôi" hay bỏ đầu mà phải giữ lại tất cả. Vì thế phải làm việc với các số rất lớn lên đến hàng chục chữ số.

"Thưa giáo sư, vậy chúng ta phải làm thế nào? Bởi tính toán ngày càng phức tạp và các máy tính của chúng em bó tay rồi. Chẳng hạn nếu cần tìm chữ số đầu tiên của 2^{1990} *thì làm sao?"* (Lưu ý câu chuyện xảy ra vào năm 1990) *"Liệu có phải là 1?"* Bạn học sinh hỏi thêm.

"Nếu tìm chữ số đầu tiên của 2^{10*i} *thì nó luôn bằng 1 cho đến* $i = 30$ *thì sai.* 2^{300} *bắt đầu bằng chữ số 2".*

"Thế còn 2^{1990}*?"*

"2^{1990} *lại bắt đầu bằng 1."*

"Nhưng làm sao có thể tìm được ạ?"

"Được rồi. Rõ ràng ta không thể tiếp tục câu chuyện mà chỉ dùng tính toán thuần túy. Ta tính tay như thế là đủ rồi. Bây giờ là lúc phải suy nghĩ. Theo các em, điều kiện để một số **N** *có chữ số đầu tiên là* **a** *là gì?"*

"Dạ, nếu N có k chữ số thì điều kiện đó là: $a10^{k-1} \leq N < (a+1)10^{k-1}$ *ạ!"*

"Đúng rồi, rất tốt! Bây giờ lấy lg *hai vế, ta được* $k - 1 + lga \leq lgN < k - 1 + lg(a+1)$*"*

"Điều này có nghĩa là gì? Có nghĩa là N sẽ có chữ số đầu là a nếu ta có bất đẳng thức trên."

"Dạ thưa giáo sư, nhưng ta không biết k bằng bao nhiêu ạ!"

"Các em thử nghĩ xem, số chữ số của 1 số N được tính như thế nào?"

"Dạ, $k = 1 + [lgN]$ *ạ!"*

"Đúng rồi. Như thế có phải là N sẽ có chữ số đầu tiên là a khi và chỉ khi $lga \leq \{lgN\} < lg(a+1)$ *đúng không?"*

"Ồ, vì $lg(2^{1990}) = 1990lg(2) = 559.049$ *nên* $\{lg(2^{1990})\} = 0.049$ *và ta suy ra chữ số đầu tiên của* 2^{1990} *là 1!"* Một học sinh hồ hởi nói.

"Và như vậy, chỉ cần biết $lg(2), lg(3), \ldots, lg(10)$ *là ta tìm được chữ số đầu tiên của* 2^n *với n bất kỳ. Vậy là xong rồi!"*

"Nhưng câu chuyện bây giờ chỉ mới bắt đầu!" Vladimir Arnold hóm hỉnh nói. *"Bây giờ chúng ta thử làm thống kê xem trong 100 lũy thừa của 2 đầu tiên, có bao nhiêu lũy thừa bắt đầu bằng chữ số 1, bao nhiêu lũy thừa bắt đầu bằng chữ số 2, ..., bao nhiêu lũy thừa bắt đầu bằng chữ số 9."*

Học sinh tiến hành thống kê thì được bảng sau:

Chữ số	1	2	3	4	5	6	7	8	9
#	30	17	13	10	8	7	5	5	5

Như vậy chữ số 1 xuất hiện nhiều hơn hẳn, sau đó đến chữ số 2 và cứ như thế.

"Điều này giải thích nhờ vào điều kiện: 2^n *có chữ số đầu tiên là a khi và chỉ khi* $\{nlg(2)\} \in [lg(a), lg(a+1))$*"*

"Và theo định lý Weil về phân bố đều, xác suất để điều này xảy ra sẽ bằng chính độ dài của khoảng $[lg(a), lg(a+1))$*, tức là bằng* $lg\dfrac{a+1}{a}$*."*

"Định lý Weil về phân bố đều là định lý thế nào ạ?"

"Định lý này khẳng định rằng nếu α *là số vô tỷ thì dãy* $\{n\alpha\}$ *sẽ phân bố đều trên đoạn* $[0, 1]$*, điều này có nghĩa là với mọi khoảng* (a, b) *thuộc* $[0, 1]$*, xác suất để* $\{n\alpha\}$ *thuộc* (a, b) *sẽ bằng* $b - a$*."*

"Như thế, do $lg\frac{2}{1} > lg\frac{3}{2} > \cdots > lg\frac{10}{9}$ *nên việc chữ số 1 xuất hiện nhiều hơn là hợp lý!"*

Học sinh có vẻ đã hiểu và rất phấn khích với những điều giáo sư nói.

"Câu chuyện toán học đến đây có thể đã kết thúc. Nhưng chúng ta hãy áp dụng các quan sát này vào lịch sử và địa lý một chút. Các em về nhà hãy lấy 1 cuốn atlas ra, tìm số liệu về diện tích và dân số các nước, sau đó thống kê xem trong các con số về diện tích và dân số đó, có bao nhiêu số bắt đầu bằng chữ số 1, bao nhiêu số bắt đầu bằng chữ số 2, ..., bao nhiêu số bắt đầu bằng chữ số 9. Hãy đưa ra nhận xét và cố gắng giải thích nhận xét của mình trên góc độ toán học và lịch sử! Xin cảm ơn các em đã tham gia buổi nói chuyện hôm nay một cách rất nhiệt tình".

2. Đôi dòng lịch sử về luật Benford

Vladimir Arnold đã giới thiệu với học sinh của ông một bài giảng tuyệt đẹp về bản chất của luật Benford, nhưng luật này vì sao lại có tên gọi như vậy, và ra đời khi nào? Trong phần này, chúng tôi giới thiệu đôi dòng lịch sử của định luật đáng kinh ngạc này.

Nhà toán học – thiên văn học người Mỹ - Canada Simon Newcomb (1835 – 1909) được ghi nhận như người đầu tiên để ý sự kiện này. Chuyện kể rằng, Simon rất ngạc nhiên khi thấy ở các quyển tra cứu logarithm thì các trang đầu chứa các số bắt đầu bằng 1 nhiều hơn, còn các trang sau thì các số lại có chữ số đầu lớn hơn. Simon đặt giả thiết là phải chăng người ta gặp các số có chữ số đầu là chữ số nhỏ nhiều hơn là các chữ số lớn? Từ giả thiết đó, ông đã đề cập đến hiện tượng này trong bài báo "Ghi chép về tần suất sử dụng các chữ số khác nhau trong các số tự nhiên" và tính được xác suất gặp các chữ số đầu là 1, 2, 3, ... 9 giảm dần.

Đến năm 1938, Frank Benford (1883 - 1948), một kỹ sư điện tử và vật lý học người Mỹ, nghiên cứu lại hiện tượng này và sau đó đặt tên luật này theo tên ông. Frank Benford thu thập số liệu thực tế từ diện tích bề mặt của 335 con sông, 104 hằng số vật lý, 1800 trọng lượng phân tử, 5000 mục từ một cuốn sổ tay toán học,... và nhiều nguồn khác. Tổng cộng ông thu thập được 20.229 con số và tiến hành thống kê số lần xuất hiện của chữ số đầu tiên. Trong phân tích của mình, ông tìm ra có khoảng 30% con số bắt đầu với 1, 18% với 2, và cứ thế. Định luật này cũng có thể lặp lại với các tập hợp dữ liệu khác, ví dụ như kết quả trận bóng chày, tỉ lệ tử vong, giá cổ phiếu, địa chỉ nhà, và hóa đơn tiền điện, nhưng ngay cả Benford cũng không thể giải thích tại sao nó lại như thế.

Tháng sáu năm 1961, nhà toán học người Mỹ Roger Pinkham lần đầu tiên đưa ra giải thích và chứng minh cho định luật này qua bài báo "On the Distribution of First Significant Digits" và từ đó khá nhiều lý giải khác nhau đã được khai thác. Một cách tiếp cận dễ hiểu cho trường hợp 2^n cũng đã được chúng tôi giới thiệu ở phần đầu của bài viết này thông qua bài giảng của Vladimir Arnold.

Kể từ khi luật Benford ra đời đến nay, đã có hơn 18.000 công trình[1] hoặc trực tiếp hoặc gián tiếp liên quan đến định luật thú vị này. Và kết thúc phần lịch sử này, chúng tôi tóm tắt lại luật Benford bằng công thức đơn giản như sau:

[1] dựa trên kết quả tìm kiếm ở scholar.google.com, tìm kiếm vào tháng 7 năm 2015

Xác suất xuất hiện chữ số đầu tiên d ($d \in \{1, 2, \ldots, 9\}$) là:

$$P(d) = lg(1 + \frac{1}{d})$$

Giá trị của P(d) được tính xấp xỉ là:

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P(d)	30.1%	17.6%	12.5%	9.7%	7.9%	6.7%	5.8%	5.1%	4.6%

3. Những ứng dụng thú vị

Như vậy với định luật Benford, ta biết được rằng về cơ bản một tập hợp danh sách các số liệu được lấy ra từ các nguồn thực tế sẽ tuân theo một dạng nhất định về xác suất của các chữ số đầu tiên. Nhưng liệu điều này phải chăng chỉ là một bất ngờ thú vị hay có thể có ứng dụng vào cuộc sống? Câu trả lời hẳn độc giả đã dễ dàng đoán ra, luật Benford có khá nhiều ứng dụng quan trọng, và trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu hai ứng dụng của luật Benford: ứng dụng vào kiểm tra số liệu kinh tế và ứng dụng vào giám định ảnh số! Nếu như ứng dụng đầu tiên là ứng dụng kinh điển, được rất nhiều người biết đến thì ứng dụng thứ hai khá lạ, trong tầm hiểu biết của những người viết bài này thì đây là lần đầu tiên được giới thiệu với độc giả Việt Nam.

Hãy lấy chiều cao của những tòa nhà cao nhất thế giới hay của quốc gia nào đó, và thống kê các chữ số đầu tiên, hãy lấy độ dài các con sông trên thế giới, và thống kê các chữ số đầu tiên, dù là tính theo mét hay theo dặm, theo inch hay theo foot, tất cả đều sẽ kết quả gần với xác suất đã nêu ở luật Benford. Và các con số ở báo cáo tài chính, báo cáo thuế cũng vậy! Vì vậy, bằng vào việc thống kê và so sánh độ khác biệt so với luật Benford, người ta có thể phát hiện ra những bản số liệu liệu có bị chỉnh sửa hay không!

Vì luật Benford trái với cảm nhận thông thường của nhiều người (cho rằng các chữ số có xác suất xuất hiện như nhau) nên một người khi làm giả số liệu sẽ có xu hướng đưa ra những con số có chữ số đầu tiên tuân theo phân bố đều, do đó sự giả mạo này có thể được phát hiện khi so sánh với phân bố của luật Benford. Một kết quả nghiên cứu của Jialan Wang (đương thời là giáo sư của đại học Washington, Mỹ), thông qua luật Benford cho thấy xu hướng làm giả số liệu tài chính tăng liên tục trong suốt 50 qua. Nhiều nghiên cứu khác cũng cho thấy luật Benford là một công cụ rất hữu hiệu cho phép phát hiện ra giả mạo trong tài chính. Vào năm 1998, người ta cũng đã thử lấy số liệu báo cáo thuế của tổng thống Mỹ bấy giờ là Bill Clinton để thử với luật Benford, và rất thú vị là số liệu của ông tuân theo luật này. Đến đây, bạn đọc có thể thử lấy một bảng số liệu tài chính nào đó và thử kiểm chứng xem sao.

Để đi đến ứng dụng thứ hai, chúng tôi mạn phép giới thiệu với độc giả một số kiến thức khá "lạc tông": ảnh số!

Hiện nay, gần như toàn bộ mọi hình ảnh và video mà chúng ta xem được trên các thiết bị điện tử đều là ảnh/video số. Vậy ảnh số là gì và được tạo ra như thế nào? Ảnh số được tạo nên từ hàng triệu ô vuông rất nhỏ - được coi là những thành tố của bức ảnh và thường được biết dưới tên gọi là điểm ảnh (pixel, có được từ thuật ngữ picture element).

Bạn có biết?

- Vào năm 2000, Kodak thống kê kỷ lục mới trên thế giới: số lượng ảnh trên thế giới đã đạt đến con số 80 triệu ảnh.
- Chỉ 14 năm sau, mỗi ngày có khoảng 1.8 tỷ ảnh được đưa lên internet! Con số này còn nhiều hơn toàn bộ ảnh trong lịch sử loài người cộng lại tính đến 2004, năm ra đời của Flickr.
- Dự kiến vào cuối năm 2015, số lượng ảnh sẽ đạt ngưỡng 1 trillion, tức là 1000 tỉ ảnh! Gấp 12.500 lần so với 15 năm trước đó!
- Nếu như mỗi ảnh được in ra với kích thước 4x6 (inches) và dán lại với nhau thì chiều dài tổng cộng sẽ là 200 triệu dặm, dài hơn con đường từ trái đất đến mặt trời và trở về!
- Trong số hàng ngàn tỉ ảnh này, 87% ảnh được chụp từ các thiết bị di động và chỉ có 13% là từ các máy ảnh chuyên dụng. Điều này có nghĩa là có hàng trăm tỉ tấm ảnh được lưu trữ ở dạng JPEG, chuẩn nén phổ biến nhất hiện nay!

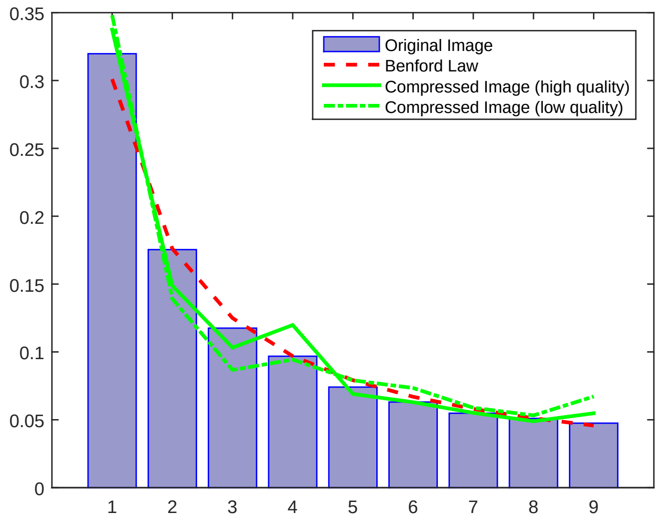
Theo thống kê của Business Insider và Thời báo New York.

Thông thường, mỗi một điểm ảnh là tổng hợp của 3 màu cơ bản: đỏ, xanh dương, và xanh lá cây và các thiết bị điện tử sẽ tổng hợp 3 màu này lại để có được màu mà chúng ta vẫn nhìn thấy. Ứng với mỗi màu và mỗi điểm ảnh, máy tính sử dụng các giá trị nguyên dương từ 0 đến 255 (là một byte) để thể hiện độ mức độ của màu đó. Để lưu trữ như vậy, cơ bản mỗi bức ảnh có kích thước cỡ trung bình, ví dụ như 3.456×2.304 điểm ảnh, sẽ tốn tối thiểu $3.456 * 2.304 * 3 = 23.887.872$ byte, tức là xấp xỉ 22.8 MB. Bạn đọc hãy thử xem lại các ảnh số của mình với độ phân giải tương tự, sẽ thấy rằng con số này quá lớn so với con số thực tế được lưu trên máy tính hay điện thoại nếu bạn lưu ảnh có phần mở rộng là .jpg. Để có được kích thước nhỏ như vậy, các thiết bị điện tử đã áp dụng các kỹ thuật nén ảnh, mà phổ biến nhất là kỹ thuật nén với chuẩn JPEG!

Độc giả có thể tìm hiểu chi tiết về chuẩn nén này thông qua các nguồn khác, ở đây chúng tôi chỉ nhấn mạnh lại ưu điểm của JPEG: nền tảng chính của nén JPEG là dựa trên biến đổi cosine rời rạc (DCT – discrete cosine transform), đây là một phép biến đổi trực giao nên ma trận nghịch đảo cũng chính là ma trận chuyển vị, điều này cho phép các tính toán thực hiện rất nhanh, phù hợp với các thiết bị di động! Hơn nữa, biến đổi DCT cho phép dễ dàng giữ lại các thành tố quan trọng và lược bỏ các thành tố không quan trọng, đặc biệt là với thị giác của con người, nhờ vậy mà ảnh có thể được nén với tỉ lệ rất cao!

Việc nén nhiều hay ít, phụ thuộc quan trọng nhất ở giai đoạn “lượng hóa” các giá trị sau biến đổi DCT, tức là giữ lại bao nhiêu thành phần quan trọng nhất và loại bỏ những thành phần nào. Và điều thú vị xảy ra ở đây: **sự phân bố của các chữ số đầu tiên sau biến đổi DCT trên ảnh nén sẽ không hoàn toàn tuân theo luật Benford như ở ảnh không nén!** Hơn nữa, các mức nén khác nhau sẽ có những khác biệt khác nhau. Căn cứ vào điều này, người ta có thể phỏng đoán được một ảnh được nén một lần hay nhiều hơn một lần, và nén với mức độ nào! Hay nói một cách đơn giản hơn, với một bức ảnh số bất kỳ, hãy thống kê tần suất xuất hiện của các chữ số đầu tiên sau khi biến đổi DCT, bạn có thể phỏng đoán được ảnh này đã nén hay chưa, nén ít hay nhiều, nén bao nhiêu lần, nén bằng phần mềm nào ... mà không cần phải xem những thông tin khác! Lưu ý rằng ở đây chúng tôi dùng chữ "phỏng đoán" chứ không phải là "xác định" vì để xác định đòi hỏi rất nhiều thông tin khác, cũng như những yêu cầu khác, nằm ngoài khuôn khổ

Hình 7.1: Ví dụ về nén ảnh JPEG. Ảnh bên trái: ảnh gốc, không nén. Ảnh ở giữa, nén với tỉ lệ thấp (cho ra ảnh chất lượng cao hơn) và ảnh bên phải: nén tỉ lệ cao.



Hình 7.2: Tần suất xuất hiện của các chữ số đầu tiên sau biến đổi DCT từ 3 ảnh ở Hình 7.1.

một bài viết của Epsilon. Việc biết được các thông tin này có nghĩa gì? Bạn đọc hãy thử hình dung nếu như ta biết được một bức ảnh đang có đã được nén từ một phần mềm chỉnh sửa ảnh, ví dụ như Photoshop hay Picasa mà không phải từ máy chụp ảnh thì ảnh này đã có thể bị thay đổi và không đáng tin cậy nữa! Hoặc nếu một ảnh được nén nhiều hơn một lần thì có nghĩa là ảnh không phải chép trực tiếp từ máy ảnh nữa mà đã qua một công đoạn trung gian nào đó ở giữa. Và như vậy, luật Benford đã "vén màn" những bí mật đằng sau một tấm ảnh số!

Chúng tôi kết thúc bài viết bằng một ví dụ về luật Benford trên ảnh nén. Hình 7.1 thể hiện 3 phiên bản của cùng một bức ảnh: không nén, nén ít và nén nhiều. Ở Hình 7.2 là thống kê tần suất của các chữ số đầu tiên sau biến đổi DCT trên từng block của 3 ảnh. Đường màu đỏ là phân bố của luật Benford, các cột màu xanh dương là của ảnh không nén và 2 đường màu xanh lá cây là của 2 ảnh nén. Chúng ta có thể quan sát và thấy rằng phân bố của các cột màu xanh dương rất gần với đường màu đỏ (là phân bố theo luật Benford) trong khi 2 đường màu xanh lá cây có khác biệt lớn hơn và "rối loạn" hơn. Căn cứ vào đó, người ta đã xây dựng lên các cơ sở để phát hiện ra ảnh đã bị nén như thế nào!

Ghi chú

Mặc dù đúng trong nhiều tập hợp các số liệu tự nhiên, luật này cũng có những hạn chế của nó. Các con số không được là ngẫu nhiên, ví dụ như kết quả xổ số và không thể quá hạn chế khi tập hợp các xác suất là quá hạn hẹp.

Bài viết có tham khảo các nguồn tài liệu tiếng Việt của tác giả Trần Quý Phi ở statistic.vn và diễn đàn toán học diendantoanhoc.net qua bài viết của một người có tên trên diễn đàn là Crystal.

ĐIỀU KIỆN NGOẠI TIẾP CỦA MỘT TỨ GIÁC KHÔNG LỒI VÀ ỨNG DỤNG

Đỗ Thanh Sơn – THPT chuyên KHTN

TÓM TẮT

Bài báo đưa ra khái niệm tứ giác không lồi ngoại tiếp cùng với một số ứng dụng.

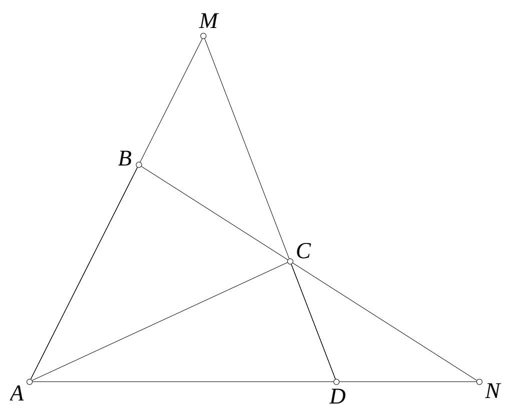
1. Mở đầu

Chúng ta đã biết điều kiện ngoại tiếp của một tứ giác lồi. Điều kiện đó được phát biểu như sau

Điều kiện cần và đủ. Một tứ giác lồi ngoại tiếp được một đường tròn khi và chỉ khi tổng độ dài các cặp cạnh đối bằng nhau.
Tuy nhiên trong việc giải toán, nhiều khi ta gặp phải những bài toán khảo sát tính chất tiếp xúc của các cạnh hoặc đường thẳng chứa các cạnh của một tứ giác không lồi với một đường tròn nào đó. Trong những trường hợp như vậy ta không thể sử dụng được điều kiện ngoại tiếp của một tứ giác lồi để khảo sát bài toán.
Nội dung của bài báo này đề cập đến điều kiện "ngoại tiếp" của một tứ giác không lồi có hình dạng được định nghĩa sau đây và ứng dụng nó để giải toán.

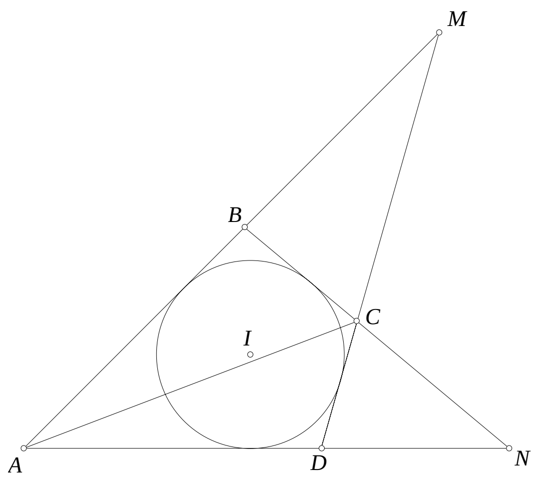
2. Các định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho một tứ giác lồi $ABCD$ có các cặp cạnh đối không song song. Gọi M là giao điểm của các đường thẳng AB và CD, N là giao điểm của các đường thẳng AD và BC (có thể coi B nằm giữa A và M; D nằm giữa A và N). Hình được tạo bởi các đoạn thẳng liên tiếp nhau AM, MC, CN, NA là hình tứ giác lõm. Chúng ta sẽ chỉ khảo sát các vấn đề liên quan đến hình tứ giác này.



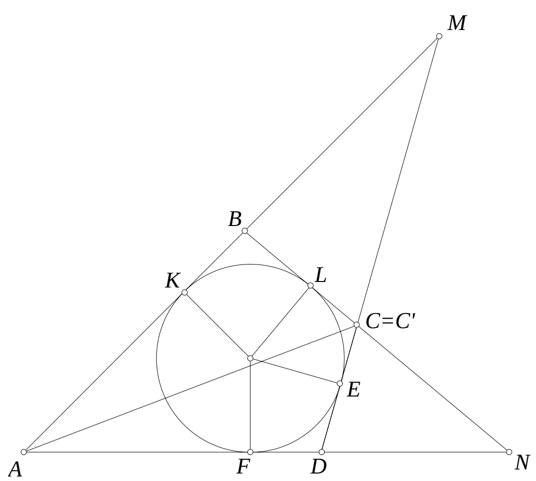
Nếu cấu hình trên được xem như một tập hợp gồm tứ giác lồi $ABCD$, tam giác BCM và tam giác CDN, thì ta còn gọi nó là tứ giác toàn phần.
Để cho tiện, từ bây giờ ta sẽ gọi tứ giác có hình dạng đã được định nghĩa trên đây là tứ giác toàn phần và được ký hiệu là $ABCDMN$. Trong ký hiệu này các chữ A, B, C, D là đỉnh của một tứ giác lồi, còn các điểm M, N là các đỉnh được sinh ra từ các cặp đường thẳng chứa các cạnh đối diện của tứ giác $ABCD$ cắt nhau. Cũng vì thế, đôi khi ta còn nói tứ giác toàn phần $ABCDMN$ được sinh bởi tứ giác lồi $ABCD$.
Các điểm A, B, C, D, M, N là đỉnh tứ giác các đoạn AB, BC, CD, DA, AM, MC, CN, ND, AN là cạnh tứ giác. Các đoạn thẳng AC, BD, MN là đường chéo tứ giác.
Nếu không có chú thích gì, thì khi nói tới tứ giác toàn phần $ABCDMN$ ta hiểu rằng tứ giác đó có cấu hình như đã định nghĩa ở trên.

Định nghĩa 2. Ta nói tứ giác toàn phần $ABCDMN$ ngoại tiếp đường tròn (O), nếu (O) là đường tròn nội tiếp trong tứ giác $ABCD$. Để cho gọn, khi ta nói tứ giác toàn phần $ABCDMN$ ngoại tiếp, ta hiểu rằng tứ giác đó ngoại tiếp một đường tròn.



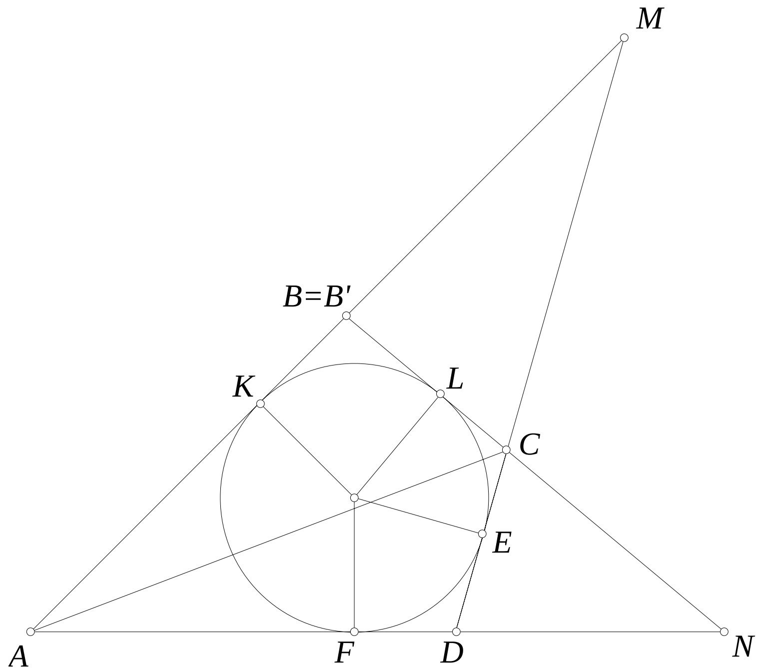
3. Điều kiện ngoại tiếp

Định lý 1. Tứ giác toàn phần $ABCDMN$ ngoại tiếp khi và chỉ khi $AM + CN = AN + CM$.



Chứng minh. Giả sử $ABCDMN$ ngoại tiếp. Theo định nghĩa, tồn tại một đường tròn (O) nội tiếp trong tứ giác lồi $ABCD$. Ta ký hiệu các điểm K, L, E, F lần lượt là tiếp điểm của (O) và các cạnh tương ứng AB, BC, CD, DA. Khi đó ta có $AM = AK + KM$, $CN = NL - CL$, $AN = AF + FN$, $CM = ME - CE$. Vậy $AM + CN = AN + CN$ suy ra $AK + KM + NL - CL = AF + FN + ME - CE$ (1). Vì $AK = AF, MK = ME, NF = NL, CE = CL$, nên (1) đúng.
Giả sử $AM + CN = AN + CM$. Ta cần chứng minh rằng $ABCD$ là tứ giác ngoại tiếp. Gọi (O) là đường tròn nội tiếp trong $\triangle MAD$. Ta chứng minh rằng (O) cũng là đường tròn nội tiếp trong $\triangle NAB$. Ta ký hiệu K, E, F là tiếp điểm của (O) với các cạnh tương ứng AM, MD, DA của $\triangle MAD$. Từ N kẻ tới (O) tiếp tuyến NL khác NA (L là tiếp điểm). Đường thẳng NL cắt MD tại C' và ta coi C nằm giữa C' và M. Theo điều kiện cần ta có $AM + NC' = AN + MC'$ suy ra $AM - AN = MC' - NC'$ (2). Từ giả thiết ta suy ra $AM - AN = CM - CN$ (3). Từ (2) và (3) ta có $CM - CN = MC' - NC'$ suy ra $CM - CN = CM + CC' - NC'$ hay $NC' = C'C + CN$. Đẳng thức này chứng tỏ rằng C và C' trùng nhau. Tức là cạnh BC tiếp xúc với (O). □

Định lý 2. Tứ giác toàn phần $ABCDMN$ ngoại tiếp khi và chỉ khi $BM + BN = DM + DN$.

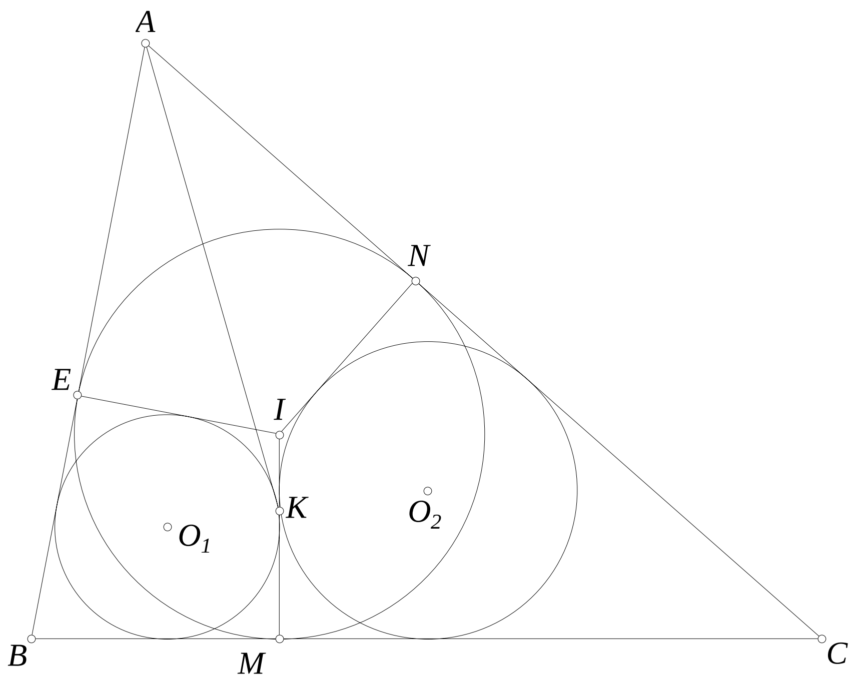


Chứng minh. Ta vẫn sử dụng các ký hiệu như trong chứng minh định lý 1 để chứng minh định lý 2.Gỉa sử $ABCDMN$ ngoại tiếp, khi đó ta có $BM = MK - BK$, $BN = BL + LN$, $DM = DE + ME$, $DN = NF - DF$. Rõ ràng $BM + BN = DM + DN$ suy ra $MK - BK + BL + LN = DE + ME + NF - DF$ (*). Vì $MK = ME, NL = NF, BK = BL, DE = DF$, nên (*) đúng.
Ngược lại nếu $BM + BN = DM + DN$ ta cần chứng minh $ABCD$ ngoại tiếp. Gọi (O) là đường tròn nội tiếp $\triangle MAD$. Ta kẻ tiếp tuyến NL tới (O) và khác NA. Đường thẳng NL cắt AM tại B' và coi B nằm giữa M và B'. Theo điều kiện cần ta có $B'M + B'N = DM + DN$ suy ra $B'B + BM + B'N = DM + DN$. Theo giả thiết ta có $BM + BN = DM + DN$. Từ đó ta suy ra $B'B + BM + B'N = BM + BN$ hay $B'B + B'N = BN$. Đẳng thức này chứng tỏ B' trùng với B. Tức là $ABCD$ ngoại tiếp. □

4. Ứng dụng

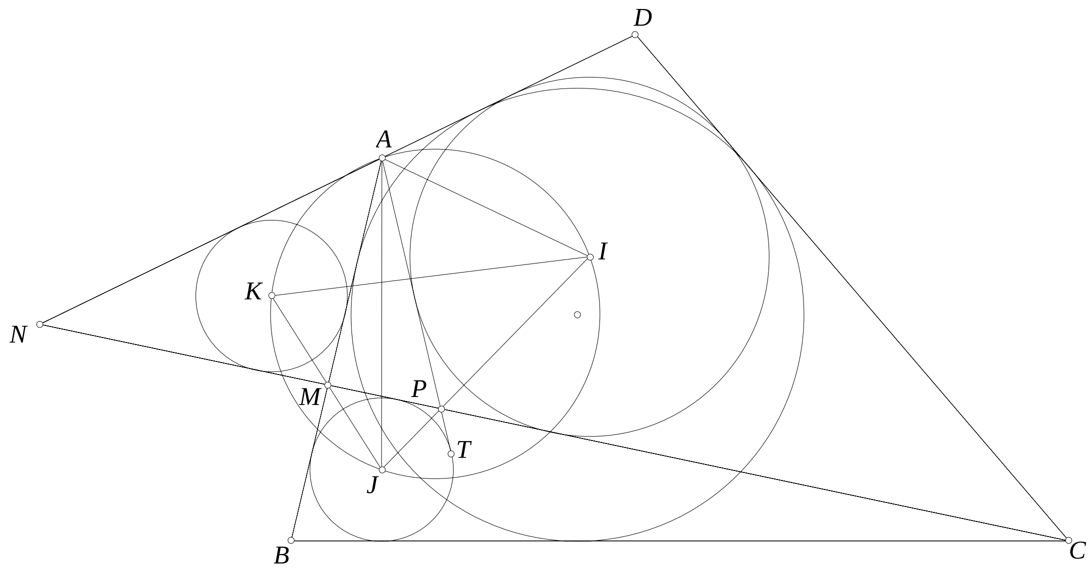
Bây giờ ta sẽ chỉ ra ứng dụng của hai định lý trên vào giải toán.

Bài toán 1. *Đường tròn tâm I nội tiếp trong $\triangle ABC$ tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, E.*
a) Chứng minh rằng các tứ giác $IMBE$ và $IMCN$ ngoại tiếp.
b) Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn nội tiếp trong các tứ giác trên và khác đường thẳng IM đi qua A.



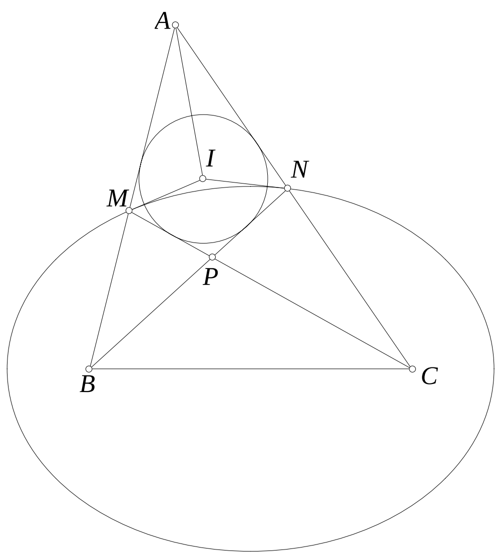
Lời giải. a) Rõ ràng ta có $IM = IE$ và $BM = BE$, nên tứ giác lồi $IMBE$ thỏa mãn điều kiện $IM + BE = IE + BM$. Từ đó suy ra tứ giác $IMBE$ ngoại tiếp. Ta ký hiệu (O_1) là đường tròn nội tiếp trong tứ giác đó. Tương tự, ta cũng suy ra tứ giác $IMCN$ ngoại tiếp và (O_2) là đường tròn nội tiếp tứ giác đó.
b) Ta thấy rằng IM là một tiếp tuyến chung trong của (O_1) và (O_2). Kẻ qua A đường thẳng tiếp xúc với (O_2) và khác AC. Gọi K là giao điểm của đường thẳng này với IM. Ta thấy rằng tứ giác không lồi $ACMK$ ngoại tiếp (O_2) nên ta có $AC + MK = AK + MC$. Để chứng minh AK cũng tiếp xúc với (O_1) ta cần nghiệm lại điều kiện $AK + MB = MK + AB$ hay $AK - MK = AB - MB$. Thật vậy, điều kiện $AC + MK = AK + MC$ tương đương với $AK - MK = AC - MC = (AN + NC) - MC = AN + (NC - MC) = AN = AE = AB - BE = AB - BM$. Đây là điều cần chứng minh. Ta cũng thấy rằng (O_1) và (O_2) khác phía đối với tiếp tuyến chung AK, nên AK là tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn. $\square$

Bài toán 2. *Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn. Trên cạnh AB ta lấy điểm M. Đường thẳng CM cắt đường thẳng AD tại N (ta coi A nằm giữa D và N). Gọi I, J, K lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp trong các tam giác NCD, BMC và AMN. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác IJK đi qua A.*



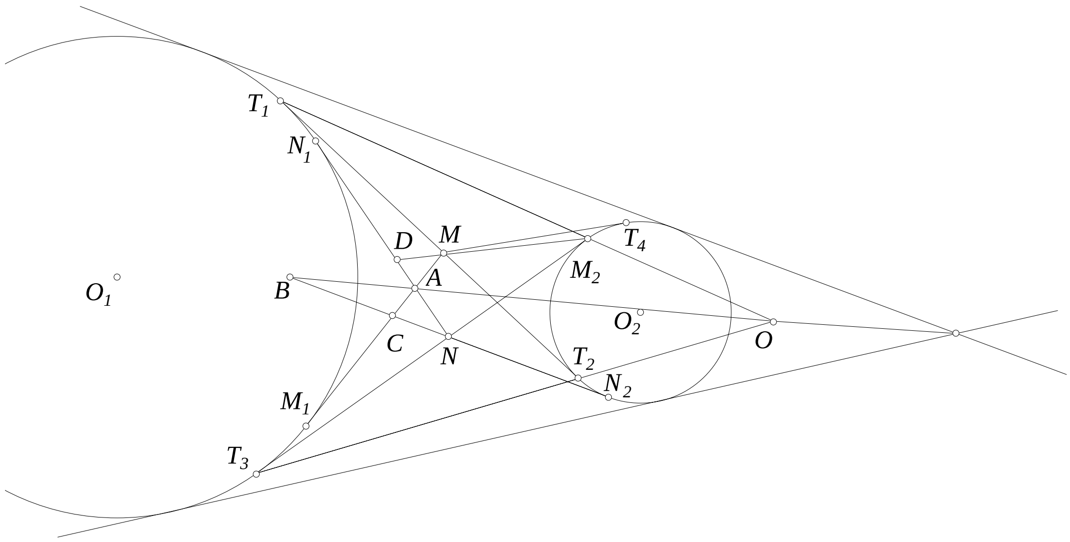
Lời giải. Ta thấy rằng đường thẳng IK chứa các đường phân giác của các tam giác BMC và AMN được kẻ từ M. Đường thẳng KI chứa phân giác của $\widehat{ANM}$. Ta gọi $2\alpha = \widehat{ANM}, 2\beta = \widehat{AMN}$, khi đó ta có $\widehat{IKJ} = \alpha + \beta$ (góc ngoài của $\triangle KMN$). Mặt khác ta có $\widehat{BAD} = 2\alpha + 2\beta$ (góc ngoài của $\triangle AMN$). Từ A ta kẻ tiếp tuyến AT tới đường tròn (J) (khác AB). Gọi P là giao điểm của AT và CM. Vì (J) nội tiếp trong tứ không lồi $BAPC$, nên ta có $AB + CP = BC + AP$ tương đương $AB - BC = AP - CP$. Vì $ABCD$ ngoại tiếp, nên $AB - BC = AD - CD$. Từ các kết quả trên suy ra $AP - CP = AD - CD$ hay $AP + CD = AD + CP$. Đẳng thức này chứng tỏ tứ giác lồi $ADCP$ ngoại tiếp đường tròn. Tức là AT tiếp xúc với (I). Do đó tia AI là phân giác của $\widehat{DAP}$. Xét $\widehat{IAJ}$, ta có $\widehat{IAJ} = \widehat{IAP} + \widehat{PAI} = \alpha + \beta$. Do đó $\widehat{IKJ} = \widehat{IAJ}$. Hơn nữa các điểm K và A cùng phía đối với IJ, nên A, J, I, K đồng viên. Đó là điều phải chứng minh. □

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC. Giả sử đường elip (E) với các tiêu điểm B, C cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Dựng các tiếp tuyến với (E) tại các điểm M và N. Gọi I là giao điểm các tiếp tuyến đó. Chứng minh rằng tia AI là phân giác của $\widehat{BAC}$.*



Lời giải. Gọi P là giao điểm của các đoạn thẳng BN và CM. Trong tứ giác toàn phần $AMPNBC$ ta có $MB + MC = NB + NC$. Do đó tứ giác này ngoại tiếp. Theo định nghĩa tồn tại một đường tròn nội tiếp trong tứ giác $AMPN$. Cần lưu ý rằng MI và NI là các tia phân giác của các góc tại đỉnh M và N của tứ giác $AMPN$. Vậy thì I là tâm đường tròn nội tiếp trong tứ giác $AMPN$. Tức là AI là tia phân giác của $\widehat{BAC}$. □

Bài toán 4. *Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) có bán kính khác nhau và nằm ngoài nhau. T_1T_2 và T_3T_4 là các tiếp chung trong của hai đường tròn (T_1 và T_3 là tiếp điểm thuộc (O_1), T_2 và T_4 thuộc (O_2)). Gọi O là giao điểm cuat các đường thẳng T_1T_2 và T_2T_4. Trên đoạn OT_1 ta lấy điểm M và OT_4 lấy điểm N. Gọi MM_1 là tiếp tuyến với (O_1) khác T_1T_2, MM_2 là tiếp tuyến với (O_2) khác T_1T_2, NN_1 là tiếp tuyến với (O_1) khác T_3T_4, NN_2 là tiếp tuyến với (O_2) khác T_3T_4. Gọi A là giao điểm của MM_1 và NN_1, B là giao điểm của NN_2 và MM_2, C là giao điểm của MM_2 và NN_1, D là giao điểm của MM_1 và NN_2. Chứng minh rằng đường thẳng AB và các tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn đồng quy.*



Lời giải của ví dụ này được dành cho bạn đọc.

Tài liệu tham khảo

[1] Đỗ Thanh Sơn, Các phép biến hình trong mặt phẳng, NXBGD 2001.

[2] Đỗ Thanh Sơn, Toán nâng cao hình học 11, NXBGD 2013.

KHOẢNG CÁCH GIỮA TÂM ĐƯỜNG TRÒN EULER VÀ TÂM ĐƯỜNG TRÒN APOLLONIUS

Trịnh Xuân Minh – Macau

TÓM TẮT

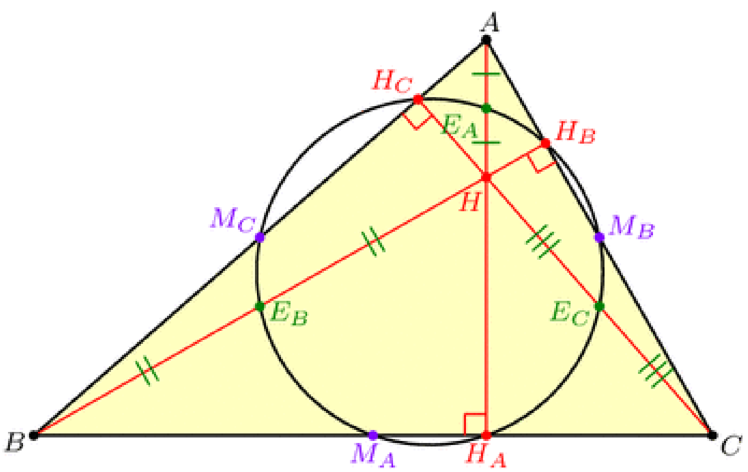
Như tiêu đề đã nêu, phần này giới thiệu với bạn đọc về hệ thức liên hệ giữa tâm hai đường tròn tiếp xúc trong và ngoài với ba đường tròn bàng tiếp của một tam giác. Cách chứng minh của tác giả đã lâu (2009) và tương đối cồng kềnh nên hy vọng sau bài viết này có thể có một lời giải hình học đơn giản hơn dành cho nó. Để cho ngắn gọn và đỡ phức tạp, những điều đã biết hoặc cơ bản xin không chứng minh ở đây, thay vào đó người viết sẽ chú thích nguồn để bạn đọc tiện tham khảo.

Cho $\triangle ABC$ và những ký hiệu tương ứng sau:

- S là diện tích $\triangle ABC$
- p là nửa chu vi $\triangle ABC$
- R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$
- r là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$
- $M(\alpha_M, \beta_M, \gamma_M)$ nếu $\alpha_M \overrightarrow{MA} + \beta_M \overrightarrow{MB} + \gamma_M \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Trước tiên chúng ta nhắc lại một số định lý và hệ thức cơ bản sau:

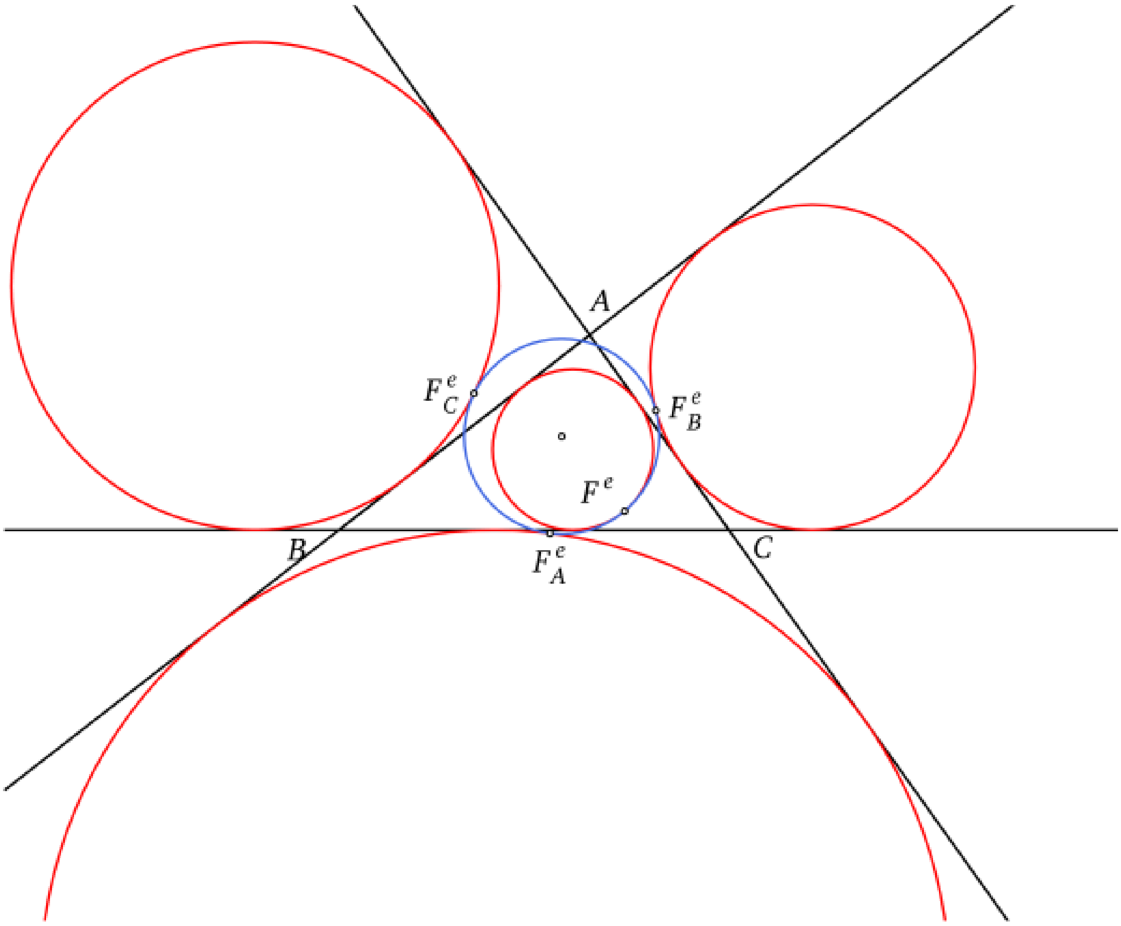
Định lý Euler. Trong một tam giác, chân ba đường cao, ba trung điểm của ba cạnh, ba trung điểm của ba đoạn thẳng nối ba đỉnh với trực tâm, tất cả chín điểm này cùng nằm trên một đường tròn gọi là đường tròn 9 điểm hay đường tròn Euler.



Hình 1. Đường tròn Euler

Đường tròn Euler có bán kính là $\dfrac{R}{2}$ và trong hệ thống các tâm Kimberling, tâm của nó là X_5 với $\alpha_{X_5} = a\cos(B - C)$.

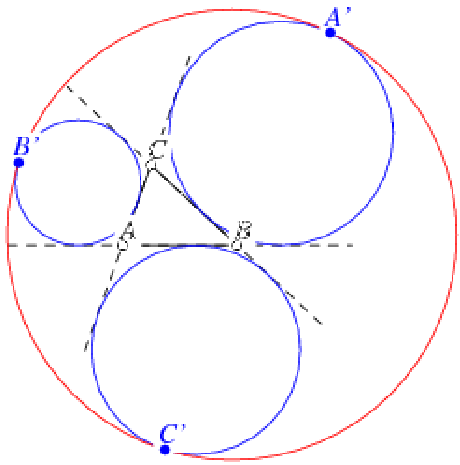
Định lý Feuerbach. Trong một tam giác, đường tròn Euler tiếp xúc đồng thời với đường tròn nội tiếp và ba đường tròn bàng tiếp.



Hình 2. Định lý Feuerbach

Định lý trên được công bố năm 1822 bởi nhà hình học người Đức, Karl Wihelm Feuerbach (1800-1834).

Đường tròn Apollonius. Đường tròn tiếp xúc trong với cả ba đường tròn bàng tiếp của một tam giác gọi là đường tròn Apollonius của tam giác đó



Hình 3. Đường tròn Apollonius

Đường tròn Apollonius có bán kính là $\frac{p^2+r^2}{4r}$ và có tâm Kimberling X_{970} với $\alpha_{(X_{970})} = R(p^2-r^2)a\cos A - a^2S$.

Một số hệ thức cơ bản

4.1) $S = \frac{abc}{4R} = pr = (p-a)r_a$

4.2) $a^2+b^2+c^2 = 2p^2-2r^2-8Rr$

4.3) $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{2S}{R}$

4.4) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 3 - \frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2} = 3 - \frac{p^2-r^2-4Rr}{2R^2}$

4.5) $ab\cos C + bc\cos A + ca\cos B = \frac{(a^2+b^2+c^2)}{2} = p^2-r^2-4Rr$

4.6) $a\cos B\cos C + b\cos C\cos A + c\cos A\cos B = \frac{S}{R}$

4.7) $MA^2 = \frac{(\beta_M c)^2 + (\gamma_M b)^2 + 2bc\beta_M\gamma_M\cos A}{(\alpha_M+\beta_M+\gamma_M)^2}$

4.8) $(\alpha_M+\beta_M+\gamma_M)MS^2 = \alpha_M AS^2 + \beta_M BS^2 + \gamma_M CS^2 - \frac{\alpha_M\beta_M c^2 + \beta_M\gamma_M a^2 + \gamma_M\alpha_M b^2}{\alpha_M+\beta_M+\gamma_M}$

Đường tròn Euler và đường tròn Apollonius gây sự chú ý đặc biệt với bản thân tôi bởi tính chất tiếp xúc của chúng với ba đường tròn bàng tiếp trong một tam giác. Cũng vì đó mà tôi từng nghĩ đến sự tồn tại của một hệ thức đẹp liên hệ giữa chúng, và quả đúng như vậy

Định lý. Gọi (E, R_E) và $(E', R_{E'})$ lần lượt là đường tròn Euler và đường tròn Apollonius của $\triangle ABC$. Khi đó $EE'^2 = (R_E + R_{E'})^2\left(1 - \frac{r}{R_E}\right)$

Chứng minh. Ta có $\alpha_{E'} = R\big(p^2-r^2\big)a\cos A - a^2S$.

Áp dụng 4.2 và 4.3

$$\sum_{cyclic} \alpha_{E'} = R\big(p^2-r^2\big)\cdot\sum_{cyclic} a\cos A - S\cdot\sum_{cyclic} a^2$$
$$= R\big(p^2-r^2\big)\cdot\frac{2S}{R} - S\cdot\big(2p^2-2r^2-8Rr\big)$$
$$= 8RrS \quad (1)$$

Áp dụng hệ thức 4.7 với $M \equiv E$ và $\alpha_E = a\cos(B-C)$ thu được $4AE^2 = R^2 + 2bc\cos A$. Kết quả trên cũng có được một cách gián tiếp thông qua việc xét quan hệ vị trí giữa E với các điểm đặc biệt khác trên đường thẳng Euler (trọng tâm, trực tâm, tâm đường đường tròn ngoại tiếp...).

Như vậy,

$$\begin{aligned}&4\alpha_{E'}\cdot AE^2 = \left(R^2+2bc\cos A\right)\left[R\left(p^2-r^2\right)a\cos A - a^2S\right]\\&= \left[R^3\left(p^2-r^2\right)-8RS^2\right]a\cos A + 8R^2S\left(p^2-r^2\right)\cos^2 A - R^2S\cdot a^2\end{aligned}$$

Áp dụng 4.2, 4.3 và 4.4 ta có

$$\begin{aligned}&4\sum_{cyclic}\alpha_{E'}\cdot AE^2 = \left[R^3\left(p^2-r^2\right)-8RS^2\right]\cdot\sum_{cyclic} a\cos A\\&+8R^2S\left(p^2-r^2\right)\cdot\sum_{cyclic}\cos^2 A - R^2S\cdot\sum_{cyclic}a^2\\&= \left[R^3\left(p^2-r^2\right)-8RS^2\right]\frac{2S}{R} + 8R^2S\left(p^2-r^2\right)\left(3-\frac{p^2-r^2-4Rr}{2R^2}\right)\\&-R^2S\left(2p^2-2r^2-8Rr\right)\\&= 26R^2S\left(p^2-r^2\right)-16S^3-2S\left(p^2-r^2-4Rr\right)\left[2\left(p^2-r^2\right)+R^2\right]\\&= 26R^2S\left(p^2-r^2\right)-16S^3-4S\left(p^2-r^2\right)^2-2S\left(p^2-r^2\right)\left(R^2-8Rr\right)+8R^3rS\\&= -4S\left(p^2-r^2\right)^2+8RS(3R+2r)\left(p^2-r^2\right)-16S^3+8R^3rS\end{aligned}$$

Suy ra,

$$\sum_{cyclic}\alpha_{E'}\cdot AE^2 = -S\left(p^2-r^2\right)^2+2RS(3R+2r)\left(p^2-r^2\right)-4S^3+2R^3rS \quad (2)$$

Lại có

$$\begin{aligned}&\alpha_{E'}\beta_{E'}c^2 = c^2\left[R\left(p^2-r^2\right)a\cos A-a^2S\right]\left[R\left(p^2-r^2\right)b\cos B-b^2S\right]\\&= 4R^3S\left(p^2-r^2\right)^2c\cos A\cos B - 4R^2S^2\left(p^2-r^2\right)(bc\cos A+ca\cos B)+16R^2S^4\end{aligned}$$

Áp dụng 4.5 và 4.6

$$\begin{aligned}&\sum_{cyclic}\alpha'_E\beta'_Ec^2 = 4R^3S(p^2-r^2)^2\cdot\sum_{cyclic}c\cos A\cos B - 8R^2S^2(p^2-r^2)\cdot\\&\sum_{cyclic}ab\cos C + 48R^2S^4\\&= 4R^3S(p^2-r^2)^2\cdot\frac{S}{R}-8R^2S^2(p^2-r^2)(p^2-r^2-4Rr)+48R^2S^4\\&= -4R^2S^2\left(p^2-r^2\right)^2+32R^3rS^2\left(p^2-r^2\right)+48R^2S^4 \quad (3)\end{aligned}$$

Sau cùng ta áp dụng (1), (2) và (3) vào 4.8 với $M \equiv E'$ và $S \equiv E$ ta thu được

$$\begin{aligned}&8RrS\cdot EE'^2 =\\&-S\left(p^2-r^2\right)^2+2RS(3R+2r)\left(p^2-r^2\right)-4S^3+2R^3rS+\\&\frac{4R^2S^2\left(p^2-r^2\right)^2-32R^3rS^2\left(p^2-r^2\right)-48R^2S^4}{8RrS}\\&= -S\left(p^2-r^2\right)^2+2RS(3R+2r)\left(p^2-r^2\right)-4S^3+2R^3rS+\\&\frac{pR\left[\left(p^2-r^2\right)^2-8Rr\left(p^2-r^2\right)-12S^2\right]}{2}\end{aligned}$$

Suy ra,

$$
\begin{aligned}
EE'^2 &= \frac{(R-2r)\left(p^2-r^2\right)^2}{16Rr^2} + \frac{4RS(R+2r)\left(p^2-r^2\right)}{16RrS} + \frac{4Sr\left(R^3-3p^2R-2p^2r\right)}{16RrS} \\
&= \frac{(R-2r)\left(p^2-r^2\right)^2 + 4Rr(R+2r)\left(p^2-r^2\right)}{16Rr^2} + \frac{R^3-3p^2R-2p^2r}{4R} \\
&= \frac{R^2}{4} - \frac{Rr}{2} + \frac{Rr}{4} + \frac{p^2R}{4r} - \frac{4p^2}{8} + \frac{p^2}{8} - \frac{8r^2}{16} + \frac{r^2}{16} + \frac{p^4}{16r^2} - \frac{p^4}{8Rr} - \frac{p^2r}{4R} - \frac{r^3}{8R} \\
&= \frac{R^2}{4}\left(1-\frac{2r}{R}\right) + R\frac{\left(p^2+r^2\right)}{4r} - \frac{p^2+r^2}{2} + \left(\frac{p^2+r^2}{4r}\right)^2 - \frac{\left(p^2+r^2\right)^2}{8Rr} \\
&= \left[\frac{R}{2} + \frac{\left(p^2+r^2\right)}{4r}\right]^2\left(1-\frac{2r}{R}\right) = (R_E + R_{E'})^2\left(1-\frac{r}{R_E}\right)\text{(điều phải chứng minh)}.
\end{aligned}
$$

Tài liệu tham khảo

[1] http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_line

Epsilon
Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

TỔNG QUÁT MỘT BÀI TOÁN THI VÔ ĐỊCH NGA NĂM 2005

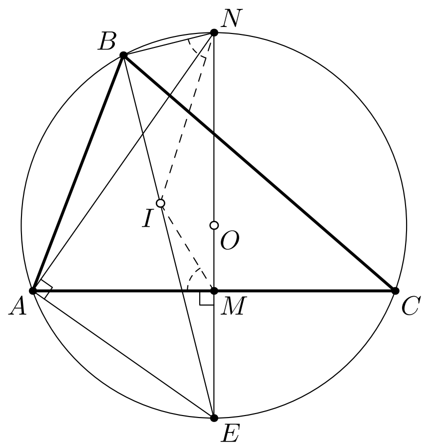
Trần Quang Hùng – Phan Anh Quân

TÓM TẮT

Bài viết tổng quát hóa một bài toán từ cuộc thi vô địch Nga năm 2005 bằng công cụ điểm đẳng giác cùng với các lời giải thuần túy hình học.

Bài toán sau được đề nghị bởi tác giả Andrey Badzyan trong kỳ thi vô địch toàn Nga năm 2005 vòng thi tỉnh dành cho lớp 9

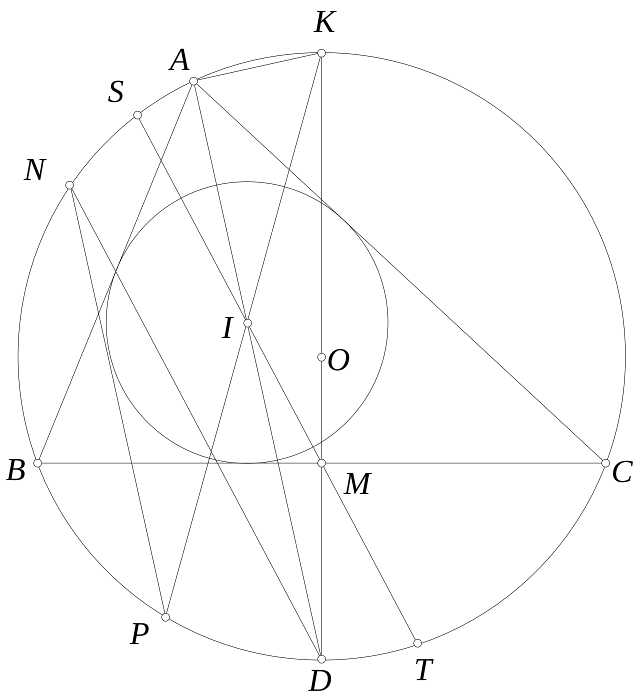
Bài toán 1. *Cho tam giác ABC với đường tròn ngoại tiếp (O) và đường tròn nội tiếp là (I). M là trung điểm của AC và N là trung điểm của cung $\widehat{AC}$ chứa B. Chứng minh rằng $\angle IMA = \angle INB$.*



Lời giải. Gọi BI cắt (O) tại E khác B. Từ kết quả quen thuộc E là tâm ngoại tiếp tam giác IBC. Từ đó kết hợp hệ thức lượng trong tam giác vuông thì $EI^2 = EA^2 = EM.EN$. Từ đó hai tam giác EMI và EIN đồng dạng. Suy ra $\angle IMA = \angle EIN - IME - 90^\circ = \angle EIN - 90^\circ = \angle INB$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán trên là một kết quả đẹp và có nhiều ý nghĩa trong việc ứng dụng và phát triển. Chúng tôi xin giới thiệt một bài toán trong các bài toán ứng dụng kết quả này như sau

Bài toán 2. *Cho dây BC cố định của đường tròn (O). A di chuyển trên (O), I là tâm nội tiếp tam giác ABC. IA cắt (O) tại D khác A. M là trung điểm BC. N thuộc (O) sao cho $DN \parallel IM$. P thuộc (O) sao cho $NP \parallel AD$. Chứng minh rằng PI luôn đi qua điểm cố định khi A di chuyển.*



Lời giải. Gọi tia IM cắt (O) tại T, tia MI cắt (O) tại S, MD cắt (O) tại K cố định. Ta thấy $ID^2 = BA^2 = DM.DK$ suy ra tam giác $\triangle DMI \sim \triangle DIK$ suy ra $\angle MID = \angle IKM$ (1).
Ta lại có $DN \parallel ST$ suy ra $\widehat{DT} = \widehat{NS}$. Từ $PN \parallel AD$ suy ra $\widehat{NA} = \widehat{PD}$. Từ đây suy ra $\widehat{PD} = \widehat{SA} + \widehat{DT}$ suy ra $\angle PKD = \angle DIT$ (2).
Vậy từ (1), (2) suy ra P, I, K thẳng hàng hay PI đi qua K cố định. □

Nhận xét. Điểm P chính là tiếp điểm của đường tròn mixtilinear nội với đường tròn (O).
Bài toán 1 lần đầu tiên được mở rộng trong [2] bởi tác giả Trần Quang Hùng như sau

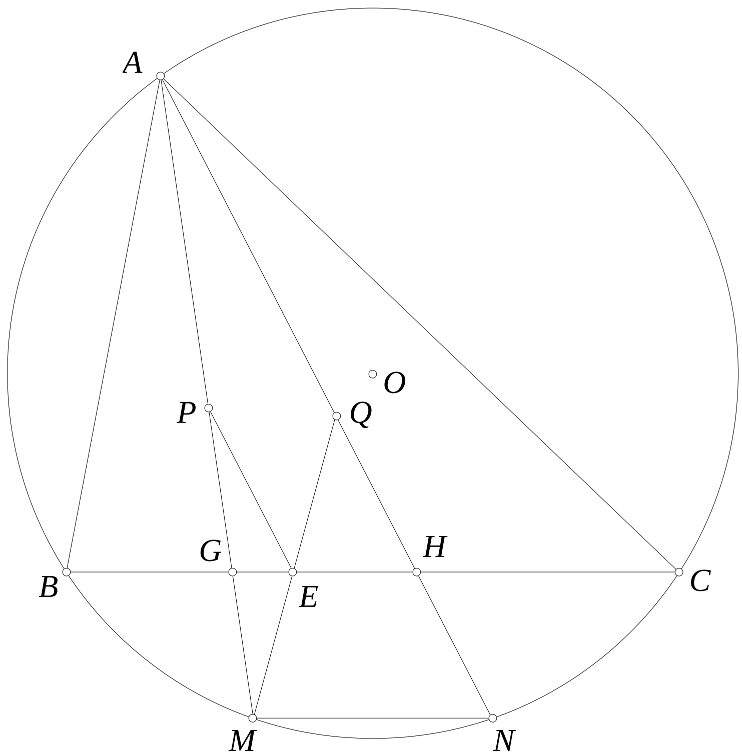
Bài toán 3. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P, Q đẳng giác trong tam giác ABC AP cắt (O) tại D khác A. DN là đường kính của (O). ON cắt BC tại M. Chứng minh rằng $\angle PMB = \angle ANQ$.*

Sau đó nhờ lời giải của tác giả Phan Anh Quân, bài toán được mở rộng thêm lần nữa như sau

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P, Q đẳng giác trong tam giác ABC AP cắt (O) tại D khác A. M là điểm thuộc đoạn BC. DM cắt (O) tại N khác D. Chứng minh rằng $\angle PMB = \angle ANQ$.*

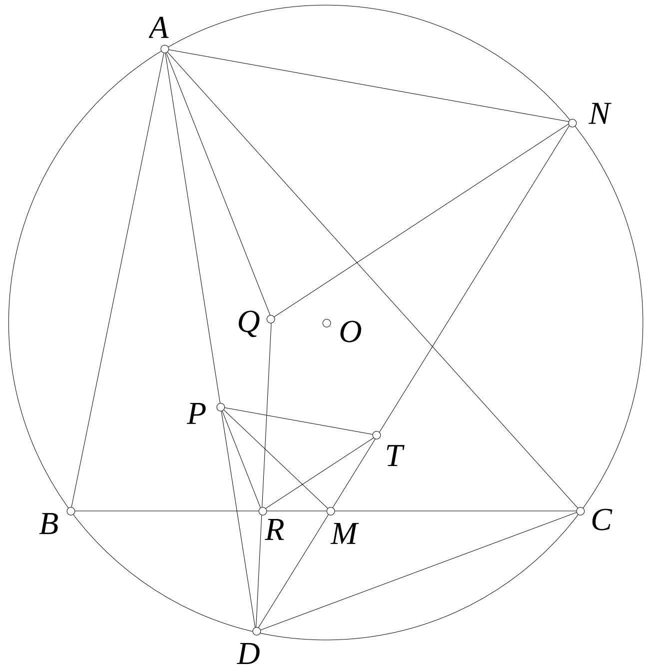
Để giải bài toán này chúng tôi sử dụng bổ đề sau, tham khảo [3]. Lời giải của bổ đề này được đề nghị bởi nhiều tác giả trong [3] xong lời giải sau của tác giả Phan Anh Quân được coi là ngắn gọn và đẹp nhất

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O). P, Q đẳng giác trong tam giác ABC. AP cắt (O) tại M khác A. MQ cắt BC tại E. Thì $PE \parallel AQ$.*



Chứng minh bổ đề. Gọi AQ cắt (O) tại N khác A và cắt BC tại H. Do P, Q đẳng giác, ta dễ thấy các tam giác đồng dạng $\triangle CHN \sim \triangle ACM$ và $\triangle CPM \sim \triangle QCN$ (g.g) suy ra $HN.AM = CM.CN = QN.PM$ suy ra $\dfrac{MP}{MA} = \dfrac{NH}{NQ} = \dfrac{ME}{MQ}$ vậy $PE \parallel AQ$. □

Trở lại bài toán

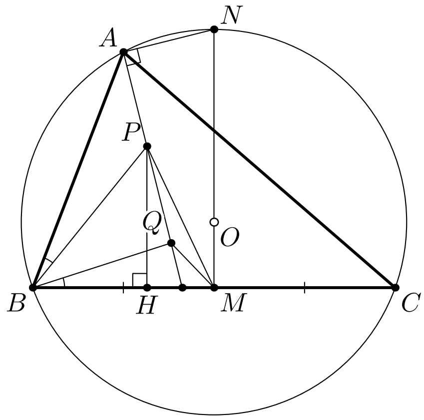


Lời giải của Phan Anh Quân. Gọi DQ cắt BC tại R theo bổ đề đã biết thì $PR \parallel AQ$. Lấy T thuộc DN sao cho $PT \parallel AN$. Theo định lý Thales suy ra $\dfrac{DR}{DQ} = \dfrac{DP}{DQ} = \dfrac{DT}{DN}$ suy ra

$RT \parallel QN$. Vậy hai tam giác AQN và PRT đồng dạng vì có các cạnh tương ứng song song. Từ đó $\angle BMD = \angle MCD + \angle MDC = \angle BAD + \angle CAN = \angle QAC + \angle CAN = \angle QAN = \angle RPT$. Từ đó tứ giác $PTMR$ nội tiếp. Suy ra $\angle PMB = \angle PTR = \angle ANQ$. □

Bài toán mở rộng có khá nhiều ứng dụng hay, được tác giả Trần Quang Hùng đề nghị trong [2]

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC với P, Q là hai điểm đẳng giác trên phân giác góc $\angle BAC$ và M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác PQM luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P thay đổi.*



Lời giải. Lấy H trên BC sao cho $PH \perp BC$. Gọi N là trung điểm $\widehat{BC}$ chứa A. Do P, Q đẳng giác áp dụng bài toán tổng quát ta có $\angle QNA = \angle PMB$ suy ra $\angle AQN = \angle HPM = \angle PMN$ (chú ý $\angle NAD = 90°$), vậy tứ giác $QPMN$ nội tiếp. Vì thế tâm ngoại tiếp tam giác PQM nằm trên trung trực của MN cố định. □

Các bạn hãy làm các bài toán sau để luyện tập

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P, Q đẳng giác trong tam giác ABC AP cắt (O) tại D khác A. DN là đường kính của (O). ON cắt BC tại M. Gọi PM cắt AQ tại T.*
a) Chứng minh rằng Q, M, N, T cùng thuộc một đường tròn.
b) Chứng minh rằng $PM \parallel AQ$ khi và chỉ khi Q thuộc OM.

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng ℓ đi qua O cắt BC tại M. Q là một điểm thuộc ℓ và P là đẳng giác của Q trong tam giác ABC. Chứng minh rằng AP và ℓ cắt nhau trên đường tròn (O) khi và chỉ khi $PM \parallel AQ$.*

Tài liệu tham khảo

[1] Đề thi vô địch toàn Nga năm 2005 từ AoPS forum
`http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h32163`

[2] Tran Quang Hung and Pham Huy Hoang, Generalization of a problem with isogonal conjugate points.
`http://www.jcgeometry.org/Articles/Volume2/JCG2013V2pp39-42.pdf`

[3] Topic Isogonal points and parallelism
`http://www.artofproblemsolving.com/community/h177608`

ÁP DỤNG DÃY SỐ VÀO GIẢI CÁC PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Đỗ Minh Khoa – Võ Quốc Bá Cẩn

1. Lời dẫn

Các bài toán phương trình hàm và bất phương trình hàm luôn rất thú vị và lôi cuốn đối với người làm toán. Từ một phương trình nào đó, chỉ bằng một vài phép thế đơn giản, ta có thể tìm được các tính chất đặc biệt của hàm số được cho hoặc thậm chí là công thức tổng quát của hàm. Tuy nhiên, khi đi sâu vào vấn đề này thì việc chỉ dùng phép thế để giải là chưa đủ, đặc biệt là với các bài toán bất phương trình hàm. Do vậy, chúng ta cần có những công cụ khác bổ trợ để tăng cường thêm tính hiệu quả của phương pháp thế. Lúc này, việc sử dụng dãy số và giới hạn một cách linh hoạt sẽ giúp con đường đi trở nên sáng sủa và dễ dàng hơn rất nhiều.

Nhận thấy vai trò rất lớn của dãy số và giới hạn trong các bài toán phương trình, bất phương trình hàm, chúng tôi quyết định thực hiện bài viết này để chia sẻ kinh nghiệm của mình trong cách sử dụng cũng như để được học hỏi và nhận được ý kiến đóng góp từ quý đồng nghiệp gần xa.

2. Sử dụng giới hạn trong các bài toán phương trình, bất phương trình hàm

Dưới đây là một số kỹ thuật sử dụng chặn và kẹp dãy số thường được sử dụng trong giải toán:

- Trong nhiều trường hợp, ta cần tìm công thức tổng quát của hàm số, khi đó một trong các hướng đi mà ta có thể nghĩ đến là thiết lập một bất đẳng thức dạng:

  $$a_n \le f(x) \le b_n,$$

  ở đây (a_n), (b_n) là hai dãy được chọn sao cho bất đẳng thức trên đúng với mọi n (ứng với mỗi x cố định). Lúc này, nếu $\lim a_n = \lim b_n = L(x)$ thì bằng cách chuyển sang giới hạn, ta sẽ tìm được công thức tổng quát của $f(x)$ là $L(x)$.

- Nếu cần suy xét một tính chất nào đó của $f(x)$, ta có thể thiết lập một bất đẳng thức dạng:

  $$A(f) \ge a_n B(f),$$

  trong đó $A(f)$, $B(f)$ là hai biểu thức của x và $f(x)$, còn (a_n) là dãy được chọn sao cho bất đẳng thức trên đúng với mọi n (ứng với mỗi x cố định). Lúc này, dựa trên sự hội tụ của a_n, ta có thể đưa ra nhiều kết luận cho $A(f)$ và $B(f)$, từ đó suy ra tính chất của $f(x)$.

  Trong nhiều trường hợp, ta có thể thay (a_n) bằng một biểu thức có chứa ẩn y nào đó thay đổi ngoài x cũng được. Lúc này, việc xét giới hạn hàm số theo y có thể cũng sẽ mang lại nhiều tính chất quan trọng để giúp chúng ta hoàn tất lời giải các bài toán.

Bài toán 1. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn: Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có*

$$f(2x) = 2f(x) \tag{2.1}$$

và

$$\left|f(x) - x\right| \le 1. \tag{2.2}$$

Lời giải. Từ (2.1), bằng cách sử dụng quy nạp, ta chứng minh được

$$f(2^n x) = 2^n f(x)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ và với mọi $n \in \mathbb{N}$. Bây giờ, ta sẽ chứng minh $f(x) =$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thật vậy, giả sử có $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq x_0$. Đặt $f(x_0) = x_0 + \varepsilon$ với $\varepsilon \neq 0$. Khi đó, ta có

$$f(2^n x_0) = 2^n \cdot f(x_0) = 2^n x_0 + 2^n \varepsilon$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Suy ra

$$\left|f(2^n x_0) - 2^n x_0\right| = 2^n |\varepsilon|$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do (2.2) nên $\left|f(2^n x_0) - 2^n x_0\right| \le 1$. Kết hợp với đẳng thức trên, ta thu được

$$2^n |\varepsilon| \le 1$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Tuy nhiên, kết quả này không thể nào thỏa mãn với mọi $n \in \mathbb{N}$. Mâu thuẫn thu được cho ta kết quả vừa khẳng định ở trên, tức $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. □

Bài toán 2 (VMO, 2013-A). *Gọi $\mathcal{F}$ là tập hợp tất các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f(3x) \ge f\big(f(2x)\big) + x$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Tìm hằng số A lớn nhất để với mọi $f \in \mathcal{F}$ và với mọi $x > 0$, ta đều có

$$f(x) \ge Ax.$$

Lời giải. Từ giả thiết, ta suy ra

$$f(x) \ge f\left(f\left(\frac{2x}{3}\right)\right) + \frac{x}{3} \tag{2.3}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Do $f\left(f\left(\frac{2x}{3}\right)\right) > 0$ nên ta có

$$f(x) > \frac{x}{3}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Đặt $a_1 = \frac{1}{3}$. Từ hai bất đẳng thức trên, ta suy ra

$$f(x) > a_1 \cdot f\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{x}{3} > a_1^2 \cdot \frac{2x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{2a_1^2 + 1}{3} x.$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Bằng cách đặt $a_2 = \dfrac{2a_1^2 + 1}{3}$ và áp dụng kết quả vừa thu được vào (2.3), ta có

$$f(x) > a_2 \cdot f\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{x}{3} > a_2^2 \cdot \frac{2x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{2a_2^2 + 1}{3} x$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Bằng cách lặp lại các quy trình đánh giá giống nhau như vậy, ta thu được

$$f(x) > a_n x \tag{2.4}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^+$ và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, trong đó (a_n) là dãy truy hồi được xác định bởi $a_1 = \dfrac{1}{3}$ và

$$a_{n+1} = \frac{2a_n^2 + 1}{3}.$$

Ta chứng minh được (a_n) là dãy tăng và bị chặn trên bởi $\dfrac{1}{2}$ nên có giới hạn hữu hạn. Từ đó dễ dàng tìm được $\lim a_n = \dfrac{1}{2}$. Bây giờ, trong (2.4), ta cho $n \to +\infty$ thì được

$$f(x) \geq (\lim a_n)x = \frac{1}{2}x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Mặt khác, dễ thấy hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2}x$ thỏa mãn điều kiện đề bài. Vậy $A_{\max} = \dfrac{1}{2}$. □

Bài toán 3 (Bulgaria, 2006). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn đẳng thức*

$$f(x+y) - f(x-y) = 4\sqrt{f(x)f(y)} \tag{2.5}$$

với mọi số thực $x > y > 0$.

Có thể đoán được các hàm số thỏa mãn phương trình trên sẽ có dạng $f(x) = kx^2$. Một trong các cách tiếp cận thường thấy là chứng minh $f(2x) = 4f(x)$ dựa trên việc tính $f(5x)$ bằng hai cách để từ đó quy nạp lên $f(nx) = n^2 f(x)$, bước cuối cùng là sử dụng tính đơn điệu của f để suy ra công thức tổng quát cho nó.

Ở đây, chúng tôi sẽ giới thiệu một cách tiếp cận khác để chứng minh $f(2x) = 4f(x)$. Có thể thấy rằng, nếu ta chứng minh được $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ thì từ phương trình đề bài, bằng cách cho $x \to y^+$, ta sẽ thu được đúng điều ta cần.

Lời giải. Trong (2.5), ta thay x bởi $x+y$ thì được

$$f(x+2y) - f(x) = 4\sqrt{f(x+y)f(y)} \tag{2.6}$$

với mọi $x, y > 0$. Từ đây, dễ dàng suy ra f tăng ngặt trên $\mathbb{R}^+$. Từ kết quả này dẫn đến $f(x+y) > f(y)$, và ta cũng suy ra rằng

$$f(x+2y) > 4f(y)$$

với mọi $x, y > 0$. Tiếp tục, ta thay x bởi $x+y$ vào (2.6) và sử dụng bất đẳng thức trên thì được

$$f(x+3y) = f(x+y) + 4\sqrt{f(x+2y)f(y)} > f(y) + 4\sqrt{4f(y)f(y)} = 9f(y).$$

Cứ thế, cứ thế, ta quy nạp lên được rằng:

$$f(x+ny) > n^2 f(y),$$

với mọi $x, y > 0$ và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Thay $y = \dfrac{1}{n}$ vào bất phương trình trên, ta được

$$f\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{f(1+x)}{n^2}$$

với mọi $x > 0$ và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Cố định x và cho $n \to +\infty$, ta thu được $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, từ đó suy ra

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

Bây giờ, trong (2.6), ta cho $y < x$ thì thu được

$$0 < f(x+2y) - f(x) < 4\sqrt{f(2x)f(y)}.$$

Cố định x và cho $y \to 0^+$ thì ta có $\lim\limits_{y\to 0^+}\left[f(x+2y) - f(x)\right] = 0$, hay

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Đến đây, bằng cách cố định y trong (2.5) và cho $x \to y^+$, ta được

$$f(2y) = 4f(y)$$

với mọi $y > 0$. Dựa trên kết quả này, ta có thể quy nạp được

$$f(nx) = n^2 \cdot f(x),$$

với mọi $x > 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$. (Chỉ việc cho $x = 2y, 3y, \ldots, ny$ vào (2.5) là được.) Từ đó suy ra

$$f(n) = n^2 f(1)$$

và

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{f\left(n \times \frac{m}{n}\right)}{n^2} = \frac{f(m)}{n^2} = \frac{m^2}{n^2} f(1)$$

với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$. Nói riêng, ta có $f(x) = kx^2$ với mọi $x \in \mathbb{Q}^+$. Do f đơn điệu và tập $\mathbb{R}^+$ trù mật trong $\mathbb{Q}^+$ nên ta có $f(x) = kx^2$ với mọi $x > 0$. Hàm này thỏa mãn yêu cầu đề bài. $\square$

Bài toán 4 (Bulgaria, 1998). *Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f^2(x) \geq f(x+y)\left[f(x) + y\right] \tag{2.7}$$

với mọi cặp số thực dương x, y.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số f như trên. Khi đó, ta có thể viết lại giả thiết dưới dạng

$$f^2(x) + yf(x) - yf(x) \geq f(x+y)\left[f(x) + y\right],$$

hay

$$\left[f(x) + y\right]\left[f(x) - f(x+y)\right] \geq yf(x).$$

Từ đây, ta có
$$f(x) - f(x+y) \geq \frac{y \cdot f(x)}{f(x)+y}$$
với mọi $x,\ y \in \mathbb{R}^+$. Kết quả trên chứng tỏ f là một hàm giảm thực sự trên $\mathbb{R}^+$. Bây giờ, ta cố định $x_0 \in \mathbb{R}^+$ và chọn số tự nhiên n sao cho $nf(x+1) \geq 1$. Khi đó, ta có
$$\begin{aligned} f\left(x+\frac{k}{n}\right) - f\left(x+\frac{k+1}{n}\right) &\geq \frac{f\left(x+\frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{n}}{f\left(x+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}} > \frac{f(x+1) \times \frac{1}{n}}{f(x+1)+\frac{1}{n}} \\ &\geq \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2n} \end{aligned}$$
với mọi $k \in \mathbb{N},\ k < n$. (Chú ý rằng hàm số $g(t) = \dfrac{t}{t+u}$ với $u > 0$ là hàm tăng trên $\mathbb{R}^+$.)

Trong bất đẳng thức trên, lần lượt cho k nhận giá trị từ 0 đến $n-1$ và cộng tất cả các bất đẳng thức lại theo vế. Khi đó, ta thu được kết quả sau
$$f(x) - f(x+1) > \frac{1}{2} \tag{2.8}$$
với mọi $x > 0$. Bây giờ, chọn số tự nhiên m sao cho $m \geq 2 \cdot f(x)$, ta có
$$f(x) - f(x+m) = \left[f(x) - f(x+1)\right] + \cdots + \left[f(x+m-1) - f(m)\right] > \frac{m}{2} \geq f(x),$$
từ đó suy ra $f(x+m) < 0$, mâu thuẫn. Vậy không tồn tại hàm f nào thỏa mãn (2.7) □

Nhận xét. Bài toán trên cũng xuất hiện trong đề thi IMC năm 1999 và ời giải trên chính là đáp án của nó. Để thiết lập được tính chất (2.8) ở trên, ta đã sử dụng tổng sai phân. Đây là một phép toán thú vị có thể giúp ta thu được nhiều chất quan trọng trong các bài toán có dạng "hiệu" như thế này. Ngoài cách giải đã nêu ở trên, ta cũng có một cách khác sử dụng dãy truy hồi như sau: Thay $y = f(x)$ vào (2.7), ta thu được
$$f\big(x + f(x)\big) \leq \frac{f(x)}{2} \tag{2.9}$$
với mọi $x > 0$. Trong ta thay x bởi $x + f(x)$ thì có
$$f\big(x + f(x) + f\big(x + f(x)\big)\big) \leq \frac{f\big(x+f(x)\big)}{2} \leq \frac{f(x)}{2^2}$$
với mọi $x > 0$. Mặt khác, cũng theo (2.9), ta có $x + f(x) + f\big(x+f(x)\big) \leq x + f(x) + \dfrac{f(x)}{2}$. Từ đó, sử dụng tính nghịch biến của hàm f, ta thu được
$$f\left(x + \left(1+\frac{1}{2}\right)f(x)\right) \leq \frac{f(x)}{2^2} \tag{2.10}$$
với mọi $x > 0$. Từ (2.9) và (2.10) kết hợp với f nghịch biến, bằng cách sử dụng liên tục phép thay x bởi $x + f(x)$, ta dễ dàng chứng minh được
$$f\left(x + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)f(x)\right) \leq \frac{f(x)}{2^{n+1}}$$

với mọi $x > 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Do $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} < 2$ và f giảm nên từ trên, ta suy ra

$$f\left(x + 2 \cdot f(x)\right) \leq \frac{f(x)}{2^{n+1}}$$

với mọi $x > 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Trong bất đẳng thức trên, ta cho $n \to +\infty$ thì thu được

$$f\left(x + 2 \cdot f(x)\right) \leq 0,$$

mâu thuẫn vì f luôn nhận giá trị dương.

Bài toán 5 (Bulgaria, 2008). *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x + y^2) \geq (y + 1) f(x) \tag{2.11}$$

với mọi cặp số thực x, y.

Lời giải. Thay $y = -1$ và thay x bởi $x - 1$ vào (2.11), ta thu được

$$f(x) \geq 0$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.Từ đây, kết hợp với (2.11), ta suy ra

$$f(x + y) \geq \left(\sqrt{y} + 1\right) f(x) \geq f(x)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ và với mọi $y \geq 0$. Kết quả này chứng tỏ f là hàm không giảm trên $\mathbb{R}$.
Bây giờ, ta viết lại (2.11) dưới dạng

$$f(x + y^2) - f(x) \geq y f(x) \tag{2.12}$$

với mọi $x,\ y \in \mathbb{R}$, và xét hai dãy (a_n), (b_n) với $a_0 = b_0 = 0$,

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}, \quad b_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Trong (2.12), ta thay x bởi $x + a_k$ và thay y bởi $\frac{1}{k+1}$ thì có

$$f(x + a_{k+1}) - f(x + a_k) \geq \frac{f(x + a_k)}{k + 1} \geq \frac{f(x)}{k + 1}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $k \in \mathbb{N}$. Trong bất đẳng thức trên, lần lượt cho $k = 0, 1, \ldots, n - 1$ và cộng tất cả các bất đẳng thức lại theo vế, ta thu được

$$f(x + a_n) - f(x) \geq b_n f(x)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}$. Mặt khác, ta dễ dàng chứng minh được $a_n < 2$ và $b_n \to +\infty$ (đây là hai kết quả quen thuộc, bạn đọc có thể tự chứng minh). Do đó, từ bất đẳng thức trên, ta có

$$f(x + 2) - f(x) \geq f(x + a_n) - f(x) \geq b_n f(x)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}$. Nếu tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) > 0$ thì từ bất đẳng thức trên, bằng cách thay $x = x_0$ và cho $n \to +\infty$, ta sẽ thu được điều mâu thuẫn (vế phải tiến đến dương vô cùng trong khi vế trái là hằng số). Do vậy, ta phải có $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Dễ thấy hàm này thỏa mãn các yêu cầu của đề bài. □

Nhận xét. Ngoài cách sử dụng tổng sai phân thông qua hai dãy (a_n), (b_n) như trên, ta cũng có thể tiếp cận bài toán này theo cách khác như sau: Ta xét $x,\ y \geq 0$ và thay y bởi $\sqrt{y}$ vào bất phương trình (2.11) thì thu được

$$f(x+y) \geq \left(\sqrt{y}+1\right) \cdot f(x), \quad \forall x,\ y \geq 0.$$

Đến đây, bằng cách sử dụng liên tiếp bất đẳng thức trên, ta có

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f\left(x + \frac{(n-1)y}{n} + \frac{y}{n}\right) \geq \left(\sqrt{\frac{y}{n}}+1\right) f\left(x + \frac{(n-1)y}{n}\right) \\ &= \left(\sqrt{\frac{y}{n}}+1\right) f\left(x + \frac{(n-2)y}{n} + \frac{y}{n}\right) \geq \left(\sqrt{\frac{y}{n}}+1\right)^2 f\left(x + \frac{(n-2)y}{n}\right) \\ &\cdots \geq \left(\sqrt{\frac{y}{n}}+1\right)^n \cdot f(x) \end{aligned}$$

với mọi $x,\ y \geq 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Từ đó, ta suy ra

$$f(x) = 0 \tag{2.13}$$

với mọi $x \geq 0$. Thật vậy, giả sử tồn tại $x_0 \geq 0$ sao cho $f(x_0) > 0$. Thay $x = x_0$ vào bất đẳng thức trên và cố định $y = y_0 > 0$, sau đó cho $n \to +\infty$ thì có

$$\frac{f(x_0+y_0)}{f(x_0)} \geq \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \sqrt{\frac{y}{n}}\right)^n = +\infty.$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ không tồn tại số x_0 nói trên, hay nói cách khác, (2.13) đúng. Bây giờ, ta xét $x < 0$ và thay $y = \sqrt{-x}$ vào (2.11) thì được

$$0 = f(0) \geq \left(\sqrt{-x}+1\right) f(x) \geq 0$$

với mọi $x < 0$. Từ đó suy ra $f(x) = 0$ với mọi $x < 0$. Tóm lại, ta có $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Đôi khi, ta cũng có thể sử dụng công thức nghiệm của các phương trình sai phân để tìm công thức tổng quát cho các dãy lặp của $f(x)$, rồi từ đó dựa vào miền giá trị của $f(x)$ mà suy ra những tính chất đặc biệt của hàm số được cho.

Bài toán 6. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn*

$$f\left(f(x)\right) = 6x - f(x)$$

với mọi số thực dương x.

Lời giải. Cố định $x > 0$ và đặt $f_0(x) = x,\ f_n(x) = f\left(f_{n-1}(x)\right)$. Từ giả thiết, bằng cách sử dụng quy nạp, ta chứng minh được

$$f_{n+2}(x) + f_{n+1}(x) - 6f_n(x) = 0$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Đây là phương trình sai phân tuyến tính cấp hai nên bằng cách xét phương trình đặc trưng của nó, ta tìm được công thức tổng quát của $f_n(x)$ là

$$f_n(x) = \frac{2x - f(x)}{5} \times (-3)^n + \frac{3x + f(x)}{5} \times 2^n$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do $f_n(x) > 0$ nên kết quả trên, ta suy ra

$$\left[2x - f(x)\right]\left(-\frac{3}{2}\right)^n + 3x + f(x) > 0$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Nếu $2x - f(x) > 0$ thì bằng cách xét n lẻ, $n = 2k + 1$ và cho $k \to +\infty$, ta có thể thấy bất đẳng thức trên sẽ không thể luôn đúng. Còn nếu $2x - f(x) < 0$ thì bằng cách xét n chẵn, $n = 2k$ và cho $k \to +\infty$, ta cũng thu được kết luận tương tự. Do vậy, ta phải có

$$f(x) = 2x.$$

Hàm này thoả mãn các yêu cầu của bài toán. □

Nhận xét. Bài toán trên cũng có thể được giải bằng phương pháp kẹp dãy số như sau: Xét hai dãy số (a_n) và (b_n) được xác định bởi $a_0 = 0$, $b_0 = 6$ và

$$a_{n+1} = \frac{6}{1 + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{6}{1 + a_n}.$$

Dễ thấy $a_n, b_n > 0$ với mọi $n \geq 1$. Ta có

$$a_{n+2} = \frac{6}{1 + b_{n+1}} = \frac{6}{1 + \frac{6}{1+a_n}} = \frac{6(1 + a_n)}{a_n + 7},$$

do đó

$$|a_{n+2} - 2| = \frac{4|a_n - 2|}{a_n + 7} \leq \frac{4}{7}|a_n - 2|.$$

Từ đây, bằng cách sử dụng nguyên lý ánh xạ co, ta chứng minh được $\lim a_{2n} = \lim a_{2n+1} = 2$, hay $\lim a_n = 2$. Tương tự, ta cũng có $\lim b_n = 2$.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng

$$a_n x < f(x) < b_n x \tag{2.14}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do $f\big(f(x)\big) > 0$ nên $6x - f(x) > 0$, từ đây ta dễ thấy khẳng định đúng với $n = 0$. Giả sử khẳng định đúng với $n = k$, tức ta có

$$a_k x < f(x) < b_k x.$$

Khi đó, thay x bởi $f(x)$ vào bất đẳng thức trên và sử dụng giả thiết, ta thu được

$$a_k f(x) < f\big(f(x)\big) < b_k f(x),$$

hay

$$a_k f(x) < 6x - f(x) < b_k f(x).$$

Từ đây, ta dễ dàng suy ra

$$a_{k+1}x = \frac{6}{1 + b_k}x < f(x) < \frac{6}{1 + a_k}x = b_{k+1}x.$$

Như vậy, khẳng định cũng đúng với $n = k + 1$. Bất đẳng thức (2.14) được chứng minh.

Bây giờ, trong (2.14), bằng cách cho $n \to +\infty$ và chú ý $\lim a_n = \lim b_n = 2$ như đã chứng minh ở trên, ta dễ dàng suy ra $f(x) = 2x$ với mọi $x > 0$.

Bài toán 7 (APMO, 1989). *Tìm tất cả các song ánh tăng thực sự $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f(x) + g(x) = 2x$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$, trong đó $g(x)$ là hàm ngược của $f(x)$.

Lời giải. Đặt $f_0(x) = x$ và $f_n(x) = f\big(f_{n-1}(x)\big)$, tương tự cho $g_n(x)$. Thay x bởi $f(x)$ vào phương trình đề bài, ta được $f_2(x) + x = 2f(x)$. Từ đó, bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$f_{n+2}(x) - 2f_{n+1}(x) + f_n(x) = 0.$$

Giải phương trình sai phân này, ta tìm được

$$f_n(x) = x + n\big[f(x) - x\big]$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Một cách tương tự, ta cũng chứng minh được

$$g_n(x) = x + n\big[g(x) - x\big] = x - n\big[f(x) - x\big].$$

Do $f(x)$ là song ánh tăng ngặt nên $f_n(x)$ và $g_n(x)$ cũng là các hàm tăng thực sự. Do đó, với mọi $x > y$, ta đều có $f_n(x) > f_n(y)$ và $g_n(x) > g_n(y)$. Nói cách khác, ta có

$$x + n\big[f(x) - x\big] > y + n\big[f(y) - y\big] \Leftrightarrow n\Big\{\big[f(x) - x\big] - \big[f(y) - y\big]\Big\} > y - x \tag{2.15}$$

và

$$x - n\big[f(x) - x\big] > y - n\big[f(y) - y\big] \Leftrightarrow n\Big\{\big[f(x) - x\big] - \big[f(y) - y\big]\Big\} < x - y. \tag{2.16}$$

Nếu $f(x) - x > f(y) - y$ thì bằng cách cho $n \to +\infty$ trong (2.16), ta thu được điều mâu thuẫn. Còn nếu $f(x) - x < f(y) - y$ thì bằng cách cho $n \to +\infty$ trong (2.15), ta cũng có kết quả tương tự. Do vậy, ta phải có

$$f(x) - x = f(y) - y$$

với mọi $x > y$. Nói cách khác, $f(x) = x + c$ với mọi x (ở đây c là một hằng số nào đó). Hàm này thoả mãn các yêu cầu của bài toán. □

Nhận xét. Bài toán này cũng là đề dự tuyển IMO năm 1979.

Bài toán 8 (BMO, 2009). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thoả mãn*

$$f\big(f^2(m) + 2f^2(n)\big) = m^2 + 2n^2 \tag{2.17}$$

với mọi cặp số nguyên dương m, n.

Lời giải. Từ giả thiết, dễ thấy f đơn ánh. Chú ý rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta đều có

$$(n+4)^2 + 2(n+1)^2 = n^2 + 2(n+3)^2.$$

Suy ra

$$f\big(f^2(n+4) + 2f^2(n+1)\big) = f\big(f^2(n) + 2f^2(n+3)\big).$$

Do f đơn ánh nên từ đẳng thức này, ta suy ra

$$f^2(n+4) + 2f^2(n+1) = f^2(n) + 2f^2(n+3).$$

Đây là phương trình sai phân tuyến tính cấp 4 của dãy $f^2(n)$. Giải phương trình này, ta tìm được

$$f^2(n) = An^2 + Bn + C + D(-1)^n \tag{2.18}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Bây giờ, ta sẽ tìm các giá trị cụ thể của A, B, C, D. Lấy bình phương hai vế của (2.17) và sử dụng (2.18), ta được

$$\begin{aligned} &A\big[A(m^2+2n^2) + B(m+2n) + 3C + D(-1)^m + 2D(-1)^n\big]^2 \\ &\quad + B\big[A(m^2+2n^2) + B(m+2n) + 3C + D(-1)^m + 2D(-1)^n\big] \\ &\quad + C + D(-1)^{A(m^2+2n^2)+B(m+2n)+3C+D(-1)^m+2D(-1)^n} = (m^2+2n^2)^2. \end{aligned}$$

Cố định n. Chia hai vế của đẳng thức trên cho m^4 rồi cho $m \to +\infty$, ta tìm được $A = 1$. Do đó

$$\begin{aligned} &\big[(m^2+2n^2) + B(m+2n) + 3C + D(-1)^m + 2D(-1)^n\big]^2 \\ &\quad + B\big[(m^2+2n^2) + B(m+2n) + 3C + D(-1)^m + 2D(-1)^n\big] \\ &\quad + C + D(-1)^{(m^2+2n^2)+B(m+2n)+3C+D(-1)^m+2D(-1)^n} = (m^2+2n^2)^2, \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned} &2(m^2+2n^2)\big[B(m+2n) + 3C + D(-1)^m + 2D(-1)^n\big] \\ &\quad + \big[B(m+2n) + 3C + D(-1)^m + 2D(-1)^n\big]^2 \\ &\quad + B\big[(m^2+2n^2) + B(m+2n) + 3C + D(-1)^m + 2D(-1)^n\big] \\ &\quad + C + D(-1)^{(m^2+2n^2)+B(m+2n)+3C+D(-1)^m+2D(-1)^n} = 0. \end{aligned}$$

Cố định n. Chia hai vế của đẳng thức trên cho m^3 rồi cho $m \to +\infty$, ta tìm được $B = 0$. Do đó, đẳng thức trên có thể được viết lại thành

$$\begin{aligned} 2(m^2+2n^2)\big[3C + D(-1)^m + 2D(-1)^n\big] + \big[3C + D(-1)^m + 2D(-1)^n\big]^2 \\ + C + D(-1)^{(m^2+2n^2)+3C+D(-1)^m+2D(-1)^n} = 0. \end{aligned}$$

Trong đẳng thức trên, xét m chẵn, n chẵn và cho $m, n \to +\infty$, ta dễ thấy $C + D = 0$. Tương tự, xét m lẻ, n lẻ và cho $m, n \to +\infty$, ta cũng có $C - D = 0$. Do đó $C = D = 0$. Tóm lại, ta có $A = 1$ và $B = C = D = 0$. Suy ra $f^2(n) = n$, hay $f(n) = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Hàm này thoả mãn các yêu cầu của bài toán. $\square$

Đôi khi, ta phải xử lý các bài toán với hàm liên tục. Khi đó, các tính chất thường được sử dụng là:

- Nếu hàm số f liên tục tại x_0 thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Nếu hàm số f liên tục từ khoảng A vào khoảng B và đơn ánh ($A, B \subseteq \mathbb{R}$) thì nó là hàm đơn điệu thực sự.
- Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì nó có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn đó.

- Nếu hàm số f liên tục từ khoảng $A \subseteq \mathbb{R}$ vào khoảng $B \subseteq \mathbb{R}$, và $f(x_1) = a$, $f(x_2) = b$ (với $x_1, x_2 \in A$ và $a, b \in B$, $a < b$) thì f có thể nhận mọi giá trị trên $[a, b]$.
- Nếu hàm số f liên tục từ A vào B và $f(x) \neq M$ ($A, B \subseteq R$, M là hằng số) thì một trong hai điều sau sẽ được thoả mãn:
  - $f(x) > M$ với mọi $x \in A$;
  - $f(x) < M$ với mọi $x \in A$.

Bài toán 9. *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f\big(f(x)\big) = f(x) + 2x$$

với mọi số thực x.

Lời giải. Từ giả thiết, dễ thấy f đơn ánh và $f(0) = 0$. Do f liên tục nên nó là hàm đơn điệu thực sự. Tiếp theo, ta sẽ chứng minh f là toán ánh. Thật vậy, giả sử tồn tại số $a \in \mathbb{R}$ để $f(x) \neq a$ với mọi số thực x. Khi đó, ta có $f(x) > a$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) < x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giả sử $f(x) > a$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nếu f giảm ngặt thì ta có

$$2x + a < 2x + f(x) = f\big(f(x)\big) < f(a)$$

với mọi x, mâu thuẫn. Do đó f tăng ngặt. Suy ra, với mọi $x < 0$, ta có

$$f(x) > f(x) + 2x = f\big(f(x)\big) > f(a).$$

Do f tăng ngặt nên từ đây, ta có $x > a$ với mọi $x < 0$, mâu thuẫn.

Tương tự, trong trường hợp $f(x) < a$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta cũng thu được điều mâu thuẫn. Như vậy, f là toàn ánh và do đó nó là song ánh.

Bây giờ, đặt $f_0(x) = x$ và $f_n(x) = f\big(f_{n-1}(x)\big)$, ta chứng minh được

$$f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) - 2f_n(x) = 0$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Từ đó suy ra

$$f_n(x) = \frac{2x - f(x)}{3} \times (-1)^n + \frac{x + f(x)}{3} \times 2^n.$$

Do f là song ánh nên nó tồn tại hàm ngược. Gọi $g(x)$ là hàm ngược của $f(x)$ và đặt $g_0(x) = x$, $g_n(x) = g\big(g_{n-1}(x)\big)$. Thay x bởi $g(x)$ vào phương trình ban đầu, ta được

$$2g(x) + x - f(x) = 0 \tag{2.19}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Trong (2.19), ta tiếp tục thay x bởi $g(x)$ thì thu được

$$2g_2(x) + g(x) - x = 0$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Từ đó, bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$2g_{n+2}(x) + g_{n+1}(x) - g_n(x) = 0$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Suy ra

$$g_n(x) = \frac{x - 2g(x)}{3} \times (-1)^n + \frac{2x + 2g(x)}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Từ (2.19) suy ra $2g(x) = f(x) - x$. Do đó

$$g_n(x) = \frac{2x - f(x)}{3} \times (-1)^n + \frac{x + f(x)}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: *f tăng ngặt.* Dễ thấy $f_n(x)$ và $g_n(x)$ cũng tăng ngặt. Do $f(0) = 0$ nên $g(0) = 0$ và $g_n(0) = 0$. Với mỗi số thực $x > 0$, ta có $g_n(x) > g_n(0) = 0$ nên

$$\frac{2x - f(x)}{3} \times (-1)^n + \frac{x + f(x)}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Nếu $2x - f(x) > 0$ thì bằng cách cho n lẻ và $n \to +\infty$, ta sẽ thu được điều mâu thuẫn. Còn nếu $2x - f(x) < 0$ thì bằng cách cho n chẵn và $n \to +\infty$, ta cũng thu được kết quả tương tự. Do đó, ta có $f(x) = 2x$ với mọi $x > 0$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $f(x) = 2x$ với mọi $x < 0$. Như vậy, trong trường hợp này, ta tìm được $f(x) = 2x$. Hàm này thoả mãn các yêu cầu của bài toán.

Trường hợp 2: *f giảm ngặt.* Dễ thấy $f_{2n}(x)$ tăng ngặt, $f_{2n+1}(x)$ giảm ngặt và $f_n(0) = 0$. Với mỗi $x > 0$, ta có $f_{2n}(x) > f_{2n}(0) = 0 = f_{2n+1}(0) > f_{2n+1}(x)$ nên

$$\frac{2x - f(x)}{3} + \frac{x + f(x)}{3} \times 4^n > 0 > \frac{f(x) - 2x}{3} + \frac{x + f(x)}{3} \times 2^{2n+1}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Nếu $x + f(x) < 0$ thì bằng cách cho $n \to +\infty$, bất đẳng thức về trái sẽ không thể thoả mãn. Còn nếu $x + f(x) > 0$ thì bằng cách cho $n \to +\infty$, bất đẳng thức về bên phải cũng không thể thoả mãn. Do vậy, ta phải có $f(x) = -x$ với mọi $x > 0$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $f(x) = -x$ với mọi $x < 0$. Tóm lại, trong trường hợp này, ta có $f(x) = -x$ với mọi x. Hàm này cũng thoả mãn các yêu cầu của bài toán. □

Bài toán 10 (Chọn đội tuyển ĐH Vinh, 2012). *Tìm tất cả các hàm số f liên tục từ tập $[0, +\infty)$ vào $[0, +\infty)$ thoả mãn đẳng thức*

$$2f(x) = f\left(\frac{x}{x^2 + x + 1}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

với mọi số thực không âm x.

Lời giải. Do f liên tục trên $[0, +\infty)$ nên nó cũng liên tục trên $[0, 1]$. Từ đó suy ra tồn tại các số $a, b \in [0, 1]$ sao cho

$$f(a) = \max_{x \in [0, 1]} f(x) = M$$

và

$$f(b) = \min_{x \in [0, 1]} f(x) = m.$$

Do $2M = 2f(a) = f\left(\frac{a+1}{2}\right) + f\left(\frac{a}{a^2+a+1}\right)$ và

$$f\left(\frac{a+1}{2}\right) \le M, \quad f\left(\frac{a}{a^2+a+1}\right) \le M$$

(chú ý rằng $\frac{a+1}{2} \le 1$ và $\frac{a}{a^2+a+1} < 1$) nên ta suy ra

$$f\left(\frac{a+1}{2}\right) = M.$$

Từ đây, bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$f\left(\frac{a+2^n-1}{2^n}\right) = M$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Trong đẳng thức này, cho $n \to +\infty$, ta được $f(1) = M$. Chứng minh tương tự, ta cũng có $f(1) = m$. Do đó $M = m$. Điều này chứng tỏ f là hàm hằng trên đoạn $[0,\ 1]$.

Giả sử $f(x) \equiv c$ với mọi $x \in [0,\ 1]$. Khi đó, ta có thể viết lại phương trình ban đầu dưới dạng

$$f(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{2}c.$$

Từ đẳng thức này, ta chứng minh bằng quy nạp được

$$f(x) = \frac{1}{2^n}f\left(\frac{x+2^n-1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)c$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Cho $n \to +\infty$, ta được $f(x) \equiv c$. Hàm này thoả mãn yêu cầu đề bài. □

Bài toán 11. *Tìm tất cả các hàm số f liên tục từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f\big(x + f(y+z)\big) + f\big(y + f(z+x)\big) + f\big(z + f(x+y)\big) = 0 \tag{2.20}$$

với mọi bộ số thực $x,\ y,\ z$.

Lời giải. Dễ thấy $f(x) \equiv 0$ là một nghiệm của phương trình nên ở đây ta chỉ cần xét $f(x) \not\equiv 0$. Thay $x,\ y,\ z$ bởi $\frac{x}{2}$ vào (2.20), ta thu được

$$f\left(\frac{x}{2} + f(x)\right) = 0$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tiếp tục, thay x bởi $\frac{x}{2} + f(x)$ vào đẳng thức trên, ta được

$$f\left(\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2}f(x)\right) = 0$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Từ đây, bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$f\left(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n}f(x)\right) = 0$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Trong đẳng thức trên, cố định x và cho $n \to +\infty$, sau đó sử dụng tính liên tục của f, ta suy ra $f(0) = 0$. Từ đây, bằng cách thay $x = y$ và $z = -x$ vào (2.20), ta có

$$f\big(f(2x) - x\big) = -2f(x)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do $f(x) \not\equiv 0$ nên tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) \neq 0$. Xét dãy (a_n) được xác định bởi $a_0 = x_0$ và $a_{n+1} = f(2a_n) - a_n$. Khi đó, dễ thấy

$$f(a_n) = -2f(a_{n-1}) = (-2)^2 f(a_{n-2}) = \cdots = (-2)^n f(x_0)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Nếu $f(x_0) > 0$ thì ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_{2n}) = +\infty$ và

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_{2n-1}) = -\infty.$$

Còn nếu $f(x_0) < 0$ thì ta có kết quả ngược lại. Nhưng trong cả hai trường hợp này, ta đều thấy rằng $f(x)$ không bị chặn, mà f liên tục nên nó toàn ánh.

Đến đây, bằng cách thay $y = z = 0$ vào (2.20), ta có

$$2f\big(f(x)\big) + f(x) = 0$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do f toàn ánh nên ta có $f(x) = -\dfrac{x}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $f(x) = 0$ và $f(x) = -\dfrac{x}{2}$. □

Bài toán 12 (IMO, 2013). *Cho hàm số f xác định trên tập $\mathbb{Q}^+$ và nhận giá trị trong tập $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

(1) $f(x)f(y) \geq f(xy)$ *với mọi* $x, y \in \mathbb{Q}^+$; (2.21)

(2) $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ *với mọi* $x, y \in \mathbb{Q}^+$; (2.22)

(3) *tồn tại một số hữu tỉ* $a > 1$ *sao cho* $f(a) = a$. (2.23)

Chứng minh rằng $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{Q}^+$.

Lời giải. Thay $x = a$ và $y = 1$ vào (2.21), ta được $a \cdot f(1) \geq a$, tức $f(1) \geq 1$. Từ đây, bằng cách sử dụng quy nạp kết hợp với (2.22), ta chứng minh được

$$f(n) \geq n$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Thay $x = \dfrac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$ và $y = q$ vào (2.21), ta được

$$f\left(\frac{p}{q}\right) \cdot f(q) \geq f(p) \geq p > 0.$$

Mà $f(q) \geq q > 0$ nên từ đây ta có

$$f(x) > 0$$

với mọi $x \in \mathbb{Q}^+$. Kết hợp với (2.22), ta suy ra $f(x)$ là hàm tăng thực sự trên $\mathbb{Q}^+$. Bây giờ, từ (2.21), sử dụng quy nạp kết hợp với $f(a) = a$, ta thu được

$$f(a^n) \leq a^n$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta sẽ chứng minh
$$f(x) \geq x \tag{2.24}$$
với mọi $x \geq 1$, $x \in \mathbb{Q}^+$. Thật vậy, giả sử có $x_0 \geq 1$ sao cho $f(x_0) < x_0$. Khi đó, đặt $f(x_0) = x_0 - \varepsilon$ với $0 < \varepsilon < x_0$. Sử dụng quy nạp kết hợp với (2.21), ta có

$$f(x_0^n) \leq f^n(x_0) = (x_0 - \varepsilon)^n$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Mặt khác, do f tăng nên ta có

$$f(x_0^n) \geq f\left(\lfloor x_0^n \rfloor\right) \geq \lfloor x_0^n \rfloor \geq x_0^n - 1.$$

Do đó, kết hợp với bất đẳng thức trên, ta thu được

$$x_0^n - 1 \leq (x_0 - \varepsilon)^n$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Nhưng, một điều rõ ràng là bất đẳng thức này sẽ sai với n đủ lớn. Mâu thuẫn này cho ta điều vừa khẳng định, tức (2.24) đúng. Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$f(x) = x \tag{2.25}$$

với mọi $x \geq 1$, $x \in \mathbb{Q}^+$. Chọn $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $a^n \geq x + 1$. Khi đó, ta có

$$a^n \geq f(a^n) = f\left((a^n - x) + x\right) \geq f(a^n - x) + f(x) \geq (a^n - x) + x = a^n.$$

Do vậy, dấu đẳng thức trong các đánh giá phải xảy ra và do đó (2.25) đúng.

Thay $x = \dfrac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$ và $y = q$ vào (2.21), ta suy ra

$$f(x) \geq x$$

với mọi $x \in \mathbb{Q}^+$. Từ (2.22) sử dụng phương pháp quy nạp, ta có

$$f(nx) \geq nf(x)$$

với mọi $x \in \mathbb{Q}^+$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Từ đó, cho $x = \dfrac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$ và $n = q$, ta được

$$f(x) \leq x$$

với mọi $x \in \mathbb{Q}^+$. Vậy $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{Q}^+$. Ta thu được kết quả cần chứng minh. □

Bài toán 13. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:*

(1) $f(x + 1) \geq f(x) + 1$ *với mọi* $x \in \mathbb{R}$; (2.26)

(2) $f(xy) \geq f(x)f(y)$ *với mọi* $x, y \in \mathbb{R}$. (2.27)

Lời giải. Thay $x = y$ vào (2.27), ta được $f(x^2) \geq f^2(x) \geq 0$. Từ đó suy ra $f(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$. Do đó, bằng cách thay $x = 0$ vào (2.26), ta có $f(1) \geq f(0) + 1 \geq 1$. Tiếp tục, thay $x = y = 1$ vào (2.26), ta có $f(1) \geq f^2(1)$, tức $0 \leq f(1) \leq 1$. Kết hợp với trên, ta được $f(1) = 1$ và do đó $f(0) = 0$. Từ (2.26) và (2.27), bằng quy nạp ta có

$$f(x + n) \geq f(x) + n \tag{2.28}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, và
$$f(x^n) \geq f^n(x) \tag{2.29}$$
với mọi $x \geq 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Sử dụng (2.28), với mỗi $x > 0$, ta có
$$f(x) = f\big(\{x\} + \lfloor x \rfloor\big) \geq f\big(\{x\}\big) + \lfloor x \rfloor \geq \lfloor x \rfloor > x - 1.$$
Từ đây, kết hợp với (2.29) và (2.27), với mỗi $x > 1$ và với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta thấy rằng
$$(x^n - 1) f^n\left(\frac{1}{x}\right) \leq f(x^n) f\left(\frac{1}{x^n}\right) \leq f(1) = 1.$$
Do vậy, ta có
$$f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{\sqrt[n]{x^n - 1}}$$
với mọi $x > 1$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Trong bất đẳng thức trên, cố định $x > 1$ và cho $n \to +\infty$, ta thu được $f\big(\frac{1}{x}\big) \leq \frac{1}{x}$, hay nói cách khác (chú ý rằng $f(0) = 0$ và $f(1) = 1$),
$$f(x) \leq x \tag{2.30}$$
với mọi $x \in [0,\ 1]$. Mặt khác, do (2.26) nên ta cũng chứng minh bằng quy nạp được rằng
$$f(x - n) \leq f(x) - n$$
với mọi $n \in \mathbb{N}$. Với mỗi $x < 0$, ta có $\lfloor x \rfloor < 0$ nên
$$f(x) = f\big(\{x\} + \lfloor x \rfloor\big) \leq f\big(\{x\}\big) + \lfloor x \rfloor \leq \{x\} + \lfloor x \rfloor = x. \tag{2.31}$$
Trong (2.27), ta thay $x = y = t$ với $t \in [-1,\ 0]$ thì có
$$f^2(t) \leq f(t^2) \leq t^2$$
nên suy ra $t \leq f(t) \leq -t$. Kết hợp với kết quả ở trên, ta thu được $f(t) = t$ với mọi $t \in [-1,\ 0]$. Bây giờ, với mỗi $x < -1$, sử dụng kết quả trên, ta có
$$\frac{1}{x^2} f^2(x) = f^2(x) f^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq f(x^2) f\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq f(1) = 1$$
nên $f^2(x) \leq x^2$, suy ra $x \leq f(x) \leq -x$. Kết hợp kết quả này với (2.31), ta được $f(x) = x$ với mọi $x \leq 0$. Tiếp tục, thay $y = -1$ vào (2.27) và xét $x > 0$ thì có
$$-x = f(-x) \geq f(x) f(-1) = -f(x),$$
suy ra $f(x) \geq x$ với mọi $x > 0$. Kết hợp kết quả này với (2.30), ta được $f(x) = x$ với mọi $x \in (0,\ 1)$. Cuối cùng, xét $x > 1$, ta có
$$\frac{1}{x} f(x) = f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) \leq f(1) = 1$$
nên $f(x) \leq x$. Kết hợp với bất đẳng thức $f(x) \geq x$, ta được $f(x) = x$ với mọi $x > 1$. Tóm lại, ta đã chứng minh được $f(x) = x$ với mọi x và hàm này thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. $\square$

Bài toán 14 (MOSP, 2007). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và*

$$f\left(yf(x) + \frac{x}{y}\right) = xy \cdot f(x^2 + y^2) \tag{2.32}$$

với mọi cặp số thực x, y $(y \neq 0)$.

Lời giải. Thay $x = 0$ vào (2.32), ta được $f\big(yf(0)\big) = 0$. Nếu $f(0) \neq 0$ thì bằng cách chọn $y = \dfrac{1}{f(0)}$, ta được $f(1) = 0$, mâu thuẫn với giả thiết. Do đó, ta phải có $f(0) = 0$.

Bây giờ, giả sử rằng tồn tại $a_1 \neq 0$ sao cho $f(a_1) = 0$. Thay $x = a_1$ và $y = 1$ vào (2.32), ta được $f(a_1^2 + 1) = 0$. Từ đó, ta có thể xây dựng được dãy (a_n) với $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ thỏa mãn

$$f(a_n) = 0$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Thay $x = 1$ vào (2.32), ta được

$$f\left(y + \frac{1}{y}\right) = yf(y^2 + 1)$$

với mọi $y \neq 0$. Tiếp tục, thay x bởi $x + \dfrac{1}{x}$ vào (2.32) và sử dụng kết quả trên, ta có

$$f\left(xyf(x^2 + 1) + \frac{x^2 + 1}{xy}\right) = \frac{y(x^2 + 1)}{x} f\left(\frac{(x^2 + 1)^2 + x^2y^2}{x^2}\right)$$

với mọi $x, y \neq 0$. Thay y bởi $\dfrac{y}{x}$ vào phương trình trên, ta được

$$f\left(yf(x^2 + 1) + \frac{x^2 + 1}{y}\right) = \frac{y(x^2 + 1)}{x^2} f\left(\frac{(x^2 + 1)^2 + y^2}{x^2}\right)$$

với mọi $x, y \neq 0$. Mặt khác, sử dung (2.32), ta cũng có

$$f\left(yf(x^2 + 1) + \frac{x^2 + 1}{y}\right) = y(x^2 + 1) f\big((x^2 + 1)^2 + y^2\big).$$

Kết hợp với đẳng thức trên, ta được

$$\frac{y(x^2 + 1)}{x^2} f\left(\frac{(x^2 + 1)^2 + y^2}{x^2}\right) = y(x^2 + 1) f\big((x^2 + 1)^2 + y^2\big),$$

hay

$$f\left(\frac{(x^2 + 1)^2 + y^2}{x^2}\right) = x^2 f\big((x^2 + 1)^2 + y^2\big) \tag{2.33}$$

với mọi $x, y \neq 0$. Nếu $f(x) = 0, \forall x > 4$ thì bằng cách thay $x = y = 5$ vào (2.32), ta thu được điều mâu thuẫn. Do đó, tồn tại một số thực $b > 4$ sao cho $f(b) \neq 0$. Do $\lim a_n = +\infty$

nên tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho $a_m > b$. Bây giờ, với chú ý rằng $b > 4 > \left(\frac{b}{a_m} + 1\right)^2$, ta có thể chọn $x^2 = \frac{b}{a_m}$ và $y^2 = b - \left(\frac{b}{a_m} + 1\right)^2$ để có

$$\begin{cases} (x^2+1)^2 + y^2 = b \\ \dfrac{(x^2+1)^2 + y^2}{x^2} = a_m \end{cases}$$

Thay các số này vào (2.33), ta thu được $f(a_m) = \frac{b}{a_m} f(b)$, hay $f(b) = 0$, mâu thuẫn. Và như thế, ta đã chứng minh được $f(x) = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

Bây giờ, với mỗi $x \neq 0$, ta có thể chọn y sao cho $yf(x) + \frac{x}{y} = x^2 + y^2$ (đây là phương trình bậc ba ẩn y nên luôn có ít nhất một nghiệm thực). Thay vào (2.32), ta được

$$(1 - xy) f(x^2 + y^2) = 0.$$

Tuy nhiên, theo chứng minh trên thì $f(x^2 + y^2) \neq 0$. Do đó, ta phải có $y = \frac{1}{x}$. Suy ra

$$\frac{1}{x} f(x) + x^2 = x^2 + \frac{1}{x^2},$$

từ đây ta dễ dàng tìm được $f(x) = \frac{1}{x}$ với mọi $x \neq 0$. Ta đi đến kết luận:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \end{cases}$$

Hàm này thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. □

3. Một số bất phương trình hàm được xây dựng trên các tập rời rạc

Bài toán 15. *Với mỗi hàm $g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, $g(1) = 1$ cho trước, chứng minh rằng luôn tồn tại hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thoả mãn*

$$f(n) > g(n)$$

với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, và

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

với mọi cặp số nguyên dương nguyên tố cùng nhau m, n.

Lời giải. Ta sẽ xây dựng hàm f thoả mãn các điều kiện trên. Xét dãy

$$\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}^+} = (2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \ldots)$$

là dãy tăng các luỹ thừa của các số nguyên tố. Các số trong dãy có dạng $p_i^{\alpha_j}$ được xếp theo thứ tự tăng dần. Ta có nhận xét rằng, nếu một hàm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ có tính chất $f(mn) = f(m)f(n)$ khi $(m, n) = 1$ thì các giá trị của nó sẽ được xác định dựa trên dãy $f(a_i)$.

Ta thiết lập dãy $f(a_i)$ bằng phép quy nạp như sau:

- Chọn $f(a_1) > g(a_1)$.
- Giả sử các số $f(a_1)$, $f(a_2)$, $\ldots$, $f(a_{k-1})$ đã được xác lập. Xét tất cả các số dạng $g(s)$, với s là tích của các số khác nhau từ tập $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Ta sẽ chọn số bất kỳ $f(a_k)$ lớn hơn tất cả các số dạng $g(s)$.

Ta đã chọn được dãy giá trị $f(a_i)$ và thêm điều kiện nhân tính ($f(mn) = f(m)f(n)$) sẽ xác lập nên hàm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$. Hàm f được thiết lập như trên thoả mãn các yêu cầu của đề bài.

Thật vậy, với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, ta có thể biểu diễn $n = a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_p}$ với $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$. Do đó

$$f(n) = f(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_p}) = f(a_{i_1})f(a_{i_2})\cdots f(a_{i_p}) \geq f(a_{i_p}) > g(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_p}) = g(n).$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Bài toán 16 (Trung Quốc, 1993). *Cho hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn*

$$f(xy) \leq f(x)f(y) \tag{3.1}$$

với mọi $x, y > 0$. Chứng minh rằng với mọi $x > 0$ và $n \in \mathbb{Z}^+$ thì

$$f(x^n) \leq f(x)\sqrt{f(x^2)}\sqrt[3]{f(x^3)}\cdots\sqrt[n]{f(x^n)}. \tag{3.2}$$

Lời giải. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n. Dễ thấy khẳng định đúng với $n = 1$. Giả sử khẳng định (3.2) đúng với các số $1, 2, \ldots, n$. Khi đó, ta có

$$f(x^k) \leq f(x)\sqrt{f(x^2)}\sqrt[3]{f(x^3)}\cdots\sqrt[k]{f(x^k)}$$

với $k = 1, 2, \ldots, n$. Nhân n bất phương trình trên lại, ta thu được

$$f^n(x)f^{\frac{n-1}{2}}(x^2)\cdots f^{\frac{1}{n}}(x^n) \geq f(x)f(x^2)\cdots f(x^n).$$

Nhân cả hai vế của bất phương trình trên với $f(x)f(x^2)\cdots f(x^n)$, ta được

$$f^{n+1}(x)f^{\frac{n+1}{2}}(x^2)\cdots f^{\frac{n+1}{n}}(x^n) \geq f^2(x)f^2(x^2)\cdots f^2(x^n).$$

Mặt khác, sử dụng (3.1), ta lại có

$$\text{VP} = \prod_{i=1}^{n}\left[f(x^i)f(x^{n+1-i})\right] \geq f^n(x^{n+1}).$$

Kết hợp với đánh giá ở trên, ta suy ra

$$f^{n+1}(x)f^{\frac{n+1}{2}}(x^2)\cdots f^{\frac{n+1}{n}}(x^n) \geq f^n(x^{n+1}).$$

Nhân hai vế của bất phương trình cuối cho $f(x^{n+1})$ và lấy căn bậc $n+1$ hai vế, ta suy ra khẳng định (3.2) cũng đúng với $n+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có khẳng định đúng với mọi n. □

Nhận xét. Bằng cách đặt $a_n = \ln f(x^n)$, ta có thể phát biểu bài toán trên lại dưới dạng dãy số như sau: Cho $a_1, a_2, \ldots$ là dãy các số thực thoả mãn $a_{i+j} \leq a_i + a_j$ với mọi $i, j = 1, 2, \ldots$ Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ thì

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geq a_n.$$

Bài toán này đã được sử dụng ở kỳ thi APMO năm 1999.

Bài toán 17. *Tìm tất cả các số $a > 0$ sao cho tồn tại hằng số $K > 0$ và hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn*

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + K|x-y|^a$$

với mọi cặp số thực x, y.

Lời giải. Từ giả thiết, ta suy ra

$$\frac{f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+3y}{4}\right) + \frac{K}{2^a}|x-y|^a, \tag{3.3}$$

$$\frac{f(x) + f\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2} \geq f\left(\frac{3x+y}{4}\right) + \frac{K}{2^a}|x-y|^a, \tag{3.4}$$

$$\frac{f\left(\frac{3x+y}{4}\right) + f\left(\frac{x+3y}{4}\right)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{K}{2^a}|x-y|^a. \tag{3.5}$$

Lấy (3.3) + (3.4) + 2 × (3.5), ta được

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{K}{2^{a-2}}|x-y|^a.$$

Từ đây, bằng cách lặp lại quy trình thế như trên, ta chứng minh bằng quy nạp được

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{K}{2^{n(a-2)}}|x-y|^a$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Nếu $a < 2$ thì bằng cách cho $x \neq y$ và $n \to +\infty$, ta thu được điều mâu thuẫn. Do đó $a \geq 2$. Ta sẽ chứng minh đây là tập hợp tất cả các số thực a thoả mãn yêu cầu đề bài.

Thật vậy, với $a \geq 2$, xét $f(x) = |x|^a$ và $K = \dfrac{1}{2^a}$, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đầu bài được thoả mãn với mọi cặp số thực x, y, tức là

$$\frac{|x|^a + |y|^a}{2} \geq \left|\frac{x+y}{2}\right|^a + \left|\frac{x-y}{2}\right|^a. \tag{3.6}$$

Đặt $f(x, y) = \mathrm{VT}_{(3.6)} - \mathrm{VP}_{(3.6)}$, ta có

$$f(-x, -y) = f(-x, y) = f(x, -y) = f(x, y).$$

Do đó $f(x, y)$ là hàm chẵn với x và với y. Vì vậy, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x \geq 0$ và $y \geq 0$. Khi đó, bất đẳng thức (3.6) được viết lại dưới dạng

$$\frac{x^a + y^a}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^a + \left|\frac{x-y}{2}\right|^a.$$

Với $x + y = 0$, ta có $x = y = 0$ nên bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Xét trường hợp $x + y > 0$. Khi đó, do bất đẳng thức trên có dạng thuần nhất đối với x, y nên ta có thể chuẩn hoá $x + y = 2$. Theo đó, ta phải chứng minh

$$\frac{x^a + y^a}{2} \geq 1 + \left|\frac{x-y}{2}\right|^a. \tag{3.7}$$

Do $0 \le \left|\frac{x-y}{2}\right| \le \frac{x+y}{2} = 1$ nên

$$1 + \left|\frac{x-y}{2}\right|^a \le 1 + \frac{(x-y)^2}{4} = \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức trung bình luỹ thừa, ta lại có

$$\frac{x^a+y^a}{2} \ge \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^{\frac{a}{2}} \ge \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Do đó (3.7) được chứng minh. Bài toán được giải quyết xong. □

4. Một số bài tập tự luyện

Để kết lại bài viết này, xin được nêu thêm một số bài toán để bạn đọc tự nghiên cứu thêm.

Bài tập 4.1 (Bulgaria, 2008). Cho $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là hàm số thoả mãn

$$2f(x^2) \ge xf(x) + x$$

với mọi $x > 0$. Chứng minh rằng $f(x^3) \ge x^2$ với mọi $x > 0$.

Bài tập 4.2 (IMO Shortlist, 2005). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn

$$f(x)f(y) = 2f\big(x + yf(x)\big)$$

với mọi cặp số dương x, y.

Bài tập 4.3 (KHTN, 2010). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn

$$f(x+2y) - f(x-y) = 3\big[f(y) + 2\sqrt{f(x)f(y)}\big]$$

với mọi cặp số dương $x > y$.

Bài tập 4.4. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn

$$f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) + f\big(f(x)\big) = 2x + 5$$

với mọi số thực dương x.

Bài tập 4.5 (Brazil, 2012). Tìm tất cả các toàn ánh $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn

$$2xf\big(f(x)\big) = f(x)\Big[x + f\big(f(x)\big)\Big]$$

với mọi số thực dương x.

Bài tập 4.6 (Việt Nam TST, 2007). Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x) = f\left(x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right)$$

với mọi số thực x.

Bài tập 4.7. Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(2x+1) = f(x)$$

với mọi số thực x.

Bài tập 4.8. Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f\big(x + y - f(y)\big) = f(x) + f\big(y - f(y)\big)$$

với mọi cặp số thực $x,\ y$.

Bài tập 4.9 (Hà Nội, 2013). Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau

(1) $f(2x) = 2f(x)$ với mọi $x > 0$;

(2) $f\Big(f^3(x)\big(e^{f(x)} - 1\big)\Big) = x^2(e^x - 1)f(x)$ với mọi $x > 0$;

(3) $f(e - 1) = (e - 1)f(1)$;

(4) $f(k) \in \mathbb{N}^*$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$.

Bài tập 4.10 (Turkey, 2013). Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn đồng thời các điều kiện

(1) $f(x^2) = f^2(x) - 2xf(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(-x) = f(x-1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$;

(3) f tăng thực sự trên $(1,\ +\infty)$.

Bài tập 4.11 (THTT, 2002). Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f\big(x - f(y)\big) = f(x + y^{2002}) + f\big(f(y) + y^{2002}\big) + 1$$

với mọi cặp số thực $x,\ y$.

Bài tập 4.12. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x^2) + 4y^2 f(y) = \big[f(x+y) + y^2\big]\big[f(x-y) + f(y)\big]$$

với mọi cặp số thực $x,\ y$.

Bài tập 4.13 (Tổng quát IMO 1992). Với mỗi số tự nhiên $n \geq 2$ cho trước, tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn đẳng thức

$$f\big(x^n + f(y)\big) = y + f^n(x)$$

với mọi cặp số thực $x,\ y$.

Bài tập 4.14 (Saudi Arabia, 2014). Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thoả mãn

$$f(n+1) > \frac{f(n) + f\big(f(n)\big)}{2}$$

với mọi số nguyên dương n.

Bài tập 4.15 (Romania, 2004). Tìm tất cả các đơn ánh $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thoả mãn

$$f\big(f(n)\big) \le \frac{n + f(n)}{2}$$

với mọi số nguyên dương n.

Bài tập 4.16 (IMAR, 2009). Chứng minh rằng với mỗi hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ đều tồn tại ít nhất một cặp số dương $x,\ y$ sao cho

$$f(x + y) < yf\big(f(x)\big).$$

Bài tập 4.17 (IMO, 2011). Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x + y) \le yf(x) + f\big(f(x)\big)$$

với mọi $x,\ y \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \le 0$.

Bài tập 4.18 (IMO Shortlist, 2009). Chứng minh rằng không tồn tại hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f\big(x - f(y)\big) \le yf(x) + x$$

với mọi cặp số thực $x,\ y$.

Bài tập 4.19. Cho hàm số $f : [0,\ 1] \to [0,\ +\infty)$ thoả mãn

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \le f\left(\frac{x + y}{2}\right) + 1$$

với mọi $x,\ y \in [0,\ 1]$. Chứng minh rằng với mọi $a,\ b,\ c \in [0,\ 1]$, $a < b < c$ thì

$$\frac{c - b}{c - a} f(a) + \frac{b - a}{c - a} f(c) \le f(b) + 2.$$

Bài tập 4.20. Cho các hàm số $f,\ g : [0,\ 1] \to [0,\ 1]$, trong đó f tăng nghiêm ngặt, thoả mãn

$$f\big(g(x)\big) = x$$

với mọi $x \in [0,\ 1]$. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[f\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k}{n}\right)\right] < n - \frac{1}{n}.$$

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), *Một số chuyên đề toán chọn lọc bồi dưỡng học sinh giỏi*, Khoá bồi dưỡng giáo viên chuyên toán THPT, 2004.

[2] Nguyễn Văn Mậu, *Phương trình hàm cơ bản với đối số biến đổi*, NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2015.

[3] Nguyễn Trọng Tuấn, *Các bài toán hàm số qua các kỳ thi Olympic*, NXB Giáo Dục, 2004.

[4] Christopher G. Small, *Functional Equations and How to Solve Them*, Springer, 2007.

[5] *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Birkhauser, 2009.

[6] Titu Andreescu, Iurie Boreico, Oleg Mushkarov, Nicolai Nikolov, *Topics in Functional Equations*, XYZ Press, 2012.

GIẢI TÍCH VÀ CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Trần Nam Dũng - Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG - TP.HCM

Since the building of the universe is perfect and is created by the wisdom creator, nothing arises in the universe in which one cannot see the sense of some maximum or minimum. - **Leonard Euler**

Trong các bài toán ở trường phổ thông, các bài toán cực trị thuộc vào một trong những dạng toán gần với những ứng dụng thực tế nhất. Những yêu cầu về đường đi ngắn nhất, đường đi nhanh nhất, góc nhìn lớn nhất, tổng thời gian chờ đợi ít nhất, tổng chi phí ít nhất, tổng lợi nhuận cao nhất, diện tích lớn nhất ... là những yêu cầu rất tự nhiên xuất phát từ những bài toán của sản xuất, đời sống và khoa học. Chính vì thế những bài toán cực trị cần có một chỗ đứng xứng đáng trong chương trình toán ở phổ thông, các phương pháp giải bài toán cực trị cũng cần phải được trình bày một cách bài bản.

Trên phương diện phương pháp, có hai cách tiếp cận chính cho lời giải của các bài toán cực trị, đó là phương pháp sử dụng bất đẳng thức và phương pháp hàm số. Với phương pháp bất đẳng thức, sơ đồ cơ bản là: Để chứng minh M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên miền $\mathbb{D}$ (x có thể là một vector), ta sẽ chứng minh :

(i) $f(x) \leqslant M$ với mọi x thuộc $\mathbb{D}$.

(ii) Tồn tại x_0 thuộc $\mathbb{D}$ sao cho $f(x_0) = M$.

Phương pháp hàm số sẽ khảo sát hàm $f(x)$ trên $\mathbb{D}$ và dựa vào các định lý của giải tích để tìm ra điểm cực trị và giá trị M.

Chú ý rằng, trong chương trình phổ thông khái niệm hàm nhiều biến chưa được đề cập, cho nên, mặc dù chúng ta sẽ bắt gặp những bài toán nhiều biến nhưng công cụ chủ yếu vẫn là công cụ đạo hàm của hàm số một biến.

Trong bài viết này, chúng ta sẽ chủ yếu đề cập đến các phương pháp giải tích để giải bài toán cực trị. Chúng ta sẽ bắt đầu bằng những bài toán cực trị hàm một biến giải bằng nguyên lý Fermat và định lý tồn tại Weierstrass. Sau đó chúng ta sẽ chuyển sang các bài toán cực trị nhiều biến giải bằng phương pháp khử dần các biến để đưa về trường hợp một biến. Tiếp đến là các bài toán cực trị có điều kiện.

Trong phần cuối cùng, chúng ta sẽ đề cập đến cách tiếp cận các bài toán cực trị nhiều biến bằng các sử dụng các công cụ toán cao cấp (đạo hàm riêng theo từng biến, phương pháp nhân tử Lagrange). Đây là phần dành cho giáo viên và các học sinh lớp chuyên để có một cái nhìn tổng quan
sau này lên các bậc học cao không bị làm theo quán tính, giải các bài toán cực trị nhiều biến bằng các công cụ thô sơ (và vì thế đòi hỏi rất nhiều sự sáng tạo).

Để giúp các bạn học sinh nhìn thấy vẻ đẹp, sức mạnh và sự hiệu quả của các phương pháp giải tích, chúng tôi cố gắng chọn những ví dụ đặc trưng và điển hình nhất. Các ví dụ và bài toán trong bài này được lấy từ những bài toán và định lý kinh điển, những bài toán thi Olympic, những đề thi đại học. Ngoài các ví dụ có lời giải và bình luận chi tiết, chúng tôi đưa ra một số bài tập tự giải dành cho bạn đọc.

1. Nguyên lý Fermat

Phương pháp có tên là nguyên lý Fermat là một phương pháp mà ai cũng biết đến: *Nếu hàm số f là khả vi thì mỗi một điểm cực tiểu (cực đại) địa phương của nó đều là điểm dừng, tức là là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.* Về điều này trước Fermat cũng đã từng được nhắc tới:

> "*Về cả hai phía của điểm có giá trị lớn nhất sự giảm ban đầu không đáng kể.*" - (Johan Kepler)

Điều ngược lại không đúng: Điểm dừng có thể không phải là điểm cực trị của hàm số, như ví dụ đơn giản sau: Hàm x^3 tại điểm $x = 0$. Để tìm các giá trị cực trị của hàm số f, ta giải phương trình $f'(x) = 0$, tìm được tất cả các điểm dừng là những điểm "*nghi can*" cho các giá trị cực trị. Sau đó ta sử dụng định lý tồn tại: Một hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$ sẽ đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đó. Ta sẽ coi định lý này là hiển nhiên về mặt hình học và bỏ qua phép chứng minh đó. Như vậy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm liên tục, khả vi trên đoạn $[a, b]$ tồn tại và ta chỉ cần tìm các giá trị này tại các điểm dừng và hai đầu mút.

Bổ đề 1.1. *Nếu hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và $f(x) \to +\infty$ khi $|x| \to +\infty$ thì nó đạt được giá trị nhỏ nhất trong $\mathbb{R}^n$.*

Bổ đề 1.2. *Nếu hàm số $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ liên tục và $f(x) \to +\infty$ khi $x \to a$ và $x \to b$ thì nó đạt được giá trị nhỏ nhất trên (a, b).*

Điều kiện tồn tại giá trị lớn nhất cũng được phát biểu tương tự. Chúng ta sẽ bắt đầu bằng một ví dụ kinh điển.

Ví dụ 1.1. *(Định luật Snellius) Tia sáng cắt đường biên của hai môi trường, vào với góc α và ra với góc β (góc giữa tia sáng với đường vuông góc với đường biên tại điểm cắt). Khi đó*

$$\frac{\sin\alpha}{v_a} = \frac{\sin\beta}{v_b},$$

trong đó v_a, v_b là vận tốc ánh sáng trong các môi trường đó.

Lời giải. Ta sẽ sử dụng nguyên lý Fermat trong quang học: Ánh sáng trong đường đi của mình từ một điểm đến một điểm luôn chọn đường đi ngắn nhất về mặt thời gian. Nếu ta lấy trên tia sáng hai điểm A, B nằm về hai phía đối với đường biên, còn chính đường biên ký hiệu là l là ta thu được bài toán tìm cực tiểu:

$$\begin{cases} f(M) = \dfrac{AM}{v_a} + \dfrac{BM}{v_b} \to \min \\ M \in l \end{cases}$$

Giá trị nhỏ nhất tồn tại, điều này được đảm bảo bởi bổ đề 1. Gọi điểm mà hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là M_0. Vấn đề là tính đạo hàm của hàm số f. Điều này có thể làm thế nào ? Ta có thể thực hiện điều này bằng cách tìm ra biểu thức hàm số f sử dụng định lý Pythagore:

Gọi AH, BK là đường vuông góc hạ từ A, B tương ứng xuống. Đặt $AH = a$, $BK = b$ và $HK = c$, $HM = x$ thì ta có

$$AM = \sqrt{a^2 + x^2},\ BH = \sqrt{b^2 + (c - x)^2}.$$

Từ đó

$$f(M) = g(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_a} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_b}.$$

Theo bổ đề 1 thì $f(M)$ đạt được giá trị nhỏ nhất tại một điểm M_0 nào đó. Và theo nguyên lý Fermat thì $f^{'}(M_0) = 0$. Nhưng

$$f^{'}(M) = g^{'}(x) = \frac{x}{v_a\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{v_b\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}.$$

Từ đó $f^{'}(M_0) = 0$ tương đương với

$$\frac{x_0}{v_a\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x_0}{v_b\sqrt{b^2 + (c - x)^2}},$$

hay

$$\frac{\sin\alpha}{v_a} = \frac{\sin\beta}{v_b}.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 1. *Có một miếng thép kích thước $1m \times 1m$. Người ta muốn làm từ tấm thép một hình hộp không đáy bằng cách cắt ở 4 góc các hình vuông kích thước $x \times x$, gấp lên rồi hàn lại. Hỏi phải chọn x bằng bao nhiêu để thể tích hình hộp là lớn nhất ?*

Lời giải. Rõ ràng ta phải có $0 \le x \leqslant \frac{1}{2}$. Thể tích hình hộp là

$$V(x) = x(1 - 2x)^2.$$

Với bài này, chỉ cần một chút khéo léo là ta có thể dùng bất đẳng thức AM-GM để tìm ra giá trị lớn nhất. Tuy nhiên, phương pháp hàm số sẽ cho chúng ta một lời giải tự nhiên mà không đòi hỏi bất cứ một sự sáng tạo đặc biệt nào:

$$V^{'}(x) = 12x^2 - 8x + 1 = (2x - 1)(6x - 1).$$

Từ đó ta có $V(x)$ chỉ có thể đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất tại các điểm 0 (biên), $\frac{1}{6}$ (điểm dừng), $\frac{1}{2}$ (biên). Vì

$$V(0) = V\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\ V\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{27},$$

nên ta suy ra $V_{\max} = \frac{2}{27}$ khi $x = \frac{1}{6}$. □

Bài tập 1.1. Hãy giải bài toán trên với miếng thép có kích thước $a \times b$ bằng một trong các phương pháp sau :

(a) Dùng bất đẳng thức AM-GM.

(b) Dùng đạo hàm.

Ví dụ 1.2. *Qua một điểm nằm trong một góc cho trước, hãy kẻ đoạn thẳng có độ dài ngắn nhất có đầu mút nằm trên các cạnh của góc.*

Lời giải. Bổ đề 1 đảm bảo sự tồn tại của đoạn thẳng ngắn nhất. Giả sử đoạn thẳng ngắn nhất là AB và điểm nằm trong góc là M. Qua M ta kẻ một đường thẳng khác là $A^{'}B'$. Gọi γ là góc có hướng giữa $A^{'}B'$ và AB. Hàm số $f(\gamma) = A^{'}B^{'}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $\gamma = 0$ do đó $f^{'}(0) = 0$. Đặt $\alpha = \angle OAB$, $\beta = \angle OBA$ trong đó O là đỉnh của góc. Sử dụng định lý hàm số sin cho các tam giác $MAA^{'}$ và $MBB^{'}$, ta có

$$MA^{'} = MA\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\gamma)},\ MB' = MB\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Từ đó

$$\begin{aligned}\Delta f &= A^{'}B^{'} - AB = MA^{'} + MB^{'} - MA - MB\\ &= MA\left[\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\gamma)} - 1\right] + MB\left[\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)} - 1\right]\\ &= MA\cdot\frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin(\alpha-\gamma)} - MB\cdot\frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin(\alpha+\gamma)}.\end{aligned}$$

Như vậy

$$\frac{\Delta f}{\Delta\gamma} = \frac{2\sin\frac{\gamma}{2}}{\gamma}\left[MA\cdot\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin(\alpha-\gamma)} - MB\cdot\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin(\alpha+\gamma)}\right].$$

Cho $\gamma \to 0$, ta được

$$f^{'}(0) = MA\cot\alpha - MB\cot\beta.$$

Nhưng vì $f^{'}(0) = 0$ nên ta có $MA\cot\alpha = MB\cot\beta$. Kết quả này có ý nghĩa hình học như thế nào? Hạ đường vuông góc OH xuống AB. Dễ dàng kiểm tra được rằng $\dfrac{HB}{HA} = \dfrac{\cot\beta}{\cot\alpha}$. Mặt khác $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{\cot\beta}{\cot\alpha}$, suy ra

$$MA = HB,\ MB = HA.$$

Như vậy đoạn thẳng ngắn nhất AB được đặc trưng bởi tính chất sau: *Hình chiếu của O lên AB đối xứng với M qua trung điểm của AB.* □

Nhận xét. Tại sao chúng ta chỉ tìm ra đặc trưng hình học của đoạn thẳng AB mà không nêu ra cách dựng của nó ? Vấn đề là với một vị trí tổng quát, lời giải này không thể dựng được bằng thước và compa. Trong thực tế, có nhiều bài toán cực trị ta chỉ đưa ra được các tính chất đặc trưng của lời giải chứ không tìm được lời giải mang tính xây dựng.

Bài tập 1.2. Đường thẳng đi qua một điểm nằm trong một góc, cắt góc này thành một tam giác có diện tích nhỏ nhất. Hãy tìm lời giải hình học và lời giải giải tích cho bài toán này.

Bài tập 1.3. Tương tự với chu vi nhỏ nhất, hãy tìm cả lời giải hình học lẫn lời giải giải tích.

Bài tập 1.4. Qua một điểm nằm trong góc vuông hãy kẻ một đường thẳng sao cho $OA + OB$ nhỏ nhất (O là đỉnh góc vuông và $A,\ B$ là giao điểm của đường thẳng với các cạnh góc vuông).

Với bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một hàm số trên đoạn $[a,\ b]$ ta có một số trường hợp đặc biệt đơn giản nhưng khá hiệu quả sau :

Hàm đơn điệu: Nếu $f^{'}(x) \geqslant 0$ với mọi x thuộc $(a,\ b)$ thì hàm số f tăng trên $[a,\ b]$ và ta có $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$ với mọi x thuộc $[a,\ b]$.

Hàm lồi: Nếu $f^{''}(x) \leqslant 0$ thì hàm số $f(x)$ sẽ có nhiều nhất một điểm cực đại (nếu có thì đó sẽ là điểm mà hàm số đạt giá trị lớn nhất) và giá trị nhỏ nhất của hàm số sẽ đạt được tại một trong hai điểm biên.

Ví dụ 1.3. *(Đề thi Đại học khối A – 2008) Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình*
$$\sqrt{2x} + \sqrt[4]{2x} + 2\sqrt{6-x} + 2\sqrt[4]{6-x} = m,$$
có đúng 2 nghiệm thực phân biệt.

Lời giải. Hàm số
$$f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[4]{2x} + 2\sqrt{6-x} + 2\sqrt[4]{6-x},$$
xác định trên $[0,\ 6]$ là tổng của các hàm lồi nên cũng là một hàm lồi. Vì thế $f(x)$ sẽ có nhiều nhất một điểm cực đại. Tính đạo hàm bậc nhất, ta được
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}} - \frac{1}{2\sqrt[4]{6-x}}.$$
Dễ thấy $f^{'}(2) = 0$, suy ra 2 là điểm cực đại duy nhất. Hàm số sẽ có chiều biến thiên là tăng trên $(0,\ 2)$ và giảm trên $(2,\ 6)$. Từ đó dễ dàng suy ra phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi
$$\max\{f(0),\ f(6)\} \leq m < f(2).$$
Tức là $2\left(\sqrt{6} + \sqrt[4]{6}\right) \leqslant m < 3\left(2 + \sqrt{2}\right)$. □

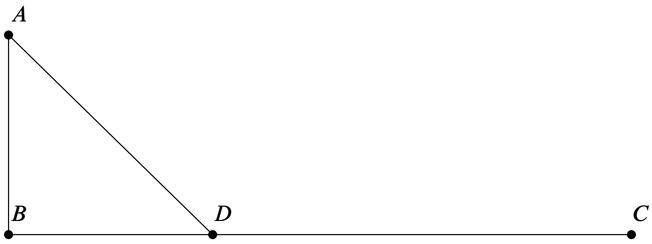
Bài tập 1.5. *(Olympic 30 - 4 - 1996)* Tìm giá trị lớn nhất của hàm số
$$f(x) = x\left(9\sqrt{1+x^2} + 13\sqrt{1-x^2}\right),$$
trên đoạn $[0,\ 1]$.

Bài tập 1.6. *(Bài toán về góc sút và khung thành)* Cho một đường thẳng l và hai điểm $A,\ B$ nằm về cùng một phía đối với l. Tìm vị trí điểm M trên l sao cho góc $\angle AMB$ lớn nhất.

Bài tập 1.7. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số
$$f(x) = \sqrt{2}\sin x + \sqrt{15 - 10\sqrt{2}\cos x}.$$

Bài tập 1.8. *(Việt Nam 1993)* Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số
$$f(x) = x\left(1993 + \sqrt{1995 - x^2}\right).$$

Ví dụ 1.4. *Nhà địa chất đang ở địa điểm A trong sa mạc, cách con đường đất 10 km ($AB = 10$ km, với B là điểm trên con đường đất gần A nhất). Ông đang cần đi về điểm C, nằm trên con đường đất và cách B 50 km. Biết rằng nhà địa chất có thể di chuyển trên sa mạc với vận tốc 30 km/h còn trên con đường đất với vận tốc 50 km/h. Hãy tìm phương án để nhà địa chất về đến C sau thời gian ít nhất.*



Ta nhận xét rằng, nếu di chuyển với vận tốc không đổi thì đường đi với thời gian ít nhất cũng là đường đi với quãng đường ngắn nhất. Do đó, con đường đi ngắn nhất sẽ có dạng $ADDC$ với D là một điểm nào đó trên BC.

Đặt $x = BD$, ta dễ dàng tính được thời gian đi trên quãng đường $ADDC$ là

$$f(x) = \frac{\sqrt{100 + x^2}}{30} + \frac{50 - x}{50}.$$

Từ đây ta có ba cách tiếp cận sau :

Cách 1. *(Dùng đạo hàm)* Ta có

$$f'(x) = \frac{x}{30\sqrt{100 + x^2}} - \frac{1}{50} = \frac{1}{150}\left(5x - 3\sqrt{100 + x^2}\right).$$

Giải phương trình $f(x) = 0$ ta dễ dàng tìm được nghiệm $x = \frac{15}{2}$ và suy ra

$$f_{\min} = f\left(\frac{15}{2}\right) = \frac{19}{15}.$$

Vậy thời gian ít nhất để nhà địa chất đi về C là $\frac{19}{15}$. □

Cách 2. Ta hơi láu cá một chút. Vì biết $f_{\min} = \frac{19}{15}$ nên ta sẽ chứng minh luôn điều này. Ta có bất đẳng thức

$$\frac{\sqrt{100 + x^2}}{30} + \frac{50 - x}{50} \geq \frac{19}{15},$$

tương đương với

$$5\sqrt{100 + x^2} + 150 - 3x \geq 190,$$

hay

$$25(100 + x^2) \geq 9x^2 + 240x + 1600,$$

hoặc

$$(2x - 15)^2 \geq 0.$$

Do đó ta có $f(x) \geqslant \frac{19}{15}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{15}{2}$. □

Cách 3. Ta cũng lại dùng "*điểm rơi*" $x = \dfrac{15}{2}$ để đánh giá hàm $f(x)$ bằng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{100+x^2}}{30} + \frac{50-x}{50} \\ &= \frac{\sqrt{100+x^2}\cdot\sqrt{100+\left(\frac{15}{2}\right)^2}}{30\sqrt{100+\left(\frac{15}{2}\right)^2}} + \frac{50-x}{50} \\ &\ge \frac{100+\frac{15}{2}\cdot x}{30\cdot\frac{25}{2}} + \frac{50-x}{50} = \frac{19}{15}. \end{aligned}$$

Từ đó dẫn đến kết luận của bài toán. □

Bài tập 1.9. Nếu không biết trước $f_{\min} = \dfrac{19}{15}$ hãy tìm cách tiếp cận để giải bài toán theo cách 2.

Bài tập 1.10. Nếu ta không biết điểm rơi $x = \dfrac{15}{2}$, làm thế nào để áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz theo cách 3 ?

2. Cực trị hàm nhiều biến

Với công cụ cấp trung học phổ thông, một trong những phương pháp giải bài toán nhiều biến số là làm giảm dần các biến số bằng cách tìm cực trị theo từng phương. Ý tưởng của phương pháp này được minh hoạ bằng hình ảnh sau: *Để tìm người cao nhất trong một nhóm người đang xếp thành m hàng, ta tìm người cao nhất trong từng hàng rồi so sánh những người cao nhất đó để tìm ra người cao nhất tuyệt đối.*

Ta bắt đầu bằng một ví dụ kinh điển trong hình học.

Ví dụ 2.1. *Trong các tam giác nội tiếp trong một đường tròn cho trước, hãy tìm tam giác có diện tích lớn nhất.*

Lời giải 1. Không mất tính tổng quát, ta xét tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn đơn vị với $A(0;\,1)$ cố định và $B(x_1,\,y_1)$, $C(x_2,\,y_2)$ với điều kiện $x_1^2+y_1^2=1$, $x_2^2+y_2^2=1$ thì được bài toán cực trị sau

$$\begin{cases} \dfrac{\left|(x_1-1)y_2-(x_2-1)y_1\right|}{2} \to \max \\ x_1^2+y_1^2=1 \\ x_2^2+y_2^2=1 \end{cases}$$

Bài toán cực trị có điều kiện 4 biến này có thể chuyển thành bài toán cực trị 2 biến bằng cách tham số hoá đường tròn đơn vị, cụ thể đặt $x_1=\cos\alpha$, $y_1=\sin\alpha$, $x_2=\cos\beta$, $y_2=\sin\beta$ ta quy bài toán về việc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(\alpha,\,\beta) = \sin\alpha - \sin\beta + \sin(\beta-\alpha).$$

Giữ α cố định, xét $f(\alpha,\,\beta)$ như một hàm số theo β thì

$$f'_\beta(\alpha,\,\beta) = -\cos\beta + \cos(\beta-\alpha).$$

Từ đây ta tìm được các điểm dừng là $\beta = \dfrac{\alpha}{2} + k\pi$. Từ đó, để tìm $f(\alpha, \beta)_{\max}$ ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của hàm

$$\sin\alpha - \sin\Big(\frac{\alpha}{2} + k\pi\Big) + \sin\Big(\frac{\alpha}{2} + k\pi - \alpha\Big),$$

tức là giá trị lớn nhất của

$$f_1(\alpha) = \sin\alpha - 2\sin\Big(\frac{\alpha}{2}\Big),\ f_2(\alpha) = \sin\alpha + 2\sin\Big(\frac{\alpha}{2}\Big).$$

Giải bài toán một biến này, ta tìm được đáp số $f(\alpha, \beta)_{\max}$ bằng $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, chẳng hạn khi $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$, $\beta = \dfrac{4\pi}{3}$ (và $f(\alpha, \beta)_{\min}$ bằng $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$!). Đây chính là tình huống khi tam giác đã cho đều. □

Lời giải 2. Cũng bằng phương pháp tương tự, trước hết ta cố định cạnh BC là một dây cung độ dài $2a$ của đường tròn bán kính R và tìm vị trí điểm A trên đường tròn sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất. Có thể chứng minh được dễ dàng rằng điểm A cần tìm chính là trung điểm của cung lớn BC (nơi mà tiếp tuyến song song với BC).

Diện tích của tam giác cực đại này bằng

$$f(a) = a\Big(R + \sqrt{R^2 - a^2}\Big).$$

Bây giờ ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của $f(a)$ trên $[0, R]$. Tính đạo hàm $f'(a)$, ta được

$$f'(a) = R + \sqrt{R^2 - a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{R^2 - a^2}},$$

và $f'(a) = 0$ khi và chỉ khi $a = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$, từ đó ta tìm được $f_{\max} = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$. □

Ví dụ 2.2. *Cho tam giác đều ABC. Với mỗi điểm M nằm trong mặt phẳng tam giác, gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M lên các đường thẳng (BC), (CA), (AB). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\frac{MA + MB + MC}{MD + ME + MF}.$$

Ví dụ 2.3. *(Chọn đội tuyển Việt Nam 2001) Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn*

$$2x + 4y + 7z = 2xyz.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + y + z$.

Lời giải. Rút $z = \dfrac{2x + 4y}{2xy - 7} > 0$ ta đưa bài toán về bài toán cực trị hai biến

$$\begin{cases} f(x, y) = x + y + \dfrac{2x + 4y}{2xy - 7} \to \min \\ x > 0,\ y > 0,\ 2xy > 7 \end{cases}$$

Tính đạo hàm theo y, ta được

$$f'_y(x,y) = 1 + \frac{4(2xy-7) - 2x(2x+4y)}{(2xy-7)^2} = 1 - \frac{4x^2+28}{(2xy-7)^2}.$$

Từ đó, ta tìm được, với mỗi x có định thì $f(x,\ y)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

$$y_0 = \frac{7}{2x} + \sqrt{1+\frac{7}{x^2}}.$$

Khi đó

$$f(x,\ y_0) = x + \frac{11}{2x} + 2\sqrt{1+\frac{7}{x^2}} = g(x).$$

Tính đạo hàm

$$g^{'}(x) = 1 - \frac{11}{2x^2} - \frac{14}{\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x^3}.$$

Phương trình $g^{'}(x) = 0$ tương đương với $(2x^2-11)^2(x^2+7) = 784$ (với điều kiện $2x^2 > 11$) có nghiệm $x = 3$. Đây chính là điểm cực tiểu (do $f \to +\infty$ khi $x \to 0$ và $x \to +\infty$). Từ đó

$$f(x,\ y)_{\min} = g(x)_{\min} = g(3) = \frac{15}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là $\dfrac{15}{2}$. $\square$

Nhận xét. Ngoài các thủ thuật cơ bản như tham số hoá, thay thế và khử dần các biến số như trong các ví dụ nêu trên, chúng ta còn có thể làm giảm số biến số của hàm số bằng cách sử dụng các tính chất bất biến của hàm, ví dụ tính thuần nhất (không đổi đối với phép co dãn), tính đối xứng (không đổi với các chuyển vị, hoán vị) ...

Ví dụ 2.4. *(Đề thi Đại học khối B, 2008) Cho $x,\ y$ là các số thực thoả mãn điều kiện $x^2+y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\frac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}.$$

Lời giải. Bài toán này có thể quy về một bài toán cực trị hàm một biến bằng cách tham số hoá lượng giác quen thuộc $x = \cos t,\ y = \sin t$. Tuy nhiên, ở đây ta cũng còn có một cách tiếp cận khác: Thay số 1 ở dưới mẫu số bằng $x^2+y^2 = 1$ để thu được một biểu thức thuần nhất, tức là

$$\frac{2(x^2+6xy)}{x^2+y^2+2xy+2y^2}$$

sau đó dựa vào tính thuần nhất này để giảm số biến số của hàm số. Trước hết ta cần hiểu tại sao lại có đẳng thức

$$\min_{x^2+y^2=1} \frac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2} = \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus(0,0)} \frac{2(x^2+6xy)}{x^2+y^2+2xy+2y^2}.$$

Rõ ràng ta có

$$\min_{x^2+y^2=1} \frac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2} = \min_{x^2+y^2=1} \frac{2(x^2+6xy)}{x^2+y^2+2xy+2y^2}.$$

Nhưng do hàm số $f(x,\ y) = \dfrac{2(x^2+6xy)}{x^2+y^2+2xy+2y^2}$ là hàm thuần nhất (bậc 0, tức là $f(tx,\ ty) = f(x,\ y)$) nên ta có

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus(0,0)} \frac{2(x^2+6xy)}{x^2+y^2+2xy+2y^2} = \min_{x^2+y^2=1} \frac{2(x^2+6xy)}{x^2+y^2+2xy+2y^2},$$

(từ mọi điểm khác (0, 0) đều có thể co hoặc dãn về 1 điểm nằm trên đường tròn đơn vị).

Bây giờ ta cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x,\ y) = \frac{2(x^2+6xy)}{x^2+y^2+2xy+2y^2},$$

với $(x,\ y)$ thuộc $\mathbb{R}^2 \setminus (0,\ 0)$.

Nếu $y = 0$ thì $f(x,\ y) = 2$. Với $y \neq 0$, ta đặt $t = \dfrac{x}{y}$ thì

$$f(x,\ y) = \frac{2(t^2+6t)}{t^2+2t+3} = g(t).$$

Ta có

$$g'(t) = \frac{(4t+12)(t^2+2t+3) - (2t+2)(2t^2+12t)}{(t^2+2t+3)^2} = \frac{4(2t+3)(3-t)}{(t^2+2t+3)^2}.$$

Từ đó tìm được $g_{\min} = g\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -6,\ g_{\max} = g(3) = 3$. Chú ý giá trị ở vô cùng bằng 2. □

Bài tập 2.1. *(Việt Nam MO 2004)* Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực dương thoả mãn điều kiện $(x+y+z)^3 = 32xyz$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^4+y^4+z^4}{(x+y+z)^4}.$$

Bài tập 2.2. *(Theo Việt Nam MO 2003)* Cho $f(t) = \dfrac{t^2+2t-1}{t^2+1}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f(x)\cdot f(y)$ với x, y là các số thực thoả mãn điều kiện $x + y = 1$.

Bài tập 2.3. *(Đề thi cao đẳng khối A, B, D năm 2008)* Cho $x,\ y$ là các số thực thoả mãn điều kiện $x^2+y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2(x^3+y^3) - 3xy.$$

Bài tập 2.4. *(Saudi Arabia 2015)* Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=10.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right).$$

Ví dụ 2.5. *Cho ba số thực $a,\ b,\ c$ đôi một khác nhau, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right].$$

Lời giải. Hàm số

$$f(a,\ b,\ c)=\left(a^2+b^2+c^2\right)\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right],$$

thuần nhất bậc 0 còn hàm số

$$g(a,\ b,\ c)=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2},$$

bất biến đối với phép tịnh tiến: $g(a,\ b,\ c)=g(a+t,\ b+t,\ c+t)$. Sử dụng các tính chất này ta có thể giảm số các biến số của bài toán tìm giá trị nhỏ nhất.

Không mất tính tổng quát (do tính đối xứng !), có thể giả sử $a>b>c$. Đặt $a-b=x,\ b-c=y$ thì $c-a=-(x+y)$ và $a=c+x+y,\ b=c+y$. Ta có

$$f(a,\ b,\ c)=g(x,\ y,\ c)=\left[3c^2+2(x+2y)c+(x+y)^2+y^2\right]\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right].$$

Cố định $x,\ y$ khi đó $g(x,\ y,\ c)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $c=c_0=-\dfrac{x+2y}{3}$. Từ đó

$$\begin{aligned}g(x,y,c)_{\min}=g(x,y,c_0)&=\frac{2}{3}(x^2+xy+y^2)\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right]\\&=h(x,\ y).\end{aligned}$$

Do tính thuần nhất bậc 0 của hàm số $h(x,\ y)$, ta chỉ cần tìm giá trị nhỏ nhất của $h(x,\ y)$ với $x+y=1$, sau đó, sử dụng tính đối xứng của $h(x,\ y)$, ta biểu diễn $h(x,\ y)$ như một hàm theo $t=xy$ với chú ý $0<t\leqslant\dfrac{1}{4}$:

$$h(x,\ y)=\frac{2}{3}(1-t)\left(\frac{1-2t}{t^2}+1\right)=\frac{2(1-t)^3}{3t^2}=k(t).$$

Ta có

$$k'(t)=-\frac{2}{3}\frac{(1-t)^2(t+2)}{t^2}<0,$$

trên $\left(0, \frac{1}{4}\right]$ nên $k_{\min}(t) = k\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là $\frac{9}{2}$ đạt được, chẳng hạn khi $x = y = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{2}$, tức là $c = -\frac{1}{2}$, $b = 0$, $a = \frac{1}{2}$. □

Bài tập 2.5. *(British MO 1986)* Cho x, y, z là các số thực thoả mãn điều kiện $x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$F = x^2y + y^2z + z^2x.$$

Bài tập 2.6. *(Đề thi đại học khối D, 2008)* Cho x, y là các số thực dương thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}.$$

Bài tập 2.7. *(Chọn đội tuyển Việt Nam 1993)* Cho x_1, x_2, x_3, x_4 là các số thực thoả mãn điều kiện $\frac{1}{2} \le x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 - 2x_3 + x_4)^2 + (x_2 - 2x_1)^2 + (x_3 - 2x_4)^2.$$

Bài tập 2.8. *(Việt Nam MO 2002)* Cho x, y, z là các số thực thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2 = 9$. Chứng minh rằng

$$2(x + y + z) - xyz \leqslant 10.$$

Bài tập 2.9. *(Việt Nam MO 2008)* Cho x, y, z là các số thực không âm, đôi một khác nhau. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức

$$(xy + yz + zx)\left[\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}\right] \ge 4.$$

Hỏi dấu bằng xảy ra khi nào ?

3. Cực trị hàm nhiều biến dưới góc nhìn của Toán cao cấp

Với những bài toán ở phổ thông, kể cả các bài toán thi học sinh giỏi các cấp, các kiến thức giải tích một biến là đủ để xử lý. Tuy nhiên, để có một góc nhìn tổng quát hơn, để giới thiệu những nét đẹp của toán cao cấp, chúng ta có thể giới thiệu với các em một cách sơ lược về giải tích nhiều biến, phương pháp nhân tử Lagrange. Đây cũng là phương pháp để sáng tạo các bài toán mới, kiểm tra các kết quả sơ cấp khác.

Lưu ý, việc giới thiệu các kiến thức này cho đối tượng nào, ở mức độ nào và nhằm mục đích gì là điều hết sức phải cân nhắc.

Nguyên lý Fermat có thể mở rộng sang trường hợp nhiều chiều mà không có thay đổi gì đáng kể. Để tìm các giá trị cực trị của hàm $f(x)$, trong đó $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ta tìm các điểm dừng từ hệ phương trình

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'_{x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \;\; (j = 1, 2, \ldots, n),$$

có số phương trình bằng số ẩn số.

Sau đó ta sử dụng định lý Weierstrass (định lý tồn tại), thay đoạn $[a, b]$ bằng tập compact A – tập đóng và bị chặn - trong không gian $\mathbb{R}^n$. Đóng ở đây có nghĩa là nó chứa tất cả các điểm giới hạn của nó.

Tương tự như trong trường hợp một chiều, ta cũng gặp vấn đề tìm các giá trị cực trị trong một miền mở. Bổ đề dưới đây giúp chúng ta xử lý một số trường hợp như vậy.

Bổ đề 3.1. *Nếu hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ liên tục và $f(x) \to +\infty$ khi*

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \to +\infty,$$

thì nó đạt được giá trị nhỏ nhất trong $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 3.1. *Trong các tam giác nội tiếp trong một đường tròn cho trước, hãy tìm tam giác có diện tích lớn nhất.*

Lời giải. Sử dụng định lý Weierstrass về sự tồn tại của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một hàm liên tục xác định trên một compact, ta suy ra tam giác $A_0B_0C_0$ với diện tích lớn nhất tồn tại. Sử dụng lý luận hình học quen thuộc, ta suy ra tam giác $A_0B_0C_0$ này phải đều. □

Ví dụ 3.2. *Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a \geqslant b \geqslant c$, $a \leqslant 5$, $a + b \leqslant 8$, $a + b + c = 10$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = a^2 + b^2 + c^2$.*

Lời giải. Kết hợp các điều kiện ta suy ra các bộ (a, b, c) thỏa mãn điều kiện đề bài nằm trong một tập đóng, bị chặn (một hình phẳng thuộc mặt phẳng $a + b + c = 10$). Suy ra tồn tại điểm (a, b, c) sao cho P lớn nhất, những do $a + b \leqslant 8$ nên $c \geqslant 2$.

Nếu $a < 5$ và $c < b$ thì đặt $m = \min(5 - a, b - c)$, ta thay (a, b, c) bằng bộ (a', b', c') với $a' = a + m$, $b' = b - m$, $c' = c$ thì ta có

$$\begin{aligned} a'^2 + b'^2 + c'^2 &= (a + m)^2 + (b - m)^2 + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2m^2 + 2(a - b)m \\ &> a^2 + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn. Vậy ta phải có $a = 5$ hoặc $b = c$.

- Nếu $a = 5$ thì $b + c = 5$ và

  $$2(b^2 + c^2) = (b + c)^2 + (b - c)^2 = 25 + (b - c)^2 = 25 + (5 - 2c)^2.$$

  Do $a + b \leqslant 8$ nên $c \geqslant 2$. Suy ra $0 \leqslant 5 - 2c \leqslant 1$. Từ đó suy ra $2(b^2 + c^2) \leqslant 25 + 1$, suy ra $b^2 + c^2 \leqslant 13$, suy ra

  $$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 38.$$

- Nếu $b = c$ thì do $a \leqslant 5$ nên $c \geqslant \frac{5}{2}$. Ta có

  $$a^2 + b^2 + c^2 = (10 - 2c)^2 + 2c^2 = 6c^2 - 40c + 100 = 6\left(c - \frac{10}{3}\right)^2 + \frac{100}{3}.$$

  Do $\frac{5}{3} \leqslant c \leqslant \frac{10}{3}$, nên ta có

  $$6\left(c - \frac{10}{3}\right)^2 + \frac{100}{3} \leqslant 6\left(\frac{5}{3} - \frac{10}{3}\right)^2 + \frac{100}{3} = \frac{75}{2} < 38.$$

Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là 38. □

Ví dụ 3.3. *(Định lý cơ bản của đại số) Một đa thức không đồng nhất hằng số với hệ số phức bất kỳ luôn luôn có nghiệm phức.*

Lời giải. Xét một đa thức bất kỳ $p(z)$ và xét đại lượng $|p(z)|$ như một hàm của hai biến số thực x và y, trong đó $z = x + iy$. Theo bổ đề 3, hàm số này đạt giá trị nhỏ nhất tại một điểm $z_0 = (x_0, y_0)$. Không mất tính tổng quát, bằng cách đổi biến số, có thể giả sử $z_0 = 0$. Giả sử rằng tại điểm này hàm số $p(z)$ không bằng 0. Gọi k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho hệ số của z^k trong đa thức khác 0. Khi đó

$$p(z) = a_0 + a_k z^k + \cdots + a_n z^n,\ k \geqslant 1,\ a_k \neq 0.$$

Ngoài ra $a_0 \neq 0$ vì $a_0 = p(0) = p(z_0) \neq 0$. Bây giờ ta lấy một nghiệm phức u của phương trình $a_0 + a_k z^k = 0$, tức là một trong những căn phức bậc k của $-a_0 a_k^{-1}$. Ta có

$$|p(tu)| = |a_0 + a_k t^k u^k + o(t^k)| = |(1 - t^k)a_0 + o(t^k)| < a_0 = p(0),$$

với $t > 0$ đủ nhỏ. Mâu thuẫn vì theo giả thiết, $z_0 = 0$ là điểm hàm số đạt giá trị nhỏ nhất. Định lý được chứng minh. □

Ví dụ 3.4. *(Đề thi chọn đội tuyển trường PTNK năm 1999) Cho x, y là các số thực thoả mãn điều kiện $0 \leqslant x, y \leqslant 2$ và $1 \leqslant x + y \leqslant 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của*

$$A = x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y.$$

Lời giải. Hàm số $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y$ khả vi và liên tục trên compact $\mathbb{D}$ xác định bởi các bất đẳng thức ở đề bài ($\mathbb{D}$ là một hình lục giác !) vì vậy $f(x, y)$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{D}$. Các giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất này sẽ đạt được tại các điểm dừng và trên biên của $\mathbb{D}$.

Hệ phương trình tìm điểm dừng có dạng

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 2y + x - 3 = 0 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất $(x, y) = (1, 1)$. Giá trị tại điểm này $f(1, 1) = -3$.

- Trên biên $x = 0$ và $1 \leqslant y \leqslant 2$, ta có $f(x, y) = y^2 - 3y$ có giá trị lớn nhất là -2 đạt tại $(0, 1)$, $(0, 2)$, có giá trị nhỏ nhất là $-\frac{9}{4}$ đạt tại $\left(0, \frac{3}{2}\right)$. Tương tự trên biên $y = 0$, $1 \leqslant x \leqslant 2$.
- Trên biên $x = 2$ và $0 \leqslant y \leqslant 1$, ta có $f(x, y) = y^2 - y - 2$, có giá trị lớn nhất là -2 đạt tại $(2, 0)$, $(2, 1)$ và giá trị nhỏ nhất là $-\frac{9}{4}$ đạt tại $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Tương tự trên biên $y = 2$ và $0 \leqslant x \leqslant 1$.
- Trên biên $x + y = 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ ta có $f(x, y) = x^2 - x - 2$ có giá trị lớn nhất là -2 đạt tại $(0, 1)$ và $(1, 0)$ và giá trị nhỏ nhất là $-\frac{9}{4}$ đạt tại $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

- Trên biên $x + y = 3$ và $1 \leqslant x \leqslant 2$, ta có $f(x, y) = x^2 - 3x$ có giá trị lớn nhất là -2 đạt tại $(1, 2)$, $(2, 1)$ và giá trị nhỏ nhất là $-\frac{9}{4}$ đạt tại $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Từ đó giá trị lớn nhất của f là -2 đạt tại các đỉnh của hình lục giác $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 0)$, $(1, 0)$ và giá trị nhỏ nhất là -3 đạt tại điểm $(1, 1)$. □

Nhận xét. Vì các compact có thể được mô tả bằng các bất đẳng thức hoặc các đẳng thức (ví dụ hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) nên các bài toán cực trị trên compact có thể quy về bài toán cực trị có điều kiện. Với những bài toán này, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange để tìm lời giải.

Ta giới thiệu nội dung phương pháp này thông qua trường hợp bài toán cực trị nhiều biến với một điều kiện ràng buộc:

Để tìm cực trị của hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ với điều kiện ràng buộc $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, ta xét hàm

$$F(\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Sau đó ta tìm cực trị của F. Chú ý rằng các điểm cực trị này đều thoả mãn điều kiện

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F'\lambda(\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

nên sẽ là cực trị của f với điều kiện ràng buộc $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

Ví dụ 3.5. *Tìm giá trị giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y) = 5x^2 + 2xy + 3y^2$ với điều kiện*

$$g(x, y) = 7x^2 + 2xy + 4y^2 – 3 = 0.$$

Lời giải. Xét $L = f(x, y) + \lambda g(x, y)$. Đạo hàm theo các biến x và y, ta được

$$\begin{cases} 10x + 2y + \lambda(14x + 2y) = 0 \\ 2x + 6y + \lambda(2x + 8y) = 0 \end{cases}$$

Từ đây tính λ từ các phương trình rồi cho bằng nhau, ta được

$$\frac{10x + 2y}{14x + 2y} = \frac{6y + 2x}{8y + 2x}.$$

Từ đó suy ra $\frac{y}{x} = \{-1, 2\}$. Thay vào phương trình $g(x, y) = 0$, ta tìm được một số điểm "*nghi vấn*" của cực trị. Tính các giá trị của hàm số f tại các điểm này, ta thu được giá trị nhỏ nhất đạt tại các điểm

$$(x, y) = \left\{\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\}.$$

Từ đó dẫn đến kết luận của bài toán. □

Cuối cùng ta dùng đến định lý về sự tồn tại giá trị nhỏ nhất ($g(x, y) = 0$ là phương trình của một ellip, vì thế là compact).

Bài tập 3.1. *(Bài toán về Entropi cực đại)* Với n số dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho $\sum_{k=1}^{n} x_k$, tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $\sum_{k=1}^{n} x_k \ln(x_k)$. (tổng này với dấu trừ được gọi là entropi).

Bài tập 3.2. Tổng của 5 số thực bằng 1, tổng bình phương của chúng bằng 13 thì giá trị nhỏ nhất của tổng lập phương của chúng bằng bao nhiêu ?

Bài tập 3.3. Tổng của 5 số thực bằng 1, tổng bình phương của chúng bằng 11 thì giá trị lớn nhất của tổng lập phương của chúng bằng bao nhiêu ?

Ví dụ 3.6. *(Chọn đội tuyển Việt Nam 2001) Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $2x + 4y + 7z = 2xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + y + z$.*

Lời giải. Xét
$$L = x + y + z + \lambda(2x + 4y + 7z - 2xyz),$$
khi đó hệ phương trình $L_x = L_y = L_z = 0$ có dạng
$$\begin{cases} 1 + \lambda(2 - 2yz) = 0 \\ 1 + \lambda(4 - 2zx) = 0 \\ 1 + \lambda(7 - 2xy) = 0 \end{cases}$$
Từ đây ta tìm được
$$\begin{cases} 2yz = 2 + \dfrac{1}{\lambda} \\ 2zx = 4 + \dfrac{1}{\lambda} \\ 2xy = 7 + \dfrac{1}{\lambda} \end{cases}$$
Mặt khác, điều kiện $x + 4y + 7z = 2xyz$, có thể viết lại thành
$$\frac{2}{2yz} + \frac{4}{2zx} + \frac{7}{2xy} = 1.$$
Thay các biểu thức vừa tìm được ở trên vào, ta tìm được
$$\frac{2\lambda}{2\lambda + 1} + \frac{4\lambda}{4\lambda + 1} + \frac{7\lambda}{7\lambda + 1} = 1.$$
Biến đổi tương đương, ta được phương trình
$$112\lambda^3 + 50\lambda^2 - 1 = 0.$$
Phương trình này có các nghiệm $\lambda = \dfrac{1}{8}$, $\lambda = \dfrac{-4 \pm \sqrt{2}}{14}$ (loại vì dẫn đến $yz < 0$). Từ đó ta có
$$\begin{cases} 2yz = 10 \\ 2zx = 12 \\ 2xy = 15 \end{cases}$$

Từ đây tính được điểm dừng là $(x,\ y,\ z) = \left(3,\ \frac{5}{2},\ 2\right)$. Sự tồn tại của giá trị nhỏ nhất được đảm bảo bởi bổ đề 3, do đó $\left(3,\ \frac{5}{2},\ 2\right)$ chính là điểm mà hàm số đạt giá trị nhỏ nhất. □

Bài tập 3.4. Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương cho trước và $x,\ y,\ z$ là các số thực dương thay đổi thoả mãn điều kiện $xyz = ax + by + cz$. Chứng minh rằng

$$x + y + z \geqslant \sqrt{b + c + \frac{2bc}{d}} + \sqrt{c + a + \frac{2ca}{d}} + \sqrt{a + b + \frac{2ab}{d}},$$

trong đó d là số thực dương xác định bởi phương trình

$$\frac{a}{a+d} + \frac{b}{b+d} + \frac{c}{c+d} = 1.$$

Ví dụ 3.7. *Tìm điểm P nằm trong tam giác sao cho tổng các tỷ số độ dài các cạnh trên khoảng cách từ P đến các cạnh này đạt giá trị nhỏ nhất.*

Lời giải. Gọi $a,\ b,\ c$ là độ dài các cạnh của tam giác và $x,\ y,\ z$ là khoảng cách từ P đến các cạnh tương ứng. Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x, y, z) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}.$$

Trong đó các đại lượng $x,\ y,\ z$ liên quan với nhau thông qua diện tích tam giác. Nối P với các đỉnh tam giác, ta được ba tam giác con tổng diện tích bằng diện tích S của tam giác. Như vậy

$$S = \frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2}.$$

Ta có bài toán:

$$\begin{cases} f(x,\ y,\ z) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} \to \min \\ ax + by + cz = 2S \end{cases}$$

Lập nhân tử Lagrange

$$L(\lambda,\ x,\ y,\ z) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \lambda(ax + by + cz - 2S).$$

Hệ phương trình tìm điểm dừng có dạng

$$\begin{cases} -\dfrac{a}{x^2} + \lambda a = 0 \\ -\dfrac{b}{y^2} + \lambda b = 0 \\ -\dfrac{c}{z^2} + \lambda c = 0 \end{cases}$$

Từ đây suy ra ngay rằng $x = y = z$. Tức là P cách đều các cạnh của tam giác. Suy ra P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. □

Ví dụ 3.8. *(Bất đẳng thức Holder) Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực dương và p, q là các số dương thoả mãn điều kiện $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Lời giải. Do tính thuần nhất, ta chỉ cần chứng minh rằng nếu

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^p = 1, \ \sum_{k=1}^{n} y_k^q = 1. \tag{1}$$

thì

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq 1.$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ với điều kiện ràng buộc (1). Xét nhân tử Lagrange

$$L = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \lambda\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p - 1\right) + \mu\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q - 1\right).$$

Hệ phương trình tìm điểm dừng có dạng

$$\begin{cases} y_i + \lambda p x_i^{p-1} = 0, \ i = 1, \ldots, n \\ x_i + \mu p y_i^{q-1} = 0, \ i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Viết n phương trình đầu tiên dưới dạng $y_i = (-\lambda p)x_i^{p-1}$, lấy luỹ thừa q rồi cộng lại vế theo vế, với chú ý rằng $(p-1)q = p$, ta suy ra $-\lambda p = 1$, suy ra $y_i = x_i^{p-1}$. Đây là điểm dừng và là điểm hàm số $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ đạt giá trị lớn nhất. Nhưng rõ ràng giá trị lớn nhất này bằng 1 nên ta có điều phải chứng minh. □

Cuối cùng, chúng ta sẽ bình luận lời giải của một số bài toán bất đẳng thức dưới góc nhìn của toán cao cấp.

Ví dụ 3.9. *(British MO 1986) Cho x, y, z là các số thực thoả mãn điều kiện $x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$F = x^2y + y^2z + z^2x.$$

Lời giải. Bài toán này có khá nhiều cách tiếp cận khác nhau. Nếu dùng phương pháp hàm số, ta có thể rút $z = -x - y$ thay vào và đưa về bài toán hai biến:

Cho $x^2 + xy + y^2 = 3$, tìm giá trị lớn nhất của

$$F = x^3 + 3x^2y - y^3.$$

Sau đó biến đổi điều kiện thành $3(x+y)^2 + (x-y)^2 = 12$ để đặt

$$x + y = 2\cos\phi,\ x–y = 2\sqrt{3}\cos\phi,$$

và đưa bài toán về hàm một biến.

Phương pháp hàm số cũng có thể được giải theo một cách khác đẹp đẽ hơn được hướng dẫn trong bài tập 25. Dưới đây ta trình bày một cách giải tuyệt đẹp sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

Ta viết

$$3F = x(2xy + z^2) + y(2yz + x^2) + z(2zx + y^2). \tag{2}$$

Từ đó, áp dụng bất đẳng thứcCauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
9F^2 &\leqslant (x^2+y^2+z^2)[(2xy+z^2)^2 + (2yz+x^2)^2 + (2zx+y^2)^2] \\
&= 6[x^4+y^4+z^4+4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+4xyz(x+y+z)] \\
&= 6[(x^2+y^2+z^2)^2 + 2(xy+yz+zx)^2] \\
&= 6(36+18) = 36\cdot 9.
\end{aligned}$$

Suy ra $F \leqslant 6$. Phần dấu bằng xảy ra xin dành cho bạn đọc. □

Ở đây lời giải cứ như là từ không khí vậy ! Sau ít phút trấn tĩnh, ta bật ra câu hỏi: *Làm sao có thể biết mà tách* $3F$ *như ở* (2) *để áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ?*

Thực ra, điều này không hoàn toàn mò mẫm và may mắn. Ta thử lý giải lời giải này dưới góc nhìn toán cao cấp, nếu áp dụng phương pháp nhân tử Lagrange cho bài toán tìm giá trị lớn nhất của hàm F với điều kiện ràng buộc

$$x + y + z = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 6. \tag*{(3),}$$

Ta sẽ xét hàm

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2y + y^2z + z^2x + \lambda(x+y+z) + \mu(x^2+y^2+z^2-6).$$

Ta có hệ tìm điểm dừng, ngoài hai phương trình (3) sẽ còn các phương trình

$$\begin{cases} 2xy + z^2 + \lambda + 2\mu x = 0 \\ 2yz + x^2 + \lambda + 2\mu y = 0 \\ 2zx + y^2 + \lambda + 2\mu z = 0 \end{cases}$$

Tất nhiên ta chỉ xét $xyz \neq 0$, cộng ba phương trình này lại với chú ý $x + y + z = 0$ ta được $\lambda = 0$, và được

$$\frac{2xy + z^2}{x} = \frac{2yz + x^2}{y} = \frac{2zx + y^2}{z} = -2\mu. \tag{4}$$

Tuy không thể giải ra được cụ thể các nghiệm x, y, z nhưng nếu để ý chúng ta có thể thấy (4) chính là điều kiện xảy ra đẳng thức của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và điều đó lý giải tại sao ta lại thành công khi tách $3F$ trong (2) và áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz như ở trên.

Ví dụ 3.10. *Giải ví dụ* 18 *theo sơ đồ sau:*

(*a*) *Chứng minh rằng* $x, y, z \in [-2, 2]$.

(b) *Đặt $t = xyz$ và tính t theo x, từ đó tìm miền giá trị của t.*

(c) *Đặt $G = xy^2 + yz^2 + zx^2$. Hãy tính tổng $F + G$ và tích $F \cdot G$ theo t.*

(d) *Từ đó suy ra công thức tính F theo t. Sẽ có hai giá trị cho F như nghiệm của một phương trình bậc 2.*

(e) *Tìm giá trị lớn nhất F (khi tìm giá trị lớn nhất, ta sẽ lấy nghiệm với dấu $+$).*

Ví dụ 3.11. *Với $n \geqslant 2$ và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và $y_1, y_2, \ldots, y_n$ là $2n$ số thực thoả mãn điều kiện*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1, \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1, \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0.$$

Chứng minh rằng $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 \leq n.$

Lời giải. Bất đẳng thức khá khó chịu này có một lời giải hết sức ngắn gọn và ấn tượng. Đặt $A = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $B = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Khi đó khai triển bất đẳng thức hiển nhiên

$$(1 - Aa_i - Bb_i)^2 \geqslant 0,$$

ta được

$$1 - 2Aa_i - 2Bb_i + 2ABa_ib_i + A^2a_i^2 + B^2b_i^2 \geqslant 0.$$

Cho i chạy từ 1 đến n rồi cộng các bất đẳng thức lại vế theo vế, chú ý rằng

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1, \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1, \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0, ,$$

ta được

$$A^2 + B^2 \leqslant n,$$

chính là điều phải chứng minh. □

Dưới góc nhìn của toán sơ cấp thì khó có thể giải thích được tại sao chúng ta lại nghĩ ra được lời giải này, tại sao lại biết để bình phương các đại lượng $1 - Aa_i - Bb_i$ rồi cộng lại ? Chúng ta sẽ lại phải đổ cho "*kinh nghiệm, óc phán đoán*" hay "*nhạy cảm toán học*" ... Toán cao cấp sẽ giúp chúng ta giải thích được lời giải độc đáo này :

Xét bài toán tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(a,b) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2,$$

với các điều kiện ràng buộc $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1, \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1, \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0.$

Lập nhân tử Langrange

$$L = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 1\right) + \eta\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 - 1\right) + \mu\sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Các phương trình tìm điểm dừng có dạng

$$\begin{cases} 2A + 2\lambda a_i + \mu b_i = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n \\ 2B + 2\eta a_i + \mu b_i = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Từ hệ này, nếu $4\lambda\eta - \mu^2 \neq 0$, thì tất cả các a_i bằng nhau và tất cả các b_i bằng nhau. Điều này không thể xảy ra. Do đó ta phải có $4\lambda\eta - \mu^2 = 0$. Lúc này, để hệ có nghiệm, ta lại phải có

$$\frac{A}{B} = \frac{2\lambda}{\mu} = \frac{2\mu}{2\eta}.$$

Ngoài ra, ta có

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i(-2A - 2\lambda a_i) = -2A^2 - 2\lambda.$$

Suy ra $2\lambda = -2A^2$ và $\mu = -2AB$. Từ đó ta có điều kiện $1 - Aa_i - Bb_i = 0$. Như vậy tại điểm dừng ta có các hệ thức $1 - Aa_i - Bb_i = 0$ và đây chính là cơ sở để ta "*mạnh dạn*" thực hiện các phép bình phương nói trên.

Ví dụ 3.12. *(IMO Shortlist 2007) Cho $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2 = 1$. Chứng minh rằng*

$$a_1^2 a_2 + a_2^2 + a_3 + \cdots + a_1 00^2 a_1 < \frac{12}{25}.$$

Lời giải. Đặt $S = \sum_{k=1}^{100} a_k^2 a_{k+1}$ (như thường lệ, ta xét các chỉ số theo modulo 100, tức là ta đặt $a_{101} = a_1$, $a_{102} = a_2$).

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho các dãy (a_{k+1}) và $(a_k^2 + 2a_{k+1}a_{k+2})$ và sau đó là bất đẳng thức Cauchy cho các số a_{k+1}^2 và a_{k+2}^2.

Áp dụng các đánh giá hiển nhiên sau

$$\sum_{k=1}^{100} (a_k^4 + 2a_k^2 a_{k+1}^2 + 2a_k^2 a_{k+2}^2) \leq \left(\sum_{k=1}^{100} a_k^2\right)^2,$$

và

$$\sum_{k=1}^{100} a_k^2 a_{k+1}^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{50} a_{2i-1}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{50} a_{2i}^2\right),$$

ta thu được

$$(3S)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{100} a_k^2\right)^2 + 4\left(\sum_{i=1}^{50} a_{2i-1}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{50} a_{2i}^2\right) \leq 1 + \left(\sum_{i=1}^{50} a_{2i-1}^2 + \sum_{i=1}^{50} a_{2i}^2\right)^2 = 2.$$

Từ đó

$$S \le \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.4714 < \frac{12}{25} = 0.48.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Ở đây, các bước biến đổi và đánh giá đều dễ hiểu, mặc dù phức tạp hơn ví dụ trước. Tuy nhiên, cũng như ở lời giải của ví dụ 16, việc tách

$$3S = \sum_{k=1}^{100} a_{k+1}(a_k^2 + 2a_{k+1}a_{k+2})$$

khá khó hiểu và thiếu tự nhiên. Điều này sẽ trở nên dễ hiểu hơn nếu ta áp dụng phương pháp nhân tử Lagrange và thấy rằng giá trị lớn nhất của biểu thức đề bài đạt được tại các giá trị của ai thoả mãn hệ phương trình $a_{k-1}^2 + 2a_k a_{k+1} = 2\lambda a_k$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, 100$. Chính sự tỷ lệ tại điểm cực trị giúp chúng ta mạnh dạn sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz để đánh giá.

Bài tập 3.5. (IMO Shortlist 1995) Với a, b, c là các số thực dương cho trước và x, y, z là các số thực dương thay đổi thoả mãn điều kiện $x + y + z = a + b + c$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$4xyz - (a^2x + b^2y + c^2z).$$

Bài tập 3.6. (IMO 1984) Cho x, y, z là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh bất đẳng thức

$$0 \le xy + yz + zx - 2xyz \le \frac{7}{27}.$$

Tài liệu tham khảo

[1] J.Brinkhouse & V.Iu.Protasov, *Lý thuyết cực trị qua các ví dụ đơn giản*, Tạp chí "*Truyền bá toán học*" số 9 năm 2005, trang $32 - 55$.

[2] Nguyễn Văn Mậu, *Bất đẳng thức - Định lý và áp dụng*, Nhà xuất bản Giáo Dục, 2006.

[3] Đoàn Quỳnh chủ biên, *Tài liệu giáo khoa chuyên toán* $11, 12$, *Đại số và Giải tích*, Nhà xuất bản Giáo dục $2011, 2012$.

[4] V.Tikhomirov, *Các câu chuyện về maximum và minimum*, Nhà xuất bản MCCME, 2006.

[5] *The Vietnamese Mathematical Olympiad* $(1990 - 2006)$ *Selected Problems*, Education Publishing House, 2007.

[6] Các nguồn tài liệu trên Internet, các tạp chí Kvant, Toán học và Tuổi trẻ, đề thi Olympic Toán các nước, đề thi Đại học 2008.

THẶNG DƯ BẬC HAI MODULO M

Nguyễn Hồng Lữ - Trường THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai

LỜI GIỚI THIỆU

Các số k-phương $\pmod p$ trong đó p là số nguyên tố đóng vai trò cực kì quan trọng trọng trong lí thuyết số. Các số $k-$ phương đã được giới toán học quan tâm nghiên cứu từ xa xưa, đặc biệt là từ thế kỷ 17 cho đến nay đã có rất nhiều công trình lí thuyết số nghiên cứu về tính chất và ứng dụng của số k-phương.

Định nghĩa 1.

- *Số k-phương $\pmod m$: Cho số nguyên dương m; $m \geq 2$ và số nguyên a sao cho $(a, m) = 1$. Nếu tồn tại số tự nhiên x sao cho: $x^k \equiv a \pmod m$ thì ta nói a là số k-phương module m hay nói: a là số lũy thừa bậc k theo module m, cũng có người nói: a là thặng dư bậc k của m.*

- *Số chính phương mod m: Cho số nguyên dương $m \geq 2$ và số nguyên a sao cho $(a, m) = 1$. Nếu tồn tại số tự nhiên x sao cho $x^2 \equiv a \pmod p$ thì ta nói a là số chính phương module m (cũng nói a là thặng dư bình phương của m)*

Số k–phương module nguyên tố đơn giản và hay gặp nhất chính là số 2-phương module nguyên tố mà trong ngôn ngữ lí thuyết số ta gọi là thặng dư bậc hai theo module nguyên tố hay số chính phương mod p nguyên tố.

1. Thặng dư bậc hai modulo p

1.1. Khái niệm

Cho số nguyên m, cho số nguyên tố lẻ p:

- Nếu phương trình $x^2 \equiv a \pmod p$ có nghiệm nguyên thì ta nói a là số chính phương module m (cũng nói a là thặng dư bình phương của m).
- Nếu phương trình $x^2 \equiv a \pmod p$ không có nghiệm nguyên thì ta nói a là số phi chính phương module m (cũng nói a không phải là thặng dư bình phương của m).
- Nếu $a \equiv 0 \pmod m$ thì ta nói: a không phải là số chính phương module m, đồng thời a không phải là số phi chính phương module m.

Kí hiệu:

+) $aQRp$: a là số chính phương module p (viết tắt chữ ***quadratic residue***)

+) $aNRp$: a là số phi chính phương module p (viết tắt chữ ***quadratic nonresidue***)

Ví dụ 1.1. • *Vì $5^2 \equiv 4 \pmod 7$ nên: 4 là số chính phương module 7 hay $4QR7$*

- *Vì* $5^2 \equiv 3 \pmod 1)1$ *nên: 3 là số chính phương module 11 hay* $3QR11$
- *Vì* $a^2 \not\equiv 2 \pmod 3$ *với mọi số nguyên a nên: 2 là số phi chính phương module 3 hay* $2NR3$.
- *Vì* $b^2 \not\equiv 3 \pmod 7$ *với mọi số nguyên b nên: 3 là số phi chính phương module 7 hay* $3NR7$.

Định lí sau đây cho ta mối quan hệ trong phép nhân của các thặng dư bậc hai $\pmod p$

Định lý 1.1. *Cho p là số nguyên tố lẻ. Ta có:*

- *Nếu:* $aQRp$ *và* $bQRp$ *thì* $abQRp$
- *Nếu:* $aQRp$ *và* $bNRp$ *thì* $abNRp$
- *Nếu:* $aNRp$ *và* $bNRp$ *thì* $abQRp$

Một cách tổng quát: Tích hai số cùng chính phương hoặc cùng phi chính phương module p sẽ cho ta một số chính phương module p. Tích của một số chính phương và một số phi chính phương module p sẽ cho ta một số phi chính phương module p.

Chú ý: Bạn thấy định lí này giống với phép nhân dấu âm (-) với dấu dương(+) trong đại số: hai số cùng dấu thì tích là số dương; hai số trái dấu thì tích là số âm!

Nhận xét: Ta có $aQRm \Leftrightarrow (a+m)QRm$: Điều này cho ta thấy: Nếu một phần tử của lớp thặng dư modulo m là số chình phương modulo m thì mọi phần tử của lớp đó cũng là thặng dư modulo m.

Ví dụ 1.2. *Với modulo bằng 7: một số nguyên tố lẻ. Ta có:*

+) *Tập hợp các số* $\{1;2;4\}$ *là 3 số chính phương module 7*

+) *Tập hợp các số* $\{3;5;6\}$ *là 3 số phi chính phương module 7.*

Nhận xét: có $\dfrac{7-1}{2} = 3$ cho mỗi loại.

Ví dụ 1.3. *Với modulo bằng 13: một số nguyên tố lẻ. Ta có:*

+) *Tập hợp các số* $1;3;4;9;10;12$ *là 6 số chính phương module 13*

+) *Tập hợp các số* $2;5;6;7;8;11$ *là 6 số phi chính phương module 13.*

Nhận xét: có $\dfrac{13-1}{2} = 6$ số cho mỗi loại.

Từ các ví dụ 2, ví dụ 3 ta đi đến định lí sau:

Định lý 1.2. *Nếu p là số nguyên tố lẻ thì trong tập* $1, 2, ..., p-1$ *số các thặng dư bình phương của p bằng số các số không phải là thặng dư bình phương của p và bằng* $\dfrac{p-1}{2}$

Chứng minh. Để ý rằng: $k^2 \equiv (p-k)^2 \pmod{p}$, nên trong tập hợp $\left\{1^2; 2^2; ...; (p-1)^2\right\}$ có $\frac{p-1}{2}$ cặp đồng dư ($\not\equiv 0$) với nhau theo mod p. Cho k chạy từ 1 đến $\frac{p-1}{2}$ta đặt $k^2 \equiv a_k \pmod{p}$ và a_k thuộc tập hợp $\{1; 2; \ldots; p-1\}$, như vậy là có $\frac{p-1}{2}$ số chính phương mod p.

Ta sẽ chứng minh $a_i \neq a_j$ với $1 \leq i \neq j \leq \frac{p-1}{2}$. Thật vậy (phản chứng):

Giả sử có $1 \leq i \neq j \leq \frac{p-1}{2}$ mà $a_i = a_j$; khi đó $i^2 \equiv j^2 \pmod{p} \Rightarrow (i-j)(i+j)$ chia hết cho p, mà $i + j < p$ nên suy ra $i - j$ phải chia hết cho $p \Rightarrow i = j$: điều này mâu thuẫn với $1 \leq i \neq j \leq \frac{p-1}{2}$.

Vậy trong tập $\{1; 2; \ldots; p-1\}$có đúng $\frac{p-1}{2}$ số chính phương mod p và $\frac{p-1}{2}$ số phi chính phương mod p. $\square$

Định lý 1.3. *Nếu p là số nguyên tố lẻ và p không là ước số của a thì phương trình $x^2 \equiv a \pmod{p}$ hoặc vô nghiệm hoặc có hai nghiệm không đồng dư theo mod p.*

Chứng minh. Nhận thấy rằng: Nếu $x \equiv b \pmod{p}$ là nghiệm của phương trình $x^2 \equiv a \pmod{p}$ thì $x \equiv -b \pmod{p}$ là nghiệm của phương trình $x^2 \equiv a \pmod{p}$. Nếu lớp thặng dư $[b] \pmod{p}$ trùng với lớp thặng dư $[-b] \pmod{p}$, suy ra $b - (-b)$ phải chia hết cho p, hay $2b$ chia hết cho số nguyên tố lẻ p, do đó b chia hết cho số nguyên tố lẻ p (1).

Mặt khác $b^2 \equiv a \pmod{p}$ (2).

Từ (1)và(2) ta suy ra a chia hết cho p: điều này trái giả thiết! $\square$

2. Kí hiệu Legendre

2.1. Kí hiệu Legendre

Cho số nguyên tố lẻ p và a là số nguyên:

- Nếu a là số chính phương module p thì ta kí hiệu: $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$.
- Nếu a không phải là số chính phương module p thì ta kí hiệu: $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$.
- Nếu số nguyên tố p là ước số của a thì kí hiệu $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$

2.2. Một số tính chất liên quan kí hiệu Legendre

Tính chất 2.1. *Với mọi số nguyên tố p (lẻ hay chẵn) ta luôn có:* $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$

Tính chất 2.2. *Cho số nguyên tố lẻ p. Nếu:* $(a, p) = 1$; $(b, p) = 1$ *và* $a \equiv b \pmod{p}$ *thì:*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right).$$

Ví dụ 2.1. *Xét xem số 2014 có phải là một số chính phương modulo 7 hay không?*

Chứng minh. Ta có: $2010 \equiv 1 \pmod{7}$ nên theo tính chất 2 ta có: $\left(\frac{2010}{7}\right) = \left(\frac{1}{7}\right)$; mà theo tính chất 1 ta có: $\left(\frac{1}{7}\right) = 1$. Vậy $\left(\frac{2010}{7}\right) = 1$ hay 2014 là một số chính phương modulo 7 $\square$

Tính chất 2.3. *Cho p là số nguyên tố lẻ: Với mọi số nguyên a,b ta luôn có:*

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right).\left(\frac{b}{p}\right)$$

(Điều này nói lên: Kí hiệu Lagrange có tính chất nhân)

Hệ quả 2.1. *Với* $a \in \mathbb{Z}$ *; p là số nguyên tố: a không chia hết cho p ta luôn có:* $\left(\frac{a^2}{p}\right) = 1.$

Ví dụ 2.2. *Xét xem số 125 có phải là một số chính phương modulo 41 hay không?*

Chứng minh. Ta có: $125 \equiv 4 \pmod{41}$ nên theo tính chất 2 ta có: $\left(\frac{125}{41}\right) = \left(\frac{4}{41}\right)$; mà theo tính chất 3 ta có: $\left(\frac{4}{41}\right) = \left(\frac{2^2}{41}\right) = 1$. Vậy suy ra: $\left(\frac{125}{41}\right) = 1$ hay 125 là một số chính phương modulo 41. $\square$

Hệ quả 2.2. *Nếu:* $(a, p) = 1$ *thì* $\left(\frac{a^n}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)^n$ *(với n là số nguyên dương tùy ý)*

Ví dụ 2.3. *Xét xem số 75 có phải là một số chính phương modulo 97 hay không?*

Chứng minh. Ta có: $75 = 3.5^2$ nên theo tính chất 5 ta có $\left(\frac{75}{97}\right) = \left(\frac{3.5^2}{97}\right) = \left(\frac{3}{97}\right)\left(\frac{5^2}{97}\right)$ (1), để ý rằng theo tính chất 3 ta có $\left(\frac{5^2}{97}\right) = 1$ (2).

Ta có $10^2 \equiv 3 \pmod{97}$ nên $\left(\frac{3}{97}\right) = 1$ (3).

Từ (1),(2),(3) ta suy ra $\left(\frac{75}{97}\right) = 1$ $\square$

Tính chất 2.4. ***(Euler's Criterion)*** *Với mọi số nguyên a không chia hết cho số nguyên tố lẻ p ta luôn có:* $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.

Suy ra ***Tiêu chuẩn Euler****: a là thặng dư bậc hai mod p* $\Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

Tính chất 2.5. ***(Tính chất này gọi là luật tương hỗ Gauss hay luật thuận nghịch bình phương):*** *Với hai số nguyên tố lẻ p, q phân biệt ta luôn có:*

$$\left(\frac{p}{q}\right).\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}.\frac{q-1}{2}}.$$

Luật này có thể viết: $\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}.\frac{q-1}{2}}.\left(\frac{q}{p}\right)$

Hệ quả 2.3.

- *Nếu một trong hai số nguyên tố lẻ p,q có dạng* $4k+1$ *thì:* $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$
- *Nếu cả hai số nguyên tố lẻ p, q có dạng* $4k+3$ *thì:* $\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right)$.

Ví dụ 2.4. *Xét xem* 13 *có phải là số chính phương modulo* 17 *hay không?*

Chứng minh. Theo luật tương hỗ ta có:

$$\left(\frac{13}{17}\right) = (-1)^{\frac{13-1}{2}.\frac{17-1}{2}}.\left(\frac{17}{13}\right)$$

hay:

$$\left(\frac{13}{17}\right) = \left(\frac{17}{13}\right),$$

mặt khác ta có:

$$2^2 \equiv 17 \pmod{13} \Rightarrow \left(\frac{17}{13}\right) = 1.$$

Từ đó, ta có: $\left(\frac{13}{17}\right) = 1.$ □

Tính chất 2.6. *Cho p là số nguyên tố lẻ; ta có:* $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.

Tính chất 2.7. *Cho p là số nguyên tố lẻ; ta có:*

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\left[\frac{p+1}{4}\right]}$$

Từ các tính chất trên ta có thể chứng minh được các mệnh đề quan trọng sau đây:

- **T1:** 1 là số chính phương modulo p (với mọi số nguyên tố p dù chẵn hay lẻ)
  Chú ý: Từ tính chất T2 đến T12 thì p là số nguyên tố lẻ.
- **T2:** -1 là số chính phương modulo $p \Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod 4$
- **T3:** -1 không là số chính phương modulo $p \Leftrightarrow p \equiv -1 \pmod 4$
- **T4:** 2 là số chính phương modulo $p \Leftrightarrow p \equiv \pm 1 \pmod 8$
- **T5:** 2 không là số chính phương modulo $p \Leftrightarrow p \equiv \pm 3 \pmod 8$
- **T6:** -2 là số chính phương modulo $p \Leftrightarrow p \equiv 1, 3 \pmod 8$

- **T7:** 3 là số chính phương modulo $p \Leftrightarrow p \equiv \pm 1 \pmod 12$
- **T8:** 3 không là số chính phương modulo $p \Leftrightarrow p \equiv \pm 5 \pmod 12$
- **T9:** -3 là số chính phương modulo $p \Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod 6$
- **T10:** -3 không là số chính phương modulo $p \Leftrightarrow p \equiv -1 \pmod 3$
- **T11:** 5 là số chính phương modulo $p \Leftrightarrow p \equiv \pm 1 \pmod 5$
- **T12:** 5 là số phi chính phương modulo $p \Leftrightarrow p \equiv \pm 2 \pmod 5$.

Bổ đề 2.1. ***Bổ đề Gauss:*** *Cho số nguyên a, số nguyên tố lẻ p.*
Ta đặt $m = \dfrac{p-1}{2}$; $S = \sum_{k=1}^{m} \left[\dfrac{2ka}{p}\right]$ *ta có:* $\left(\dfrac{a}{p}\right) = (-1)^S$.

Có mối liên hệ nào không giữa số chính phương modulo p và căn nguyên thủy mod p? Câu trả lời cho bởi định lí sau:

Định lý 2.1. *Cho số nguyên tố lẻ p. Cho g là một căn nguyên thủy* $\pmod p$. *Cho a là một số nguyên. Ta có: a là số chính phương mod p* $\Leftrightarrow a \equiv g^{2k} \pmod p$.

Định lí trên suy ra rằng: Mỗi lũy thừa bậc chẵn của một căn nguyên thủy mod p nguyên tố sẽ là thặng dư bậc hai mod p nguyên tố!

Ví dụ 2.5. *2 là căn nguyên thủy mod 11. Theo định lí trên ta có: Các số nguyên: 4; 16; 64; 256; 1024 là các số chính phương mod 11, bởi vì:* $4 = 2^2$; $16 = 2^4$; $64 = 2^6$; $256 = 2^8$; $1024 = 2^{10}$.

3. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 3.1. *Xét xem số 6 có phải là một số chính phương modulo 73 hay không?*

Chứng minh. Ta có: $\left(\dfrac{6}{73}\right) = \left(\dfrac{2}{73}\right)\left(\dfrac{3}{73}\right)$ (1).

Theo tính chất 8 ta có: $\left(\dfrac{2}{73}\right) = (-1)^{\frac{73^2-1}{8}} = 1$ (2).

Vì 73 là số nguyên tố dạng $4k+1$ nên theo luật tương hỗ Gauss ta có: $\left(\dfrac{3}{71}\right) = \left(\dfrac{71}{3}\right)$ (3); để ý rằng: $2^2 \equiv 73 \pmod 3$ suy ra $\left(\dfrac{71}{3}\right) = 1$ (4).

Từ (1),(2),(3),(4) ta có $\left(\dfrac{6}{73}\right) = 1$ hay 6 là một số chính phương modulo 73. □

Ví dụ 3.2. *Tính:* $\left(\dfrac{-26}{73}\right)$

Chứng minh. Theo tính chất nhân của kí hiệu Lagrange có $\left(\dfrac{-26}{73}\right) = \left(\dfrac{(-1).2.13}{73}\right) = \left(\dfrac{-1}{73}\right)\left(\dfrac{2}{73}\right)\left(\dfrac{13}{73}\right)$.
Vì 73 là số nguyên tố nên theo tiêu chuẩn Euler có:

$$\left(\frac{-1}{73}\right) = (-1)^{\frac{73-1}{2}} = 1; \left(\frac{2}{73}\right) = (-1)^{\frac{73^2-1}{8}} = 1$$

Theo luật thuận nghịch bình phương Gauss (**Gauss's Quadratic Reciprocity Law**) ta có:

$$\left(\frac{13}{72}\right) = (-1)^{\frac{13-1}{2}.\frac{73-1}{2}}.\left(\frac{73}{13}\right) = \left(\frac{73}{13}\right).$$

Mặt khác dựa vào tính chất: "Nếu: $(a,p) = 1$; $(a,p) = 1$ và $a \equiv b \pmod p$ thì: $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$" suy ra $73 \equiv 8 \pmod 1)3$ nên $\left(\frac{73}{13}\right) = \left(\frac{8}{13}\right) = \left(\frac{2^3}{13}\right) = \left(\frac{2}{13}\right)^3$(hệ quả t/c nhân) ; mà $\left(\frac{2}{13}\right) = (-1)^{\frac{13^2-1}{8}} = -1 \Rightarrow \left(\frac{73}{13}\right) = -1$.

Vậy có: $\left(\frac{-26}{73}\right) = -1$. Hay –26 không là thặng dư bình phương modulo 73. $\square$

Ví dụ 3.3. *Tính* $\left(\frac{12}{23}\right)$

Chứng minh. **Cách 1**: Ta có

$$\left(\frac{12}{23}\right) = \left(\frac{2^2.3}{23}\right) = \left(\frac{2^2}{23}\right)\left(\frac{3}{23}\right) = \left(\frac{2}{23}\right)^2\left(\frac{3}{23}\right)$$

Mà $\left(\frac{2}{23}\right) = (-1)^{\frac{23^2-1}{8}} = 1$.
Theo luật thuận nghịch bình phương Gauss có:

$$\left(\frac{3}{23}\right) = (-1)^{\frac{3-1}{2}.\frac{23-1}{2}}.\left(\frac{23}{3}\right) = (-1)\left(\frac{2}{3}\right) = (-1)(-1)^{\frac{3^2-1}{8}} = 1$$

Suy ra $\left(\frac{12}{23}\right) = 1$.
Cách 2: Vì $12 \equiv -11 \pmod{23}$. Suy ra

$$\left(\frac{12}{23}\right) = \left(\frac{-11}{23}\right) = \left(\frac{-1}{23}\right)\left(\frac{11}{23}\right)$$

mà $\left(\frac{-1}{23}\right) = (-1)^{\frac{23-1}{2}} = -1$. Theo luật thuận nghịch bình phương Gauss có:

$$\left(\frac{11}{23}\right) = (-1)^{\frac{11-1}{2}.\frac{23-1}{2}}.\left(\frac{23}{11}\right) = (-1)\left(\frac{1}{11}\right) = (-1).1 = -1$$

Suy ra $\left(\frac{11}{23}\right) = -1$. $\square$

Ví dụ 3.4. *Xét xem phương trình:* $x^2 - 103y - 41 = 0$ *(*) có nghiệm nguyên hay không?*

Chứng minh. Phương trình (*) $\Leftrightarrow x^2 \equiv 41 \pmod 1)03$: Điều này cho ta thấy: Để trả lời câu hỏi phương tình (*) có nghiệm hay không thì ta phải trả lời câu hỏi số nguyên tố 41 có phải là số chính phương modulo 103 hay không?

Để ý rằng 41 là số nguyên tố dạng $4k + 1$ còn 103 là số nguyên tố dạng $4k + 3$ nên theo luật tương hỗ Gauss ta có:

$$\left(\frac{41}{103}\right) = \left(\frac{103}{41}\right).$$

Theo tính chất 2 ta có $\left(\frac{103}{41}\right) = \left(\frac{21}{41}\right)$ (vì $103 \equiv 21 \pmod{41}$).

Theo tính chất 5 ta có

$$\left(\frac{21}{41}\right) = \left(\frac{3.7}{41}\right) = \left(\frac{3}{41}\right).\left(\frac{7}{41}\right).$$

Theo luật tương hỗ Gauss ta có: $\left(\frac{3}{41}\right) = \left(\frac{41}{3}\right)$ mà $41 \equiv -1 \pmod 3$ nên theo tính chất 2 ta có:

$$\left(\frac{41}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right) = -1$$

(theo hệ quả của tính chất 6). Tương tự:

$$\left(\frac{7}{41}\right) = \left(\frac{41}{7}\right) = \left(\frac{-1}{7}\right) = -1.$$

Như vậy có: $\left(\frac{3}{41}\right).\left(\frac{7}{41}\right) = 1$ suy ra có $\left(\frac{41}{103}\right) = 1$.

Suy ra 41 số chính phương modulo 103 nên (*) có nghiệm. □

Ví dụ 3.5. *Chứng tỏ phương trình: $x^2 - 59y = 30$ không có nghiệm nguyên $(x; y)$.*

Chứng minh. Ta có:

$$\left(\frac{30}{59}\right) = \left(\frac{2}{59}\right)\left(\frac{3}{59}\right)\left(\frac{5}{59}\right)$$

mà

$$\left(\frac{2}{59}\right) = (-1)^{\frac{59^2-1}{8}} = -1; \left(\frac{3}{59}\right) = (-1)^{\frac{3-1}{2}.\frac{59-1}{2}}.\left(\frac{59}{3}\right) = (-1)\left(\frac{2}{3}\right).$$

(vì $59 \equiv 2 \pmod 3$). Mà $\left(\frac{2}{3}\right) = (-1)^{\frac{3^2-1}{8}} = -1$ suy ra: $\left(\frac{3}{59}\right) = 1$.

Ta có: $\left(\frac{5}{59}\right) = (-1)^{\frac{5-1}{2}.\frac{59-1}{2}}.\left(\frac{59}{5}\right) = \left(\frac{59}{5}\right) = \left(\frac{-1}{5}\right)$ (vì $59 \equiv -1 \pmod 5$), mà $\left(\frac{-1}{5}\right) = (-1)^{\frac{5-1}{2}} = 1$ suy ra: $\left(\frac{3}{59}\right) = 1$. Vậy $\left(\frac{30}{59}\right) = -1$.

Suy ra không tồn tại số nguyên m sao cho $m^2 \equiv 30 \pmod{59}$, hay phương trình: $x^2 - 59y = 30$ vô nghiệm. □

4. Thặng dư bậc hai modulo của hợp số

4.1. Kí hiệu Jacobi

Đặt vấn đề : Như ta đã trình bày ở trên: Kí hiệu Lagrange vô cùng tiện lợi nhưng nó chỉ dùng cho modulo p là số nguyên tố, Lẽ tự nhiên bạn sẽ đặt câu hỏi: Nếu đối với modulo m không phải là số nguyên tố thì sao? Để có câu trả lời chúng ta đi vào tìm hiểu kí hiệu Jacobi dành cho thặng dư bình phương modulo của hợp số:

Định nghĩa 2. *Cho a là số nguyên, m là số nguyên dương lẻ.*
Giả sử m có sự phân tích tiêu chuẩn là $m = p_1^{s_1}.p_2^{s_2}.p_3^{s_3}...p_k^{s_k}$. *Kí hiệu* $\left(\frac{a}{m}\right)_J$ *sẽ được gọi là kí hệu Jacobi và được tính như sau:*

$$\left(\frac{a}{m}\right)_J = \left(\frac{a}{p_1}\right)^{s_1}.\left(\frac{a}{p_2}\right)^{s_2}...\left(\frac{a}{p_k}\right)^{s_k}. \qquad (*)$$

Cần lưu ý bạn đọc bạn đọc: Vì m lẻ suy ra trong phân tích tiêu chuẩn $m = p_1^{s_1}.p_2^{s_2}.p_3^{s_3}...p_k^{s_k}$ *thì các số nguyên tố* p_i $(i = 1, 2, ..., k)$ *là lẻ nên các kí hiệu ở vế phải của (*) được hiểu là kí hiệu Lagrange)*

Ví dụ: $\left(\frac{-1}{15}\right)_J = \left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{-1}{5}\right) = (-1).(-1) = 1.$

Nhận xét:

- Khi m là số nguyên tố thì kí hiệu Jacobi trùng với kí hiệu Lagrange !
- Từ (*) ta suy ra: Nếu $\left(\frac{a}{m}\right)_J = -1$ thì a không là thặng dư bậc hai của p_i nào đó $(i = 1, 2, ..., k)$ vì nếu mọi $\left(\frac{a}{p_1}\right)^{s_i} = 1$ thì $\left(\frac{a}{m}\right) = 1$.
- Từ (*), khi $\left(\frac{a}{m}\right)_J = 1$ thì không thể suy ra a là thặng dư bậc hai của mọi p_i $(i = 1, 2, ..., k)$. Bởi vì ký hiệu Jacobi là tích của các ký hiệu Legendre, nên có thể có hai ký hiệu Legendre bằng -1 và khi đó ký hiệu Jacobi bằng 1.

Kí hiệu Jacobi : Cho a là số nguyên, m là số nguyên dương lẻ và không nhất thiết m là số nguyên tố

- Nếu a là số chính phương module m thì ta kí hiệu: $\left(\frac{a}{m}\right)_J = 1$.
- Nếu a là số phi chính phương module m thì ta kí hiệu: $\left(\frac{a}{m}\right)_J = -1$.
- Nếu số nguyên dương lẻ m là ước số của a thì kí hiệu $\left(\frac{a}{m}\right)_J = 0$.

4.2. Các tính chất sau thường dùng để tính nhanh ký hiệu Jacobi

- **TC1:** Nếu m là số nguyên tố lẻ thì kí hiệu $\left(\frac{a}{m}\right)_J$ trùng với kí hiệu $\left(\frac{a}{m}\right)$.

- **TC2:** Với a là số nguyên; m là số tự nhiên lẻ $\left(\frac{a}{m}\right)_J \in \{-1; 0; 1\}$.
- **TC3:** Với a là số nguyên; m là số tự nhiên lẻ $\left(\frac{a}{m}\right)_J = 0 \Leftrightarrow \gcd(a; n) \neq 1$.
- **TC4:** Với a,b là hai số nguyên; m là số tự nhiên lẻ $\left(\frac{ab}{m}\right)_J = \left(\frac{a}{m}\right)_J . \left(\frac{b}{m}\right)_J$.

  Hệ quả: $\left(\frac{a^k}{m}\right)_J = \left(\frac{a}{m}\right)_J^k$.
- **TC5:** Với a là số nguyên; m, n là 2 số tự nhiên lẻ $\left(\frac{a}{mn}\right)_J = \left(\frac{a}{m}\right)_J . \left(\frac{a}{n}\right)_J$.

  Hệ quả: $\left(\frac{a}{m^2}\right)_J = \left(\frac{a}{m}\right)_J^2 \in \{0; 1\}$.
- **TC6:** Với a là số nguyên; m là số tự nhiên lẻ Nếu: $a \equiv b \pmod m$ thì:$\left(\frac{a}{m}\right)_J = \left(\frac{b}{m}\right)_J$.
- **TC7:** Với a là số nguyên; m là số tự nhiên lẻ $\left(\frac{1}{m}\right)_J = 1$.
- **TC8:** Với a là số nguyên; m là số tự nhiên lẻ
$$\left(\frac{-1}{m}\right)_J = (-1)^{\frac{m-1}{2}} = \begin{cases} 1 \ \ if \ m \equiv 1 \mod 4 \\ -1 \ \ if \ m \equiv 3 \mod 4 \end{cases}.$$
- **TC9:** Với a là số nguyên ; m là số tự nhiên lẻ
$$\left(\frac{-1}{m}\right)_J = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} = \begin{cases} 1 \ \ if \ m \equiv 1; 7 \mod 8 \\ -1 \ \ if \ m \equiv 3; 5 \mod 8 \end{cases}.$$
- **TC10** (***Luật tương hỗ Gauss***): Với m, n là hai số tự nhiên lẻ, $(m, n) = 1$ thì
$$\left(\frac{m}{n}\right)_J \left(\frac{n}{m}\right)_J = (-1)^{\frac{(m-1)(n-1)}{4}}.$$
  Tính chất này (giống như trong ký hiệu Legendre) và được gọi: **luật thuận nghịch bình phương**.
- **TC11:** Với m là số tự nhiên lẻ $\left(\frac{2}{m}\right)_J = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}$.
- **TC12:** Với m là số tự nhiên lẻ $\left(\frac{2}{m}\right)_J = (-1)^{\left[\frac{m+1}{4}\right]}$.

  TC12: 2 là số chính phương modulo $p \Leftrightarrow p \equiv \pm 1 \pmod 8$.
- **TC13:** -2 là số chính phương modulo $p \Leftrightarrow p \equiv 1, 3 \pmod 8$.
- **TC14:** 3 là số chính phương modulo $p \Leftrightarrow p \equiv \pm 1 \pmod{12}$.

  TC14: -3 là số chính phương modulo $p \Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod 6$.

- **Chú ý:** Ta không thể mở rộng đồng dư thức Euler $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}}$ mod p với số nguyên tố p và số nguyên a bất kỳ từ ký hiệu Legendre sang ký hiệu Jacobi là: $\left(\frac{a}{m}\right)_L \equiv a^{\frac{m-1}{2}}$ mod m với hợp số lẻ dương m. Hay nói khác đi: Tiêu chuẩn Euler không còn tác dụng đối với kí hiệu Jacobi.

4.3. Một ví dụ so sánh giữa kí hiệu Lagrange và kí hiệu Jacobi

Sử dụng kí hiệu Lagrane: Tính: $\left(\dfrac{1001}{9907}\right)$ =?

Ta có:

$$\left(\frac{1001}{9907}\right) = \left(\frac{7}{9907}\right)\left(\frac{11}{9907}\right)\left(\frac{13}{9907}\right) \tag{1}$$

Mà:

$$\left(\frac{7}{9907}\right) = -\left(\frac{9907}{7}\right) = -\left(\frac{2}{7}\right) = -1 \tag{2}$$

và

$$\left(\frac{11}{9907}\right) = -\left(\frac{9907}{11}\right) = -\left(\frac{7}{11}\right) = \left(\frac{11}{7}\right) = \left(\frac{4}{7}\right) = 1 \tag{3}$$

$$\left(\frac{13}{9907}\right) = \left(\frac{9907}{13}\right) = \left(\frac{1}{13}\right) = 1. \tag{4}$$

Từ (1)(2)(3)(4) có: $\left(\dfrac{1001}{9907}\right) = -1.$

Sử dụng kí hiệu Jacobi: Tính: $\left(\dfrac{1001}{9907}\right)_J$ =?

Ta có:

$$\left(\frac{1001}{9907}\right)_J = \left(\frac{9907}{1001}\right)_J = \left(\frac{898}{1001}\right)_J = \left(\frac{2}{1001}\right)_J\left(\frac{449}{1001}\right)_J$$
$$= \left(\frac{449}{1001}\right)_J = \left(\frac{1001}{449}\right)_J = \left(\frac{103}{449}\right)_J = \left(\frac{449}{103}\right)_J = \left(\frac{37}{103}\right)_J\left(\frac{103}{37}\right)_J$$
$$= \left(\frac{29}{37}\right)_J = \left(\frac{37}{29}\right)_J = \left(\frac{8}{29}\right)_J = \left(\frac{2}{8}\right)_J^3 = -1.$$

So sánh: Sự khác biệt giữa hai hai cách tính toán là: khi tính bằng kí hiệu Legendre thì "tử số" phải được phân tích thành lũy thừa các số nguyên tố. Điều này làm cho việc tính toán bằng cách sử dụng các kí hiệu Legendre chậm hơn so với cách tính bằng sử dụng kí hiệu Jacobi đáng kể.

Ví dụ 4.1. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình:* $x^2 = y^3 - 5$.

Chứng minh. Ta có: Nếu y chẵn suy ra $y^3 \equiv 0 \pmod 8 \Rightarrow y^3 – 5 \equiv -5 \pmod 8 \Rightarrow y^3 – 5 \equiv 3 \pmod 8 \Rightarrow x^2 \equiv 3 \pmod 8$. Điều này không xảy ra vì: một số chính phương chỉ $\equiv 0; 1; 4 \pmod 8$.

Nếu $y \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow y^3 \equiv 3 \pmod 4$. Điều này không xảy ra vì: số chính phương chỉ $\equiv 0; 1 \pmod 4$.

Nếu $y \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow y = 4z+1$. Thay vào phương trình đã cho có $x^2+4 = 4z\left(16z^2 + 12z + 3\right)$

$\Rightarrow x^2 + 4 \equiv 0 \pmod{16z^2 + 12z + 3} \Rightarrow x^2 \equiv -4 \pmod{16z^2 + 12z + 3} \Rightarrow -4$ là số chính phương $\pmod{16z^2 + 12z + 3}$ nên sử dụng kí hiệu Jacobi ta có

$$\left(\frac{-4}{16z^2 + 12z + 3}\right)_J = 1. \tag{$*$}$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned}\left(\frac{-4}{16z^2+12z+3}\right)_J &= \left(\frac{-1}{16z^2+12z+3}\right)_J\left(\frac{4}{16z^2+12z+3}\right)_J\\ &= \left(\frac{-1}{16z^2+12z+3}\right)_J\left(\frac{4}{16z^2+12z+3}\right)_J\\ &= \left(\frac{-1}{16z^2+12z+3}\right)_J\left(\frac{2}{16z^2+12z+3}\right)_J^2\\ &= \left(\frac{-1}{16z^2+12z+3}\right)_J = (-1)^{\frac{16z^2+12z+3-1}{2}}(-1)^{8z^2+6z+1} = -1. \qquad (**)\end{aligned}$$

Ta thấy (*) mâu thuẫn với (**) suy ra phương trình vô nghiệm. □

Ví dụ 4.2. *Giả sử $n = a^2 + b^2$; u là ước của n và $u \equiv 3 \pmod 4$.Chứng minh rằng u là ước của a và b.*

Chứng minh. (Phản chứng) Giả sử u không là ước của a hoặc u không là ước của b; chẳng hạn: u không là ước của a, suy ra $(a; u) = 1$. Do đó, tồn tại số nguyên y, z sao cho $ay + uz = 1$ hay $ay \equiv 1 \pmod u$ (1).

Vì u là ước của $n = a^2 + b^2$ nên $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod u$.

Suy ra $1 + (by)^2 \equiv (ay)^2 + (by)^2 = y^2(a^2 + b^2) \equiv 0 \pmod u$.

Từ đây suy ra phương trình: $1 + x^2 \equiv 0 \pmod u$ có nghiệm (nghiệm $x = by$).

Suy ra $x^2 \equiv -1 \pmod u$ (với $u \equiv 3 \pmod 4$): vô lí ! (Vì: -1 là số chính phương modulo u khi $u \equiv 1 \pmod 4$) □

Ví dụ 4.3. *Cho 5 số nguyên dương: z, y, k, m, n. Chứng minh rằng: $x^m + y^n$ không chia hết cho $4kxy$–1.*

Chứng minh. Giả sử $u = 4kxy$–1 là ước số của $x^m + y^n$

- Nếu m, n cùng chẵn: $m = 2m_1; n = 2n_1$, suy ra $x^m + y^n = (x^{m_1})^2 + (y^{n_1})^2$ chia hết cho u nên $(x^{m_1})^2 \equiv -(y^{n_1})^2 \pmod u$.

  Suy ra $\left(\frac{-(y^{n_1})^2}{u}\right)_J = 1 \Rightarrow \left(\frac{-1}{u}\right)_J = 1 \Leftrightarrow u \equiv 1 (\mathrm{mod} 4)$: Điều này trái giả thiết $u \equiv -1 \pmod 4$.

- Nếu m, n không cùng tính chẵn lẻ: Chẳng hạn: $m = 2m_1; n = 2n_1 + 1$, suy ra $x^m + y^n = (x^{m_1})^2 + y(y^{n_1})^2$ chia hết cho u.

  Do đó $(x^{m_1})^2 \equiv -y(y^{n_1})^2 \pmod u$.

  Suy ra
  $$\left(\frac{-y(y^{n_1})^2}{u}\right)_J = 1 \Rightarrow \left(\frac{-y}{u}\right)_J\left(\frac{(y^{n_1})^2}{u}\right)_J = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-y}{u}\right)_J \left(\frac{y^{n_1}}{u}\right)_J^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{-y}{u}\right)_J = 1 \qquad (*)$$

+) Nếu y lẻ ta có $\left(\frac{-y}{u}\right)_J = \left(\frac{-1}{u}\right)_J \left(\frac{y}{u}\right)_J$ (1).

Do $u \equiv -1 \pmod 4$ nên $\left(\frac{-1}{u}\right)_J = -1$ (2).

Vì $(y;u) = 1$ và y, u đều lẻ nên theo luật thặng dư bình phương có:

$$\left(\frac{y}{u}\right)_J \cdot \left(\frac{u}{y}\right)_J = (-1)^{\frac{y-1}{2}.\frac{u-1}{2}} = (-1)^{\frac{y-1}{2}.(2kxy-1)} = (-1)^{\frac{y-1}{2}}(-1) \qquad (3)$$

Vì $u \equiv -1 \pmod y$, suy ra $\left(\frac{u}{y}\right)_J = \left(\frac{-1}{y}\right)_J$; mà $\left(\frac{-1}{y}\right)_J = (-1)^{\frac{y-1}{2}}$ nên $\left(\frac{u}{y}\right)_J = (-1)^{\frac{y-1}{2}}$ (4).
Từ (3), (4) suy ra $\left(\frac{y}{u}\right)_J = 1 \Rightarrow \left(\frac{-y}{u}\right)_J = -1$: mâu thuẫn (*).

+) Nếu y chẵn: $y = 2^h.z$ trong đó h là số nguyên dương, z là số nguyên lẻ. Khi đó

$$\left(\frac{-y}{u}\right)_J = \left(\frac{-2^h z}{u}\right)_J = \left(\frac{2^h}{u}\right)_J \left(\frac{-z}{u}\right)_J = \left(\frac{2}{u}\right)_J^h \left(\frac{-z}{u}\right)_J$$

Mà $\left(\frac{2}{u}\right)_J = (-1)^{\frac{u^2-1}{8}} = 1$; $\left(\frac{-z}{u}\right)_J = -1$ suy ra $\left(\frac{-y}{u}\right)_J = -1$: mâu thuẫn (*)

- Nếu m, n cùng lẻ: $m = 2m_1 + 1$; $n = 2n_1 + 1$. Suy ra $x^m + y^n = x(x^{m_1})^2 + y(y^{n_1})^2$ chia hết cho u nên $x(x^{m_1})^2 \equiv -y(y^{n_1})^2 \pmod u \Rightarrow x^2(x^{m_1})^2 \equiv -xy(y^{n_1})^2 \pmod u \Rightarrow \left(\frac{-xy}{u}\right)_J = 1$. Ta có $\left(\frac{-xy}{u}\right)_J = \left(\frac{x}{u}\right)_J \left(\frac{-y}{u}\right)_J = -1$: mâu thuẫn!

□

5. Bài tập thực hành

Bài tập 5.1. Sử dụng kí hiệu Legendre và các tính chất liên quan đến kí hiệu đó để tính:

a/ $\left(\frac{31}{641}\right)$ b/ $\left(\frac{111}{991}\right)$ c/ $\left(\frac{105}{1009}\right)$.

Bài tập 5.2. Chứng minh rằng

1. $\left(\frac{85}{101}\right) = \left(\frac{97}{101}\right) = 1$
2. $\left(\frac{116}{10009}\right) = \left(\frac{150}{1009}\right) = 1$
3. $\left(\frac{5!}{7}\right) = 1$.

Bài tập 5.3. Tìm tất cả các số nguyên tố lẻ p sao cho 10 là số chính phương mod p.

Bài tập 5.4. Cho p là số nguyên tố ; $p \equiv 3 \pmod 8$ và $\frac{p-1}{2}$ cũng là số nguyên tố.Chứng tỏ rắng: $\frac{p-1}{2}$ là số chính phương mod p.

Bài tập 5.5. Chứng minh rằng

1. $\left(\frac{-2}{61}\right) = -1$
2. $\left(\frac{29}{541}\right) = -1$
3. $\left(\frac{113}{137}\right) = -1$
4. $\left(\frac{5}{1583}\right) = -1.$

Bài tập 5.6. Cho p là số nguyên tố Mersenne; $p \geq 5$. Chứng tỏ rắng: 3 là số phi chính phương mod p.

Bài tập 5.7. Cho số nguyên dương b và số nguyên tố lẻ p không là ước của b. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{b}{p}\right) + \left(\frac{2b}{p}\right) + \left(\frac{3b}{p}\right) + \ldots\left(\frac{(p-1)b}{p}\right) = 0.$$

Bài tập 5.8. Cho số nguyên tố lẻ $p = 8.k + 1$. Gọi $h = ord_p(2)$. Chứng minh rằng: h là ước của $\frac{p-1}{2}$.

Bài tập 5.9. Cho số nguyên tố lẻ $p = 4k + 1$ và p là số chính phương mod q với q là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng: q là số chính phương mod p.

Bài tập 5.10. Cho p, q là hai số nguyên tố sinh đôi với $q = p + 2$. Chứng minh rằng: Tồn tại số nguyên a sao cho p là ước của $a^2 - q$ $\Leftrightarrow$ tồn tại số nguyên b sao cho q là ước của $a^2 - p$.

Bài tập 5.11. Cho số nguyên tố p. Khi đó luôn tồn tại số tự nhiên m sao cho: $m < 1 + \sqrt{p}$ và m là số phi chính phương mod p.

Bài tập 5.12. Chứng minh rằng: phương trình $x^2 – 149y = 107$ có nghiệm nguyên.

Bài tập 5.13. Giải phương trình: $2x^2 + x \equiv 13 \pmod{37}$.

Bài tập 5.14. Cho số nguyên tố p. Phương trình $x^2 + 2y^2 = p$ có nghiệm nguyên (x, y) khi và chỉ khi $p = 2$ hoặc $p \equiv 1, 3 \pmod 8$.

Bài tập 5.15. Chứng minh rằng phương trình: $x^2 - 4x – 8 \equiv 0 \pmod{23}$ có nghiệm nguyên.

Bài tập 5.16. Chứng minh rằng phương trình: $x^2 \equiv 31 \pmod{71}$ không có nghiệm nguyên.

Bài tập 5.17. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho

1. Phương trình $x^2 \equiv 10 \pmod p$ có nghiệm
2. Phương trình $x^2 \equiv -3 \pmod p$ có nghiệm
3. Phương trình $x^2 \equiv 3 \pmod p$ có nghiệm

4. Phương trình $x^2 + 9x + 19 \equiv 0 \pmod{p}$ có nghiệm.

Bài tập 5.18. Giả sử p là số nguyên tố lẻ, m là số nguyên sao cho $(m, p) = 1$. Tìm điều kiện cần và đủ để phương trình: $x^2 + py + m = 0$ có nghiệm nguyên $(x; y)$.

Bài tập 5.19. Nếu p là số nguyên tố lẻ có thể biểu diễn thành tổng hai số chính phương $\Leftrightarrow p \equiv 1(\mathrm{mod} 4)$.

Bài tập 5.20. Chứng tỏ rằng: Nếu phương trình: $x^2 + 101y = z$ có nghiệm nguyên thì phương trình: $x^{50}–101y–1 = 0$ có nghiệm nguyên.

Bài tập 5.21. Cho a, b, c là các số nguyên, cho p là một số nguyên tố lẻ không là ước của a, b, c. Chứng minh rằng phương trình: $(x^2 - ab)(x^2 - bc)(x^2 - ca) = py$ luôn có nghiệm nguyên $(x; y)$

Bài tập 5.22. Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng

1. Phương trình $x^2–2y^2 = p$ có nghiệm khi và chỉ khi $p = 2$ hoặc $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$
2. Phương trình $x^2 + 2y^2 = p$ có nghiệm khi và chỉ khi $p = 2$ hoặc $p \equiv 1, 3 \pmod{8}$
3. Phương trình $x^2–3y^2 = p$ có nghiệm nếu và chỉ nếu $p \equiv 1 \pmod{12}$
4. Phương trình $3x^2–y^2 = p$ có nghiệm nếu và chỉ nếu $p = 2, 3$ hoặc $p \equiv 11 \pmod{12}$.

Bài tập 5.23. Cho số nguyên tố p dạng $4k + 1$. Chứng minh rằng: $x = \left(\dfrac{p-1}{2}\right)!$ là một nghiệm của phương trình: $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$

Bài tập 5.24. Cho p là số nguyên tố ; $p \equiv 3 \pmod{4}$; biết rằng $q = 2p + 1$ cũng là số nguyên tố Chứng tỏ rằng: $2^p–1$ chia hết cho q.

Bài tập 5.25. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số nguyên tố dạng: $3k + 1$, $4k + 1$, $10k + 9$

Bài tập 5.26. Đặt:

$$S = \left[\frac{2^{1008}}{2017}\right]+\left[\frac{2^{1009}}{2017}\right]+\left[\frac{2^{1010}}{2017}\right]+\ldots+\left[\frac{2^{2015}}{2017}\right]-\left(\left[\frac{1}{2017}\right]+\left[\frac{2}{2017}\right]+\left[\frac{2^2}{2017}\right]+\ldots+\left[\frac{2^{1007}}{2017}\right]\right)$$

Chứng minh rằng: $2017.S$ là số chính phương.

Bài tập 5.27. Chứng minh rằng: Với x, y là hai số nguyên bất kì thì số $\dfrac{x^2-2}{2y^2+3}$ không là số nguyên.

Bài tập 5.28. Kí hiệu $E_n = 11...1$ là số tự nhiên mà trong cách viết trong hệ đếm cơ số 10 thì E_n có n chữ số 1. Hãy xét xem E_{33} có chia hết cho 67 hay không?

Bài tập 5.29. Chứng minh rằng: nếu $M_n = 2^n + 1$ $(n \geq 2)$ là số nguyên tố thì $3^{\frac{M_n-1}{2}} \equiv -1(\mathrm{mod}\, M_n)$.

Bài tập 5.30. Với mỗi số nguyên dương n ta đặt $F_n = 2^{2^n} + 1$ (số Phecma thứ n). Chứng minh rằng

1. F_n là số nguyên tố $\Leftrightarrow 3^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv -1 (\bmod p)$, trong đó p là số nguyên tố.
2. Nếu p là một ước nguyên tố của F_n thì p có dạng: $p = 1 + 2^{n+2}.k$ (trong đó k là một số nguyên dương nào đó).

Bài tập 5.31. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, n) thoả mãn $x^3 + 2x + 1 = 2^n$.

(Đề thi Olympic Toán của Serbia năm 2007)

Bài tập 5.32. Cho p là một số nguyên tố; cho n là một số nguyên. Nếu tồn tại các số nguyên x, y sao cho $p = x^2 + ny^2$ thì $(-n)$ là một số chính phương module p.

Bài tập 5.33. Cho số nguyên dương $a \equiv 3 \pmod 4$. Khi đó tồn tại vô hạn số nguyên tố $p \equiv 3 \pmod 4$ sao cho: phương trình $x^2 \equiv a \pmod p$ không có nghiệm nguyên x.

Bài tập 5.34. Cho p là số nguyên tố lẻ; m là số nguyên dương; a là một số nguyên sao cho $(a, p) = 1$.

1. Chứng tỏ rằng: Phương trình $x^2 \equiv a \pmod{p^{m+1}}$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 \equiv a \pmod{p^m}$ có nghiệm
2. Chứng tỏ rằng: Phương trình $x^2 \equiv a \pmod{p^m}$ có đúng hai nghiệm $\Leftrightarrow \left(\frac{a}{p}\right) = 1$.

Bài tập 5.35. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho p có thể biểu diễn dưới dạng: $p = \left|x^2 - 3y^2\right|$ trong đó x, y là những số nguyên khác 0.

Bài tập 5.36. **(USAMO 2008)** Chứng minh rằng: Với mỗi số nguyên dương n luôn tồn tại n số nguyên dương k_1 ; k_2 ; ... ; k_n nguyên tố cùng nhau từng đôi một và $k_i \geq 2$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$ sao cho $k_1.k_2...k_n - 1$ là tích của hai số nguyên dương liên tiếp

Bài tập 5.37. **(Serbia 2008)** Tìm tất cả các nghiệm nguyên không âm của phương trình: $12^x + y^4 = 2008^z$.

Bài tập 5.38. **(Ba Lan 2007)** Chứng minh rằng: phương trình: $x^2 + 5 = y^3$ không có nghiệm nguyên

Bài tập 5.39. Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng số các thặng dư bình phương mod $2n$ là: $\left[\frac{2^{n-1} - 1}{3}\right] + 2$.

Bài tập 5.40. Cho số nguyên dương n và số nguyên tố lẻ p => Số các thặng dư bình phương mod p^n là: $\left[\frac{p^{n+1} - 1}{2(p+1)}\right] + 1$

6. Các chú ý về lịch sử

Chú ý 1: Kí hiệu Legendre được Legendre sử dụng vào 1798, mà như chúng ta sẽ thấy, là một trong các kí hiệu thông minh và tiện lợi của toán học (Trong toán học có 3 kí hiệu được coi là tuyệt vời thông thái, đó là: Kí hiệu Legendre về thặng dư bậc 2, kí hiệu đồng dư ($\equiv$) do Gauss đề xuất; kí hiệu dx của Leibniz trong phép tính vi phân).

Chú ý 2: Định lí tương hỗ thặng dư bậc hai được tiên đoán bởi Adrien Marie Legendre (vào cuối những năm 1700) và Leonhard Euler trong một thời gian khoảng 40 năm cố gắng chứng minh nhưng không thành, cuối cùng ông nêu định lí đó như một giả thuyết (vào khoảng năm 1744). Nhưng nhà toán học Đức vĩ đại Johann Carl Friedrich Gauss là người đầu tiên chứng minh định lí vào năm 1797, khi đó ông ở tuổi 19 (!). Gauss gọi đó là 'định lý vàng' và rất tự hào về nó đến mức ông tiếp tục tìm ra 8 cách chứng minh khác cho định lí cho đến cuối đời.

Cuốn Reciprocity Laws: From Euler to Eisenstein (Luật tương hỗ bậc hai: Từ Euler đến Eisentein) của Franz Lemmermeyer, xuất bản năm 2000, thu thập các trích dẫn cho 196 chứng minh khác nhau của định lý này.

Chú ý 3: Các tính chất trên được tác giả trích dẫn từ các tài liệu tham khảo (có danh mục ở cuối đề tài này) Việc không chứng minh các tính chất trên nhằm giảm tính nặng nề và quá hàn lâm cho dề tài mà tôi chỉ quan tâm đến áp dụng chúng!

Adrien-Marie Legendre [1752 – 1833]: sinh ngày 18 tháng 9 năm 1752 tại Paris, Pháp và mất ngày 09 tháng 1 năm 1833 tại Paris.

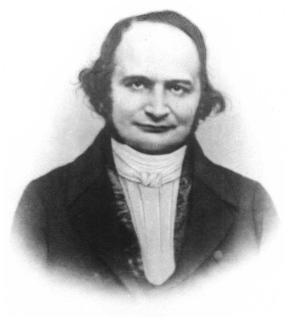
Legendre đã được sinh ra trong một gia đình giàu có, học tại Học viện Paris Ma Zhalin. Ông được đào tạo về các lĩnh vực: khoa học giáo dục, giáo dục và đặc biệt là toán học. Thầy giáo dạy toán của ông là J. F. M. Abbe (Abbé) là một trong các nhà toán học được kính trọng lúc đó. Vào năm 1770 ở tuổi 18, Legendre đã bảo vệ luận án tiến sĩ toán học và vật lý, thông qua sự bảo trợ của Abbe.

Điều kiện kinh tế khá giả, đủ để giúp Legendre tham gia vào các nghiên cứu khoa học. Tuy nhiên, vào những 1775-1780 ông mới bắt đầu tham gia giảng dạy toán học trong trường quân sự Paris. Công việc nghiên cứu của ông đã được sự chú ý của cộng đồng khoa học, vào năm 1782 đã được gia nhậpViện Cơ học, năm 1785 được bổ nhiệm làm Viện trưởng, thay thế ch P. S. Laplace (Laplace). Năm 1787, ông được bổ nhiệm làm Viện trưởng Viện Hàn lâm Khoa học Paris và Đài thiên văn Greenwich.

Năm 1794, ông bắt đầu với tư cách là giáo sư Đại học toán học thuần túy. Ông mất năm 1813.

Trong số học, ông phỏng đoán luật bình phương nghịch đảo (quadratic reciprocity law), sau đó được chứng minh bởi Gauss. Ông cũng có một số công trình tiên phong trong phân bố của số nguyên tố, và các ứng dụng của giải tích vào số học. Phỏng đoán của ông vào năm 1796 Định lý số nguyên tố được chứng minh chặt chẽ bởi Hadamard và de la Vallée-Poussin vào năm 1898.

Carl Gustav Jacob Jacobi (10/12/1804 – 18/02/1851): Là một nhà toán học người Đức gốc Do Thái, người đã có nhiều đóng góp cơ bản cho các lĩnh vực: hàm elliptic, động lực học, phương trình vi phân, lý thuyết số. Tên của ông là đôi khi được viết là Carolus Gustavus Iacobus Iacobi trong sách giáo hoa Latin do ông viết và tên đầu tiên của ông là Karl thỉnh thoảng được dùng.



Jacobi là nhà toán học Do Thái đầu tiên được bổ nhiệm làm giáo sư tại một trường đại học Đức.

Biểu tượng Jacobi là một sự tổng quát của biểu tượng Legendre. Được giới thiệu bởi Jacobi vào năm 1837, nó được quan tâm về mặt lý thuyết trong số học mô-đun và các ngành khác của lý thuyết số, nhưng việc sử dụng chính của nó là trong lý thuyết số tính toán, test các số nguyên tố và phân tích thành nhân tử nguyên tố; những ứng dụng quan trọng trong lí thuyết mật mã.

Jacobi là người đầu tiên áp dụng hàm elliptic vào lý thuyết số, ví dụ chứng minh của định lý Fermat về phân tích một số thành tổng 2 số chính phương và định lý Lagrange về phân tích một số thành tổng 4 số chính phương, và kết quả tương tự cho phân tích một số thành tổng 6 và 8 số chính phương Trong lý thuyết số ông tiếp tục công việc của C. F. Gauss: chứng minh mới luật tương hỗ bậc hai và giới thiệu các kí hiệu Jacobi; góp phần lớn các phát minh cho luật tương hỗ, tìm kiếm các tính chất của liên phân số, và các phát minh của các tổng.

7. Thay cho lời kết

Sự ghi nhận tôn kính: Lịch sử ngành Lí thuyết số (Number Theory) nói chung và Lí thuyết về số k–phương nói riêng ghi nhận công lao to lớn và lỗi lạc của các thiên tài Toán học như:

Carl Friedrich Gauss(1777-1855):

Nhà toán học kiệt xuất nhất nước Đức, ngay từ khi 3 tuổi đã tỏ rõ tài năng toán học phi thường của mình.

30 tuổi đã là giáo sư toán học ở trường đại học Göttingen. Năm 1804 ông trở thành thành viên Viện Hàn Lâm khoa học Anh. Những cống hiến to lớn của Gauss bao trùm lên toàn bộ lĩnh vực toán học. Chính vì Gauss đã làm thay đổi cả bộ mặt của toán học nên thế giới đã công nhận ông là một trong những nhà toán học vĩ đại nhất trong lịch sử loài người, và được gọi là "Ông Hoàng của toán học".

Leonhard Euler (1707 – 1783):

Sinh năm 1707 ở Basel, một thành phố nhỏ tuyệt đẹp ven bờ sông Ranh (Rhin) của Thụy Sĩ.

Khả năng toán học của Euler bộc lộ rất sớm. Năm 13 tuổi, cậu bé đã là sinh viên trường đại học Tổng hợp Basel (Thụy Sĩ). Năm 1731, chàng thanh niên Euler 24 tuổi trở thành viện sĩ Viện hàn lâm Petersburg (Pê-tec-bua).

Năm 1735, chính phủ Nga giao cho Viện hàn lâm nhiệm vụ tính toán thiên văn để lập bản đồ. Khi sơ bộ tính toán, các viện sĩ thấy phải ba tháng mới có thể hoàn tất công việc. Việc rất gấp, Euler đã nhận hoàn thành trong... ba ngày đêm liên tục tính toán. Bằng tất cả năng lực sáng tạo phi thường của mình, trước sự kinh ngạc của mọi người, Euler đã làm xong chỉ trong một ngày đêm! Vì phải tập trung chú ý quá cao độ và căng thẳng, ông đã phải chịu tổn thất đau đớn: làm xong việc mắt bên phải bị hỏng, mắt trái yếu hẳn. Năm 1770, thầy thuốc tiến hành phẫu thuật chữa mắt cho ông nhưng sau khi mổ vài ngày, ông lại lao vào làm việc, tính toán không nghỉ nên mắt trái hỏng lại và từ đó, ông bị mù hẳn. Năm đó, ông phải chịu nhiều bất hạnh: nhà cháy, của cải mất hết. Rồi hai năm sau, bà Euler qua đời. Người ta đã tưởng từ đó ông phải giã từ khoa học. Nhưng tình yêu của ông đối với Toán học không hề giảm sút và sức mạnh sáng tạo của bộ óc thiên tài nơi ông thật vĩ đại. Với trí nhớ kì diệu, khi đã mù, ông đọc cho các thư kí viết các phát minh của mình.

Trong Toán học, không có nhà Toán học nào được nhắc đến nhiều như Euler. Những gì ngày nay chúng ta còn học trong phần logarit và lượng giác ở chương trình phổ thông là hoàn toàn dựa theo cách trình bày của Euler. Ông còn là người đề ra nhiều kí hiệu Toán học, chẳng hạn quen thuộc nhất với chúng ta là kí hiệu số π (pi). Nhà toán học Pháp La-pla-xơ (Laplace) gọi ông là "người thầy chung của tất cả chúng ta".

Cuộc đời Euler là tấm gương sáng chói về lòng say mê lao động sáng tạo không mệt mỏi, vượt lên những ngăn trở của bất hạnh ngẫu nhiên; Khi đã hỏng mắt, trong 17 năm cuối đời, ông đã hoàn tất 416 công trình khoa học, tức là trung bình mỗi năm nghiên cứu thành công 25 công trình có giá trị xuất sắc!

Ông từ trần vào mùa hè năm 1783. Ông để lại 865 công trình khoa học, có thể in thành 72 tập lớn, mỗi tập ngót 600 trang. Sau khi ông mất, Viện hàn lâm Petersburg, đã lần lượt công bố các bản thảo của ông khoảng 47 năm mới hết.

Pierre de Fermat (sinh ngày 20 tháng 8, 1601 tại Pháp – mất 1665):

Là một học giả nghiệp dư vĩ đại, một nhà toán học nổi tiếng và cha đẻ của lý thuyết số hiện đại.

Xuất thân từ một gia đình khá giả, ông học ở Toulouse và lấy bằng cử nhân luật dân sự rồi làm chánh án. Chỉ trừ gia đình và bạn bè tâm giao, chẳng ai biết ông vô cùng say mê toán. Mãi sau khi Pierre de Fermat mất, người con trai mới in dần các công trình của cha kể từ năm 1670. Năm 1896, hầu hết các tác phẩm của Fermat được ấn hành thành 4 tập dày. Qua đó, người đời vô cùng ngạc nhiên và khâm phục trước sức đóng góp dồi dào của ông. Chính ông là người sáng lập lý thuyết số hiện đại, trong đó có 2 định lý nổi bật: định lý nhỏ Fermat và định lý lớn Fermat (định lý cuối cùng của Fermat).

Tài liệu tham khảo

[1] "250 Problems in Elementary Number Theory," Waclaw Sierpinski, 1994.
[2] "Elementary Number Theory," David M. Burton, 1980.
[3] "Elementary Number Theory," Giusefe Melfi, 1998.
[4] "Elementary Number Theory," A.J. Hildebrand, 2011.
[5] "Number Theory Structures, Examples, and Problems," Titu Andreescu Dorin Andrica.
[6] "Quadratic Congruences Olympiad Training," Dusan Djukic.
[7] "Elementary Number Theory", Beuker, 2012.
[8] "Số học," Hà Huy Khoái, NXB. Giáo Dục, 2006.
[9] Một số bài viết của các đồng nghiệp trên mạng[1] *[sic]*.
[10] Các bài giảng Số học Nguyễn Hồng Lữ (tài liệu lưu hành nội bộ).

[1] Chúng tôi giữ nguyên cách ghi này của tác giả. Chú thích của Ban Biên tập.

VỀ MỘT PHÂN HOẠCH TẬP CÁC SỐ TỰ NHIÊN THÀNH HAI TẬP HỢP CÓ TỔNG CÁC PHẦN TỬ BẰNG NHAU

Nguyễn Văn Lợi - Nguyễn Hải Đăng - Nguyễn Thành Khang

(Đại học Tổng hợp Budapest, Hungary)

LỜI GIỚI THIỆU

Bài viết này chỉ ra rằng chỉ cần thỏa mãn một số điều kiện biểu diễn đơn giản, chúng ta có thể xây dựng một cầu trung chuyển giữa thuật toán xếp ba lô và thuật toán ăn tham. Nhờ đó, một số các kết quả về phân hoạch tập số nguyên dương thành hai tập hợp có số lượng các phần tử bằng nhau được chứng minh.

1. Mở đầu

Từ những năm 1990, những nghiên cứu các bài toán tối ưu của toán học rời rạc bắt đầu phát triển. Việc phân bổ các tập hợp con theo những điều kiện cho trước, rất nhiều lần thuật toán xếp ba lô và thuật toán tham ăn được sử dụng. Bài toán xếp ba lô được phát biểu như sau: tìm cách chọn các đồ vật để xếp vào hai chiếc ba lô làm sao mỗi ba lô chứa được nhiều đồ nhất có thể.

Thuật toán xếp ba lô này dùng để giải bài toán trên có thể được diễn giải như sau: trước tiên, ta sắp xếp đồ vật theo thứ tự giảm dần về khối lượng. Tiếp đó, ta lần lượt ta xếp vào mỗi ba lô một vật. Sau mỗi lần xếp, người ta lại kiểm tra xem ba lô nào còn nhiều chỗ hơn, thì sẽ được ưu tiên xếp trước. Tiếp tục quá trình như vậy ta sẽ nhận được một cách sắp xếp tối ưu. Về thuật toán tham ăn, nội dung của nó là: ta cứ xếp vào các ba lô cho đến khi không còn bỏ thêm được nữa, sau đó thay đổi vị trí các đồ vật từ ba lô này sang ba lô kia, để hợp lý hóa công việc sắp xếp (xem [1, 2, 3, 4, 5] và tài liệu tham khảo ở đó).

Trong bài này, chúng tôi sử dụng một phương pháp trung gian lưu chuyển giữa hai thuật toán này. Trước khi sắp xếp chúng ta chọn ra những đồ vật nhỏ nhất, gọi là tập hợp K, với mục đích: khi đã tham ăn tương đối đầy các ba lô, thì ta dùng các đồ vật nhỏ từ K, để tiếp tục chèn vào những lỗ hổng, cho đến khi đầy ba lô. Một tập hợp các vật nhỏ như vậy được gọi là biểu diễn được đến k, nếu các vật nặng từ 1 (nhỏ) đến k (đủ nặng) đều có thể biểu diễn được bằng tổng các đồ vật lấy từ tập K.

2. Phát biểu bài toán

Trước tiên, chúng ta sẽ làm quen với khái niệm về đơn tập hợp và đa tập hợp (multiset). Một tập A được gọi là đơn tập hợp nếu mỗi phần tử trong A là đôi một phân biệt. Khái niệm tập hợp được sử dụng trong chương trình toán phổ thông là đơn tập hợp. Một tập A được gọi là đa tập hợp nếu mỗi phần tử trong A được phép xuất hiện nhiều hơn một lần. Ví dụ: $A = \{1; 2; 3; 4\}$ là một đơn tập hợp, $B = \{1; 1; 2; 2; 2; 3\}$ là một đa tập hợp.

Trong phạm vi bài này, các tập hợp được xét đều là đa tập hợp và chúng ta chỉ làm việc với đa tập hợp hữu hạn các số nguyên dương.
Ngoài ra, một tập hợp S được gọi là phân hoạch thành các tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_k$ nếu như

$$\begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = S \\ A_i \cap A_j = , 1 \leq i < j \leq k \end{cases}$$

Bổ đề dưới đây là kết quả khá nổi tiếng sẽ được sử dụng nhiều trong quá trình chứng minh.

Bổ đề 1. *Từ n số nguyên cho trước, luôn chọn được một vài số để tổng của chúng chia hết cho n.*

Chứng minh. Ký hiệu tập hợp n số nguyên đó là các số

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Xét các tổng sau

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ &\ldots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Chia các số

$$\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$$

cho số n ta được n số dư thuộc tập hợp $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ Nếu có một số dư nói trên bằng 0 ta suy ra điều phải chứng minh. Trái lại, giả sử các số dư thuộc tập hợp $\{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Áp dụng nguyên lý Dirichlet, ta thấy tồn tại hai số dư bằng nhau. Giả sử $s_k \equiv s_j \pmod{n}$ với $k > j$. Ta suy ra

$$s_k - s_j = a_{j+1} + a_{j+2} + \ldots + a_k \pmod{n}.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Trong bổ đề trên, ta thấy không có sự ràng buộc về số lượng phần tử trong bộ số được chọn ra. Dưới đây là một định lý nổi tiếng liên quan đến vấn đề này, trong đó yêu cầu phải chọn ra một bộ có số lượng phần tử cụ thể.

Định lý 1. *(P. Erdos, A. Ginzburg, A. Ziv) Từ $2n-1$ số nguyên cho trước, luôn chọn được n số sao cho tổng của chúng chia hết cho n.*

Định lý này đã được chứng minh năm 1961. Bạn đọc có thể tham khảo trong [3,4,5]. Tiếp theo, ta xét một bổ đề phụ nữa:

Bổ đề 2. *Nếu trong $n-1$ số nguyên dương cho trước không tồn tại một nhóm số có tổng chia hết cho n thì $n-1$ số đó có cùng số dư khi chia cho n.*

Chứng minh. Giả sử $n-1$ số đã cho là $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử ngược lại, tồn tại hai số không có cùng số dư. Không mất tính tổng quát, giả sử 2 số đó là a_1, a_2. Đặt $s_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_i, 2 \leq i \leq n-1$. Xét dãy các số

$$a_1, a_2, \underbrace{s_2, s_3, \ldots, s_{n-1}}_{n-2 \text{ số}}.$$

trong đó có n số và không có số nào chia hết cho n. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho n.

Xét hiệu của hai số này. Vì $a_1 - a_2 \neq 0 \pmod n$ nên chỉ có thể là hiệu của s_i và một số nào đó trong a_1, a_2 hoặc s_j . Trong mọi trường hợp, hiệu đó cũng bằng tổng của một vài số trong $n-1$ số ban đầu. Do đó, tất cả $n-1$ có cùng số dư khi chia cho n.

Bổ đề được chứng minh. □

Trong phần tiếp theo, cho một tập hợp A có k phần tử là các số nguyên dương không lớn hơn N và tổng của các số này bằng $2N$.

Bài toán 1. *Tồn tại hay không giá trị K nhỏ nhất để với mọi số nguyên dương $k \geq K$, tập hợp A luôn có thể phân hoạch thành hai tập con có tổng các phần tử mỗi tập bằng N?*

Từ đây về sau, ta ký hiệu

$$A = \left\{ a_1 < a_2 < \ldots < a_k \middle| a_i \in \mathbb{Z}^+, a_i \leq n, i = \overline{1,k}, \sum_{i=1}^{k} a_i = 2N \right\}.$$

Tập hợp A thỏa mãn các điều kiện trên được viết là $A(2N, k)$.

Ta ký hiệu $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} | n \geq x\}$ là số nguyên dương bé nhất không nhỏ hơn x. Ví dụ, $\lceil 3 \rceil = 3, \lceil 3,5 \rceil = 4, \lceil -2,1 \rceil = -2, \ldots$

Định lý sau đây cho một chặn trên của số K. Hơn nữa, nếu N lẻ thì giá trị $K = N + 1$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm.

Định lý 2. *Mọi tập hợp gồm $N + 1$ số nguyên dương không lớn hơn N và có tổng bằng $2N$, luôn phân hoạch được thành hai tập con, mỗi tập có tổng các phần tử bằng N.*

Chứng minh. Từ $N + 1$ số đã cho, ta lấy N số bất kì. Theo bổ đề 1, ta có thể chọn từ N số này một vài số có tổng chia hết cho N. Tổng này nhỏ hơn $2N$ và dương vì vậy chỉ có thể bằng N. Phần bù của tập nêu trên cũng có tổng các phần tử bằng N.

Định lý được chứng minh. □

Từ định lý nêu trên, ta thấy rằng nếu N lẻ, và số phần tử là $k = N$, ta xét tập hợp sau đây:

$$A = \left\{ \underbrace{2; 2; 2; \ldots; 2}_{N \text{ số}} \right\}.$$

Tổng các phần tử của A bằng $2N$, nhưng vì tất cả các phần tử của A là chẵn, nên A không thể phân hoạch thành hai tập con có tổng bằng N (là số lẻ). Điều này cũng chứng tỏ $K = N + 1$ là giá trị cần tìm khi N là số lẻ.

Trường hợp N là số chẵn, bài toán khó chứng minh hơn. Ta có thể bắt đầu từ những trường hợp N khá nhỏ.

1. Trường hợp $N = 2$. Dễ thấy $K = 2$.

2. Trường hợp $N = 4$. Ta sẽ chứng minh $K = 4$. Thực vậy, xét tập hợp $A = \{3; 3; 2\}$. Nhận thấy không tồn tại tập con nào của A có tổng các phần tử bằng 4. Từ đó ta suy ra $K \geq 4$.

   Xét bốn số $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq 4$, với $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 8$. Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một nhóm số có tổng bằng 4.

   - Trường hợp $a_4 = 4$. Điều chứng minh là hiển nhiên.
   - Trường hợp $a_4 = 3$, suy ra $a_1 + a_2 + a_3 = 5$ nên a_1 chỉ có thể là 1. Do đó, $a_1 + a_4 = 4$.
   - Trường hợp $a_4 = 2$, suy ra $a_1 = a_2 = a_3 = 2$. Ta cũng có điều cần chứng minh.

   Vậy, với $N = 4$ thì $K = 4$.

3. Trường hợp N chẵn và $N \geq 6$ là một trường hợp phức tạp, trước khi bắt tay vào giải quyết, ta nêu một số bổ đề nhỏ làm cầu nối.

Ta xem xét bổ đề sau:

Bổ đề 3. *Với $N = 2n$ và A là tập hợp $2n - 1$ số nguyên dương không lớn hơn N và có tổng bằng $2N$. Khi đó, A có thể phân hoạch được thành hai tập con, mỗi tập có tổng các phần tử bằng N.*

Chứng minh. Theo định lý 1, tồn tại n số thuộc A và có tổng chia hết cho n. Tổng các số này chỉ có thể đạt giá trị bằng n hoặc $2n$ hoặc $3n$. Nếu tổng các số này bằng $2n = N$ thì ta đã phân hoạch được A thành hai tập con có tổng các phần từ bằng N. Ta chỉ cần xét các trường hợp còn lại.

Gọi n số có tổng chia hết cho n là $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ và $n - 1$ số còn lại trong A là $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_{n-1}$. Ta đặt

$$a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \text{ và } b = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}.$$

Ta xét 2 trường hợp sau đây.

1. Trường hợp $a = n$ và $b = 3n$. Khi đó, ta có $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 1$. Vì $b = 3n$ nên $b_{n-1} \geq 3$.

   - Nếu $b_{n-1} \geq n$, thì ta có thể chọn b_{n-1} và một số số 1 để được các số có tổng bằng N.
   - Nếu $3 \leq b_{n-1} = m < n$ thì $B = \{b_{n-1}, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-m+1}\}$ sẽ có tổng các phần tử bằng n. Xét n số $a_1, a_2, b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}$. Theo Bổ đề 1, ta sẽ chọn được tập C gồm một số số có tổng chia hết cho n. Nhận thấy, tổng các phần tử của C bằng n hoặc $2n$. Ta lại tiếp tục xét 2 trường hợp:
     - Nếu tổng các phần tử của C bằng $2n$, ta phân hoạch A thành C và $A \setminus C$, mỗi tập con đều có tổng các phần tử bằng N.
     - Nếu tổng các phần tử của C bằng n, ta phân hoạch A thành $D = B \cup C$ và $A \setminus D$, mỗi tập con đều có tổng các phần tử bằng N.

2. Trường hợp $a = 3n$ và $b = n$. Khi đó, $b_1 = b_2 = \ldots = b_{n-2} = 1$ và $b_{n-1} = 2$. Xét $n - 1$ số bất kỳ trong n số $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

- Nếu chọn được một số số trong $n-1$ đó có tổng chia hết cho n, thì tổng các số được chọn sẽ bằng n hoặc bằng $2n$. Ta lại có các trường hợp:
  - Nếu tổng các số được chọn bằng $2n$, thì tập các số đó tạo thành một tập con của A có tổng các phần tử bằng $2n = N$.
  - Nếu tổng các số được chọn bằng n, thì tập các số đó cùng với tập hợp $\{b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}\}$ sẽ hợp thành một tập con của A có tổng các phần tử bằng $2n = N$.
- Nếu trong $n-1$ số bất kỳ, không chọn được một số số nào có tổng chia hết cho n thì theo Bổ đề 2, $n-1$ số đó sẽ có cùng số dư khi chia cho n. Chọn bộ $n-1$ số khác, bằng cách lập luận tương tự, ta nhận được $a_i \equiv a_j \pmod{n}$ với mọi $1 \le i < j \le n$. Ta xét các trường hợp sau:
  - Nếu $a_i \equiv 1 \pmod{n}$ với mọi $1 \le i \le n$ thì
  $$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-2} = 1 \text{ và } a_{n-1} = a_n = n+1.$$
  Khi đó tập hợp
  $$\{b_2, b_3, \ldots, b_n, a_n\}$$
  có tổng các phần tử bằng $2n = N$.
  - Nếu $a_i \equiv 2 \pmod{n}$ với mọi $1 \le i \le n$ thì
  $$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-2} = 2 \text{ và } a_n = n+2.$$
  Khi đó tập hợp
  $$\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, a_n\}$$
  có tổng các phần tử bằng $2n = N$.
  - Nếu $a_i \equiv 3 \pmod{n}$ với mọi $1 \le i \le n$ thì
  $$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-2} = 3.$$
  Khi đó dễ dàng chọn được tập con của A có tổng các phần tử bằng $2n = N$.

Mệnh đề 2.1 được chứng minh hoàn toàn. □

Chú ý rằng ta đã sử dụng thuật toán ăn tham trong chứng minh bổ đề 3.

Từ bổ đề trên, ta có thể suy ra giá trị K cần tìm sẽ thỏa mãn $K \le N - 1$ trong trường hợp N chẵn, tuy nhiên việc đi tìm giá trị của K vẫn còn rất nhiều khó khăn.

Dưới đây ta sẽ chỉ ra một số chặn dưới của K. Ta xét các ví dụ sau:

1. Với $N = 6m + 2$ thì $K \ge 4m + 3$. Để có phản ví dụ với $k = 4m + 2$, ta chọn tập hợp
$$A = \left\{1, \underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{4m+1 \text{ số}}\right\}.$$
Khi đó mọi phân hoạch của tập A sẽ cho ta một tập con có tổng các phần tử chia hết cho 3 và tập con còn lại có tổng các phần tử chia cho 3 dư 1. Điều này chứng tỏ $K \ge 4m + 3$.

2. Với $N = 6m + 4$ thì $K \geq 4m + 4$. Để có phản ví dụ với $k = 4m + 3$, ta chọn tập hợp
$$A = \left\{ 2, \underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{4m+2} \right\}$$
Khi đó, mọi phân hoạch của tập A sẽ cho ta một tập con có tổng các phần tử chia hết cho 3 và tập con còn lại có tổng các phần tử chia cho 3 dư 2. Điều này chứng tỏ $K \geq 4m + 4$.

3. Với $N = 6m$ thì $K \geq 3m + 2$. Để có phản ví dụ với $k = 3m + 1$, ta chọn tập hợp
$$A = \left\{ \underbrace{2, 2, 2, \ldots, 2}_{3m-1 \text{ số}}, 6m - 1 \right\}$$
Khi đó không tồn tại tập con nào của A có tổng các phần tử bằng $N = 6m$. Điều này chứng tỏ $K \geq 3m + 2$. Để tiếp tục nghiên cứu các khả năng phân hoạch của $2N$, chúng ta phải phân tích sâu hơn nữa về sự có mặt của các phần tử tạo thành của tập A trong mục tiếp theo.

3. Cấu trúc các tập hợp số và khả năng chia đôi

Trong phần này chúng ta sẽ xây dựng một lý thuyết nhỏ để làm cầu nối giữa hai thuật toán: thuật toán xếp ba lô và thuật toán ăn tham. Ý tưởng của thuật toán này là xem xét giá trị của các phần tử nhỏ nhất của A, qua đó kết hợp hai thuật toán trên để giải quyết bài toán.

Tập hợp A các số nguyên dương gọi là biểu diễn được đến s nếu với mọi số nguyên dương t không vượt quá s thì tồn tại tập con của A có tổng các phần tử bằng t. Tập hợp A được gọi là hoàn chỉnh nếu a bằng tổng các phần tử của A, thì A biểu diễn được đến a.

Bổ đề 4. *Cho A là tập k số nguyên dương không vượt quá N và A biểu diễn được đến N. Khi đó A là tập hoàn chỉnh.*

Chứng minh. Giả sử $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$ và $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo N.

Xét $N = 1$, suy ra $a_i = 1$ với $i = 1, 2, \ldots, k$. Khi đó A là tập hoàn chỉnh.

Giả sử bổ đề đúng với N. Ta chứng minh bổ đề đúng với $N + 1$. Thực vậy, xét
$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$$
là tập gồm k số nguyên dương không vượt quá $N + 1$. Nếu trong A không có số nào bằng $N + 1$, thì theo giả thiết quy nạp, A sẽ là tập hoàn chỉnh.

Ngược lại, giả thiết rằng trong A có một số số bằng $N + 1$. Giả sử
$$N + 1 = a_1 = a_2 = \ldots = a_i > a_{i+1} \geq a_{i+2} \geq \ldots \geq a_n.$$
Đặt $b = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_n$. Nhận thấy khi biểu diễn một số nguyên dương $s \leq N$ thành tổng của một số số trong A thì sẽ không có số nào bằng $N + 1$ xuất hiện trong tổng đó, nên tập
$$B = \{a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_k\}$$
là tập hợp $k - i$ số nguyên dương không vượt quá N, và biểu diễn được đến N. Xét số nguyên dương s bất kỳ, với $s \leq a$. Ta có 2 trường hợp:

1. Với $s \leq b$, theo giả thiết quy nạp, s biểu diễn được thành tổng của một số số trong B.

2. Xét $b < s \leq a$. Khi đó, tồn tại $q, r \in N$ sao cho $s - b = q(N+1) - r$, với $0 \leq r \leq N$. Dễ thấy $0 \leq q \leq i$, vì nếu ngược lại $q \geq i+1$ thì

$$s \geq (i+1)(N+1) + b - r = a + (N+1) - r > a.$$

Nhận thấy rằng $b - r$ biểu diễn được thành tổng của một số số trong B. Khi đó, ta chỉ cần bổ sung thêm vào đó q số $N+1$ sẽ được một số số trong A có tổng bằng s.

Do đó, bổ đề cũng đúng với $N+1$ nên theo nguyên lý quy nạp, bổ đề được chứng minh.

Vậy A là tập hoàn chỉnh với mọi $N \in \mathbb{Z}^+$.

□

Từ Bổ đề 4 ở trên, ta dễ dàng chứng minh được bổ đề sau đây.

Bổ đề 5. *Nếu A và B là hai tập hoàn chỉnh thì $C = A \cup B$ là tập hoàn chỉnh.*

Nhận thấy rằng $1 \in A$ khi và chỉ khi tồn tại ít nhất một tập con hoàn chỉnh của A. Gọi H là hợp của tất cả các tập con hoàn chỉnh của A. Theo Bổ đề 4, H cũng là một tập con hoàn chỉnh của A.

Hơn nữa, H là tập con hoàn chỉnh có số phần tử lớn nhất của A. Vậy là, ta thu được kết quả sau đây.

Bổ đề 6. *Cho A là tập các số nguyên dương và $1 \in A$. Khi đó, tồn tại duy nhất một tập con hoàn chỉnh của A có số phần tử lớn nhất. Gọi tập hoàn chỉnh này là H và h là tổng các phần tử của H. Nếu tất cả các phần tử của A đều không vượt quá h thì $H = A$. Nếu $a \in A$ và $a \notin H$ thì $a \geq h+2$.*

Chứng minh. Chứng minh. Thực vậy, nếu $a = h+1$ thì $H \cup \{a\}$ là hoàn chỉnh. Điều này trái với tính lớn nhất của H. □

Bổ đề 7. *Nếu tập $A(2N, k)$ với $k \geq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 2$ thì A có ít nhất ba phần tử có giá trị nhỏ hơn 4.*

Chứng minh. Giả sử phản chứng rằng có ít nhất $k-2$ phần tử của A không bé hơn 4. Ta có $2N \geq 2 + 4(k-2) \geq 2 + 4\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil > 2N$. Điều này là vô lý. Do đó, có ít nhất ba phần tử của A có giá trị nhỏ hơn 4. Vì $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ là ba phần tử bé nhất của A nên ta có

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, a_3) \in \{&(1;1;1), (1;1;2), (1;1;3), (1;2;2), (1;2;3),\\ &(1;3;3), (2;2;2), (2;2;3), (2;3;3), (3;3;3)\}\end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh. □

Định lý 3. *Cho $A(2N, k)$ với $N \geq 2$ và $k \geq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 2$. Gọi H là tập con hoàn chỉnh có số phần tử lớn nhất của A. Nếu H biểu diễn được đến ba thì A phân hoạch được thành hai tập có tổng các phần tử bằng N.*

Chứng minh. Xét trường hợp $N \leq 4$. Theo Bổ đề 4, ta có $H = A$. Bởi vậy, có thể phân hoạch tập A thành hai tập con có tổng các phần tử bằng N. Gọi S là tổng các phần tử của H và

$$A \setminus H = \{b_1, b_2, \ldots, b_p\}.$$

Áp dụng Bổ đề 5, ta được $2N = S + b_1 + b_2 + \cdots + b_p$ và $b_i \geq S + 2$. Gọi q là số phần tử của H. Khi đó $k = p + q$, và $S \geq q$. Ta có

$$\begin{aligned}2N &= S + b_1 + b_2 + \cdots + b_p \geq S + p(S+2) = S + (k-q)(S+2)\\ &\geq S + (k-S)(S+2) = -S^2 + (k-1)S + 2k\\ &\geq -S^2 + \left(\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 1\right)S + 2\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 4\end{aligned}$$

Ta suy ra

$$f(S) = -S^2 + \left(\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 1\right)S + 2\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 4 - 2N \leq 0.$$

Mặt khác,

$$f(3) = -9 + 3\left(\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 1\right) + 2\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 4 - 2N = 5\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil - 2N - 2 > 0$$

với $N > 4$ và

$$\begin{aligned}f\left(\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil - 1\right) &= -\left(\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil - 1\right)^2 + \left(\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 1\right)\left(\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil - 1\right) + 2\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil\\ &+ 4 - 2N = 4\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 2 - 2N > 0\end{aligned}$$

Kết hợp những điều vừa thu được với $S \geq 3$ ta suy ra $S \geq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil$. Khi đó

$$2N \geq S + p(S+2) \geq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + p\left(\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 2\right).$$

Do đó $p \leq 2$, ta xét các trường hợp:

1. Nếu $p = 1$ thì $b_1 = 2N - S \geq 2N - (a_1 - 2)$. Ta suy ra $b_1 \geq N + 1$, điều này vô lý.
2. Nếu $p = 2$ thì

   $$S \geq q = k - 2 \geq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil \text{ và } b_1, b_2 \geq S + 2 \geq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 2.$$

   Ta có

   $$N - b_1 \leq N - \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil - 2 < \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil \leq S$$

   Do H là tập con hoàn chỉnh của A nên sẽ có tập con H_1 của H có tổng các phần tử bằng $N - b_1$. Khi đó $H_1 \cup \{b_1\}$ sẽ là tập con của A có tổng các phần tử bằng N. Vậy ta có thể phân hoạch được A thành hai tập con có tổng các phần tử bằng nhau.

Phép chứng minh hoàn tất. □

Xét $a_1 = 1$. Kết hợp với Bổ đề 5, ta có

$$(a_1, a_2, a_3) \in \{(1;1;1), (1;1;2), (1;1;3), (1;2;2), (1;2;3)\}$$

Ta có định lý sau đây:

Định lý 4. *Cho $A(2N, k)$ với $N \geq 2, k \geq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 2$ và*

$$(a_1, a_2, a_3) \in \{(1;1;1), (1;1;2), (1;1;3), (1;2;2), (1;2;3)\}.$$

Khi đó, tập hợp A có thể phân hoạch được thành hai tập con có tổng các phần tử bằng N.

Trong định lý trên, với tập $A(2N, k)$ mà $N \geq 2, k \geq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 2, a_1 = 1$ và A biểu diễn được đến 3, thì A có thể phân hoạch được thành hai tập con có tổng các phần tử bằng N. Ta sẽ xem xét khả năng phân hoạch tập A thành hai tập con có tổng các phần tử bằng N khi $a_1 \geq 2$.

Bổ đề 8. *Cho tập $A(2N, k)$ với $A(2N, k)$ mà $k \geq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 2, a_1 \geq 2$ Khi đó, hai số bất kỳ của A có tổng không vượt quá N.*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh $a_{k-1} + a_k \leq N$. Thật vậy, ta có

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-2} \geq 2(k-2) \geq 2\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil \geq N$$

Từ đó ta suy ra $a_{k-1} + a_k \leq N$. Mệnh đề được chứng minh. □

Định lý 5. *Cho tập $A(2N, k)$ với $k \geq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 2$, N chẵn và $a_1 = a_2 = 2$. Khi đó ta có thể phân hoạch tập A thành hai tập con có tổng bằng N.*

Chứng minh. Thực hiện phân hoạch $A = C \cup L$, trong đó

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_u\}$$

là tập tất cả các số chẵn của A và

$$L = \{l_1, l_2, \ldots, l_v\}$$

là tập tất cả các số lẻ của A. Ta có $u \geq 2, u + v = k$ và v là số chẵn. Đặt $v = 2t$. Xét tập hợp

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{u+t}\}$$

được xác định như sau:

$$b_i = \frac{C_i}{2} \text{ với } 1 \leq i \leq u$$

và

$$b_{u+j} = \frac{l_j + l_{v-j}}{2} \text{ với } 1 \leq j \leq t.$$

Nếu $a_4 \geq 4$ thì $2N \geq 6 + 4(k-3) \geq 6 + 4\left(\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil - 1\right) = 4\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 2 > 2N$ Điều này vô lý.

Do đó, ta có $a_4 \leq 3$. Từ đó suy ra $a_3 \leq 3$. Suy ra ba phần tử bé nhất của B là $(1;1;1)$, $(1;1;2)$ hoặc $(1;1;3)$. Nhận thấy tổng các phần tử của B bằng N và dễ dàng thấy rằng thì mọi phần tử của B đều không vượt quá $\frac{N}{2}$. Để áp dụng Định lý 4 cho tập B, ta cần chứng minh

$$u + t \geq \left\lceil \frac{N}{4} \right\rceil + 2$$

Thực vậy, ta có

$$\begin{aligned} u + t &= 2 + u - 2 + \frac{v}{2} \geq 2 + \frac{u + v - 2}{2} + \frac{u-2}{2} \\ &\geq 2 + \frac{1}{2}\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + \frac{u-2}{2} = 2 + \frac{N}{4} + \frac{u-2}{2} \end{aligned}$$

Ta có 2 trường hợp:

1. Nếu N chia hết 4 thì $\left\lceil \frac{N}{4} \right\rceil = \frac{N}{4}$ và $u + t \geq 2 + \left\lceil \frac{N}{4} \right\rceil + \frac{u-2}{2} \geq 2 + \left\lceil \frac{N}{4} \right\rceil$

2. Nếu n không chia hết 4 thì
$$\frac{N+2}{4} = \left\lceil \frac{N}{4} \right\rceil$$
Khi đó
$$u + t \geq 2 + \frac{N}{4} = 2 + \frac{N+2}{4} - \frac{1}{2} = 2 + \left\lceil \frac{N}{4} \right\rceil - \frac{1}{2}$$
Do $u + t$ là số nguyên, nên $u + t \geq 2 + \left\lceil \frac{N}{4} \right\rceil$. Áp dụng Định lý 4 cho tập $B(N, u+t)$ với $u + t \geq 2 + \left\lceil \frac{N}{4} \right\rceil$ thì B có thể phân hoạch thành hai tập con có tổng các phần tử bằng $\frac{N}{2}$. Từ đó ta suy ra, A cũng sẽ phân hoạch được thành hai tập con có tổng các phần tử bằng N.

Định lý được chứng minh. □

Kết hợp các kết quả của các Định lý 2, 3, 4 và 5 ta có định lý sau đây.

Định lý 6. *Cho tập $A(2N,k)$ với $k \geq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 2$; k chẵn và $a_2 \leq 2$. Khi đó ta có thể phân hoạch tập A thành hai tập con có tổng bằng N.*

4. Áp dụng

Trong phần này ta quay lại chứng minh những trường hợp tổng quát, không phụ thuộc cấu trúc phân bổ của tập hợp số, chỉ phụ thuộc vào $2N$ (tổng các số), và K (số lượng các số tham gia).

Hệ quả 4.1. *Cho tập $A(2N;k)$ với $N = 6m + 2$ với $m \geq 1$ và $k = 4m + 3$. Tập $A(2N,k)$ có thể phân hoạch được thành hai tập con có tổng các phần tử bằng nhau.*

Chứng minh. Ta có $k = 4m + 3 \geq 3m + 3 = \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 2$. Ta có 2 trường hợp:

1. Nếu $a_3 \geq 3$ thì $a_3 + a_4 + \ldots + a_k \geq 3(k-2) = 12m + 3$. Ta suy ra $a_1 + a_2 \leq 1$. Điều này vô lý.

2. Nếu $a_3 \leq 2$. Ta suy ra $a_2 \leq 2$. Bây giờ, ta áp dụng Định lý 6 thì A có thể phân hoạch được thành hai tập con có tổng các phần tử bằng N.

Hệ quả được chứng minh. □

Hệ quả 4.2. *Cho tập $A(2N; k)$ với $N = 6m + 4$ và $k = 4m + 4$. Tập $A(2N, k)$ có thể phân hoạch được thành hai tập con có tổng các phần tử bằng nhau.*

Chứng minh. Ta có $k = 4m + 4 \geq 3m + 4 = \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 2$. Ta xét 2 trường hợp:

1. Nếu $a_3 \geq 3$ thì $a_3 + a_4 + \cdots + a_k \geq 3(k-3) = 12m + 6$. Ta suy ra $a_1 + a_2 \leq 2$. Do đó $a_1 = a_2 = 1, a_3 = a_4 = \ldots = a_k = 3$. Bởi vậy, ta có thể dễ dàng phân hoạch tập A thành hai tập con có tổng các phần tử bằng N.

2. Ta xét trường hợp $a_3 \leq 2$, khi đó $a_2 \leq 2$. Áp dụng Định lý 6 thì A có thể phân hoạch được thành hai tập con có tổng các phần tử bằng N.

Hệ quả được chứng minh. □

Hệ quả 4.3. *Cho tập $A(2N; k)$ với $N = 6m$ và $k = 3m + 2$. Tập $A(2N, k)$ có thể phân hoạch được thành hai tập con có tổng các phần tử bằng nhau.*

Chứng minh. Trước hết, trường hợp $a_2 \leq 2$ là hệ quả trực tiếp của Định lý 6, khi mà A có thể phân hoạch được thành hai tập con có tổng phần tử bằng N. Xét trường hợp $a_2 \geq 3$. Ta sẽ chứng minh $a_3 = a_4 = 3$. Nếu $a_4 \geq 4$ thì

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_k \geq 6 + 4(k-3) \geq 12m + 2$$

Điều này vô lý. Từ đó ta suy ra

$$a_2 = a_3 = a_4 = 3.$$

Ta sẽ phân hoạch $A = C \cup K$, trong đó $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_u\}$ là tập các số chia hết cho 3 của A và $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_v\}$ là tập các số không chia hết cho 3 của A. Khi đó $u \geq 3; u + v = k$.

Ta phân hoạch

$$K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_t$$

sao cho tổng các phần tử của K_i chia hết cho 3 với mọi i và t lớn nhất có thể. Theo Bổ đề 1 thì trong ba số nguyên bất kỳ sẽ tồn tại một số số có tổng chia hết cho 3. Bởi vậy, $|K_i| \leq 3, \forall i$. Từ đó ta suy ra $t \geq \frac{v}{3}$.

Giả sử tổng các phần tử của K_i bằng d_i , với $1 \leq i \leq t$. Xét tập hợp

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{u+t}\}$$

trong đó $b_i = \frac{C_i}{3}$ với $1 \leq i \leq u$ và $b_{u+j} = \frac{d_j}{3}$ với $1 \leq j \leq t$.

Vì $u \geq 3$ nên ba phần tử bé nhất của B là $(1; 1; 1)$. Nhận thấy tổng các phần tử của B bằng $4m$. Ta sẽ chứng minh $b_i \leq 2m$ với mọi i. Thật vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$a_{k-2} + a_{k-1} + a_k \leq 6m + 2.$$

Khi đó, từ $c_i, d_i \leq 6m$ ta suy ra $b_i \leq 2m$. Ta có

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-3} \geq 1 + 3(k-4) = 1 + 3(3m-2) = 9m - 5.$$

Suy ra

$$a_{k-2} + a_{k-1} + a_k \leq 3m + 5 \leq 6m + 2.$$

Để áp dụng Định lý 5 cho tập B, ta cần chứng minh: $u + t \geq m + 2$. Thực vậy, ta có

$$u + t = 3 + u - 3 + \frac{v}{3} \geq 3 + \frac{u + v - 3}{3} \geq 3 + \frac{3m - 1}{3} \geq m + 2.$$

Áp dụng Định lý 5 cho tập $B(4m, u + t)$ với $u + t \geq m + 2$ thì B có thể phân hoạch thành hai tập con có tổng các phần tử bằng $2m = \dfrac{N}{3}$. Từ đó, A cũng sẽ phân hoạch được thành 2 tập con có tổng các phần tử bằng N.

Hệ quả được chứng minh. □

Từ các kết quả trên và các chặn dưới tìm được ở Mục 1, bài toán được đặt ra đã được giải quyết trọn vẹn. Ta có định lý sau đây.

Định lý 7. *Cho một tập hợp A có k phần tử là các số nguyên dương không lớn hơn N và tổng của các số này bằng 2N. Khi đó, tồn tại giá trị K nhỏ nhất để với mọi $k \geq K$, tập A luôn có thể phân hoạch thành hai tập con có tổng các phần từ mỗi tập bằng N, trong đó*

- $K = N + 1$, *khi N lẻ.*
- $K = 2$, *khi* $N = 2$.
- $K = 4m + 3$, *khi* $N = 6m + 2$.
- $K = 4m + 4$, *khi* $N = 6m + 4$.
- $K = 3m + 2$, *khi* $N = 6m$.

Cuối cùng ta giải quyết bài tập là điểm xuất phát và có tác dụng thúc đẩy toàn bộ nghiên cứu này.

Bài toán 2. *Chứng minh rằng trong* 35 *số nguyên dương không vượt quá* 50 *và có tổng bằng* 100 *thì có thể chọn được một nhóm số có tổng bằng* 50.

Chúng ta có thể dễ dàng suy ra kết quả trên nhờ việc áp dụng kết quả của bài toán lớn trong trường hợp $N = 50$. Dưới đây là một cách chứng minh độc lập của kết quả này. Áp dụng Bổ đề 1 dễ dàng chứng minh được hệ quả sau đây.

Hệ quả 4.4. *Trong năm số nguyên bất kỳ luôn tìm được một vài số để tổng của chúng chia hết cho* 5.

Chứng minh. Bằng cách phân hoạch tập các số đã cho thành $A_1; A_2; \ldots; A_k$ sao cho tổng các phần tử trong mỗi tập A_i đều chia hết cho 5 và k lớn nhất có thể.

Áp dụng hệ quả trên ta thấy, mỗi tập A_i có không quá 5 phần tử. Suy ra $k \geq 7$.
Giả sử tổng các phần tử của tập A_i bằng $5a_i$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_k$. Khi đó $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 20$.

1. Trường hợp $k = 7$ thì mỗi tập A_i sẽ có đúng 5 phần tử. Áp dụng bổ đề 2, với mỗi tập A_i thì các phần tử sẽ có cùng số dư khi chia cho 5.

   Vì k là lớn nhất có thể nên tất cả 35 số đã cho sẽ có cùng số dư khi chia cho 5, vì nếu ngược lại ta sẽ chọn được một tập có ít hơn 5 phần tử và có tổng các phần tử chia hết cho 5. Mặt khác, trong 35 số đã cho sẽ có số 1 hoặc số 2, nên tất cả các số đã cho có dạng $5m + 1$ hoặc tất cả các số đã cho có dạng $5m + 2$.

   - Nếu tất cả các số đã cho có dạng $5m + 1$, thì ta có thể suy ra trong 35 số đã cho có ít nhất 22 số bằng 1. Từ đó dẫn tới
     $$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1.$$
     Ta có
     $$a_5 + a_6 + a_7 = 17$$
     suy ra $a_7 \geq 6$. Ta có 2 trường hợp:
     - Nếu $6 \leq a_7 \leq 10$ thì ta có thể bổ sung vào tập A_7 các số 1 để được tập con của A có tổng các phần tử bằng 50.
     - Nếu $a_7 \geq 11$ thì tồn tại một tập con B của tập $A7$ sao cho tổng các phần tử của B không nhỏ hơn 28. Khi đó ta có thể bổ sung vào tập B các số 1 để được một tập con của A có tổng các phần tử bằng 50.
   - Nếu tất cả các số đã cho có dạng $5m + 2$, thì ta có thể suy ra trong 35 số đã cho có ít nhất 29 số bằng 2. Từ đó dễ dàng chọn được tập con của A gồm 25 số 2 và có tổng các phần tử bằng 50.

2. Trường hợp $k \geq 8$, ta có $a_k \leq 13$.

   - Nếu $a_k = 13$ thì tập $A \setminus A_k$ gồm ít nhất 30 số và có tổng bằng 35. Khi đó trong tập $A \setminus A_k$ sẽ tồn tại ít nhất 25 số 1. Tập A_k có tổng các phần tử bằng 65 nên sẽ tồn tại một tập một tập con B của tập A_k sao cho tổng các phần tử của B không nhỏ hơn 33.

     Khi đó, ta có thể bổ sung vào tập B nhiều nhất 17 số 1 để được một tập con của A có tổng các phần tử bằng 50.
   - Nếu $a_k = 12$ thì tập $A \setminus A_k$ gồm ít nhất 30 số và có tổng bằng 40. Khi đó trong tập $A \setminus A_k$ sẽ tồn tại ít nhất 20 số 1. Tập A_k có tổng các phần tử bằng 60 nên sẽ tồn tại một tập một tập con B của tập A_k sao cho tổng các phần tử của B không nhỏ hơn 30.

     Khi đó, ta có thể bổ sung vào tập B nhiều nhất 20 số 1 để được một tập con của A có tổng các phần tử bằng 50.
   - Nếu $a_k = 11$, ta xét các trường hợp nhỏ sau đây:

  - Nếu $|A_k| \geq 3$ thì sẽ tồn tại một tập một tập con B của tập Ak sao cho tổng các phần tử của B không nhỏ hơn 35. Khi đó ta có thể bổ sung vào tập B nhiều nhất 15 số 1 để được một tập con của A có tổng các phần tử bằng 50.
  - Nếu $|A_k| = 2$ thì tập $A \setminus A_k$ gồm ít nhất 33 số và có tổng bằng 45. Khi đó trong tập $A \setminus A_k$ sẽ tồn tại ít nhất 21 số 1. Tập A_k có tổng các phần tử bằng 55 nên sẽ tồn tại một tập một tập con B của tập A_k sao cho tổng các phần tử của B không nhỏ hơn 28.

    Nếu tập $A \setminus A_k$ có ít nhất 22 số 1. Khi đó ta có thể bổ sung vào tập B nhiều nhất 22 số 1 để được một tập con của A có tổng các phần tử bằng 50.

    Nếu tập $A \setminus A_k$ có đúng 21 số 1 thì 12 số còn lại sẽ có giá trị bằng 2. Khi đó ta có thể bổ sung vào tập B thêm 1 số 2 và nhiều nhất 20 số 1 để được một tập con của A có tổng các phần tử bằng 50.

- Nếu $a_k \leq 10$ thì $a_i \leq 10, \forall i \leq k$. Ta cần chứng minh có thể chọn được một số số từ tập $T = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ có tổng bằng 10. Đây chính là trường hợp riêng của bài toán lớn với trường hợp $N = 10$. Nhận thấy ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $k = 8$.

  Giả sử phản chứng rằng không tồn tại tập con của tập T có tổng các phần tử bằng 10. Để ngắn gọn, ta gọi đây là giả thiết (*Q-N*).

  Theo bổ đề trên, tồn tại tập $B \subset T$ sao cho tổng các phần tử của B chia hết cho 5. Suy ra tổng các phần tử của B bằng 5.

  - Nếu $|B| = 5$ thì $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1$. Để giả thiết (Q-N) xảy ra ta phải có $a_6, a_7, a_8 \leq 4$, từ đó

    $$a_1 + a_2 + \cdots + a_8 \leq 17,$$

    đây là điều vô lý.
  - Nếu $|B| = 4$, khi đó B có chứa 3 số 1 và 1 số 2 thì $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. Để giả thiết (*Q-N*) xảy ra ta phải có $a_5, a_6, a_7, a_8 \leq 4$. Nhưng ta lại có

    $$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 15 \Rightarrow a_5 = 3, a_6 = a_7 = a_8 = 4.$$

    Khi đó $a_6 + a_7 + a_1 + a_2 = 10$, trái với giả thiết (*Q-N*).
  - Nếu $|B| = 3$ thì B sẽ chứa ít nhất 1 số 1 và $T \setminus B$ gồm 5 số có tổng bằng 15.

    Nếu tồn tại một tập con C của $T \setminus B$ có tổng các phần tử chia hết cho 5 thì C hoặc $C \cup B$ sẽ có tổng các phần tử bằng 10, trái với giả thiết (*Q-N*).

    Nếu không tồn tại tập con nào của $T \setminus B$ có tổng các phần tử chia hết cho 5 thì tất cả các phần tử của $T \setminus B$ sẽ có cùng số dư khi chia cho 5. Ta thấy có 1 trong 3 trường hợp sau đây:

    $$\left[\begin{array}{l} T \setminus B = \{1, 1, 1, 6, 6\} \\ T \setminus B = \{2, 2, 2, 2, 7\} \\ T \setminus B = \{3, 3, 3, 3, 3\} \end{array}\right.$$

    Trong cả ba trường hợp ta đều chọn được một tập con của T có tổng các phần tử bằng 10, trái với giả thiết (*Q-N*).

- Nếu $|B| \leq 2$ thì $T \setminus B$ gồm 6 số có tổng bằng 15. Chọn 5 số bất kỳ trong $T \setminus B$ và áp dụng bổ đề thì ta thấy sẽ tồn tại một tập con C của $T \setminus B$ có tổng các phần tử chia hết cho 5. Khi đó C hoặc $C \cup B$ sẽ có tổng các phần tử bằng 10, trái với giả thiết (Q-N). Vậy giả thiết (Q-N) không xảy ra.

Bài toán được giải quyết hoàn toàn. $\square$

Cuối cùng, các tác giả xin trân trong cảm ơn các bạn bè và đồng nghiệp trong hội toán Internet: **BÀI TOÁN HAY - LỜI GIẢI ĐẸP - SAY MÊ TOÁN HỌC** về những ý kiến sâu sắc và giá trị.

Tài liệu tham khảo

[1] J. Bang-Jensen, G. Gutin, and A. Yeo, *When the greedy algorithm fails, Discrete Optimization,* 1 (2004), 121-127.

[2] Cormen, Leiserson, and Rivest, *Introduction to Algorithms,* 1990.

[3] P. Erdos, G. Abraham, and Z. Abraham, *Theorem in additive number Theory,* Bull. Research Council, Israel, 10F; 41-43; 1961. 20.

[4] G. Gutin, A. Yeo, and A. Zverovich, *Traveling salesman should not be greedy: domination analysis of greedy-type heuristics for the TSP, Discrete Applied Mathematics,* 117 (2002), 81-86.

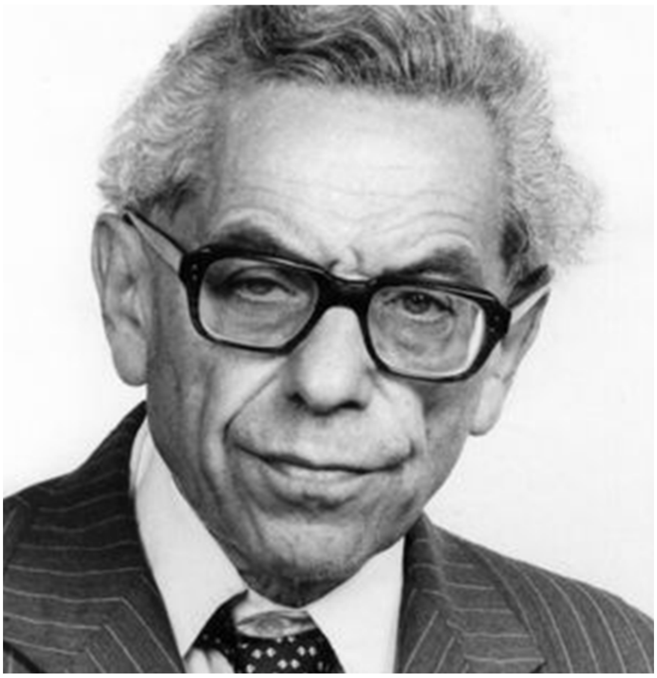
[5] L. Lovász, J. Pelikán, and K. Vesztergombi, *Discrete matematics. Elementary and beyond,* Springer-Verlag, 2003.

TỐI ƯU TỔ HỢP I: CÁC BÀI TOÁN TỐI ƯU VỀ CÁC HỆ TẬP HỢP

Gil Kalai - Hebrew University of Jerusalem and Yale University

LỜI GIỚI THIỆU

Bài viết này giới thiệu về các bài toán tối ưu liên quan đến hệ các tập hợp. Đây là một trong những bài giảng của Gil Kalai tại seminar *"Các khái niệm cơ bản"* tại ĐH TH Hungari do David Kazhdan khởi xướng. [1]



Paul Erdös

1. Ba bài toán mở đầu

Chúng ta sẽ bắt đầu bằng ba bài toán khá giống nhau, từ rất dễ đến rất khó.

Bài toán 1. *Cho $N = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Hỏi kích thước lớn nhất của họ $\mathcal{F}$ các tập con của N thoả mãn điều kiện hai tập hợp bất kỳ thuộc $\mathcal{F}$ có phần giao khác rỗng? (Một họ như vậy được gọi là họ giao nhau).*

Trả lời: Kích thước lớn nhất là 2^{n-1}. Chúng ta có thể đạt được điều này bằng các chọn tất cả các tập con chứa phần tử '1'. Chúng ta không thể đạt được con số lớn hơn, bởi từ mỗi cặp gồm một tập hợp và phần bù của nó, ta chỉ có thể chọn một tập hợp vào họ các tập hợp của chúng ta.

[1] Trần Nam Dũng dịch và giới thiệu (từ web site của Seminar: Tối ưu tổ hợp I)

Bài toán 2. *Tìm kích thước lớn nhất của họ $\mathcal{F}$ các tập con của N sao cho hai tập hợp bất kỳ thuộc $\mathcal{F}$ có hợp khác N?*

Câu trả lời là hiển nhiên vì bài toán 2 chẳng qua là bài toán 1. Chỉ cần chuyển qua phần bù. Và ta sẽ có đáp số giống như bài toán I. Ta phát biểu bài toán 2 khác như bên dưới.

Bài toán 2 mới. Tìm kích thước lớn nhất của họ $\mathcal{F}$ các tập con của N sao cho với hai tập hợp bất kỳ S, R thuộc $\mathcal{F}$, ta có giao của chúng khác rỗng và hợp của chúng khác N.

Một ví dụ của một họ như vậy là tập hợp tất cả các tập hợp chứa phần tử 1 nhưng không chứa phần tử 2. Họ này có 2^{n-2} tập hợp. Phải mất vài năm sau khi Erdös đề xuất bài toán này, Kleitman mới chứng minh được là không có họ nào lớn hơn với tính chất này.

Bài toán 3. *(Giả thuyết Erdös-Sos) Cho $\mathcal{F}$ là họ các đồ thị với N là tập các đỉnh. Giả sửa rằng hai đồ thị bất kỳ của họ có chung một tam giác. Hỏi $\mathcal{F}$ có kích thước lớn nhất bằng bao nhiêu?*

Tổng số các đồ thị với n đỉnh là $2^{\binom{n}{2}}$. (Chú ý: ta đếm các đồ thị mà không tính đến sự đẳng cấu của chúng.)

Một ví dụ đơn giản của họ tập hợp với tính chất đã cho là tất cả các tập hợp chứa một tam giác cố định nào đó. Ví dụ tất cả các đồ thị chứa các cạnh

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}.$$

Họ này chứa $\frac{1}{8}$ của tất cả các đồ thị. Tồn tại hay không một họ lớn hơn các đồ thị với tính chất đã cho?

Erdös và Sos đưa ra giả thuyết là câu trả lời là không – chúng ta không thể tìm được họ lớn hơn. Giả thuyết này hiện nay vẫn là một vấn đề mở.

Vera Sos

2. Hai định lý cơ bản về họ các tập con với các điều kiện giao cho trước

Định lý Erdös-Ko-Rado: Một họ giao nhau các k-tập con của N, trong đó $2k \leq n$ chứa tối đa $\binom{n-1}{k-1}$ tập hợp.

Định lý Fisher - deBruijn-Erdös: Họ các tập con của N sao cho hai tập hợp khác nhau bất kỳ của họ có đúng một phần tử chung có nhiều nhất n phần tử.

Erdös và deBruijn kết luận rằng n điểm không thẳng hàng trên mặt phẳng xác định ít nhất n đường thẳng. Hãy thử suy ra điều này từ định lý trên!

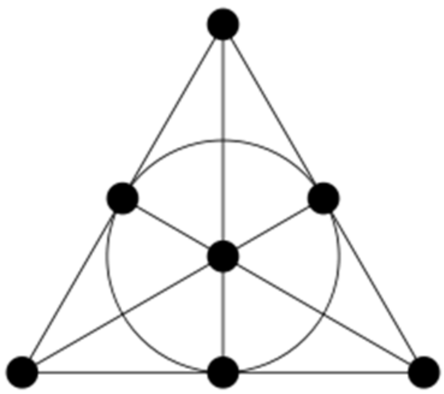
Tất cả các k-tập con của N chứa phần tử 1 cho ví dụ về dấu bằng cho định lý Erdos-Ko-Rado. Với định lý Erdös deBruijn ta lấy họ

$$\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots, \{1, n\}\}$$

hoặc thay tập hợp đầu tiên bởi

$$\{2, 3, \ldots, n\},$$

hoặc lấy một mặt phẳng xạ ảnh hữu hạn.



Mặt phẳng Fano các điểm xạ ảnh hữu hạn bậc 2

3. Phép chứng minh định lý deBruijn Erdös bằng đại số tuyến tính.

Phép chứng minh định lý Fisher - de Bruijn-Erdös có thể trình bày như sau: Giả sử rằng có m tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_m$ trong họ. Xét ma trận liên kết của họ: Phần tử (i,j) của ma trận này bằng '1' nếu $i \in A_j$. Sự kiện cốt yếu ở đây là các cột $c_1, c_2, \ldots, c_m$ của ma trận liên kết là độc lập tuyến tính, từ đây suy ra $m \leq n$.

Làm thế nào để có thể chứng minh rằng các cột là độc lập tuyến tính? Trước hết, chúng ta giả sử rằng có ít nhất 2 tập hợp. Khi đó ta viết $s = \sum \alpha_i c_i$ và tính tích trong (inner product)

$$\langle s, s\rangle = \sum\sum \alpha_i \alpha_j \langle c_i, c_j \rangle$$

Ta lưu ý rằng nếu i và j khác nhau thì $\langle c_i, c_j \rangle = 1$ và $\langle c_i, c_i \rangle = |A_i|$.

Như vậy

$$\langle s, s\rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2(|A_i| - 1) + \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right)^2.$$

Như vậy tích này chỉ có thể bằng 0 khi tất cả các hệ số α_i đều bằng 0.

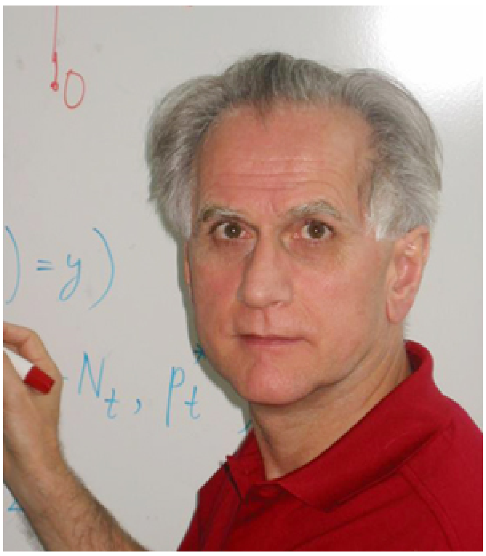
Chứng minh này là một ví dụ của "các lý luận về chiều trong tổ hợp".

4. Định lý Sperner

Định lý Sperner (1927) khẳng định rằng kích thước lớn nhất của họ $\mathcal{F}$ các tập con của N là một đối xích đối với quan hệ bao hàm là hệ số nhị thức $\binom{n}{n/2}$. Lubell tìm được một phép chứng minh đơn giản và đẹp cho định lý Sperner:

Gọi $\mathcal{F}$ là một đối xích như vậy và giả sử rằng nó có s_k tập hợp k phần tử. Ta tính các cặp (π, S) trong đó $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ là một hoán vị của $\{1, 2, \ldots, n\}$ và S là tập hợp thuộc họ có khởi đầu là π, cụ thể là $S = \{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(k)\}$ với k nào đó. Với mỗi hoán vị π, ta tìm được nhiều nhất một khởi đầu S trong họ $\mathcal{F}$ (do điều kiện đối xích).

Nếu S là một tập hợp k phần tử, ta có thể tìm được đúng $k!(n-k)!$ hoán vị π với S là khởi đầu. Kết hợp hai sự kiện này, ta có $\sum_{k=1}^{n} s_k k!(n-k)! \leq n!$ hay nói cách khác $\sum_{k=0}^{n} \frac{s_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$. Bất đẳng thức này (được gọi là bất đẳng thức LYM) suy ra kết quả cần chứng minh.



Bella Bollobas, một trong những người đã phát hiện ra bất đẳng thức LYM.

Định lý Erdös-Ko-Rado có một phép chứng minh tương tự với chứng minh trên. Ý tưởng là tính cách cặp (π, S) trong đó S là một tập hợp trong họ, π là hoán vị vòng quanh $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ và S là một "khoảng" liên tục đối với π.

Một mặt ta có $(n-1)!$ hoán vị vòng quanh và dễ dàng thấy rằng với mỗi một hoán vị như vậy, ta có thể chọn được nhiều nhất k "khoảng" đôi một giao nhau. Mặt khác, với mỗi tập hợp S có $k!(n-k)!$ hoán vị vòng quanh mà trong đó S là một khoảng liên tục. Như vậy $|F|k!(n-k)! \leq (n-1)!k$ và điều này cho chúng ta định lý Erdös Ko Rado.

Quay trở lại một chút về câu "dễ dàng nhận thấy". Phần này sử dụng điều kiện $2k \leq n$. Một cách lý luận cho phần này như sau: xét khoảng J mà phần tử tận cùng bên trái là nằm ở bên trái nhất và chú ý rằng có k khoảng giao với J mà phần tử tận cùng bên trái nằm bên phải z. Một cách khác là xét một khoảng J bào đó có độ dài k và chú ý rằng $2k-2$ khoảng có giao với khoảng này được chia thành $k-1$ cặp mà mỗi cặp chứa hai khoảng không giao nhau.

5. Định lý Turan và bài toán Turan

Trường hợp đặc biệt của định lý Turan cho đồ thị không chứa tam giác được chứng minh bởi Mantel vào năm 1907.

Số lớn nhất các cạnh (ký hiệu là $t_2(n)$) của một đồ thị n đỉnh và không chứ tam giác đạt được ở đồ thị hai phe đầy đủ n đỉnh với kích thước hai phe càng gần nhau càng tốt (cụ thể là $\left[\frac{n}{2}\right]$ và $\left[\frac{n+1}{2}\right]$).

Định lý Turan ở dạng tổng quát được chứng minh vào những năm 40 của thế kỷ trước. Số lớn nhất các cạnh (ký hiệu là $t_r(n)$) của đồ thị n đỉnh không chứa đồ thị con đầy đủ $r+1$ đỉnh đạt được tại đồ thị r phe đầy đủ với n đỉnh, trong đó kích thước của các phần càng gần nhau càng tốt.

Paul Turan

Chứng minh định lý Turan: Thực sự định lý Turan không khó; gần như cách tiếp cận nào cũng có thể thành công. Sau đây là một cách tiếp cận như vậy: để đơn giản, ta xét trường hợp tam giác. Xét đỉnh v với bậc lớn nhất và chia các đỉnh còn lại của đồ thị thành hai phần: A – các đỉnh kề với v, B – là các đỉnh còn lại. Bây giờ chú ý là các đỉnh thuộc A lập thành một tập hợp độc lập (tức là không có cạnh nối giữa các đỉnh của A). Với mỗi đỉnh thuộc B ta xoá đi tất cả các cạnh chứa đỉnh này và thay vào đó, nối đỉnh này với tất cả các đỉnh thuộc A. Để ý rằng trong đồ thị mới, bậc của mỗi đỉnh đều không nhỏ hơn bậc ở đồ thị ban đầu. Và, hơn nữa, đồ thị mới là đồ thị hai phe (trong đó A là một phe). Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh là với đồ thị hai phe thì số cạnh là lớn nhất khi hai phần có số đỉnh càng gần nhau càng tốt.

Sau đây là một chứng minh khác. Xoá đi một đỉnh của đồ thị G với $n+1$ đỉnh không chứa K_r. Số cạnh của đồ thị còn lại không vượt quá $t_r(n)$. Thực hiện điều này đối với tất cả các đỉnh và chú ý rằng một một cạnh được tính $n-1$ lần. Ta thu được rằng số cạnh trong G (và nghĩa là $t_r(n+1)$) không vượt quá phần nguyên trên của $\dfrac{t_r(n)\cdot(n+1)}{n-1}$. Đánh giá này cho chúng ta kết quả chính xác của bài toán.

Chúng ta kết thúc chuyến tham quan thú vị này bằng bài toán mà Turan đưa ra vào năm 1940. Chúng ta muốn tìm số phần tử lớn nhất của tập hợp các bộ ba lập từ $1, 2, \ldots, n$ không chứa một "tứ diện", tức là không chứa bốn bộ ban có dạng $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$.

Nếu độc giả chưa biết đáp số, hãy thử đưa ra dự đoán của mình. Turan đã đưa ra một giả thuyết của mình và giả thuyết này hiện nay vẫn còn là một vấn đề mở.

Một số ghi chú thêm của dịch giả:

Gil Kalai là Giáo sư Toán của Đại học Hebrew ở Jerusalem, Israel và là giáo sư thỉnh giảng về Toán và Khoa học máy tính tại Đại học Yale, Mỹ. Ông sinh năm 1955, bảo vệ luận án tiến sĩ năm 1983 dưới sự hướng dẫn khoa học của Micha Perles. Ông được giải thưởng Polya năm 1992 và giải thưởng Erdos năm 1993. Ông đã tìm ra các phương án của thuật toán simplex trong quy hoạch tuyến tính với thời gian dưới mũ để chứng minh được rằng mọi tính chất đơn điệu của đồ thị đều có chuyển pha chặt, giải quyết giả thuyết Borsuk về số các phần cần thiết để phân hoạch một hình lồi thành các tập con có đường kính nhỏ hơn.

Từ năm 2008, ông đã lập blog Combinatorics and more tại địa chỉ gilkalai.wordpress.com để trình bày và thảo luận các vấn đề mà ông và các cộng sự quan tâm. Blog này có chất lượng chuyên môn rất cao, rất nhiều các đề tài, bài báo đã được khởi đầu từ những thảo luận, gợi ý từ blog này.

Đối xích: Trong một tập sắp thứ tự (partial order set), một đối xích là một họ các phần tử đôi một không so sánh được với nhau.

LYM: Lubell, Yamamoto, Meshalkin là những người đã chứng minh định lý này một cách độc lập. Bollobas là người thứ tư cũng tìm ra kết quả này một cách độc lập.

BÀI TOÁN HAY - LỜI GIẢI ĐẸP

Ban Biệp tập Epsilon

LỜI GIỚI THIỆU

Chuyên mục này được lấy cảm hứng từ bài viết của thầy Nguyễn Duy Liên ở Epsilon số 3 về bài toán số 6 trong kỳ thi IMO 2001 với 5 cách giải khác nhau. Mục này sẽ để dành viết về những bài toán hay, lời giải đẹp và những câu chuyện thú vị xung quan những bài toán và lời giải đó.

Tên của chuyên mục được mượn từ tên của một nhóm những người yêu toán trên Facebook do anh Nguyễn Văn Lợi sáng lập "*Bài toán hay – Lời giải đẹp – Đam mê toán học*". Chuyên mục ghi nhận các đề cử của bạn đọc và sẽ chọn đăng mỗi kỳ 1, 2 bài toán.

Kỳ này chuyên mục giới thiệu với bạn đọc về bài toán số 6 trong kỳ thi IMO 1983 với lời giải tuyệt vời của Bernhard Leeb.

Năm 1983 khi tôi đi thi toán quốc tế ở Paris, tôi đã quen hai người bạn là Andrei Ratiu (người Romania) và Bernhard Leeb (người Đức). Chúng tôi nói với nhau bằng tiếng Pháp và tiếng ... tay. Chúng tôi cùng sở thích là đánh bóng bàn và thường rủ nhau chơi bóng ở phòng thể thao của Lycee Luis Le Grande. Chúng tôi có một cổ động viên nhiệt tình là bạn Nadia người Algeria, cũng thi IMO và chơi thân với Bernhard. Chính bạn Nadia đã trả lời phỏng vấn Đài truyền hình Pháp "*Ấn tượng nhất đối với em là đoàn CHLB Đức và đoàn Việt Nam*". Đức năm đó có 3 bạn $42/42$, trong đó Bernhard là một. Bạn ấy còn đạt giải thưởng đặc biệt với lời giải 2 dòng cho bài toán bất đẳng thức :

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0. \tag{1}$$

Thầy Lê Hải Châu kể lại là khi phát short list cho các trưởng đoàn thì không ai giải được bài này (và đoàn Việt Nam cũng không ai làm được). Cho nên khi BGK thấy có lời giải chỉ 2 dòng thì quá ấn tượng và đã họp để trao giải đặc biệt cho Bernhard.

Tìm hiểu thêm thì trước đó Bernhard đã 2 lần thi IMO và năm 1984 còn thi thêm một lần nữa. Các năm 1981, 1982, 1984 Bernhard đều được huy chương bạc, dù điểm rất cao (thấp nhất là 35). Nếu là bây giờ thì Bernhard đã đạt 4 huy chương vàng, một thành tích đáng nể.

Bernhard rất giỏi ngoại ngữ. Cậu biết tiếng Pháp, tiếng Anh. Sau này khi tôi học ở Moscow vẫn thỉnh thoảng trao đổi thư từ (và ảnh mấy cô bạn gái người Nga).

Hiện nay Bernhard Leeb là giáo sư đầu ngành của đại học Munchen, có nhiều công trình toán học giá trị.

Dưới đây chúng tôi trình bày 2 lời giải của bài toán này. Lời giải chính thức của Ban giám khảo và lời giải 2 dòng của Bernhard Leeb.

Lời giải 1. (Của BGK) Vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên nếu đặt

$$x = \frac{b+c-a}{2},\ y = \frac{c+a-b}{2},\ z = \frac{a+b-c}{2},$$

thì x, y, z là các số dương và $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$. Thay vào (1) và thực hiện biến đổi, ta có bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geqslant xyz(x+y+z). \tag{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz ta có

$$(xy^3 + yz^3 + zx^3)(z+x+y) \geqslant xyz(y+z+x)^2,$$

với dấu bằng xảy ra khi

$$\frac{xy^3}{z} = \frac{yz^3}{x} = \frac{zx^3}{y}.$$

Tức là dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. Vậy dấu bằng xảy ra ở bất đẳng thức ban đầu khi và chỉ khi tam giác đã cho là tam giác đều đều. □

Trong lời giải này, mấu chốt là sử dụng phép thế $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$ (được gọi là phép thế Ravi. Khi đi thi vào năm 1983, chúng tôi chưa hề biết đến phép thế này) để đưa bất đẳng thức (1) chỉ đúng với a, b, c là ba cạnh của một tam giác về bất đẳng thức (2) đúng với mọi số thực dương x, y, z, tức là giải quyết được khó khăn về điều kiện ràng buộc.

Lời giải 2. (Của Bernhard Leeb) Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Khi đó ta có

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) = a(b+c-a)(b-c)^2+b(a+b-c)(a-b)(a-c) \geqslant 0.$$

Từ đó dẫn đến kết luận của bài toán. □

Lời giải này chính tay Bernhard Leeb đã viết cho tôi trên một tấm bưu thiếp. Tiếc là qua nhiều năm với nhiều lần di chuyển, tôi không còn giữ được tấm bưu thiếp quý đó mà chỉ nhớ lời giải cũng những kỷ niệm về người bạn trong ký ức của mình.

Bài toán này quả thật là một bài toán hay và lời giải của Leeb thì quá tuyệt vời. Tôi cũng đã nhiều lần chia sẻ với bạn bè về bài toán và lời giải và nhiều người cũng đồng tình với nhận định này cùng những tiếng trầm trồ. Trên diễn đàn Bài toán hay – Lời giải đẹp – Đam mê toán học, giáo sư Phùng Hồ Hải (huy chương đồng toán quốc tế năm 1986) đã có chia sẻ dưới đây về bài toán này, cũng như những vấn đề rộng hơn về mối liên hệ giữa toán sơ cấp và nghiên cứu toán học. Chúng tôi xin trích đăng ý kiến của giáo sư Hải.

"*Bài IMO* 1983 *có lẽ là bài đầu tiên về dạng bất đẳng thức cho* 3 *số, nó thể hiện số* 3 *rất đặc biệt (không có loại tương tự cho* 4, 5, … *cho* 2 *số thì đã quá "cũ" rồi). Lời giải phải dùng một kỹ thuật đặc biệt, nó đẹp tới mức gọi là "nghệ thuật" thì mới xứng. Bài toán này đã tạo ra hẳn một trào lưu tạm gọi là "Bất đẳng thức cho* 3 *số". Tuy nhiên cần phải nói rằng đỉnh cao của trào lưu đã đạt được từ ngay bài toán đầu tiên. Lời giải đặc biệt của Bernhard Leeb thể hiện điều đó. Việc phân tích chi ly lời giải đó là vô nghĩa vì không ai biết Leeb đã nghĩ thế nào. Tuy nhiên ta có thể thấy những điểm chính sau trong tư duy của Leeb. Biến đổi hiệu hai vế của bất đẳng thức thành một tổng các số không âm, tính không âm nhận được từ các yếu tố sau: Bất đẳng thức tam* *giác (dữ kiện), kỹ thuật sắp thứ tự (có thể hiểu như là xét các trường hợp để đơn giản hóa bài toán), các hệ số cho bởi bình phương (yếu tố này rất quan trọng để đảm bảo dấu bằng). Ngoài ra là tài năng của Leeb, cái mà các thầy giáo cũng chịu không dạy được.*

Bất đẳng thức 3 *số đẹp không kém gì các bài toán hình học phẳng. Tôi nhớ năm* 1995 *tới khoa toán trường York, thấy họ treo ở bảng tin của khoa thách đố một bài toán như vậy, là đề thi IMO* 1995 *nếu tôi không nhầm. Các giáo sư hì hục giải. Tuy nhiên việc lạm dụng nó là không tốt. Ngay bài IMO* 1995 *cũng đã thua xa bài IMO* 1983, *không nói đến nhiều bài ngày nay. Tiêu chí đầu tiên cho một bài toán sơ cấp dành cho học sinh giỏi là phải đẹp, tiếp theo là lời giải của nó cũng phải sơ cấp và đơn giản (nếu đề bài đã đẹp thì lời giải khắc phải hay và có ý mới). Khi sáng tạo ra đề bài mới chúng ta cần nghĩ rằng làm việc đó cho các em học sinh chứ không phải cho chúng ta - để không tạo ra những "bài toán độc hại". Tình huống giống như nông dân trồng dưa, vì năng suất mà phun đủ thứ thuốc tăng trọng, thuốc trừ sâu ... Đối với bất đẳng thức* 3 *số tôi cho rằng sau* 32 *năm thế giới đã có quá nhiều rồi (riêng Việt Nam thậm chí đã ngộ độc). Có rất nhiều bài toán đẹp trong đó, và chắc chắn sẽ còn có những bài toán đẹp (nhưng rất ít). Tôi thiết nghĩ, khi dạy cho học sinh, nếu chúng ta nghĩ cho các em, thì nên chắt lọc ở đó những gì tinh túy nhất để truyền đạt (trong đó có* 4 *ý tưởng đã được thể hiện trong bài IMO* 1986). *Nhưng không nên quá sa đà, sa đà là đã làm lãng phí tuổi trẻ của các em.*

Có bạn gì ở trên hỏi về "con đường". Lời khuyên của tôi là hãy tìm hiểu toán cao cấp. Đó mới là biển rộng, của kiến thức, của tư tưởng. Ngày còn là học sinh chuyên toán tôi cứ nghĩ chỉ có toán sơ cấp mới hay, toán cao cấp chắc buồn tẻ lắm (mặc dù chúng tôi hồi đó tự tìm đọc rất nhiều về toán cao cấp và có hiểu biết rộng hơn nhiều về giải tích hiện đại so với học sinh ngày nay). Tuy nhiên sau này tôi thấy tiếc là mình đã dành quá nhiều thời gian cho toán sơ cấp. Đó là cảm nhận của một người theo nghề toán. Đối với những người không theo toán thì còn lãng phí biết chừng nào. Tuy vậy, để "ra biển" thì phải học bơi, học chèo thuyền. Những ngày những năm đầu tiên tìm hiểu toán cao cấp tất nhiên sẽ mất phương hướng như đang đứng trên một đảo nhỏ nhìn ra biển vậy - lúc đó có thể sẽ tiếc sao không ở nhà bơi trong ao. Nhưng vượt qua được cái đó bạn sẽ thấy thế giới toán học khác những gì mà bạn đã thấy".

ĐÔI ĐIỀU VỀ HÌNH HỌC PHI EUCLID

Trần Nam Dũng - Trích từ "Các câu chuyện toán học", NXB Giáo dục

Chuyện kể rằng, vào năm 1823, Farkas Bolyai (1975 – 1858) đã viết thư cho người con trai là Janos Bolyai (1802 – 1860) người Hungary rằng : "*Con đừng đi vào con đường mà bố đã đi, đừng nhảy vào "hang không đáy" đã nuốt hết trí tuệ, tinh lực và tâm huyết của bố*".

Đây là lời khuyên từ đáy lòng, từ trách nhiệm của người bố đã suốt đời nghiên cứu Định đề 5 của Euclid mà không thành công. Khi biết con mình thích nghiên cứu "*lý thuyết các đường song song*", thì F. Bolyai đã rất sợ hãi và đã viết cho con mình (trong một bức thư khác) như sau: "*Con sẽ không thể nào chiến thắng được lí thuyết các đường song song bằng con đường ấy. Bố đã đi đến cuối con đường ấy và đã lạc vào một đêm đen dày đặc, một tia sáng của ngọn nến cũng không có và đã chôn vùi ở đó bao niềm hạnh phúc của đời mình. Khi lao vào các học thuyết cô quạnh về các đường song song, con sẽ chẳng còn gì cả. Con hãy lẩn tránh nó như lẩn tránh những dục vọng thấp hèn, nó sẽ làm hao mòn sức lực của con, cướp đi sự an nhàn, quấy đảo sự yên tĩnh và sẽ giết chết những niềm vui của cuộc sống. Bóng tối mịt mùng sẽ nuốt chửng cả những chòi tháp khổng lồ và sẽ chẳng có lóe sáng trên Trái Đất tối tăm. Chẳng bao giờ con người có thể đạt tới một sự thực hoàn mĩ ngay chính trong hình học. Chúa trời hãy cứu với con khỏi nhưng ham mê con ôm ấp ...*"

Nhưng F. Bolyai không ngờ rằng câu nói của chính ông trước đây đã làm J. Bolyai bị thu hút vào vấn đề này (câu nói đó có nội dung sau: "*Ai chứng minh được tiên đề về các đường thẳng song song, người đó sẽ sáng ngời như một viên kim cương to bằng Trái Đất*"). Và chàng J. Bolyai trẻ tuổi đã không vì những lời cảnh báo của bố mình mà lùi bước. Tránh những thất bại của những người đi trước, J. Bolyai đã đi theo con đường của riêng mình. Ông đã không tìm cách chứng minh Định đề 5 của Euclid, mà đã xét nó như một tiên đề độc lập. Và khi phủ định Định đề 5 của Euclid, J. Bolyai đã xây dựng được một hệ thống hình học mới (mà về sau còn được gọi là Hình học phi Euclid). Các kết quả về hình học này của ông cũng phong phú và những chứng minh của ông rất hoàn thiện.

J. Bolyai là một nhà toán học thiên tài, nhưng bị đố ky, chê bai và bị cả những điều đơm đặt về ông. Cuộc sống của J. Bolyai luôn bị bọn quý tộc chèn ép, bao vây cả tinh thần lẫn vật chất. Người bố là một nhà toán học đầy tâm huyết và rất thương con, nhưng từ bài học sai lầm rút ra chính cuộc đời nghiên cứu toán học của mình, F. Bolyai đã vô tình trở thành vật cản của con trên con đường tìm tòi, sáng tạo.

Năm 1831, J. Bolyai đã công bố công trình của mình dưới dạng phụ lục của mỗi cuốn sách của bố mình. Phụ lục trình bày "*Học thuyết tuyệt đối đúng về không gian*" F. Bolyai đã viết thư cho Carl Friedrick Gauss (1777 – 1855), đề nghị Gauss cho nhận xét về công trình nghiên cứu của J. Bolyai. Trong thư trả lời, Gauss đã nói rằng ông không thể ngợi khen công trình đó, vì như thế tức là tự khen mình. Ông nói rằng tư tưởng của J. Bolyai trong phụ lục chính là tư tưởng của ông trong nhiều năm trước đây. Sau đó, Gauss đã viết thư cho Goling với ý cho rằng nhà toán học trẻ tuổi J. Bolyai là một thiên tài.

Phải nói rằng đánh giá trên đây của nhà toán học lỗi lạc Gauss là hoàn toàn chân thực. Thật vậy, từ năm 1824, trong thư gửi cho người bạn là Tolinos, Gauss đã viết: "*Tổng ba góc trong một tam giác phẳng phải nhỏ hơn* $180°$, *giả định này dẫn đến những đặc thù khác hoàn toàn với hình học của chúng ta. Tôi phát triển nó và thu được những kết quả hoàn toàn khiến ta hài lòng*". Và bức thư nổi tiếng mà Gauss đã gửi Frants Adonf Taurinus cũng chứng tỏ rằng, Gauss đã nắm được các ý niệm quan trọng của Hình học phi Euclid. Nhưng đó chỉ mới là những đoạn rời rạc, những phát kiến mặc dù đã rất sâu sắc.Tuy nhiên, lúc bấy giờ Gauss đã không công bố những kết quả nghiên cứu này của mình.

Thư trả lời của Gauss đã làm cho J. Bolyai có những hiểu lầm lớn J. Bolyai nghĩ rằng Gauss rằng đã dùng uy danh của mình để cướp đi quyền phát minh về hệ thống hình học mới của ông. Vì thế, J. Bolyai rất đau lòng vầ thề rằng sẽ vứt bỏ mọi nghiên cứu toán học. Tháng $10 - 1848$, J. Bolyai đã được bố mình gửi cho luận văn: "*Nghiên cứu về lí thuyết các đường song song*" của N. I. Lobachevski, xuất bản bằng tiếng Đức năm 1840. J. Bolyai đã ngạc nhiên, vì thấy rằng N. I. Lobachevski cũng đã đi đến những kết quả giống mình và J. Bolyai cũng rất khâm phục tài năng của N. I. Lobachevski.

Cùng thời với J. Bolyai, ở Cadan (Thủ đô của nước cộng hòa tự trị Tacta thuộc Liên Bang Nga), đã xuất hiện một ngôi sao sáng, đó là nhà toán học thiên tài Nicolai Ivanovich Lobachevski $(1792 - 1856)$. N. I. Lobachevski đã từng là giáo sư xuất sắc, Hiệu trưởng của Trường Đại học Tổng hợp Cadan. Ông đã tìm cách chứng minh rằng, từ các định đề và tiên đề khác của Hình học Euclid cổ điển, không thể suy ra Định đề 5.

Để chứng minh điều đó, ông đã giữ nguyên các định đề và tiên đề khác của Hình học Euclid cổ điển và thay thế Định đề 5 bằng một tiên đề phủ định của tiên đề Euclid, và do đó cũng là phủ định của Định đề 5. Ngày nay, tiên đề nà được gọi là tiên đề Lobachevski. Tiên đề này có nội dung như sau: "*Trong mặt phẳng, qua một điểm không nằm trên một đường thẳng cho trước, có ít nhất hai đường thẳng không cắt đường thẳng đã cho*". Rồi từ đó, Lobachevski đã xây dựng nên một hình học mới không có mâu thuẫn. Những kết quả của hình học mới này "*trái mắt*", trái với trực quan hàng ngày của chúng ta, trái với hình học Euclid quen thuộc.

Ngày $11 - 2 - 1826$, Lobachevski đã công bố kết quả của mình về Hình học phi Euclid trên diễn đàn Vật lí – Số học của Trường Đại học Tổng hợp Cadan. Sau đó, công trình nghiên cứu về hình học phi Euclid của Lobachevski với tiêu đề "*Về các cơ sở hình học*", đã được đăng ở tờ báo "*Thông báo Cadan*" năm 1829. Còn công trình của J. Bolyai về Hình học phi Euclid được công bố vào năm 1831 (độc lập với Lobachevski). Ngày nay, chúng ta gọi Hình học phi Euclid (do Lobachevski và J. Bolyai đã độc lập với nhau và đồng thời tìm ra) là Hình học Lobachevski hoặc Hình học Lobachevski Bolyai. Ngày $11 - 2 - 1826$ được thế giới gọi là ngày ra đời của hình học này.

Trong thời đại của Lobachevski, hầu như không ai hiểu tư tưởng của ông, nhiều người đã chế nhạo ông. Nhưng Lobachevski đã dũng cảm và tin tưởng phát triển hình học mới của mình. Ông đã kiên trì nghiên cứu và công bố công trình nghiên cứu của mình ngày càng chi tiết hơn, đầy đủ hơn. Một năm trước khi qua đời, Lobachevski đã bị mù. Khi đó ông còn đọc cho học trò của mình chép một công trình sáng tạo mới mang tên "*Hình học phẳng*", trong đó ông đã chỉ rõ Hình học Euclid chỉ là trường hợp giới hạn của Hình học phi Euclid của ông. Lobachevski đã gửi công trình cuối cùng này cho Trường Đại học Tổng hợp Cadan – nơi cả cuộc đời sáng tạo của ông đã trôi qua ở đó.

Ngày $24-2-1856$, Lobachevski đã qua đời, vài chục năm sau người ta mới công nhận toàn bộ những tư tưởng của ông.

Công trình nghiên cứu của Lobachevski và J. Bolyai về Hình học phi Euclid là một thành tựu vĩ đại của khoa học, đã mở ra một kỉ nguyên mới của Toán học, của Vật lí và của nhiều ngành khoa học khác có liên quan.

Vào năm 1882, nhà toán học H. J. Poincare đã xây dựng được một mô hình (gọi là mô hình Poincare) của Hình học Lobachevski phẳng, khi sử dụng các "*vật liệu*" lấy từ Hình học Euclid phẳng. Trong mặt phẳng Euclid, lấy một đường thẳng x nằm ngang, chia mặt phẳng thành 2 miền, mà ta gọi là "*nửa trên*" và "*nửa dưới*". Ta có các quy ước sau đây về các khái niệm cơ bản của Hình học Lobachevski phẳng: "*Điểm*" là điểm Euclid thông thường thuộc "*nửa trên*" và không thuộc x : "*Đường tâm thuộc x, hoặc là tia thông thường thuộc nửa trên, có gốc thuộc x và vuông góc với x*".

Tiếp tục, trong mô hình này, xác định rõ ý nghĩa của các khái niệm cơ bản khác, mà cụ thể là các tương quan cơ bản sau đây : "*Thuộc*", "*ở giữa*", "*bằng nhau*" (còn gọi là "*toàn đẳng*"), trong đó "*thuộc*" và "*ở giữa*" được hiểu như thông thường.

Người ta đã kiểm nghiệm tất cả các tiên đề của Hình học Lobachevski đối với mô hình nêu trên, và thấy rằng mô hình đã thỏa mãn tất cả các tiên đề đó.

Thêm vào những điều ở trên, ta có định lí sau đây của Hình học Lobachevski : "*Tổng ba góc trong của một tam giác nhỏ hơn hai góc vuông*".

Việc xây dựng thành công mô hình của Hình học Lobachevski đã chứng minh :

a) *Hình học Lobachevski là phi mâu thuẫn.*

b) *Từ các tiên đề khác của Hình học Euclid không thể suy ra được tiên đề Euclid.*

Hình học Lobachevski không phải là Hình học phi Euclid duy nhất. Hình học Riemann theo nghĩa hẹp của Georg Friedrich Bernhard Riemann $(1826-1866)$ người Đức cũng là Hình học phi Euclid. Để có được hệ tiên đề của Hình học Riemann nghĩa hẹp, phải thay đổi hệ tiên đề của Hình học Euclid nhiều hơn là những thay đổi mà Lobachevski đã thực hiện.

Ngoài các hình học vừa nêu, còn nhiều hình học khác, trong đó có Hình học fractal. Thuật ngữ fractal do nhà toán học Benoit Mandelbrot người Pháp, gốc Ba Lan, đề nghị từ những năm 1970. Tuy mới ra đời nhưng hình học này đã phát triển nhanh chóng, gắn liền với đồ họa vi tính, có nhiều ứng dụng trong phân tích và tổng hợp hình, trong việc xây dựng mô hình của các quá trình địa lí, quá trình sinh học (hoạt động của tim người, phát triển của cây trồng) ...

Epsilon
Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

GIỚI THIỆU MỘT SỐ ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN MÔN TOÁN NĂM 2015 - 2016

Ban Biên tập Epsilon

1. Một số đề thi

1.1. Đề thi chọn đội tuyển chuyên KHTN Hà Nội

Ngày thi thứ 1

Bài 1. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn

$$a_0 = 1, a_{n+1} = -\frac{3}{7}\left(\sqrt{\left(a_n^2+1\right)^3} + a_n^3\right).$$

Chứng minh rằng (a_n) hội tụ và tìm giới hạn của a_n.

Bài 2. Tìm tất cả các số n nguyên dương sao cho

$$3^n + 4^n + 5^n | 60^n.$$

Bài 3. Cho tam giác ABC có E, F lần lượt thuộc các cạnh CA, AB sao cho $EF \parallel BC$. Tiếp tuyến tại E, F của đường tròn (AEF) cắt BC tại M, N. Giả sử BE cắt FN tại K và CF cắt EM tại L.

1. Chứng minh rằng $\angle KAB = \angle LAC$.
2. Giả sử BE cắt CF tại X và EN cắt FM tại Y. Chứng minh rằng XY luôn đi qua điểm cố định khi E, F thay đổi.

Bài 4. Cho x, y, z là các số thực dương có tổng bằng 1. Tìm GTLN của

$$P = \sqrt{\frac{x^2y}{4x+5y}} + \sqrt{\frac{y^2z}{4y+5z}} + \sqrt{\frac{z^2x}{4z+5x}}.$$

Ngày thi thứ 2

Bài 5. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x-1)f(y^2) = yf(xy) - yf(y)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 6. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 5, \\ a_{n+1} = 7a_n - a_{n-1} + 44 \end{cases}, n \geq 1.$$

Chứng minh rằng với mọi n thì a_n là tổng của 2 số chính phương.

Bài 7. Cho tam giác ABC và đường tròn (K) đi qua B, C các các đoạn AC, AB lần lượt tại E, F. Gọi M, N là các điểm đối xứng với B, C qua E, F theo thứ tự đó. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (AMN) cắt MN, BC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng A là trung điểm PQ.

Bài 8. Cho bảng ô vuông $n \times n$ với $n \in \mathbb{N}*$ và số nguyên $k \leq n$. Điền vào các ô trong bảng $n \times n$ các số thực thuộc đoạn $[-1; 1]$ sao cho tổng các số trên mỗi bảng con $k \times k$ đều bằng 0. Tìm giá trị lớn nhất của tổng tất cả các số trên bảng.

1.2. Đề thi chọn đội tuyển PTNK

Ngày thi thứ 1

Bài 1. Cho tập hợp
$$A = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 2015, (n, 2016) = 1\}.$$
Hỏi có bao nhiêu số nguyên $a \in A$ sao cho tồn tại số nguyên b mà $a + 2016b$ là số chính phương?

Bài 2. Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$a^2 \leq 1, a^2 + b^2 \leq 5, a^2 + b^2 + c^2 \leq 14, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 30.$$

1. Chứng minh rằng $a + b + c + d \leq 10$.

2. Chứng minh rằng $ad + bc \leq 10$.

Bài 3. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x - 2f(y)) = 5f(x) - 4x - 2f(y)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 4. Cho đường tròn k và các điểm B, C thuộc đường tròn, không phải là đường kính; I là trung điểm BC. Điểm A di động trên cung lớn BC của k. Gọi i_1 là đường tròn qua I và tiếp xúc với AB tại B; i_2 là đường tròn qua I và tiếp xúc với AC tại C. Các đường tròn i_1, i_2 cắt nhau tại D (khác I).

1. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AID luôn đi qua một điểm cố định.

2. Gọi K là trung điểm AD, E là tâm đường tròn qua K và tiếp xúc với AB tại A, F là tâm đường tròn qua K và tiếp xúc với AC tại A. Chứng minh rằng góc EAF có số đo không đổi.

Ngày thi thứ 2

Bài 5. Dãy số (x_n) được xác định bởi công thức $x_n = \dfrac{1}{n\cos\frac{1}{n}}$ với mọi $n \geq 1$. Tính giới hạn sau

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{2n-1}}{x_2 + x_4 + x_6 + s + x_{2n}}.$$

Bài 6. Tìm các giá trị của b sao cho tồn tại a để hệ phương trình sau có nghiệm (x, y)

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = b \\ y = x^2 + (2a+1)x + a^2 \end{cases}$$

Bài 7. Cho n là số nguyên dương, $n \geq 2$ và $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Gọi $A_1, A_2, \ldots, A_m$ và $B_1, B_2, \ldots, B_m$ là hai dãy các tập con khác rỗng của X thỏa mãn điều kiện: Với mỗi $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $A_i \cap B_j =$ nếu và chỉ nếu $i = j$.

1. Chứng minh rằng với mỗi hoán vị $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ của X, có không quá một cặp tập hợp (A_i, B_i) với $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ sao cho nếu $x_k \in A_i$ và $x_l \in B_i$ thì $k < l$.

2. Gọi a_i, b_i lần lượt là số phần tử của tập hợp A_i, B_i với $i = 1, 2, 3, \ldots, m$. Chứng minh rằng
$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{C_{a_i+b_i}^{a_i}} \leq 1.$$

Bài 8. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Đường tròn tâm I đi qua B, C lần lượt cắt các tia BA, CA tại E, F.

1. Giả sử các tia BF, CE cắt nhau tại D và T là tâm đường tròn (AEF). Chứng minh rằng $OT \parallel ID$.

2. Trên BF, CE lần lượt lấy các điểm G, H sao cho $AG \perp CE$, $AH \perp BF$. Các đường tròn $(ABF), (ACE)$ cắt BC tại M, N (khác B, C) và cắt EF tại P, Q (khác E, F). Gọi K là giao điểm của MP, NQ. Chứng minh rằng DK vuông góc với GH.

1.3. Đề thi chọn đội tuyển TP.HCM

Ngày thi thứ 1

Bài 1. Chứng minh rằng phương trình

$$3x^3 - 24x^2 + 60x - 47 = 0$$

có 3 nghiệm thực và 3 nghiệm đó là độ dài 3 cạnh của một tam giác có 1 góc lớn hơn 120°.

Bài 2. Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $x + y + z = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{1}{xy+1} + \frac{1}{yz+1} + \frac{1}{zx+1}.$$

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Gọi K là một điểm bất kỳ trên đoạn AH. Trên tia KB lấy điểm M sao cho $CA = CM$, trên tia KC lấy điểm N sao cho $BA = BN$. Giả sử CM và BN cắt nhau tại I. Chứng minh rằng $IM = IN$.

Bài 4. Cho hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(2) = 5, f(2016) = 2015 \text{ và } f(n) = f(f(n-1))$$

với $n \geq 1$. Tính $f(0)$, $f(1)$ và $f(2015)$ biết rằng $f(2015)$ là một số lẻ.

Ngày thi thứ 2

Bài 5. Cho dãy số (a_n) xác định bởi

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{12}, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}(5a_n + 1)^2}.$$

Chứng minh rằng $A = \sqrt{\dfrac{1}{a_{2015}}} + \sqrt{\dfrac{3}{a_{2016}}}$ là số nguyên.

Bài 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với $60^\circ < A < 90^\circ$. Gọi B_1 là điểm đối xứng với B qua CA và C_1 là điểm đối xứng với C qua AB. Gọi O_1 là điểm đối xứng với tâm O qua BC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_1C_1 nằm trên đường thẳng AO_1.

Bài 7. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho

$$a^3 + b \text{ và } b^3 + a$$

là lũy thừa của 2 với số mũ nguyên dương.

Bài 8. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2015\}$. Hỏi cần phải loại ra khỏi A ít nhất bao nhiêu phần tử để các phần tử còn lại thỏa mãn tính chất không có phần tử nào bằng tích của hai phần tử khác?

Đề thi chọn đội tuyển Nghệ An

Bài 1. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{a}{2b+2c}} + \sqrt{\frac{b}{2c+2a}} + \sqrt{\frac{c}{2a+2b}} \geq 3.$$

Bài 2. Tìm tất cả các số tự nhiên a sao cho tồn tại số nguyên dương $n > 1$ và thỏa mãn $a^n + 1$ chia hết cho n^2.

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O).

1. Gọi J là giao điểm của AC và BD. Đường tròn (O') tiếp xúc với hai tia JA, JB tại E, F và tiếp xúc trong với (O). Chứng minh rằng đường thẳng EF đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABD.

2. Các đường phân giác ngoài của các góc của tứ giác $ABCD$ cắt nhau tạo thành tứ giác $MNPQ$. Gọi X, Y lần lượt là trung điểm của MP, NQ. Chứng minh rằng X, O, Y thẳng hàng.

Bài 4. Viết các số từ 1 đến 2015 lên bảng. Ta chọn hai số bất kỳ a, b trên bảng và xóa chúng đi, sau đó viết thêm số $|a-b|$ lên. Thực hiện liên tiếp cho đến khi trên bảng chỉ còn lại một số. Gọi số đó là m.

1. Hỏi m có thể bằng 1 được không?

2. Tìm tập hợp các giá trị có thể có của m.

1.4. Đề thi chọn đội tuyển ĐH Vinh

Ngày thi thứ 1

Bài 1. Cho số $a > 0$ và dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = x_2 = a, x_{n+1} = x_n + \frac{2\sqrt{x_{n-1}}}{n^3}, n = 2, 3, \ldots$$

Chứng minh rằng $x_n < 2(a+3)$ với $n = 1, 2, 3, \ldots$

Bài 2. Tìm tất cả các hàm $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ sao cho các bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương x, y :

1. $f(x+y) \geq f(x) + 2y$;

2. $f(f(x)) \leq 4x$.

Bài 3. Cho tam giác ABC và điểm X nằm trong tam giác đó. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của X lên các cạnh BC, BA và A', C' lần lượt là điểm đối xứng của X qua BC, BA.

1. Gọi $E = BC \cap XK, F = AB \cap XH$. Chứng minh rằng các điểm A', B, C', E, F cùng thuộc một đường tròn.

2. Gọi Y là giao điểm thứ hai của đường tròn $(A'BC')$ với đường tròn đường kính BX. Chứng minh rằng $\dfrac{KX}{KY} = \dfrac{HX}{HY}$.

Bài 4. Một lớp học có n học sinh tham gia trò chơi tô màu trên một bảng ô vuông $n \times n$ như sau:

- Trong phút đầu tiên, n học sinh tô màu n ô vuông không cùng hàng hoặc cùng cột.

- Trong mỗi phút tiếp theo, mỗi học sinh tô một ô vuông có cạnh chung với ô mà học sinh đó tô ở phút liền trước.

- Một ô chỉ được tô đúng một lần.

Hỏi sau n phút, bảng ô vuông có thể được tô kín hay không trong các trường hợp sau đây:

1. $n = 30$?

2. $n = 31$?

Ngày thi thứ 2

Bài 5. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau

$$P = \frac{a + b + 1}{a^2 + b^2 + 1} + \frac{b + c + 1}{b^2 + c^2 + 1} + \frac{c + a + 1}{c^2 + a^2 + 1}.$$

Bài 6. Cho tứ giác $ABCD$ vừa nội tiếp và vừa ngoại tiếp đường tròn. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tứ giác. Đường thẳng qua I, song song với AB cắt AD và BC tại H và K. Chứng minh rằng độ dài HK bằng một phần tư chu vi của tứ giác $ABCD$.

Bài 7. Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n sao cho p^n có chứa 2015 chữ số bằng nhau liên tiếp.

1.5. Đề thi chọn đội tuyển Đà Nẵng

Ngày thi thứ 1

Bài 1. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 1, x_{n+1} = 3 + \frac{5}{x_n}$$

với $n = 1, 2, 3, \ldots$ Tìm số thực dương a sao cho dãy số (y_n) xác định bởi

$$y_n = \frac{a^n}{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

có giới hạn hữu hạn và $\lim y_n \neq 0$.

Bài 2. Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp (O) có đường cao AH và tâm đường tròn nội tiếp là I. Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ BC của (O). D là điểm đối xứng với A qua O. Đường thẳng MD cắt đường thẳng BC, AH theo thứ tự tại các điểm P, Q

1. Chứng minh tam giác IPQ vuông.
2. Đường thẳng DI cắt (O) tại điểm E khác D. Hai đường thẳng AE và BC cắt nhau tại F. Chứng minh nếu $AB + AC = 2BC$ thì I là trọng tâm của tam giác APF.

Bài 3. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn điều kiện

$$(P(x))^3 - 3(P(x))^2 = P(x^3) - 3P(-x)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 4. Xác định tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn tính chất tồn tại một cách chia hình vuông có độ dài cạnh là n thành đúng năm hình chữ nhật sao cho độ dài các cạnh của năm hình chữ nhật đó là các số

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.$$

Ngày thi thứ 2

Bài 5. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x^4 + f(y)\right) = y + f^4(x)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 6. Cho các số hữu tỉ a, b, c thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} a + b + c \in \mathbb{Z} \\ (2a-1)^2 + (2b-1)^2 + (2c-1)^2 = 3 \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên m, n thỏa mãn

$$(m, n) = 1 \text{ và } abc = \frac{m^2}{n^3}.$$

Bài 7. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (J) tiếp xúc ngoài với (O) tại D đồng thời tiếp xúc với tia đối của các tia BA, CA lần lượt tại E và F.

1. Chứng minh rằng $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{1 + \cos C}{1 + \cos B}$.

2. Giả sử AJ cắt (O) tại T khác A. Gọi P, Q lần lượt là các điểm di động trên cung nhỏ AB, AC của (O) sao cho PQ song song với BC. Các đường thẳng AP và BC cắt nhau tại M. Gọi I, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng EF, IM. Chứng minh rằng giao điểm của các đường thẳng NT và IQ luôn thuộc một đường cố định.

Bài 8. Cho P là một đa giác lồi 2016 cạnh. Một cách chia P thành tam giác bằng các đường chéo không cắt nhau bên trong P được gọi là một cách chia đẹp P.

1. Chứng minh rằng số đường chéo cần phải nối để chia đẹp P theo các cách khác nhau đều bằng nhau

2. Một tam giác thu được từ phép chia đẹp P nói trên được gọi là một tam giác trong nếu cả 3 cạnh của nó đều là các đường chéo của P. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chia đẹp P mà có đúng một tam giác trong, cho biết rằng hai cách chia là khác nhau nếu có ít nhấu một cặp tam giác không trùng nhau?

2. Lời giải một số đề chọn lọc

2.1. Lời giải đề thi chuyên KHTN Hà Nội

Ngày thi thứ 1

Bài 1. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn

$$a_0 = 1, a_{n+1} = -\frac{3}{7}\left(\sqrt{\left(a_n^2 + 1\right)^3} + a_n^3\right).$$

Chứng minh rằng (a_n) hội tụ và tìm giới hạn của a_n.

Lời giải. Ta thấy rằng

$$\sqrt{(a_n^2+1)^3}+a_n^3 > \sqrt{a_n^6}+a_n^3 = |a_n|^3+a_n^3 \ge 0$$

nên theo công thức đã cho, ta suy ra $a_n < 0, \forall n \ge 1$.

Xét hàm số $f(x) = -\frac{3}{7}\left(\sqrt{(x^2+1)^3}+x^3\right)$ với $x < 0$, ta có

$$f'(x) = -\frac{3}{7}x\left(\frac{3}{2}\sqrt{x^2+1}+3x\right) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $f(x)$ là hàm đồng biến. Dễ dàng thấy rằng $a_1 > a_2$ nên bằng quy nạp, ta có (a_n) là dãy tăng từ số hạng thứ 1. Hơn nữa, dãy này bị chặn trên bởi 0 nên có giới hạn. Để tìm giới hạn đó, ta xét phương trình sau với $x \le 0$:

$$-\frac{3}{7}\left(\sqrt{(x^2+1)^3}+x^3\right) = x \Leftrightarrow \sqrt{(x^2+1)^3}+x^3+\frac{7}{3}x = 0$$
$$\Rightarrow (x^2+1)^3 = x^2\left(x^2+\frac{7}{3}\right)^2$$

Đặt $y = x^2 \ge 0$ thì

$$(y+1)^3 = y\left(y+\frac{7}{3}\right)^2 \Leftrightarrow y^3+3y^2+3y+1 = y\left(y^2+\frac{14}{3}y+\frac{49}{9}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{5}{3}y^2+\frac{22}{9}y-1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\frac{9}{5} \\ y = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Do $y \ge 0$ nên ta chọn $y = \frac{1}{3}$ và có được $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Vậy giới hạn của dãy đã cho là $\lim a_n = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. □

Nhận xét Đây là một bài giới hạn dạng cơ bản $u_{n+1} = f(u_n)$ với $f(x)$ là hàm đồng biến. Đây là một tình huống khá bất ngờ vì các bài toán giới hạn dãy số của đề thi KHTN luôn mang tính thử thách nhất định.

Bài 2. Tìm tất cả các số n nguyên dương sao cho

$$3^n+4^n+5^n | 60^n.$$

Lời giải. Do $60^n = 2^{2n}\cdot 3^n\cdot 5^n$ và $3^n+4^n+5^n$ là ước của 60^n nên ta phải có

$$3^n+4^n+5^n = 2^x\cdot 3^y\cdot 5^z$$

trong đó $x, y, z \in \mathbb{N}$ và $0 \le x \le 2n, 0 \le y, z \le n$.

Ta xét các trường hợp sau:

1. Nếu $y > 0$ thì $3|4^n + 5^n$ hay $1 + (-1)^n \equiv 0 \pmod 3$. Suy ra n lẻ. Đặt $n = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{N}$. Khi đó

$$3^n + 4^n \equiv (-2)^n + (-1)^n \equiv -(1 + 2^n) \pmod 5$$

Nếu $z > 0$ thì $5|3^n + 4^n$, dẫn đến $-(1 + 2^n) \equiv 0 \pmod 5$ hay

$$2^{2k+1} \equiv -1 \pmod 5 \Leftrightarrow 2(-1)^k \equiv -1 \pmod 5$$

Tuy nhiên $2(-1)^k \equiv 2 \pmod 5$ hoặc $2(-1)^k \equiv -2 \pmod 5$ nên điều trên không thể xảy ra. Do đó $z = 0$ và ta có

$$3^n + 4^n + 5^n = 2^x \cdot 3^y.$$

Vì n lẻ và $2|(3 + 5)$ nên theo định lý LTE, ta có

$$v_2(3^n + 5^n) = v_2(3 + 5) = v_2(8) = 3.$$

Suy ra $v_2(3^n + 4^n + 5^n) = \min\{3, 2n\}$ hay $x = \min\{3, 2n\}$. Ta lại có các trường hợp:

- Nếu $n = 1$ thì $3^n + 4^n + 5^n = 12$ và ta có $x = 2, y = 1$ thỏa mãn.
- Nếu $n = 3$ thì $3^n + 4^n + 5^n = 216$ và ta có $x = 3, y = 3$ thỏa mãn.
- Nếu $n > 3$ thì $x = \min\{3, 2n\} = 3$. Do đó $3^n + 4^n + 5^n = 8 \cdot 3^y$. Tiếp theo, ta có

$$v_3(4^n + 5^n) = v_3(n) + v_3(4 + 5) = v_3(n) + v_3(9) = v_3(n) + 2.$$

Chú ý là nếu $n > 3$ thì $v_3(n) + 2 < n$ nên

$$y = v_3(3^n + 4^n + 5^n) = \min\{v_3(n) + 2, n\} = v_3(n) + 2.$$

Suy ra

$$3^n + 4^n + 5^n = 8 \cdot 3^{v_3(n)+2} \Leftrightarrow 3^n + 4^n + 5^n = 72n.$$

Dễ thấy phương trình này vô nghiệm với $n > 3$.

Do đó, trong trường hợp này, ta có $n = 1, n = 3$ thỏa mãn.

2. Nếu $y = 0$, ta có

$$3^n + 4^n + 5^n = 2^x \cdot 5^z.$$

- Nếu $z = 0$ thì $3^n + 4^n + 5^n = 2^x \leq 4^n$, vô lý.
- Nếu $z > 0$ thì $5|3^n + 4^n$. Xét $n = 4k + r$ với $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Theo định lý Fermat nhỏ thì

$$3^{4k+r} + 4^{4k+r} \equiv (3^4)^k \cdot 3^r + (4^4)^k \cdot 4^r \equiv 3^r + 4^r \pmod 5$$

Thử trực tiếp, ta thấy $r = 2$ thỏa mãn. Do đó, $n = 4k + 2$ với $k \in \mathbb{N}$.

Ta có $3^n + 5^n \equiv 1 + 1 \equiv 2 (\text{mod} 4)$ nên $v_2(3^n + 5^n) = 1$ và $v_2(3^n + 4^n + 5^n) = \min\{1, 2n\} = 1$.

Do đó $x = 1$ hay $3^n + 4^n + 5^n = 2 \cdot 5^z$. Tiếp theo, ta có

$$v_5(3^n + 4^n) = v_5\left(9^{2k+1} + 16^{2k+1}\right) = v_5(2k + 1) + 2.$$

Ta có các trường hợp sau:

- Nếu $n = 2$ thì $3^2 + 4^2 + 5^2 = 50 = 2 \cdot 5^2$ nên $x = 1, z = 2$, thỏa mãn.
- Nếu $n \geq 6$ thì dễ thấy rằng $v_5(2k+1) + 2 < n$ nên

$$z = v_3(3^n + 4^n + 5^n) = \min\{v_5(2k+1) + 2, n\} = v_5(2k+1) + 2.$$

Suy ra

$$3^n + 4^n + 5^n = 2 \cdot 5^{v_5(2k+1)+2} \Leftrightarrow 3^n + 4^n + 5^n = 25n.$$

Dễ thấy phương trình này vô nghiệm với $n \geq 6$. Do đó, trong trường hợp này, ta có $n = 2$ thỏa mãn.

Vậy các giá trị n cần tìm là $n = 1, 2, 3$. □

Nhận xét Định lý LTE được sử dụng vô cùng hiệu quả trong tình huống này. Câu hỏi tương tự: Tìm các số n nguyên dương sao cho

$$2^n + 3^n + 5^n | 30^n.$$

Bài 3. Cho tam giác ABC có E, F lần lượt thuộc các cạnh CA, AB sao cho $EF \parallel BC$. Tiếp tuyến tại E, F của đường tròn (AEF) cắt BC tại M, N. Giả sử BE cắt FN tại K và CF cắt EM tại L.

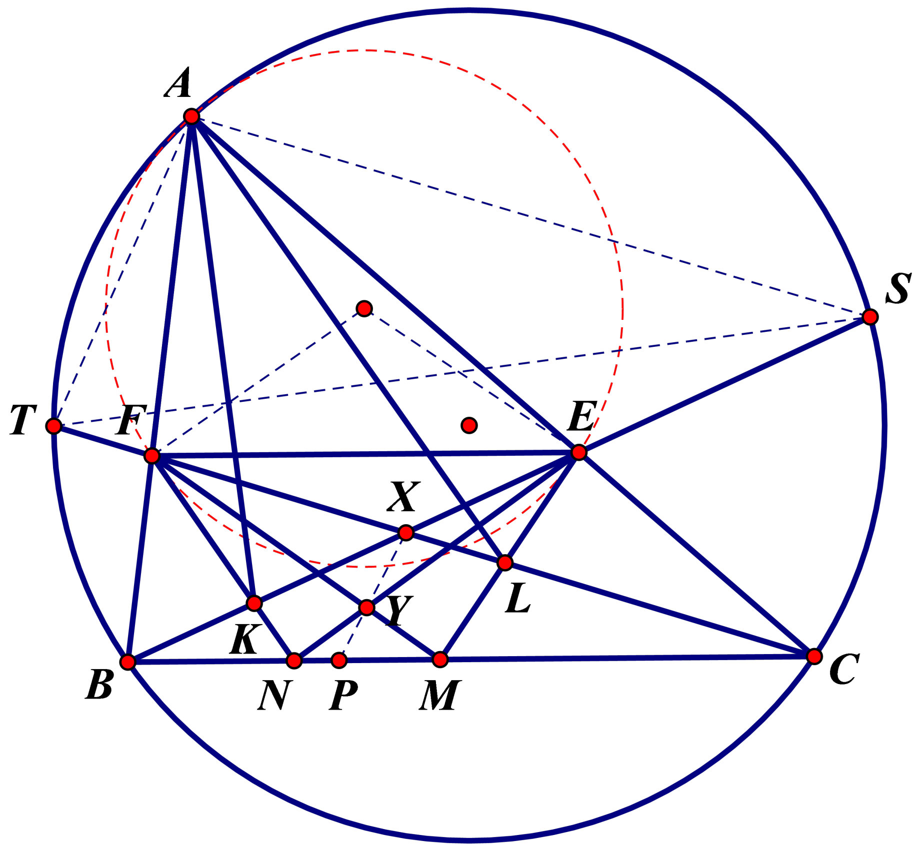
1. Chứng minh rằng $\angle KAB = \angle LAC$.

2. Giả sử BE cắt CF tại X và EN cắt FM tại Y. Chứng minh rằng XY luôn đi qua điểm cố định khi E, F thay đổi.

Lời giải. 1) Giả sử BE, CF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại S, T. Ta có

$$\begin{aligned}\angle BFN &= 180^\circ - \angle NFE - \angle EFA = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC \\ &= \angle ACB = \angle ASB.\end{aligned}$$

Từ đó tứ giác $AFKS$ nội tiếp, ta suy ra $\angle KAB = \angle FSE$. Tương tự, ta cũng có $\angle LAC = \angle FTE$.



Mặt khác, $\angle FEB = \angle EBC = \angle STF$. Từ đó, ta có tứ giác $EFTS$ nội tiếp. Suy ra

$$\angle KAB = \angle FSE = \angle FTE = \angle LAC.$$

2) Từ tính chất góc của tiếp tuyến, ta dễ dàng có

$$\angle BFN = \angle ECM, \angle CEM = \angle FBN.$$

Do đó, các tam giác FBN và CEM đồng dạng. Chú ý $FN = EM$ nên

$$\frac{BN}{CM} = \frac{BN}{ME} \cdot \frac{FN}{CM} = \frac{FB}{EC} \cdot \frac{FB}{EC} = \frac{FB^2}{EC^2} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Gọi P là giao điểm của XY và BC.Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác FMC với X, Y, P thẳng hàng, ta có

$$\frac{PM}{PC} \cdot \frac{XC}{XF} \cdot \frac{YF}{YM} = 1.$$

Tương tự, áp dụng Menelaus cho tam giác ENB với các điểm X, Y, P thẳng hàng, ta có

$$\frac{PN}{PB} \cdot \frac{XB}{XE} \cdot \frac{YE}{YN} = 1.$$

Ta lại chú ý do $EF \parallel BC$ nên $\dfrac{XC}{XF} = \dfrac{XB}{XE}$ và $\dfrac{YF}{YM} = \dfrac{YE}{YN}$.

Từ đó ta thu được $\dfrac{PM}{PC} = \dfrac{PN}{PB}$ hay

$$\frac{PM}{PN} = \frac{PC}{PB} = \frac{PC - PM}{PB - PN} = \frac{CM}{BN} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

không đổi nên P cố định. Vậy đường thẳng XY luôn đi qua điểm P cố định. $\square$

Bài 4. Cho x, y, z là các số thực dương có tổng bằng 1. Tìm GTLN của

$$P = \sqrt{\frac{x^2y}{4x+5y}} + \sqrt{\frac{y^2z}{4y+5z}} + \sqrt{\frac{z^2x}{4z+5x}}.$$

Lời giải. Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì:

$$P^2 = \left(\sum_{cyc} \sqrt{\frac{x^2y}{4x+5y}}\right)^2 \le (xy+yz+zx)\left(\sum_{cyc} \frac{x}{4x+5y}\right).$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} \frac{x}{4x+5y} &= \sum_{cyc} \frac{1}{4}\left(1 - \frac{5y}{4x+5y}\right) = \frac{3}{4} - \frac{5}{4}\sum_{cyc}\frac{y}{4x+5y} \\ &\le \frac{3}{4} - \frac{5}{4} \cdot \frac{(x+y+z)^2}{5(x^2+y^2+z^2)+4(xy+yz+zx)} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{5(x+y+z)^2 - 6(xy+yz+zx)} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{5}{4[5-(xy+yz+zx)]}\end{aligned}$$

Đặt $a = xy + yz + zx$ thì $a > 0$ và $a \le \frac{1}{3}(x+y+z)^2 = \frac{1}{3}$, tức là $a \in \left(0; \frac{1}{3}\right]$.

Khi đó

$$\sum_{cyc} \frac{x}{4x+5y} \le \frac{3}{4} - \frac{5}{4(5-a)} = \frac{10-3a}{4(5-a)}.$$

Do đó

$$P^2 \le \frac{a(10-3a)}{4(5-a)} = f(a).$$

Ta có $f'(a) = \dfrac{3a^2 - 30a + 50}{4(5-a)^2} > 0, \forall a \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right]$ nên đây là hàm đồng biến.

Suy ra $P \le f(a) \le f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{9}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{1}{9}$, đạt được khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$. $\square$

Ngày thi thứ 2

Bài 5. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x-1)f(y^2) = yf(xy) - yf(y)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Gọi $(*)$ là đẳng thức đề bài cho.

Thay $x = 1$ trong $(*)$, ta có
$$f(0)f(y^2) = 0.$$
Nếu $f(0) \neq 0$ thì với mọi $y \in \mathbb{R}$, ta phải có $f(y^2) = 0$. Suy ra

$$f(x-1)\cdot 0 = yf(xy) - yf(y) \Leftrightarrow yf(xy) = yf(y).$$

Thay y bởi $y^2 > 0$ thì $y^2 f(xy^2) = y^2 f(y^2) = 0$ nên $f(xy^2) = 0, \forall x$ và $y \neq 0$. Điều này cho thấy $f(x) = 0, \forall x$. Đây là một hàm số thỏa mãn đề bài.

Nếu $f(0) = 0$ thì thay $x = 0$ vào $(*)$ thì:

$$f(-1)f(y^2) = yf(0) - yf(y) \Leftrightarrow f(-1)f(y^2) = -yf(y).$$

Thay $y = -1$, ta có $f(-1)f(1) = f(-1)$, dẫn đến $f(-1) = 0$ hoặc $f(1) = 1$.

Tuy nhiên, nếu $f(-1) = 0$ thì dẫn đến $yf(y) = 0, \forall y$ nên $f(y) = 0, \forall y \neq 0$, đã xét ở trên. Ta xét $f(1) = 1$, thay $y = 1$ vào $(*)$, ta được $f(x-1) = f(x) - 1$. Do đó

$$-f(y^2) = -yf(y) \Leftrightarrow f(y^2) = yf(y).$$

Từ các kết quả này, ta thay vào (*) thì được:

$$\begin{aligned}
&(f(x)-1)yf(y) = yf(xy) - yf(y)\\
&\Leftrightarrow f(x)f(y) - f(y) = f(xy) - f(y)\\
&\Leftrightarrow f(x)f(y) = f(xy), \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \neq 0
\end{aligned}$$

Thay $x = y$ vào thì ta có $[f(x)]^2 = f(x^2)$, mà $f(x^2) = xf(x)$ nên

$$[f(x)]^2 = xf(x) \Leftrightarrow f(x) = x.$$

Vậy các hàm số cần tìm là $f(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. □

Bài 6. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $\begin{cases} a_0 = a_1 = 5, \\ a_{n+1} = 7a_n - a_{n-1} + 44 \end{cases}, n \geq 1$. Chứng minh rằng với mọi n thì a_n là tổng của 2 số chính phương.

Lời giải. Ta tính một số số hạng của dãy đã cho:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 5 = (-2)^2 + (-1)^2\\
a_1 &= 5 = 1^2 + 2^2\\
a_2 &= 74 = 5^2 + 7^2\\
a_3 &= 409 = 14^2 + 19^2\\
a_4 &= 4869 = 37^2 + 50^2
\end{aligned}$$

Từ đây, ta dự đoán rằng $a_n = u_n^2 + v_n^2$ với

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = -2, u_2 = 1, \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

và

$$(v_n) : \begin{cases} v_1 = -1, v_2 = 2, \\ v_{n+2} = 3v_{n+1} - v_n \end{cases}$$

với $n \geq 0$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng

$$a_n = u_n^2 + v_n^2$$

với mọi $n \geq 0$. $(*)$ Thật vậy,

Với $n = 0, n = 1$ thì khẳng định $(*)$ đúng.

Giả sử $(*)$ đúng tới n, ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 &= (3u_n - u_{n-1})^2 + (3u_n - u_{n-1})^2 \\ &= 7(u_n^2 + v_n^2) - (u_{n-1}^2 + v_{n-1}^2) + 2(u_n^2 + v_n^2) + \\ &+ (u_{n-1}^2 + v_{n-1}^2) - 6(u_n u_{n-1} + v_n v_{n-1}) \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} u_n^2 + u_{n-1}^2 - 3u_n u_{n-1} &= u_n(3u_{n-1} - u_{n-2}) + u_{n-1}^2 - 3u_n u_{n-1} \\ &= -u_n u_{n-2} + u_{n-1}^2 \\ &= -(3u_{n-1} - u_{n-2})u_{n-2} + u_{n-1}^2 \\ &= u_{n-1}^2 + u_{n-2}^2 - 3u_{n-1}u_{n-2} \end{aligned}$$

Như thế, suy ra

$$u_n^2 + u_{n-1}^2 - 3u_n u_{n-1} = u_1^2 + u_0^2 - 3u_1 u_0 = 11.$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$v_n^2 + v_{n-1}^2 - 3v_n v_{n-1} = v_1^2 + v_0^2 - 3v_1 v_0 = 11.$$

Do đó

$$2(u_n^2 + v_n^2) + (u_{n-1}^2 + v_{n-1}^2) - 6(u_n u_{n-1} + v_n v_{n-1}) = 44$$

hay

$$u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 = 7(u_n^2 + v_n^2) - (u_{n-1}^2 + v_{n-1}^2) + 44 = 7a_n - a_{n-1} + 44 = a_{n+1}.$$

Suy ra $(*)$ đúng với $n + 1$ và theo nguyên lý quy nạp thì $(*)$ được chứng minh.

Vậy ta có $a_n = u_n^2 + v_n^2$, tức là với mọi n thì a_n là tổng của 2 số chính phương. Đây chính là điều phải chứng minh. □

Nhận xét Đoạn quy nạp ở phía sau không khó, chủ yếu là có thể đoán được công thức của các dãy $(u_n), (v_n)$. Ta chú ý các công thức quan trọng của dãy sai phân tuyến tính hay được sử dụng:

Cho dãy số (u_n) xác định theo công thức $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ với $n \geq 1$ thì với mọi n, ta luôn có

$$u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = (-b)^{n-1}(u_2^2 - u_1 u_3).$$

Đặc biệt, khi $b = -1$, ta thấy đại lượng $u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2}$ không đổi.

Bài 7. Cho tam giác ABC và đường tròn (K) đi qua B, C các các đoạn AC, AB lần lượt tại E, F. Gọi M, N là các điểm đối xứng với B, C qua E, F theo thứ tự đó. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (AMN) cắt MN, BC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng A là trung điểm PQ.

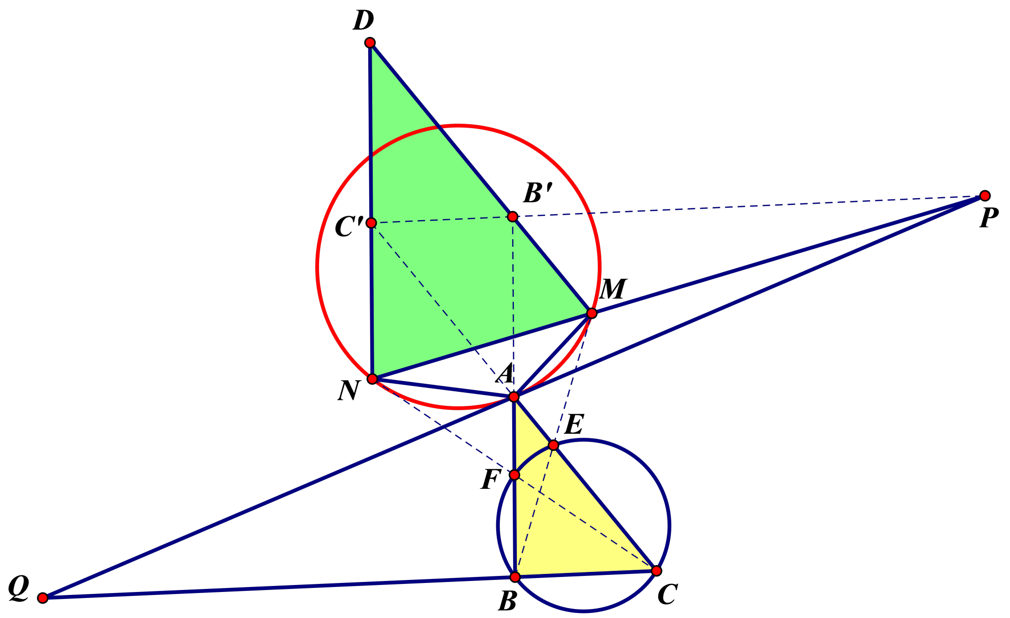
Lời giải. Gọi B', C' lần lượt là các điểm đối xứng với B, C qua A. Giả sử $B'M, C'N$ cắt nhau tại D. Ta sẽ chứng minh rằng B', C', P thẳng hàng.

Ta có $\dfrac{AB'}{AC'} = \dfrac{AB}{AC}$, mà B, E, C, F cùng thuộc một đường tròn nên

$$AB \cdot AF = AC \cdot AE \text{ hay } \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF}.$$

Chú ý rằng AE là đường trung bình của tam giác $BB'M$ nên $B'M = 2AE$.

Tương tự $C'N = 2AF$. Do đó $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{B'M}{C'N}$. Kết hợp các điều trên lại, ta được $\dfrac{AB'}{AC'} = \dfrac{B'M}{C'N}$.



Ta lại có $\angle AB'M = \angle BAC = \angle AC'N$ nên $\Delta AB'M \sim \Delta AC'N$. Do đó $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{B'M}{C'N}$.

Mặt khác dễ thấy rằng tứ giác $AB'DC'$ là hình bình hành nên

$$\frac{B'D}{C'D} = \frac{AC'}{AB'} = \frac{AN}{AM}.$$

Vì AP là tiếp tuyến của (AMN) nên $\Delta AMP \sim \Delta NAP$ và do đó

$$\frac{PM}{PN} = \frac{S_{PAM}}{S_{PAN}} = \left(\frac{AM}{AN}\right)^2.$$

Suy ra

$$\frac{PM}{PN} \cdot \frac{B'D}{B'M} \cdot \frac{C'N}{C'D} = \left(\frac{AM}{AN}\right)^2 \cdot \frac{AN}{AM} \cdot \frac{AN}{AM} = 1$$

nên theo định lý Menelaus đảo, ta có B', C', P thẳng hàng.

Hơn thế nữa, $BCB'C'$ là hình hình hành nên $BC \parallel B'C'$. Theo định lý Thales thì

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AB'}{AB} = 1 \text{ nên } AP = AQ.$$

Ta có đpcm. $\square$

Nhận xét. Bài toán này có liên quan đến bài toán khá quen thuộc sau:

Cho tam giác ABC có B', C' là các điểm đối xứng với B, C qua AC, AB theo thứ tự. Khi đó, A nằm trên đường nối tâm của đường tròn Euler của tam giác ABC và đường tròn ngoại tiếp tam giác $AB'C'$.

Khi đối chiếu trong bài toán này (dạng tổng quát), tính chất sau vẫn đúng: Gọi H, K là trung điểm AB, AC và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EFHK$ thì AI đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

Bài 8. Cho bảng ô vuông $n \times n$ với $n \in \mathbb{N}*$ và số nguyên $k \leq n$. Điền vào các ô trong bảng $n \times n$ các số thực thuộc đoạn $[-1; 1]$ sao cho tổng các số trên mỗi bảng con $k \times k$ đều bằng 0. Tìm giá trị lớn nhất của tổng tất cả các số trên bảng.

Lời giải. Đặt $n = ak + r$ với $a \in \mathbb{Z}^+$ và $0 \leq r < k$. Ta sẽ chứng minh 2 nhận xét sau:

Nhận xét 1. Nếu gọi T, S lần lượt là tổng các số được điền vào bảng ô vuông có kích thước $r \times r$ và $(k - r) \times (k - r)$ nào đó thì

$$|T| \leq t = \min\left\{r^2, k^2 - r^2\right\} \text{ và } |S| \leq s = \min\left\{(k - r)^2, k^2 - (k - r)^2\right\}.$$

Rõ ràng mỗi bảng ô vuông kích thước $r \times r$ đều bị chứa trong một bảng ô vuông kích thước $k \times k$ nào đó mà tổng các số bằng 0. Gọi T' là tổng các số còn lại trên bảng $k \times k$ sau khi loại bảng $r \times r$ chứa trong đó. Ta có

$$T + T' = 0 \Rightarrow |T| = \left|T'\right|.$$

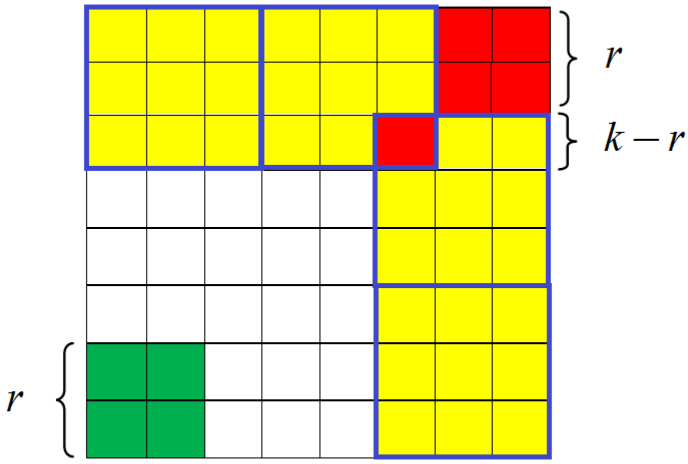
Số lượng các ô trên bảng $r \times r$ là r^2 nên $|T| \leq r^2$ và số lượng các ô còn lại của bảng $k \times k$ là $k^2 - r^2$ nên $\left|T'\right| \leq k^2 - r^2$. Do đó:

$$|T| \leq t = \min\left\{r^2, k^2 - r^2\right\}$$

Hoàn toàn tương tự với bảng $(k - r) \times (k - r)$.

Nhận xét 2. Nếu kích thước của bảng tăng lên k đơn vị thì tổng các số trên bảng sẽ tăng không quá $t + s$.

Xét hình minh họa sau (với $k = 3, r = 2$) , trong đó từ một bảng ban đầu, ta thêm vào phía trên và bên phải tương ứng k hàng và k cột:



Để tính tổng các số được điền vào phần tăng thêm, bao gồm phần ngang và phần dọc (giao nhau ở một bảng $k \times k$ tại góc). Ta thấy phần nằm ngang có thể chia thành một số bảng vuông $k \times k$ không chồng lên nhau và dư lại một hình chữ nhật kích thước $k \times (k - r)$ ở cuối. Tương tự, phần nằm dọc có thể chia thành một số bảng vuông $k \times k$ không chồng lên nhau và dư lại một hình chữ nhật kích thước $(k - r) \times k$.

Do đó, để tính tổng các số trên phần được thêm vào, trước hết, ta tính tổng các số trên các hình chữ nhật không chồng lên nhau (theo giả thiết thì tổng đó bằng 0). Phần hình vuông kích thước $(k - r) \times (k - r)$ có màu đỏ ở dưới là giao của 2 hình vuông cuối dãy ngang và đầu dãy dọc, được tính 2 lần nên cần phải trừ ra. Cuối cùng, ta cộng các số trên bảng vuông ở góc có kích thước $r \times r$ còn lại.

Nói tóm lại, nếu đặt T là tổng các số trên bảng vuông $k \times k$ ở góc trên bên phải và S là tổng các số trên phần chung là bảng $(k - r) \times (k - r)$ thì tổng tăng thêm là: $T - S$.

Khi đó, theo nhận xét 1 thì $T - S \le t + s$.

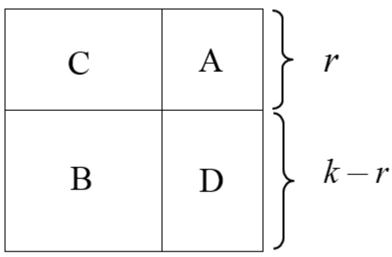
Nhận xét được chứng minh.

Trở lại bài toán,

Ta thấy trong phần màu xanh $r \times r$ ban đầu có tổng các số không vượt quá t nên tổng các số của bảng sau a lần tăng kích thước (từ $r \times r$ lên $n \times n$ với $n = ak + r$) thì tổng sẽ không vượt quá $t + a(t + s)$.

Đến đây, ta sẽ chỉ ra một cách xây dựng bảng thỏa mãn.

Xét bảng ô vuông $k \times k$ ở góc trên bên phải của bảng $n \times n$, ta điền như sau:



- Điền vào phần A là hình vuông $r \times r$ sao cho tổng các số trên đó là t (có thể điền t số là 1 và phần còn lại là 0).

- Điền vào phần B là hình vuông $(k-r)\times(k-r)$ sao cho tổng các số trên đó là $-s$ (có thể điền s số là -1 và phần còn lại là 0).

- Điền vào phần C, D tùy ý sao cho tổng của chúng bằng $s-t$. Rõ ràng tồn tại cách điền như vậy do giới hạn giá trị của t, s.

  Đến đây, ta thực hiện điền số vào các bảng ô vuông kề với nó một cách tuần hoàn theo chu kỳ k. Nghĩa là các số điền trên ô (a, b) sẽ giống số điền trên các ô

$$(a+k, b), (a, b+k), (a-k, b), (a, b-k).$$

Dễ thấy rằng khi đó, tất cả các hình vuông kích thước $k\times k$ đều có tổng bằng 0 và hình vuông $r\times r$ ở góc dưới bên trái giống với hình vuông $r\times r$ ở góc trên bên phải, tức là tổng bằng t.

Do đó, cách điền này cho ta bảng có tổng đúng bằng

$$t+a(t+s).$$

Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là $t+a(t+s)$ với t, s, a được xác định như trên. □

2.2. Lời giải đề thi PTNK TP.HCM

Ngày thi thứ 1

Bài 1. Cho tập hợp $A=\{n\in\mathbb{N}|1\le n\le 2015, (n, 2016)=1\}$. Hỏi có bao nhiêu số nguyên $a\in A$ sao cho tồn tại số nguyên b mà $a+2016b$ là số chính phương?

Lời giải. Cho n là số nguyên dương lớn hơn 1, ta quy ước gọi một số nguyên dương a được gọi là thặng dư chính phương theo modulo n nếu$(a, n)=1$ và tồn tại số nguyên x sao cho $a\equiv x^2 (\text{mod} n)$. Trong bài này, để đơn giản, ta quy ước xét các thặng dư chính phương nhỏ hơn n.

Đặt $s(n)$ là số các số nhỏ hơn n và là thặng dư chính phương theo modulo n. Ta sẽ chứng minh hai bổ đề dưới đây:

Bổ đề 1: Cho p là số nguyên tố và k là số nguyên dương. Khi đó:

1. Nếu $p=2$ thì $s(2^k)=2^{\max(k-3,0)}$.
2. Nếu $p>2$ thì $s(p^k)=\dfrac{p^k-p^{k-1}}{2}$.

Bổ đề 2: $s(n)$ là hàm nhân tính.

Thật vậy,

Trước hết, ta biết rằng $s(p)=\dfrac{p-1}{2}$ với p là số nguyên tố lẻ. Ta sẽ tính $s(p^k)$ với $k\in\mathbb{Z}^+$.

Xét một thặng dư chính phương a của p, khi đó tồn tại x sao cho

$$a\equiv x^2 (\text{mod} p).$$

Đặt $a = x^2 + pq$ thì hiển nhiên

$$a \equiv x^2 + pq (\bmod p^k) \Leftrightarrow a - pq \equiv x^2 (\bmod p^k)$$

và khi đó, ta có p^{k-1} cách chọn q để các số $a - pq$ là các thặng dư chính phương $\bmod p^k$.

Suy ra

$$s(p^k) = p^{k-1} s(p) = \frac{p^k - p^{k-1}}{2}.$$

Xét số nguyên tố $p = 2$, với $k = 1, 2, 3$, dễ dàng kiểm tra được $s(2^k) = 1$.

Ta xét $k \geq 4$, tương tự trên, ở bước chọn q, ta chỉ có 2 cách nên $s(2^k) = 2s(2^{k-1})$. Từ đó bằng quy nạp, ta có được

$$s(2^k) = 2^{k-3}, k \geq 4.$$

Tiếp theo, xét hai số a, b nguyên dương và $(a, b) = 1$. Gọi A là tập hợp các thặng dư chính phương theo modulo ab và B là tập hợp các số là thặng dư chính phương chung của a, b.

Nếu $x \in A$ thì tồn tại y sao cho $x \equiv y^2 (\bmod ab)$. Rõ ràng khi đó,

$$x \equiv y^2 \pmod a, x \equiv y^2 \pmod b$$

(chú ý rằng nếu $x > a$, ta có thể chọn x' sao cho $x' < a$ và $x \equiv x' \pmod a$; tương tự với b). Do đó, $x \in B$, tức là $x \in A \Rightarrow x \in B$ nên $|A| \leq |B|$.

Tiếp theo, xét $x \in B$. Khi đó tồn tại r, s sao cho $x \equiv r^2 \pmod a$, $x \equiv s^2 \pmod b$. Theo định lý thặng dư Trung Hoa, tồn tại số nguyên z sao cho

$$z \equiv r \pmod a, z \equiv s \pmod b.$$

Khi đó

$$x \equiv z^2 \pmod a, x \equiv z^2 \pmod b$$

nên

$$x - z^2 \vdots ab \text{ hay } x \equiv z^2 (\bmod ab).$$

Do đó: $x \in A$, tức là $x \in B \Rightarrow x \in A$ nên $|A| \geq |B|$.

Từ đây ta có

$$|A| = |B| \text{ hay } s(a)s(b) = s(ab).$$

Vậy $s(n)$ là hàm nhân tính.

Các bổ đề đều được chứng minh.

Trở lại bài toán, ta thấy rằng

$$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Rõ ràng bài toán yêu cầu đếm số thặng dư chính phương theo modulo 2016. Theo bổ đề 2 thì

$$s(2016) = s(2^5)s(3^2)s(7).$$

Theo bổ đề 1 thì

$$s(2^5) = 2^2 = 4, s(3^2) = \frac{3^2 - 3}{2} = 3, s(7) = \frac{7 - 1}{2} = 3.$$

Do đó, số các số a cần tìm là $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$. $\square$

Nhận xét. Bài toán này hoàn toàn có thể giải bằng cách xét các số dư một cách tương đối "thủ công", không sử dụng các kết quả về thặng dư chính phương hay thậm chí là định lý thặng dư Trung Hoa.

Bài 2. Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$a^2 \leq 1, a^2 + b^2 \leq 5, a^2 + b^2 + c^2 \leq 14, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 30.$$

1. Chứng minh rằng $a + b + c + d \leq 10$.
2. Chứng minh rằng $ad + bc \leq 10$.

Lời giải. 1) Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$ nên ta có các đánh giá sau

$$\begin{cases} a^2 + 1 \geq 2a \\ b^2 + 4 \geq 4b \\ c^2 + 9 \geq 6c \\ d^2 + 16 \geq 8d \end{cases}$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned} &24(a + b + c + d) \leq 3(d^2 + 16) + 4(c^2 + 9) + 6(b^2 + 4) + 12(a^2 + 1) \\ &= 3d^2 + 4c^2 + 6b^2 + 12a^2 + 120 \\ &= 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + (a^2 + b^2 + c^2) + 2(a^2 + b^2) + 6a^2 + 120 \\ &\leq 3 \cdot 30 + 14 + 2 \cdot 5 + 6 \cdot 1 + 120 = 240 \end{aligned}$$

Suy ra $a + b + c + d \leq 10$.

2) Ta có:

$$16a^2 + d^2 \geq 8ad \text{ và } 9b^2 + 4c^2 \geq 12bc.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} &24(ad + bc) \leq 3(16a^2 + d^2) + 2(9b^2 + 4c^2) \\ &= 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 5(a^2 + b^2 + c^2) + 10(a^2 + b^2) + 30a^2 \\ &\leq 3 \cdot 30 + 5 \cdot 14 + 10 \cdot 5 + 30 \cdot 1 = 240 \end{aligned}$$

Suy ra $ad + bc \leq 10$. □

Bài 3. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x - 2f(y)) = 5f(x) - 4x - 2f(y)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. (*)

Lời giải. Trong $(*)$, thay $x = y = 0$, ta có

$$f(-2f(0)) = 3f(0).$$

Đặt $f(0) = a$ thì $f(-2a) = 3a$. Trong $(*)$, thay $x = 0$ và $y = -2a$, ta có

$$f(-2f(-2a)) = 5a - 2f(-2a) \Leftrightarrow f(-6a) = -a.$$

Trong $(*)$, thay $x = -2a$, $y = -6a$, ta có

$$\begin{aligned}
&f(-2a - 2f(-6a)) = 5f(-2a) - 4x - 2f(-6a)\\
&\Leftrightarrow f(0) = 15a + 8a + 2a\\
&\Leftrightarrow a = 25a\\
&\Leftrightarrow a = 0
\end{aligned}$$

Do đó $f(0) = 0$.

Trong $(*)$, thay $y = 0$, ta có

$$f(x) = 5f(x) - 4x \Leftrightarrow f(x) = x.$$

Thử lại ta thấy thỏa.

Vậy hàm số cần tìm chính là

$$f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

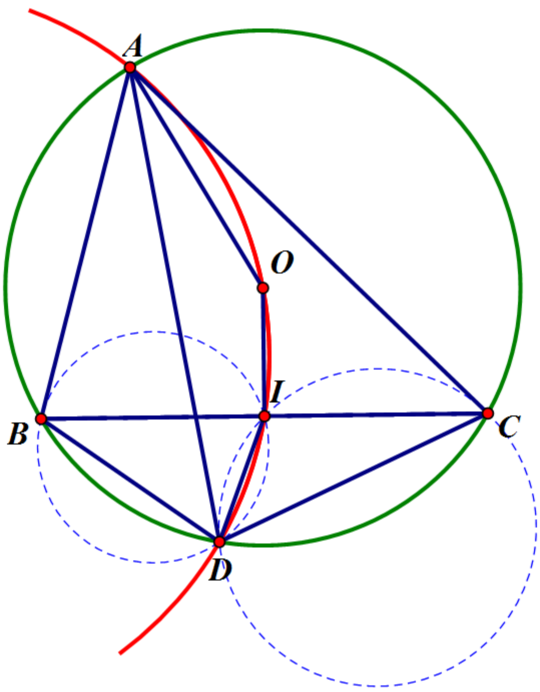
□

Bài 4. Cho đường tròn k và các điểm B, C thuộc đường tròn, không phải là đường kính; I là trung điểm BC. Điểm A di động trên cung lớn BC của k. Gọi i_1 là đường tròn qua I và tiếp xúc với AB tại B; i_2 là đường tròn qua I và tiếp xúc với AC tại C. Các đường tròn i_1, i_2 cắt nhau tại D (khác I).

1. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AID luôn đi qua một điểm cố định.

2. Gọi K là trung điểm AD, E là tâm đường tròn qua K và tiếp xúc với AB tại A, F là tâm đường tròn qua K và tiếp xúc với AC tại A. Chứng minh rằng góc EAF có số đo không đổi.

Lời giải. 1) Gọi O là tâm của đường tròn k. Không mất tính tổng quát, giả sử tia AD nằm giữa hai tia AO, AB, các trường hợp còn lại tương tự.



Ta có:

$$\angle IDB = \angle ABC, \angle IDC = \angle ACB$$

nên

$$\angle BAC + \angle BDC = \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ.$$

Do đó, tứ giác $ABDC$ nội tiếp hay $D \in (O)$. Ta thấy

$$\begin{aligned}
&\angle DAO + \angle OID \\
&= \angle BAC - (\angle DAB + \angle OAC) + 360^\circ - (90^\circ + \angle DIC) \\
&= \angle BAC - (\angle ICD + 90^\circ - \angle ABC) + 270^\circ - \angle DIC \\
&= \angle BAC + \angle ABC - (\angle ICD + \angle DIC) + 180^\circ \\
&= (180^\circ - \angle ACB) - (180^\circ - \angle IDC) + 180^\circ \\
&= \angle IDC - \angle ACB + 180^\circ = 180^\circ
\end{aligned}$$

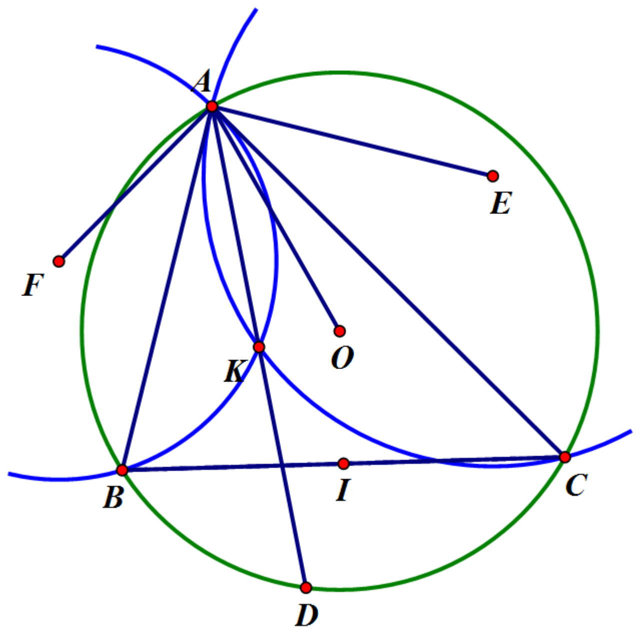
Do đó, $AOID$ nội tiếp hay đường tròn (AID) đi qua O cố định.

2) Ta có:

$$\angle EAC = 90^\circ - \angle BAC, \angle FAB = 90^\circ - \angle BAC$$

nên

$$\angle EAF = 180^\circ - 2\angle BAC + \angle BAC = 180^\circ - \angle BAC.$$



Do đó, góc $\angle EAF$ có số đo không đổi. □

Nhận xét. Lời giải của hai ý a và b của bài này đều chỉ là thuần túy biến đổi góc. Tuy nhiên, ở ý b, ta thấy bài toán quá hiển nhiên. Có lẽ tác giả bài toán muốn chứng minh nhiều kết quả trung gian hơn để có được ý này, chẳng hạn:

- (E) đi qua C và (F) đi qua B.
- E, F, K, O cùng thuộc một đường tròn.

Ngày thi thứ 2

Bài 5. Dãy số (x_n) được xác định bởi $x_n = \dfrac{1}{n\cos\frac{1}{n}}$ với mọi $n \geq 1$. Tính giới hạn sau

$$\lim \frac{x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{2n-1}}{x_2 + x_4 + x_6 + s + x_{2n}}.$$

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau:

Giá trị của biểu thức

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

tiến tới vô cực khi $n \to +\infty$. Thật vậy,

Xét hàm số $f(x) = \ln(1+x) - x$ với $x > 0$. Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 < 0$$

nên đây là hàm nghịch biến, suy ra $f(x) < f(0) = 0$ hay $\ln(1+x) < x, \forall x > 0$. Thay x bởi $\dfrac{1}{n}$, ta được

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \ln(1+n) - \ln n.$$

Do đó,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + + \frac{1}{n} > \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1).$$

Vì $\ln(n+1) \to +\infty$ khi $n \to +\infty$ nên

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \to +\infty.$$

Trở lại bài toán, đặt

$$y_n = \frac{x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{2n-1}}{x_2 + x_4 + x_6 + \cdots + x_{2n}}$$

với $n \geq 1$. Ta thấy vì $\dfrac{1}{n} \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos\dfrac{1}{n} > 0$, suy ra

$$x_n = \frac{1}{n\cos\frac{1}{n}} > 0, n \geq 1.$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t}{\cos t}$ với $t \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $f'(t) = \dfrac{\cos t + t\sin t}{\cos^2 t} > 0$ nên đây là hàm đồng biến. Chú ý rằng $x_n = f\left(\dfrac{1}{n}\right)$, mà $\dfrac{1}{n}$ là dãy giảm nên x_n là dãy giảm. Suy ra $x_1 > x_2, x_3 > x_4, \ldots, x_{2n-1} > x_{2n}$ nên $y_n > 1$. Ngoài ra, ta cũng có $x_3 < x_2, x_5 < x_4, \ldots, x_{2n-1} < x_{2n-2}$ nên

$$y_n < \frac{x_1 + (x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n-2})}{x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n}} =$$
$$1 - \frac{x_1 - x_{2n}}{x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n}} < 1 - \frac{x_1}{x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n}}$$

Dễ thấy rằng

$$x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i \cos \frac{1}{2i}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Theo bổ đề trên thì $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ tiến tới vô cực nên

$$\lim(x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n}) = +\infty.$$

Do đó

$$\lim\left(1 - \frac{x_1}{x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n}}\right) = 1 - 0 = 1.$$

Theo nguyên lý kẹp, ta có $\lim x_n = 1$. □

Nhận xét. Ta có thể giải bài toán nhẹ nhàng hơn như sau:

Đặt $a_n = x_1 + x_3 + \cdots + x_{2n-1}$ và $b_n = x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n}$ với $n \geq 1$.

Do đó, các dãy a_n, b_n tăng thực sự. Ngoài ra,

$$\lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim \frac{x_{2n-1}}{x_{2n}} = \lim\left(\frac{2n}{2n-1}\left(\cos\frac{1}{2n} : \cos\frac{1}{2n-1}\right)\right) = 1.$$

Theo định lý Stolz cho hai dãy tăng $(a_n), (b_n)$ thỏa mãn điều kiện đã nêu thì ta có $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$.
Vậy giới hạn cần tìm là 1.

Bài 6. Tìm các giá trị của b sao cho tồn tại a để hệ phương trình sau đây có nghiệm (x, y)

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = b \\ y = x^2 + (2a+1)x + a^2 \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $X = x - 1, Y = y + 1$, thay vào, ta có

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = b \\ Y - 1 = (X+1)^2 + (2a+1)(X+1) + a^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + Y^2 = b \\ Y = X^2 + (2a+3)X + a^2 + 2a + 3 \end{cases}$$

Ta đưa về tìm điều kiện của b để tồn tại a mà hệ trên có nghiệm (X, Y). Do

$$Y - (X+2) = X^2 + 2(a+1)X + (a+1)^2 = (X + a + 1)^2 \geq 0$$

nên $Y \geq X + 2$. Suy ra $Y - X \geq 2 > 0$, tức là $(X - Y)^2 \geq 4$. Ta có

$$b = X^2 + Y^2 = \frac{(X-Y)^2 + (X+Y)^2}{2} \geq \frac{(Y-X)^2}{2} \geq 2.$$

Mặt khác, với $b \geq 2$, nếu chọn $X = -(a+1)$ thì có $Y = X + 2 = 1 - a$. Khi đó, ta có

$$X^2 + Y^2 = (a+1)^2 + (a-1)^2 = 2(a^2+1) = b.$$

Như thế, với a thỏa mãn $2(a^2+1) = b$ thì hệ có nghiệm là

$$(X, Y) = (-a-1, 1-a).$$

Dễ dàng thấy rằng do $b \geq 2$ nên luôn tồn tại a như thế.

Vậy các giá trị cần tìm của b là $b \geq 2$. □

Nhận xét. Bài toán này có thể giải bằng cách dùng phương pháp đồ thị.

Thật vậy,

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = b$$

với $b > 0$ chính là đường tròn $I(1; -1)$ và bán kính $\sqrt{b}$, còn

$$y = x^2 + (2a+1)x + a^2$$

là đường parabol.

Ta chỉ cần tìm điều kiện của b để 2 đường cong này có điểm chung là xong.

Bài 7. Cho n là số nguyên dương, $n \geq 2$ và $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Gọi $A_1, A_2, \ldots, A_m$ và $B_1, B_2, \ldots, B_m$ là hai dãy các tập con khác rỗng của X thỏa mãn điều kiện: Với mỗi $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $A_i \cap B_j =$ nếu và chỉ nếu $i = j$.

1. Chứng minh rằng với mỗi hoán vị $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ của X, có không quá 1 cặp (A_i, B_i) với $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ sao cho nếu $x_k \in A_i$ và $x_l \in B_i$ thì $k < l$.

2. Gọi a_i, b_i lần lượt là số phần tử của các tập hợp A_i, B_i với $i = 1, 2, \ldots, m$. Chứng minh rằng
$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{C_{a_i+b_i}^{a_i}} \leq 1.$$

Lời giải. 1) Giả sử ngược lại, tồn tại 2 cặp (A_i, B_i) và (A_j, B_j) thỏa mãn điều kiện đã nêu.

Vì $i \neq j$ nên theo giả thiết,

$$\left|A_i \cap B_j\right| \geq 1, \left|A_j \cap B_i\right| \geq 1.$$

Đặt $x_r \in A_i \cap B_j, x_s \in A_j \cap B_i$ với $1 \leq r, s \leq n$ thì:

- Do $x_r \in B_j$ nên với mọi $x_k \in A_j$, ta đều có $k < r$.
- Do $x_r \in A_i$ nên với mọi $x_k \in B_i$, ta đều có $k > r$.

Từ đây suy ra

$$A_j \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}\}, B_i \subset \{x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n\}.$$

Điều này cho thấy $A_j \cap B_i =$, mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy tồn tại không quá 1 cặp (A_i, B_i) thỏa mãn điều kiện đã cho.

2) Gọi T là tập hợp các cách chọn hai dãy

$$A_1, A_2, \dots, A_m \text{ và } B_1, B_2, \dots, B_m$$

thỏa mãn điều kiện là: với mỗi $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $A_i \cap B_j =$ nếu và chỉ nếu $i = j$.

Gọi $T_i \subset T$ là các cách chọn sao cho sao cho cặp (A_i, B_i) thỏa mãn điều kiện là: cặp (A_i, B_i) với $i = 1, 2, 3, \dots, n$ sao cho nếu $x_k \in A_i$ và $x_l \in B_i$ thì $x_k < x_l$ (ở đây ta xét thứ tự ban đầu của các phần tử của X). (*)

Theo câu 1) thì $T_i \cap T_j =$ với $i \neq j$ nên ta có

$$|T_1| + |T_2| + \dots + |T_m| = |T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_m| \leq T.$$

Tiếp theo, với $1 \leq i \leq m$, xét một tập hợp $S \subset X$ và $|S| = a_i + b_i$. Khi đó, tương ứng với S, có đúng 1 cách chọn (A_i, B_i) thỏa mãn tính chất $(*)$ – tức là A_i sẽ nhận a_i số nhỏ nhất trong tập S, B_i là lấy phần còn lại.

Trong khi đó, nếu không có điều kiện $(*)$, ta có thể chọn tùy ý $C_{a_i+b_i}^{a_i}$ phần tử trong S và A và số còn lại cho B.

Do đó,

$$|T_i| = \frac{|T|}{C_{a_i+b_i}^{a_i}}$$

với $i = 1, 2, ..., m$. Từ đây suy ra

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{|T|}{C_{a_i+b_i}^{a_i}} \leq |T| \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{C_{a_i+b_i}^{a_i}} \leq 1$$

Ta có đpcm. □

Nhận xét. Bài này cũng có thể giải bằng cách dùng xác suất với chú ý rằng:

Nếu gọi U_i là biến cố cặp (A_i, B_i) thỏa mãn tính chất (*). Ta cũng có

$$P(U_i) = \frac{1}{C_{a_i+b_i}^{a_i}}$$

và sau đó cũng lập luận tương tự trên, chú ý rằng xác suất luôn không vượt quá 1.

Bài 8. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Đường tròn tâm I đi qua B, C lần lượt cắt các tia BA, CA tại E, F.

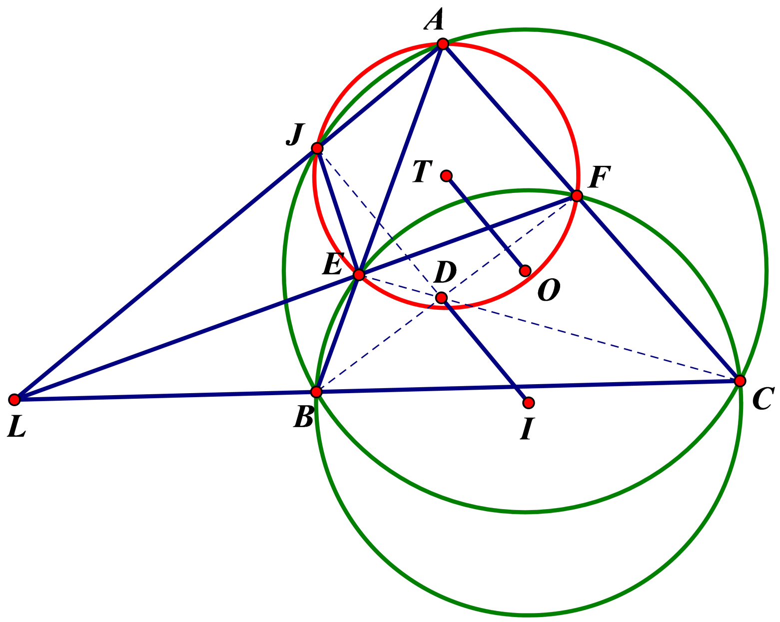
1. Giả sử các tia BF, CE cắt nhau tại D và T là tâm đường tròn (AEF). Chứng minh rằng $OT \parallel ID$.

2. Trên BF, CE lần lượt lấy các điểm G, H sao cho $AG \perp CE$, $AH \perp BF$. Các đường tròn (ABF), (ACE) cắt BC tại M, N (khác B, C) và cắt EF tại P, Q (khác E, F). Gọi K là giao điểm của MP, NQ. Chứng minh rằng DK vuông góc với GH.

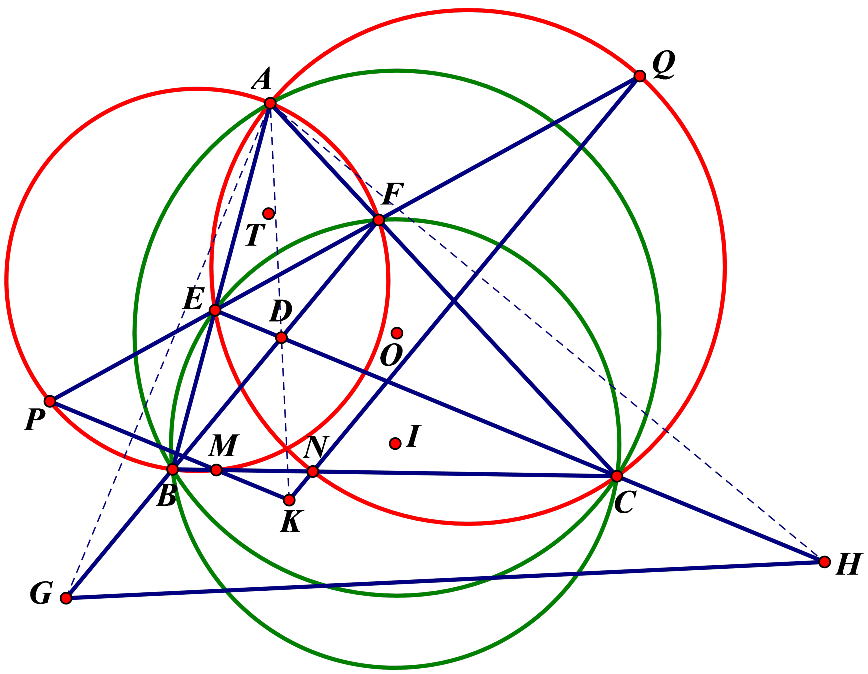
Lời giải. 1) Giả sử EF cắt BC ở L và $(T), (O)$ cắt nhau tại J khác A. Suy ra AJ chính là trục đẳng phương của $(T), (O)$. Do đó $OT \perp AJ$.

Khi đó, $LB \cdot LC = LE \cdot LF$ nên L thuộc trục đẳng phương của $(T), (O)$. Suy ra A, J, L thẳng hàng. Theo định lý Brocard cho tứ giác $BEFC$ nội tiếp trong đường tròn (I) thì I chính là trực tâm của tam giác ADL.

Vì thế nên $ID \perp AL$, mà $OT \perp AJ$ nên $ID \parallel OT$.



2) Dễ dàng thấy rằng D là trực tâm của tam giác AGH nên $AD \perp GH$. Ta sẽ chứng minh rằng A, D, K thẳng hàng. Ta có $DB \cdot DF = DE \cdot DC$ nên D có cùng phương tích tới 2 đường tròn $(ABF), (AEC)$. Suy ra AD chính là trục đẳng phương của 2 đường tròn này.



Bằng biến đổi các góc nội tiếp, ta thấy rằng

$$\angle MPQ = \angle MBF = \angle CEF = \angle CNQ.$$

Suy ra $MNPQ$ nội tiếp, dẫn đến $KM \cdot KP = KN \cdot KQ$, tức là K cũng có cùng phương tích tới 2 đường tròn $(ABF), (AEC)$.

Từ đó suy ra A, D, K thẳng hàng. Do đó, DK vuông góc với GH. □

Nhận xét. Điểm J trong câu a chính là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $BEFCAL$.

3. Tài liệu tham khảo

Tác giả lời giải các bài toán:

1. Đề PTNK TPHCM:
   - Bài 1, 2, 4, 6, 7: Lê Phúc Lữ (Ban biên tập).
   - Bài 3, 8: Nguyễn Văn Thế, chuyên Hà Tĩnh.
   - Bài 5: thành viên Titika (diễn đàn Mathscope.org) và Nguyễn Duy Tuấn, chuyên Hà Tĩnh.
2. Đề KHTN Hà Nội:
   - Bài 1, 5, 6: Lê Phúc Lữ (Ban biên tập).
   - Bài 2: thành viên MiuraHaruma (diễn đàn VMF).
   - Bài 3: Trần Quang Hùng (Ban biên tập).
   - Bài 4: Võ Quốc Bá Cẩn (Ban biên tập).
   - Bài 7: Luis González (diễn đàn AoPS).
   - Bài 8: Hoàng Đỗ Kiên (ĐH Khoa học công nghệ Hongkong).

CÁC VẤN ĐỀ CỔ ĐIỂN VÀ HIỆN ĐẠI

Trần Nam Dũng - Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG TP.HCM

LỜI GIỚI THIỆU

Chuyên mục này dành cho các vấn đề cổ điển và hiện đại được trình bày dưới dạng các bài toán xâu chuỗi. Đó có thể là chuỗi các bài để giải bài toán đẳng chu, chứng minh đẳng thức Euler kỳ diệu $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$, một chuỗi bài toán vận trù ... Cách trình bày xuất phát từ những vấn đề đơn giản, dễ hiểu, những khái niệm mới sẽ được định nghĩa luôn trong bài để có thể đọc tương đối độc lập. Và mỗi một chuỗi bài sẽ nêu ra những vấn đề nhất định, có thể là giải quyết một bài toán kinh điển hay nêu ra những giả thuyết mới, những vấn đề mới. Lời giải và thảo luận về các bài toán sẽ được đăng ở số $N + 3$.

Trong số Epsilon này chúng tôi cũng giới thiệu đến bạn đọc chuỗi bài toán về Cân bằng Nash do Vladimir Gurvich đề xuất cho Hội nghị mùa hè, cuộc thi Toán giữa các thành phố năm 2008.

Trong số này, chúng tôi tiếp tục đăng phần 2 tóm tắt lời giải các bài toán đã đăng ở số 1 và đăng lời giải tóm tắt các bài toán đã đăng ở số 2.

1. Tóm tắt lời giải các bài toán Ở Epsilon số 1

Số học mở rộng, số p-adic (tiếp theo)

Nhắc lại là trong chuỗi bài ở số trước, chúng ta đã hoàn tất việc chứng minh nguyên lý Minkowsky-Hasse dưới đây cho trường hợp 1 hoặc 2 ẩn số:

Nguyên lý Minkowsky-Hasse. *Phương trình bậc hai $f = 0$ của một số biến có nghiệm hữu tỷ khi và chỉ khi nó đồng thời có nghiệm trong:*

- *Tập hợp các số thực*
- *Tập hợp các số p-adic ($:= Q_p$) với mọi số nguyên tố p.*

Trong chuỗi bài này, ta sẽ nghiên cứu tính chất của ký hiệu Hilbert và sử dụng nó để hoàn tất chứng minh nguyên lý Minkowsky-Hasse ở dạng tổng quát và từ đó sử dụng nó để chứng minh hai định lý sau:

Định lý Gauss. *Một số nguyên dương có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của 3 bình phương khi và chỉ khi nó có không có dạng $4^n(8m - 1)$.*

Định lý Legendre. *Mọi số nguyên dương đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng bình phương của 4 số nguyên.*

Định nghĩa 3. *Đặt $(a, b)_p = 1$ nếu $z^2 - ax^2 - by^2 = 0$ có nghiệm p-adic, và đặt $(a, b)_p = -1$ trong trường hợp ngược lại. Giá trị $(a, b)_p$ được gọi là ký hiệu Hilbert của cặp (a, b) đối với số nguyên tố p.*

Bài toán 28. *Chứng minh rằng với ký hiệu Hilbert ta có các hệ thức sau*

1) $(a, b)_p = (b, a)_p$,
2) $(a, c^2)_p = 1$,
3) $(a, -a)_p = 1, \ (a, 1-a)_p = 1$,
4) $(a, b)_p = (a, -ab)_p = (a, (1-a)b)_p$.

Chứng minh. 1) Hiển nhiên từ định nghĩa.

2) Phương trình $z^2 - ax^2 - c^2y^2 = 0$ có nghiệm $z = c, \ x = 0, \ y = 1$.

3) Phương trình $z^2 - ax^2 + ay^2$ có nghiệm $z = 0, \ x = y = 1$, phương trình $z^2 - ax^2 - (1-a)y^2$ có nghiệm $x = y = z = 1$.

4) Suy ra từ 3) và bài toán 29. □

Bài toán 29. *Giả sử $(a, b)_p = 1$. Khi đó $(a', b)_p = (aa', b)_p$ với mọi a'.*

Chứng minh. Giả sử b là bình phương đúng thì $(a', b) = (aa', b) = 1$, do đó mệnh đề đúng. Bây giờ giả sử b không phải là bình phương đúng. Ta sử dụng bổ đề sau.

Bổ đề 1. *Nếu b không phải là bình phương đúng và $(a, b) = 1$ và $(a', b) = 1$ thì $(aa', b) = 1$.*

Ta sẽ sử dụng bổ đề 1 để hoàn tất chứng minh bài toán 29. Nếu $(a', b) = 1$ thì $(aa', b) = 1$ theo bổ đề 1. Nếu $(aa', b) = 1$ thì $(a', b) = (a^2a', b) = 1$ theo bổ đề 1. Như vậy nếu một trong hai số (a', b) và (aa', b) bằng 1 thì số còn lại cũng bằng 1. Suy ra chúng bằng nhau.

Chứng minh bổ đề 1. Giả sử $x_0, \ y_0, \ z_0$ là nghiệm khác 0 của phương trình $z^2 - ax^2 - by^2 = 0$. Vì b không phải là bình phương đúng nên $x_0 \neq 0$. Ta có thể giả sử $x_0 = 1 \cdot a = z_0^2 - by_0^2$. Tương tự như vậy, tồn tại $z_1, \ y_1$ sao cho $a' = z_1^2 - bz_1^2$. Khi đó

$$aa' = (z_0^2 - by_0^2)(z_1^2 - by_1^2) = (z_0z_1 + by_0y_1)^2 - b(z_0y_1 + z_1y_0)^2,$$

suy ra $(aa', b) = 1$. □

Định nghĩa 4. *Để viết gọn công thức tường minh cho ký hiệu Hilbert, ta cần đến ký hiệu Legendre xác định với mọi số nguyên x và số nguyên tố p. Nó bằng $1, -1$ hay 0 tùy thuộc vào x có phải là thặng dư bình phương, không thặng dư bình phương hay 0 theo modulo p. Với số nguyên tố lẻ p, ký hiệu Legendre được tính theo công thức*

$$\left(\frac{x}{p}\right) = x^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Bài toán 30. *Cho p là số nguyên tố lẻ $a = p^\alpha u, \ b = p^\beta v$, trong đó $\alpha, \ \beta, \ u, \ v$ là các số nguyên sao cho u và v nguyên tố cùng nhau với p. Chứng minh rằng*

$$(a, b)_p = (-1)^{\frac{\alpha\beta(p-1)}{2}} \left(\frac{u}{p}\right)^\beta \left(\frac{v}{p}\right)^\alpha.$$

Chứng minh. Chứng minh định lý này có thể đọc trong cuốn sách "*A course inarithmetic*" của J.P.Serre, chương 3, § 1, Định lý 1. □

Bài toán 31. *Tìm công thức tường minh cho $(a, b)_2$ với mọi a, b nguyên.*

Chứng minh. Nếu $a = 2^\alpha u$, $b = 2^\beta v$ với α, β, u, v là các số nguyên sao cho u, v lẻ thì ký hiệu Hilbert $(a, b)_2$ được cho bởi công thức

$$(-1)^{\varepsilon(u)\varepsilon(v)+\alpha\omega(v)+\beta\omega(u)}.$$

Trong đó $\varepsilon(u) = \dfrac{u-1}{2}$, $\omega(u) = \dfrac{u^2-1}{8}$. Chứng minh kết quả này có thể đọc trong cuốn sách "*A course in arithmetic*" của J.P.Serre, chương 3, § 1, Định lý 1. □

Bài toán 32. *Chứng minh rằng $(a, b)_p(a, b')_p = (a, bb')_p$ với mọi số nguyên a, b, b'.*

Chứng minh. Chứng minh kết quả này có thể đọc trong cuốn sách "*A course in arithmetic*" của J.P.Serre, chương 3, § 1, Định lý 2. □

Bài toán 33. *Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + by^2 = c$ (a, b, c là các tham số còn x, y là các ẩn số) có nghiệm trong tập hợp các số p-adic nếu và chỉ nếu $(c, -ab)_p = (a, b)_p$.*

Lời giải. Nếu như phương trình $ax^2 + by^2 = c$ có nghiệm thì phương trình

$$z^2 - \frac{a}{c}\cdot x^2 - \frac{b}{c}\cdot y^2 = 0.$$

cũng có nghiệm, suy ra $\left(\dfrac{a}{c}, \dfrac{b}{c}\right)_p = 1$. Ta biến đổi

$$\begin{aligned} 1 = \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)_p &= (a, b)_p(a, c)_p(b, c)_p(c, c)_p \\ &= (a, b)_p(ab, c)_p(c, -1)_p \\ &= (a, b)_p(c, -ab)_p, \end{aligned} \tag{1}$$

từ đó suy ra $(c, -ab)_p = (a, b)$.

Ngược lại giả sử $(c, -ab)_p = (a, b)$ thì từ đẳng thức (1) ở trên ta lại suy ra $\left(\dfrac{a}{c}, \dfrac{b}{c}\right) = 1$, tức là phương trình

$$z^2 - \frac{a}{c}\cdot x^2 - \frac{b}{c}\cdot y^2 = 0,$$

có nghiệm. Giả sử một nghiệm nào đó là x_0, y_0, z_0. Nếu $z_0 \neq 0$ thì $\left(\dfrac{x_0}{z_0}, \dfrac{y_0}{z_0}\right)$ là nghiệm của phương trình $ax^2 + by^2 = c$. Như vậy trường hợp $z_0 \neq 0$ giải quyết.

Xét trường hợp $z_0 \neq 0$, với mỗi r_x, r_y ta xét phương trình

$$a(tx_0 + r_x)^2 + b(ty_0 + r_y)^2 = c,$$

tương đương với phương trình

$$ar_x^2 + br_y^2 + 2(ax_0r_x + by_0r_y)t = c. \tag{2}$$

Với cặp số hữu tỷ tổng quát thì $ax_0r_x + by_0r_y \neq 0$. Suy ra phương trình (2) có nghiệm

$$t = \frac{c - (at_x^2 + bt_y^2)}{2(ax_0t_x + by_0t_y)}.$$

Vì vậy phương trình $ax^2 + by^2 = c$ có vô số nghiệm hữu tỷ.

□

Sử dụng tính chất của ký hiệu Hilbert, ta chứng minh được định lý sau

Bài toán 34*. *Cố định đa thức thuần nhất $f = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$ $(n \geq 2)$, trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n = \neq 0$. Đặt $d = a_1a_2\cdots a_n$ và*

$$\varepsilon = \prod_{i<j} (a_i, a_j)_p. \tag{3}$$

Chứng minh rằng phương trình $f = 0$ có nghiệm khác 0 trong tập các số p-adic khi và chỉ khi xảy ra một trong các điều sau:

1) *$n = 2$ và $-d$ là số chính phương trong Q_p.*

2) *$n = 3$ và $(-1, d) = \epsilon$.*

3) *$n = 4$ và $d \neq \alpha^2$, hoặc là $d = \alpha^2$ và $\epsilon = (-1, -1)_p$.*

4) *$n \geqslant 5$ (tức là nếu f phụ thuộc vào 5 hay nhiều biến thì phương trình $f = 0$ có nghiệm khác 0 trong Q_p với mọi p).*

Chứng minh. Chứng minh kết quả này có thể đọc trong cuốn sách "*A course in arithmetic*" của J.P.Serre, chương 4, § 1, Định lý 6. □

Từ định lý 34 hãy suy ra mệnh đề sau.

Bài toán 35. *Cố định đa thức thuần nhất $f = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$ $(n \geq 2)$, trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 0$ và số nguyên $a \neq 0$. Định nghĩa d và ϵ bởi công thức (3). Chứng minh rằng phương trình $f = a$ có nghiệm trong tập các số p-adic khi và chỉ khi một trong các điều kiện sau đây được thỏa mãn:*

1) *$n = 1$, và số $\dfrac{a}{d}$ là số chính phương trong Q_p.*

2) *$n = 2$ và $(a, -d)_p = \epsilon$.*

3) *$n = 3$ và ad không chính phương trong Q_p hoặc là ad chính phương và $\epsilon = (-1, -d)_p$.*

4) *$n > 4$ (nghĩa là nếu f phụ thuộc vào 4 hay nhiều hơn biến số thì phương trình $f = a$ có nghiệm khác 0 trong Q_p với mọi p).*

Chứng minh. 1) $n = 1$, $a = a_1x_1^2$ hay $x_1^2 = \dfrac{a}{a_1}$. Hiển nhiên phương trình này có nghiệm trong các số p-adic khi và chỉ khi $\dfrac{a}{a_1}$ là số chính phương trong Q_p.

2) $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 = a$. Điều kiện $(a, -d) = \epsilon$ tương đương với $(a, -a_1a_2)_p = (a_1, a_2)_p$ thỏa mãn điều kiện bài toán 33 với $a = a_1$, $b = a_2$, $c = a$.

3) Ta cần giải phương trình $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 - a = 0$. Hiển nhiên là nó tương đương với phương trình $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 - ax_4^2 = 0$, vì có thể thu được bằng cách đặt

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \leftrightarrow \left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right),$$

mà phương trình này có nghiệm trong các số p-adic.

Bây giờ ta chứng minh rằng nếu phương trình có nghiệm không tầm thường với $x_4 \neq 0$ thì nó cũng có nghiệm không tầm thường với $x_4 \neq 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \neq 0$. Giả sử (C, D) là nghiệm của phương trình $C^2 - D^2 = -\dfrac{a}{a_1}$ ví dụ $C = \dfrac{1 - \frac{a}{a_1}}{2}$, $D = \dfrac{-1 - \frac{a}{a_1}}{2}$. Hiển nhiên ta có thể nhân nghiệm của ta cho $\dfrac{C}{x_1}$, thu được $(C, x_2, x_2, 0)$. Dễ dàng kiểm tra được rằng

$$f(C, x_2, x_3, 0) = f(D, x_2, x_3, 1),$$

và ta đưa bài toán về bài toán 34.

- Trường hợp thứ nhất: $ad \neq -m^2$ trong Q_p. Điều này tương đương với $d \neq m^2$.
- Trường hợp thứ hai: $ad = -m^2$. Ta cần

  $$(a_1, a_2)_p(a_1, a_3)_p(a_2, a_3)_p = (-1, -a_1a_2a_3)_p,$$

  tương đương với

  $$(a_1, a_2)_p(a_1, a_3)_p(a_2, a_3)_p(a, -d)_p = (-1, -1)_p.$$

  Hiển nhiên, đối với lời giải bài toán dạng $a = b \Leftrightarrow c = d$ với (a, b, c, d) từ tập $\{1, -1\}$, ta chỉ cần kiểm tra $ac = bd$, tức là

  $$(-a, d)_p = (-1, -d)_p(-1, -1)_p,$$

  tương đương với

  $$(-a, d)_p = (-1, -1)_p(-1, -1)_p(-1, d)_p,$$

  hay

  $$(-a, d)_p = (-1, d)_p,$$

  hoặc

  $$(-a, d)_p(-1, d)_p = 1,$$
  $$(a, d)_p = 1,$$
  $$(a, a)_p\left(a, \frac{d}{a}\right)_p = 1,$$

  Tức $1 \cdot 1 = 1$ vì $\dfrac{d}{a}$ là số chính phương trong Q_p.

4) Cũng giống như trong 3) ta cần giải phương trình

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 - ax_5^2 = 0.$$

Nhưng phương trình luôn có nghiệm theo bài toán $34d$.

Chứng minh kết quả này có thể đọc trong cuốn sách "*A course in arithmetic*" của J.P.Serre, chương 4, § 1, Hệ quả của Định lý 6. □

Bài toán 36. Chứng minh nguyên lý Minkowsky-Hasse.

Chứng minh. Chứng minh kết quả này có thể đọc trong cuốn sách "*A course in arithmetic*" của J.P.Serre, chương 4, § 1, Định lý 8. □

Bài toán 37. *Sử dụng bài toán 35 và nguyên lý Minkowsky-Hasse hãy chứng minh rằng số nguyên n biểu diễn được dưới dạng tổng bình phương của 3 số hữu tỷ khi và chỉ khi nó không có dạng $4^a(8b-1)$, tức là khi $-n$ không phải là số chính phương trong Q_2.*

Chứng minh. Theo định lý Minkovsky-Hasse ta chỉ cần kiểm tra phương trình

$$x^2+y^2+z^2=n,$$

có nghiệm p-adic hay không. Ta giữ các ký hiệu của bài toán 35,

$$a_1=a_2=a_3=1,\ d=1, \epsilon=(1,\ 1)_p^3=(1,\ 1)_p,\ a=n.$$

Đầu tiên ta chứng minh rằng với $p>2$ phương trình có nghiệm p-adic.

Nếu như n không có dạng $-m^2$ thì mọi thứ được chứng minh. Nếu như $n=-m^2$ thì $\epsilon=(1,1)_p=$ [Bài toán 30] $=1=$ [Bài toán 30] $=(-1,\ -1)_p$, tức là nó có nghiệm.

Chỉ còn phải xét trường hợp $p=2$. Nếu như $n\neq -m^2$ thì bài toán được giải quyết. Bây giờ nếu $n=-m^2$. Nếu như phương trình có nghiệm thì

$$\epsilon=(1,\ 1)_2=(-1,\ -1)_2,$$

trái với kết luận của bài toán 31. □

Bài toán 38. *Cố định số nguyên n. Chứng minh rằng nếu tồn tại các số hữu tỷ $x,\ y,\ z$ sao cho $x^2+y^2=z^2=n$ thì cũng tồn tại các số nguyên $x',\ ,y',\ z'$ sao cho $(x')^2+(y')^2+(z')^2=n$. Từ đây hãy suy ra kết luận của định lý Gauss.*

Chứng minh. Giả sử các số hữu tỷ $x,\ y,\ z$ sao cho $x^2+y^2=z^2=n$. Gọi d là mẫu số chung của $x,\ y,\ z$. Ta chọn $x,\ y,\ z$ sao cho d nhỏ nhất có thể. Giả sử rằng $d>1$ (tức là một trong các số $x,\ y,\ z$ không nguyên và phương trình $x^2+y^2=z^2=n$ không có nghiệm nguyên). Gọi $r_x,\ r_y,\ r_z$ tương ứng là các số nguyên gần với $x,\ y,\ z$ nhất

$$s_x:=x-r_x,\ s_y:=y-r_y,\ s_z:=z-r_z.$$

Khi đó

$$|s_x|,\ |s_y|,\ |s_z|\leqslant\frac{1}{2},$$

$$s_x^2+s_y^2+s_z^2=n-(r_x^2+r_y^2+r_z^2)-2(s_xr_x+s_yr_y+s_zr_z). \tag{4}$$

Đặt

$$x'=r_x-\frac{s_x(n-r_x^2-r_y^2-r_z^2)}{s_x^2+s_y^2+s_z^2},$$

$$y'=r_y-\frac{s_y(n-r_x^2-r_y^2-r_z^2)}{s_x^2+s_y^2+s_z^2},$$

$$z'=r_z-\frac{s_z(n-r_x^2-r_y^2-r_z^2)}{s_x^2+s_y^2+s_z^2}.$$

Từ (4) suy ra hơn nữa $d' < d$. Từ đây suy ra mẫu số chung của $x^{'}$, $y^{'}$, $z^{'}$ chia hết $d^{'}$, nghĩa là nhỏ hơn d. Ta chú ý rằng $(x^{'})^2 + (y^{'})^2 + (z^{'})^2 = n$. Mâu thuẫn. Vậy $d = 1$ và phương trình $x^2 + y^2 = z^2 = n$ có nghiệm nguyên. □

Theo bài toán 37, mọi số nguyên dương N không có dạng $4^n(8m - 1)$ đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng bình phương của ba số hữu tỷ. Nhờ vào bài toán này, N biểu diễn được dưới dạng tổng bình phương của ba số nguyên.

Bài toán 39. *Từ định lý Gauss hãy suy ra định lý Legendre.*

Chứng minh. Từ định lý Gauss suy ra rằng mọi số nguyên dương có số dư là $1, 2, 3, 5, 6$ khi chia cho 8 đều biểu diễn được dưới dạng tổng của 3 bình phương (và có nghĩa là dưới dạng tổng của 4 bình phương). Như vậy ta chỉ cần chứng minh mọi số nguyên dương có số dư là $0, 4, 7$ trong phép chia cho 8 biểu diễn được dướng dạng tổng của 4 bình phương. Nếu số n biểu diễn được dưới dạng tổng của 4 bình phương thì số $4n$ cũng biểu diễn được. Từ đây ta chỉ còn cần chứng minh số có số dư là 7 khi chia cho 8 biểu diễn được dưới dạng tổng của 4 bình phương. Giả sử có số n có số dư là 7 khi chia cho 8. Vì $n{-}1$ có số dư là 6 khi chia cho 8 nên theo định lý Gauss, n biểu diễn được dưới dạng tổng của 3 bình phương. Suy ra n biểu diễn được dưới dạng tổng của 4 bình phương. □

2. Tóm tắt lời giải các bài toán ở Epsilon số 2

2.1. Đường đi ngắn nhất

Đề bài

Bốn thành phố – Alençon, Bélançon, Célançon và Délançon – nằm trên đỉnh của một hình vuông có cạnh 100 *km. Bộ giao thông vận tải muốn nối liền các thành phố với nhau bằng một mạng lưới xa lộ có tổng chiều dài ngắn nhất có thể.*

Phần A

"*Ta có thể xây xa lộ đi từ Alençon đến Bélançon, sau đó đến Célançon, cuối cùng đến Délançon*" - trợ lý thứ nhất nói.

"*Hay là, ta có thể xây hai xa lộ chéo nhau: một từ Alençon đến Célançon và xa lộ còn lại từ Délançon đến Bélançon*" - trợ lý thứ hai đề xuất.

"*Và tại sao lại không dựng một xa lộ dạng nửa đường tròn, được bổ sung bởi hai đoạn xa lộ thẳng?*" - trợ lý thứ ba góp ý kiến.
1. Phương án nào trong ba phương án trên là ngắn nhất?

2. Một nhà toán học đã đề xuất một phương án khác: "*Ta có thể nối Alençon và Délançon bằng một tam giác cân (tam giác AED trong hình* 4), *sau đó Bélançon và Célançon bằng một tam giác cân đồng dạng (tam giác BFC) và nối hai đỉnh E và F như ta thấy trong hình sau*" : Nếu $EF = 20$ km, mạng lưới thống xa lộ được thể hiện trên hình 4 có ngắn hơn các mạng lưới mà các trợ lý đã đề xuất trên đây không?

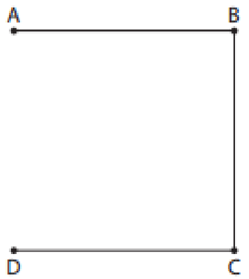


fig. 1
Assistant nº 1

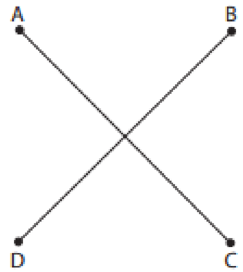


fig. 2
Assistant nº 2

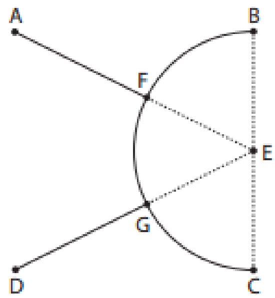


fig. 3
Assistant nº 3

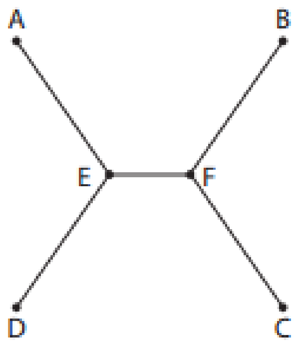


fig. 4

Phần B

Trong phần này, chúng ta muốn chứng minh rằng mạng lưới xa lộ ngắn nhất thực sự là mô hình của nhà toán học đã đề xuất. Ta sẽ tìm chiều dài của EF để đạt được mạng lưới ngắn nhất này.

Nhắc nhở hình học: *Nếu A, B, C là ba đỉnh của một tam giác thì $AB + BC \geqslant AC$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi B thuộc đoạn AC. Chúng ta cũng biết rằng, nếu vẽ một đường cong bất kỳ giữa A và B, chiều dài của đường cong sẽ luôn lớn hơn hay bằng chiều dài đoạn (đường thẳng là đường ngắn nhất).*

1. Quay trở lại với mạng lưới xa lộ của chúng ta. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử là mạng lưới của chúng ta được tạo thành bở hai đường con nối các đỉnh đối diện (một nối A với C và một nối B với D), và hai đường cong này nằm bên trong hình vuông cạnh 100 km như hình vẽ dưới đây.
Xét một mạng lưới được tạo bởi hai đường cong như hình 5. Ta xét xa lộ giữa Alençon và Célançon, bắt đầu từ Alençon. Gọi E_0 là giao điểm đầu tiên mà xa lộ này gặp với xa lộ nối Délançon và Bélançon và F_0 là giao điểm cuối cùng (hai điểm này có thể trùng nhau (hình 5). Chứng minh rằng tổng chiều dài của mạng lưới này lớn hơn hay bằng tổng chiều dài của mạng lưới dưới đây, tạo thành bởi các đoạn thẳng (hình 6)
2. Xét các đường thẳng ΔE và ΔF, qua E_0 và F_0 tương ứng và song song với AD (xem hình 7 dưới đây).

a) Xác định điểm E trên ΔE sao cho tổng các khoảng cách $DE + EA$ là nhỏ nhất. Ta gọi F là điểm tương tự trên ΔF sao cho $FB + FC$ nhỏ nhất.

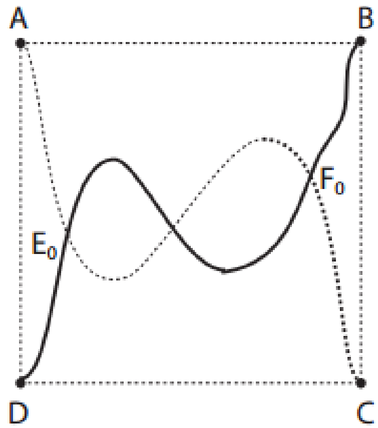


fig. 5

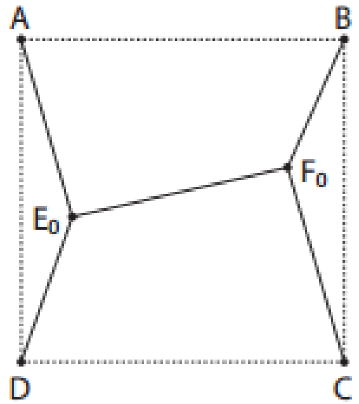


fig. 6

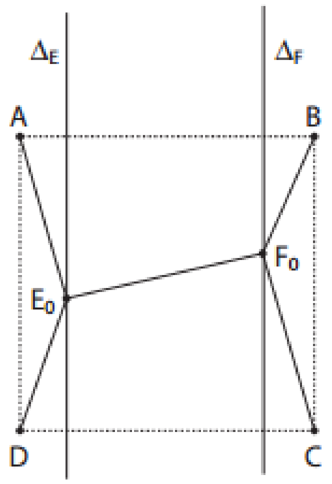


fig. 7

b) Chứng minh rằng $EF \leqslant E_0F_0$.

c) Từ các lý luận ở trên suy ra rằng mạng lưới cần tìm bắt buộc phải có dạng sau, trong đó E và F nằm trên trung trực đoạn AD (hình 8).

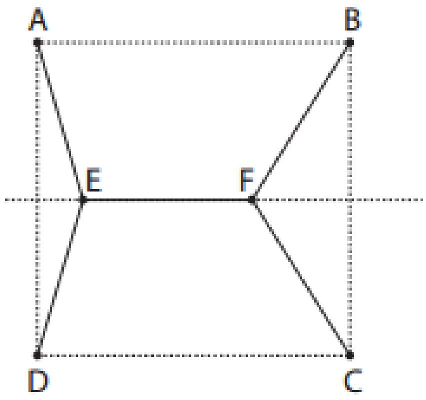


fig. 8

3. Ta đã công nhận rằng trong mạng lưới tối ưu cần tìm, các điểm E và F phải nằm trên trung trực của AB.

a) Hãy đưa ra lý luận chứng tỏ rằng mạng lưới tối ưu cần tìm phải đối xứng qua trung trực của AB.

b) Sau tất cả những điều nói trên, mạng lưới cần tìm sẽ phải có dạng như nhà toán học đã đề xuất (hình 4). Bạn có thể giúp xác định chiều dài của EF sao cho mạng lưới xa lộ dạng này có tổng chiều dài ngắn nhất có thể?

c) Khi đó góc $\angle DEA$ bằng bao nhiêu?

2.2. Tóm tắt lời giải

Phần A

1. Phương án tốt nhất là phương án của người trợ lý thứ ba. Thật vậy, chiều dài của hệ thống đường do trợ lý thứ nhất đề nghị là 300 km. Chiều dài của hệ thống đường do trợ lý thứ hai đề xuất bằng $200\sqrt{2} \approx 282,8$ km (đường chéo của hình vuông cạnh a có chiều dài là $a\sqrt{2}$). Phương án của trợ lý thứ ba có chiều dài $100\sqrt{5} - 100 + 50\pi \approx 280,7$ km. Tam giác ABE vuông tại B, vì vậy

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 = 12500,$$

do đó $AE = \sqrt{12500} = 50\sqrt{5}$. Vì FE là bán kính đường tròn đường kính BC nên

$$AF = AE - FE = 50\sqrt{5} - 50.$$

Mặt khác, nửa đường tròn có chiều dài $2\pi \times \dfrac{50}{2} = 50\pi$. Từ đó tổng chiều dài bằng

$$100\sqrt{5} - 100 + 50\pi.$$

2. Có, vì ta có $20 + 4 \times \sqrt{50^2 + 40^2} = 20 + 40\sqrt{41} \approx 276,1$ km.

Phần B

1. Như ta đã công nhận ở phần đầu của đề bài: Khi ta đi theo một đường cong nối giữa hai điểm thì chiều dài của nó luôn lớn hơn hay bằng đoạn thẳng nối hai điểm đó.

Như vậy hệ thống đường ngắn nhất phải là hệ thống đường mà các đoạn nối từ A, D đến E_0, từ B, C đến F_0 và giữa E_0, F_0 phải là các đoạn thẳng.

2. a) Ký hiệu $A^{'}$ là điểm đối xứng của A qua Δ_E. Phép đối xứng bảo toàn độ dài, ta có

$$DE_0 + E_0A = DE_0 + E_0A^{'}.$$

Theo bất đẳng thức tam giác đã nói đến ở phần nhắc nhở hình học, vế phải lớn hơn hay bằng $DA^{'}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi E_0 nằm trên $DA^{'}$. Như vậy $DE_0 + E_0A$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi E_0 nằm trên đoạn thẳng $DA^{'}$, tức là E_0 nằm trên trung trực của DA, cũng là đường trung bình nằm ngang của hình vuông.

b) Khoảng cách ngắn nhất giữa một điểm nằm trên Δ_E và một điểm nằm trên Δ_F đạt được khi EF vuông góc với Δ_E (và cũng là với Δ_F). Thật vậy, nếu ngược lại, gọi G là giao điểm của Δ_E với đường vuông góc với Δ_E kẻ từ F. Tam giác EFG là tam giác vuông tại G vì thế cạnh huyền EF lớn hơn GF (định lý Pythagore) mâu thuẫn với tính chất nhỏ nhất.

c) Các đường thẳng Δ_E và Δ_F là cố định. Với một hệ thống đường với hai điểm E_0 trên Δ_E và F_0 trên Δ_F thì tổng chiều dài là $L + L^{'} + L^{''}$, trong đó $L = DE_0 + E_0A$; $L^{'} = E_0F_0$ và $L^{''} = CF_0 + F_0B$. Theo a), b) thì

$$L \geqslant DE + EA,\ L^{'} \geqslant EF,\ L^{''} \geqslant BF + FC.$$

Dấu bằng xảy ra khi E_0 trùng E và F_0 trùng F. Do đó hệ thống đường tối ưu phải có dạng như hình vẽ.

3. a) Ta gọi O là giao điểm của EF với đường trung bình thẳng đứng (trung trực của AB). Nếu E và F không đối xứng, ta xét các độ dài $DE + EA + EO$ và $CF + FB + FO$.

Nếu chẳng hạn

$$CF + FB + FO \geqslant DE + EA + EO,$$

ta thay F bởi $E^{'}$ là điểm đối xứng của E qua O. Ta sẽ thu được một hệ thống đường đối xứng có tổng độ dài nhỏ hơn hay bằng hệ thống cũ.

b) Nếu ta đặt $2x = EF$ trong đó $x \in [0;\, 50]$, khi đó tổng chiều dài của hệ thống đường là

$$f(x) = 2x + 4\sqrt{2500 + (50 - x)^2} = 2x + 4\sqrt{5000 - 100x + x^2}.$$

Tính đạo hàm

$$f^{'}(x) = 2 + \frac{4x - 200}{\sqrt{5000 - 100x + x^2}}.$$

Giải phương trình $f6'(x) = 0$, ta được $x = 50 - \dfrac{50}{\sqrt{3}}$. Tức là $EF = 100 - \dfrac{100}{\sqrt{3}}$.

c) Dễ dàng suy ra được khi đó góc $\angle DEA = 120°$.

3. Bất đẳng thức Schapiro

Trích đề toán từ Cuộc thi toán giữa các thành phố, năm 2004.

Đề nghị và giới thiệu bởi A.Khabrov, I.Bogdanov, V.Bugaenko, K.Kuiumdjan, K.Kokhas, A.Skopenkov, G.Chelnokov.

3.1. Bất đẳng thức Schapiro

Tháng 10 năm 1954, trong Tạp chí "*American Mathematical Monthly*" xuất hiện bài toán của nhà toán học Mỹ Harold Schapiro:

Với các số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ hãy chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geq \frac{n}{2}, \tag{1}$$

trong đó dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tất cả các mẫu số bằng nhau.

Trong tạp chí "*Monthly*", khác với các tạp chí khác, ví dụ như Kvant hay Toán học và tuổi trẻ, cho phép đăng cả các bài toán mà chưa có ai giải được, và điều này không được báo trước cho độc giả. Và lần này cũng vậy. Tác giả bài toán khi gửi bài chỉ có lời giải cho $n = 3$ và $n = 4$. Trong các bài toán đề nghị dưới đây, thay vì đòi hỏi tính dương của tất cả các x_k, ta chỉ yêu cầu các số x_k là không âm và tất cả các mẫu số khác 0. Nếu như bất đẳng thức đúng cho các số dương thì từ đó có thể suy ra bất đẳng thức cho các số không âm làm cho các mẫu số khác 0.

Đặt

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)=\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}.$$

3.2. Chứng minh bất đẳng thức (1) cho $n = 3, 4, 5, 6.$

Bất đẳng thức (1) với $n = 3$ còn được gọi là bất đẳng thức Nesbit. Bất đẳng thức này có rất nhiều cách chứng minh dựa trên các ý tưởng đánh giá đa dạng. Dưới đây ta trình bày một sơ đồ chứng minh chung cho các trường hợp $n \leqslant 6$ như sau. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}x_i(x_{i+1}+x_{i+2})\right]\geq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2.$$

Ta sẽ chứng minh xong bất đẳng thức (1) nếu ta chứng minh được

$$2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\geq n\left[\sum_{i=1}^{n}x_i(x_{i+1}+x_{i+2})\right] \qquad (2).$$

i) Với $n = 3$, thì (2) trở thành

$$2(a+b+c)^2\geqslant 6(ab+bc+ca),$$

là hiển nhiên đúng vì tương đương với bất đẳng thức

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

$ii)$ Với $n = 4$, thì (2) trở thành

$$2(a+b+c+d)^3 \geqslant 4(ab+ac+bc+bd+cd+ca+da+db),$$

tương đương với bất đẳng thức

$$(a-c)^2 + (b-d)^2 \geqslant 0,$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = c$ và $b = d$.

$iii)$ Với $n = 5$, thì (2) trở thành

$$2(a+b+c+d+e)^2 \geqslant 5(ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+da+ea+eb).$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$2(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2) \geqslant ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+da+ea+eb,$$

hay

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(a-e)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(b-e)^2+(c-d)^2+(c-e)^2+(d-e)^2 \geqslant 0,$$

hiển nhiên đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = e$.

$iv)$ Với $n = 6$, thì (2) trở thành

$$(a+b+c+d+e+f)^2 \geqslant 3(ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+df+ef+ea+fa+fb).$$

Đặt $A = a+d$, $B = b+e$, $C = c+f$ thì bất đẳng thức này được viết lại thành

$$(A+B+C)^2 \geqslant 3(AB+BC+CE)$$

là bất đẳng thức quen thuộc. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C$, tức là $a+d = b+e = c+f$.

Đáng tiếc là phương pháp này không dùng để chứng minh (1) trong trường hợp $n \geqslant 7$. Cụ thể thì với $n \geqslant 7$ bất đẳng thức (2) không còn đúng. Ví dụ nếu chọn $a = c = e = 1$, $b = d = f = g = 0$ thì bất đẳng thức sai.

1.1. *Chứng minh rằng bất đẳng thức* (1) *không đúng*

$a)$ *Với* $n = 20$.

$b)$ *Với* $n = 14$.

$c)$ *Với* $n = 25$.

Chứng minh. $a)$ Nếu ta chọn $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ là $1+5\epsilon$, 6ϵ, $1+4\epsilon$, 5ϵ, $1+3\epsilon$, 4ϵ, $1+2\epsilon$, 3ϵ, $1+\epsilon$, 2ϵ, $1+2\epsilon$, ϵ, $1+3\epsilon$, 2ϵ, $1+4\epsilon$, 3ϵ, $1+5\epsilon$, 4ϵ, $1+6\epsilon$, 5ϵ thì vế trái của bất đẳng thức nhỏ hơn $10-\epsilon^2+c\epsilon^3$ với hằng số c nào đó. Suy ra với ϵ đủ nhỏ thì vế trái nhỏ hơn 10. Ví dụ này thuộc về Lighthill đăng trong Mathematical Monthly [22].

$b)$ Nếu như chọn $x_1, x_2, \ldots, x_{14}$ là $1+7\epsilon$, 7ϵ, $1+4\epsilon$, 6ϵ, $1+\epsilon$, 5ϵ, 1, 2ϵ, $1+\epsilon$, 0, $1+4\epsilon$, ϵ, $1+6\epsilon$, 4ϵ thì vế trái sẽ nhỏ hơn $7-2\epsilon^2+c\epsilon^3$ và do đó với ϵ đủ nhỏ sẽ nhỏ hơn 7. Ví dụ này thuộc về Zulauf [27].

Và còn có một ví dụ trong [24], trong ví dụ này có một số biến bằng

$$0,\ 0,\ 42,\ 2,\ 42,\ 4,\ 41,\ 5,\ 39,\ 4,\ 38,\ 2,\ 38,\ 0,\ 40.$$

c) Các ví dụ khẳng định là với $n = 25$ bất đẳng thức không đúng được xây dựng trên máy tính vào năm 1970 bởi Daykin [10] và Malcolm [18]. Dưới đây là ví dụ của Daykin (ví dụ này, khác với ví dụ của Malcolm, chứa toàn số nguyên)

$$0,\ 85,\ 0,\ 101,\ 0,\ 120,\ 14,\ 129,\ 41,\ 116,\ 59,\ 93,\ 64,\ 71,\ 63,\ 52,\ 60,\ 36,\ 58,\ 23,\ 58,\ 12,\ 62,\ 3,\ 71.$$

Và đây là ví dụ của R.Alexeev và E.Foshkin (chỉ ra trong [3]).

$$32,\ 0,\ 37,\ 0,\ 43,\ 0,\ 50,\ 0,\ 59,\ 8,\ 62,\ 21,\ 55,\ 29,\ 44,\ 32,\ 33,\ 31,\ 24,\ 30,\ 16,\ 29,\ 10,\ 29,\ 4.$$

□

1.2. *Chứng minh bất đẳng thức* (1) *đúng cho các dãy đơn điệu.*

Chứng minh. Kết luận của bài toán được đăng trong [13]. Ta đưa ra một chứng minh đẹp đẽ cho kết quả này. Giả sử $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n > 0$. Lưu ý rằng tích của các số hạng dạng $\dfrac{x_k + x_{k+1}}{x_{k+1} + x_{k+2}}$ bằng 1 nên theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k + x_{k+1}}{x_{k+1} + x_{k+2}} \geq n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1} + x_{k+2}}{x_{k+1} + x_{k+2}}.$$

Suy ra

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+2}}{x_{k+1} + x_{k+2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k + x_{k+1}}. \tag{2}$$

Bây giờ áp dụng hai lần bất đẳng thức hoán vị, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} &\geq \sum_{k=1}^{n-2} \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \\ &\geq \sum_{k=1}^{n-2} \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} + \frac{x_{n-1}}{x_1 + x_2} + \frac{x_n}{x_1 + x_n}. \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k + x_{k+1}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Ở đây lần thứ nhất sử dụng bất đẳng thức hoán vị cho $x_{n-1} \geqslant x_n$ và $x_n + x_1 \leqslant x_1 + x_2$. Lần thứ hai áp dụng cho $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_{n-1}$ và $\dfrac{1}{x_1 + x_2} \leq \dfrac{1}{x_2 + x_3} \leq \cdots \leq \dfrac{1}{x_{n-1} + x_n}$.

Từ (2) và (3) ta có điều phải chứng minh. □

Một chứng minh khác cho kết quả này có thể xem trong [3].

Ghi chú. Rất khó có thể chứng minh kết quả bài này bằng quy nạp toán học mà không dùng đến tiểu xảo, bởi vì

$$f_n(0, 1, \ldots, 1) = \frac{n+1}{2}, \; f_{n+1}\left(0, 1, \ldots, 1, 1\frac{1}{0}\right) < \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}.$$

1.3. *Chứng minh rằng nếu bất đẳng thức* (1) *không đúng với* $n = m$ *thì nó cũng không đúng cho* $n = m + 2$.

Chứng minh. [3] Có thể kiểm tra dễ dàng rằng

$$f_{n+2}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1, x_2) = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + 1.$$

Từ đó nếu

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) < \frac{n}{2},$$

thì

$$f_{n+2}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1, x_2) < \frac{n}{2} + 1 = \frac{n+2}{2}.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

1.4. *Chứng minh rằng nếu bất đẳng thức* (1) *không đúng với* $n = m$, *trong đó* m *lẻ, thì nó cũng không đúng với mọi* n *lớn hơn* m.

Chứng minh. [3] Giả sử rằng $f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) < \frac{m}{2}$. Ta tính hiệu

$$\begin{aligned} f_{m+1}(x_1, \ldots, x_k, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) - f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) - \frac{1}{2} \\ = \frac{x_{k-1}}{2x_k} + \frac{x_k}{x_k + x_{k+1}} - \frac{x_{k-1}}{x_k + x_{k+1}} - \frac{1}{2} \\ = \frac{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})}{2x_k(x_k + x_{k+1})}. \end{aligned}$$

Nếu như $(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \leqslant 0$ thì

$$f_{m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) < \frac{m+1}{2},$$

và mệnh đề được chứng minh. Với m lẻ thì chỉ số k như vậy chắc chắn phải tìm được, vì nếu với mọi k ta có $(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k) < 0$ thì nhân tất cả các bất đẳng thức này lại (số các bất đẳng thức là lẻ), ta có

$$(x_2 - x_1)^2(x_3 - x_2)^2 \cdots (x_m - x_{m-1})^2(x_1 - x_m)^2 < 0.$$

Như vậy nếu như với số lẻ m bất đẳng thức không đúng thì nó cũng sẽ không đúng với $m + 1$. Cuối cùng, ta chỉ cần sử dụng kết quả bài toán trước. □

1.5. *Chứng minh rằng bất đẳng thức* (1) *đúng với* $n = 8, 10, 12$ *và* $n = 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23$. *Theo mệnh đề* 1.4, *để thực hiện điều này, ta chỉ cần chứng minh cho* $n = 12$ *và* $n = 23$.

Chứng minh. Chứng minh ngắn gọn nhất cho $7 \leqslant n \leqslant 12$ được công bố trong [7, 8]. Với n lớn các chứng minh có sử dụng máy tính để xét trường hợp. □

1.6. *Chứng minh rằng* $f(x_1, x_2, \dots, x_n) + f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) \geqslant n$.

Chứng minh. [28] Đặt $y_k = x_k + x_{k+1}$ thì

$$\frac{x_1 + x_4}{x_2 + x_3} + \frac{x_2 + x_5}{x_3 + x_4} + \dots + \frac{x_n + x_3}{x_1 + x_2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k - y_{k+1} + y_{k+2}}{y_{k+1}}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{y_{k+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{y_{k+2}}{y_{k+1}} - n \geq n.$$

Ở đây ta đã áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai tổng ở cuối. □

1.7. *Giả sử rằng tại điểm* $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ *thì hàm số* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *sẽ đạt cực tiểu địa phương.*

a) Nếu n chẵn, chứng minh rằng $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \dfrac{n}{2}$.

b) Chứng minh mệnh đề tương tự cho n lẻ.

c) Sử dụng a), b) chứng minh bất đẳng thức (1) *cho* $n = 7$ *và* $n = 8$.

Chứng minh. Các mệnh đề a), b) lấy từ [21]. Ký hiệu $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $u = (-1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1)$.

a) Chú ý rằng

$$f(x + tu) = f(x) + t\left(-\frac{1}{x_2 + x_3} + \frac{1}{x_3 + x_4} + \cdots\right).$$

Như vậy $f(x + tu)$ là hàm tuyến tính. Tại điểm a hàm có cực trị địa phương, do đó nó là hàm hằng và cực trị địa phương không chặt xảy ra tại mọi điểm $a + tu$ có tọa độ dương. Vì

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{x_{k+1} + x_{k+2}} - \frac{x_{k-2}}{(x_{k-1} + x_k)^2} - \frac{x_{k-1}}{(x_k + x_{k+1})^2}.$$

và tại các điểm cực tiểu

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0, \ \frac{\partial f}{\partial x_k}(a + tu) = 0,$$

nên ta có các hệ thức

$$\frac{1}{a_{k+1} + a_{k+2}} - \frac{a_{k-2}}{(a_{k-1} + a_k)^2} - \frac{a_{k-1}}{(a_k + a_{k+1})^2} = 0,$$

và

$$\frac{1}{a_{k+1} + a_{k+2}} - \frac{a_{k-2} + t(-1)^{k-2}}{(a_{k-1} + a_k)^2} - \frac{a_{k-1} + t(-1)^{k-1}}{(a_k + a_{k+1})^2} = 0.$$

Trừ hai hệ thức này vế theo vế, ta được

$$\frac{t}{(a_{k-1} + a_k)^2} - \frac{t}{(a_k + a_{k+1})^2} = 0.$$

Suy ra $a_{k-1} + a_k = a_k + a_{k+1}$. Tức là $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{n-1}$ và $a_2 = a_4 = \dots = a_n$.

Từ đó $f(a) = \frac{n}{2}$.

b) Chứng minh ngắn gọn dưới đây được công bố trong [7]. Ta ký hiệu $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, yn)$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, trong đó $y_k = x_k + x_{k+1}$ và $z_k = \frac{1}{y_{n+1-k}}$. Đặt

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k}{y_{k+1}}. \end{aligned}$$

Chú ý rằng

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{x_{k+1} + x_{k+2}} - \frac{x_{k-2}}{(x_{k-1} + x_k)^2} - \frac{x_{k-1}}{(x_k + x_{k+1})^2}.$$

Dễ dàng kiểm tra hằng đẳng thức

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} + \frac{\frac{a}{b^2} + \frac{c}{d^2}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{d}}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{x_{k-2}}{x_{k-1} + x_k} + \frac{x_{k-1}}{x_k + x_{k+1}} &= \frac{x_{k-2} + x_{k-1}}{(x_{k-1} + x_k) + (x_k + x_{k+1})} + \frac{\frac{x_{k-2}}{(x_{k-1}+x_k)^2} + \frac{x_{k-1}}{(x_k+x_{k+1})^2}}{\frac{1}{x_{k-1}+x_k} + \frac{1}{x_k+x_{k+1}}} \\ &= \frac{y_{k-2}}{y_{k-1} + y_k} + \frac{z_{n-k} - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)}{z_{n-k+1} + z_{n-k+2}}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$2S(x) = S(y) + S(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)}{z_{n-k+1} + z_{n-k+2}}.$$

Nếu như tại điểm x ta có cực tiểu địa phương thì $2S(x) = S(y) + S(z)$. Như vậy

$$S(x) = S(y) = S(z).$$

Gọi u là trung bình cộng của các số $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ta xét phép biến đổi

$$M(x) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_2 + x_3}{2}, \ldots, \frac{x_n + x_1}{2}\right).$$

Gọi $M_k(x)$ là kết quả phép lặp thứ k. Chú ý rằng

$$S(x) = S(y) = S(M(x)) = \cdots = S(M_k(x)).$$

Rõ ràng. $\square$

1.8. *Chứng minh bất đẳng thức $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant cn$ cho các giá trị sau của c :*

$a)$ $c = \dfrac{1}{4}$.

$b)$ $c = \sqrt{2} - 1$.

$c)$ $c = \dfrac{5}{12}$.

Chứng minh.. Lời giải của bài này được lấy từ [3].

$a)$ Bài toán này được sử dụng trong Olympic toán toàn Liên Xô lần thứ 3, năm 1969. Có thể là bài này được lấy từ [14], lời giải bài toán được đăng ở [3].

Gọi x_{i_1} là số lớn nhất trong các số $x_1, x_2, \ldots, x_n$; x_{i_2} là số lớn nhất trong hai số đi tiếp theo x_{i_1}; x_{i_3} là số lớn nhất trong hai số đi tiếp theo $x_{i_2} \ldots$ Ta cứ làm như vậy cho đến khi tìm được chỉ số k sao cho số lớn nhất trong hai số tiếp theo x_{i_k} là x_{i_1}.

Rõ ràng là $k \geqslant \dfrac{n}{2}$, và ta có

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \geq \frac{x_{i_1}}{2x_{i_2}} + \frac{x_{i_2}}{2x_{i_3}} + \cdots + \frac{x_{i_k}}{2x_{i_1}}.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM biểu thức cuối cùng không nhỏ hơn $\dfrac{k}{2}$ và do đó không nhỏ hơn $\dfrac{n}{4}$.

$b)$ Mỗi một phân số $\dfrac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, ta viết lại dưới dạng

$$\frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} = \frac{x_k + \frac{1}{2}x_{k+1}}{x_{k+1} + x_{k+2}} + \frac{\frac{1}{2}x_{k+1} + x_{k+2}}{x_{k+1} + x_{k+2}} - 1.$$

Ta thu được $2n$ phân số. Ta ghép chúng thành cặp: Phân số đầu tiên với phân số thứ $2n$, phân số thứ 2 với phân số thứ 3, phân số thứ 4 với phân số thứ 5 ... Ta đánh giá chặn dưới một cặp phân số như vậy

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{2}x_k + x_{k+1}}{x_k + x_{k+1}} + \frac{x_k + \frac{1}{2}x_{k+1}}{x_{k+1} + x_{k+2}} &\geq 2\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}x_k + x_{k+1}\right)\left(x_k + \frac{1}{2}x_{k+1}\right)}{(x_k + x_{k+1})(x_{k+1} + x_{k+2})}} \\
&= 2\sqrt{\left[\frac{1}{2} + \frac{x_k x_{k+1}}{4(x_k + x_{k+1})^2}\right]\frac{x_k + x_{k+1}}{x_{k+1} + x_{k+2}}} \\
&> \sqrt{2}\sqrt{\frac{x_k + x_{k+1}}{x_{k+1} + x_{k+2}}}.
\end{aligned}$$

Vì tích các biểu thức $\sqrt{\dfrac{x_k + x_{k+1}}{x_{k+1} + x_{k+2}}}$ bằng 1 nên theo bất đẳng thức AM-GM ta có tổn của chúng không nhỏ hơn n. Từ đó vế trái của bất đẳng thức Shapiro không nhỏ hơn $\left(\sqrt{2} - 1\right)n$.

$c)$ Tương tự như mục $b)$, mỗi một phân số $\dfrac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, ta viết lại dưới dạng

$$\frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} = \frac{x_k + \beta x_{k+1}}{x_{k+1} + x_{k+2}} + \alpha \cdot \frac{\beta x_{k+1} + x_{k+2}}{x_{k+1} + x_{k+2}} - \alpha,$$

với α, β được chọn sao cho đẳng thức đúng, tức là $\beta + \alpha\beta = \alpha$, từ đó $\beta = \dfrac{\alpha}{\alpha+1}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\frac{x_k + \beta x_{k+1}}{x_{k+1} + x_{k+2}} + \alpha \cdot \frac{\beta x_k + x_{k+1}}{x_k + x_{k+1}} &\geq 2\sqrt{\alpha \cdot \frac{(x_k + \beta x_{k+1})(\beta x_k + x_{k+1})}{(x_k + x_{k+1})(x_{k+1} + x_{k+2})}} \\
&= 2\sqrt{\alpha \cdot \frac{\beta (x_k + x_{k+1})^2 + (\beta - 1)^2 x_k x_{k+1}}{(x_k + x_{k+1})(x_{k+1} + x_{k+2})}} \\
&> 2\sqrt{\alpha\beta \cdot \frac{x_k + x_{k+1}}{x_{k+1} + x_{k+2}}} \\
&= \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha + 1}}\sqrt{\frac{x_k + x_{k+1}}{x_{k+1} + x_{k+2}}}.
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta suy ra vế trái của bất đẳng thức Shapiro không nhỏ hơn

$$\left(\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha + 1}} - \alpha\right)n.$$

Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$g(\alpha) = \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha + 1}} - \alpha,$$

đạt được khi $\alpha = \alpha_0 = 1.1479$ (nghiệm của phương trình bậc ba $g'(\alpha) = 0$), trong đó $g(\alpha_0) \approx 0.4186$. Với $\alpha = \dfrac{5}{4}$ ta có $g(\alpha) = \dfrac{5}{12} \approx 0.416$ là một xấp xỉ không tồi. $\square$

(Còn tiếp ...)

Tài liệu tham khảo

[1] Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, 1988.

[2] Дринфельд В. Г. Об одном циклическом неравенстве // Мат. заметки. 1971. Т. 9. № 2. С. 113–119.

[3] Курляндчик Л. Д., Файбусович А. История одного неравенства // Квант. 1991. № 4. С. 14–18.

[4] Толпыго А. К. Тысяча задач Международного математического Турнира городов. М.: МЦНМО, 2009.

[5] Чимэдцэрэн С. Нэгэн орчилт нийлбэр // Математикийн олимпиадын цуврал. 1999. Т. 22. (На монгольск. яз.).

[6] Чимэдцэрэн С., Адъяасурен В., Батболд С. Оценка в одной циклической сумме // Монгол улсын их сургууль, Эрдэм шинжилгээний бичиг. 2000. Т. 7 (168). С. 79–84.

[7] Bushell P. J. *Shapiro's Cyclic Sum* // Bull. London Math. Soc. 1994. Vol. 26. No 6. P. 564–574

[8] Bushell P. J., McLeod J. B. *Shapiro's cyclic inequality for even n* // J. Inequal. & Appl., 2002. Vol. 7(3). P. 331–348

[9] Cirtoaje V. Crux Mathematicorum. 2006. Vol. 32. No. 8. Problem 3195.

[10] Daykin D. E. *Inequalities for certain cyclic sums* // Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 1970/71. Vol. 17. P. 257–262.

[11] Diananda P. H. *Extensions of an inequality of H. S. Shapiro* // Amer. Math. Monthly 1959. Vol. 66. P. 489–491.

[12] Diananda P. H. *On a conjecture of L. J. Mordell regarding an inequality involoving quadratic forms* // J. London Math. Soc. 1961. Vol. 36. P. 185–192.

[13] Diananda P. H. *Inequalities for a class of cyclic and other sums* // J. London Math. Soc. 1962. Vol. 37. P. 424–431.

[14] [14] Diananda P. H. *Some cyclic and other inequalities* // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1962. Vol. 58. P. 425–427.

[15] Diananda P. H. *Some cyclic and other inequalities*, II // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1962. Vol. 58. P. 703–705.

[16] Diananda P. H. *On a cyclic sum* // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1963. Vol. 6. P. 11–13.

[17] Elbert A. On a cyclic inequality // Period. Math. Hungarica. 1973. Vol. 4. No 2–3. P. 163–168.

[18] Malcolm M. A. *A note on a conjecture of L. J. Mordell* // Math. Comp. 1971. Vol. 25. P. 375–377.

[19] Mitrinovic D. S., Pecaric J. E., Fink A. M. *Classical and new inequalities in analysis*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993. (Mathematics and its Applications (East European Series), Vol. 61).

[20] Mordell L. J. *On the inequality* $\sum_{r=1}^{n} \frac{x_r}{x_{r+1} + x_{r+2}} \geq \frac{n}{2}$ *and some others* // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1958. Vol. 22. P. 229–240.

[21] Nowosad P. *Isoperimetric eigenvalue problems in algebras* // Comm. Pure Appl. Math. 1968. Vol. 21. P. 401–465.

[22] Shapiro H. S., Northover F. H. Amer. Math. Monthly. 1956. Vol. 63. No 3. P. 191–192.

[23] Tanahashi K., Tomiyama J. Indecomposable positive maps in matrix algebras // Canad. Math. Bull. 1988. Vol. 31. No 3. P. 308–317.

[24] Troesch B. A. Full solution of Shapiro's cyclic inequality // Notices Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 39. No 4. P. 318.

[25] Vukmirovic J. A note on an inequality for the cyclic sums introduced by D. E. Daykin // Math. Balk. 1978. Vol. 8. P. 293–297.

[26] Yamagami S. Cyclic inequalities // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. Vol. 118. No 2. P. 521–527.

[27] Zulauf A. Note on a conjecture of L. J. Mordell // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1958. Vol. 22. P. 240–241.

[28] Zulauf A. Note on an Inequality // Math. Gazette. 1962. Vol. 46. No 355. P. 41–42.

MA TRẬN NGẪU NHIÊN
(tiếp theo và hết)

Vũ Hà Văn - Đại học Yale, Mỹ

7. Mở rộng đồ thị và giá trị riêng thứ hai

Cho G là một đồ thị liên thông trên n đỉnh và A là ma trận kề của nó với các giá trị riêng $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Nếu G là $d-$đều thì $\lambda_1 = d$ và theo định lý Perron-Frobenius không trị riêng nào có trị tuyệt đối lớn hơn. Một tham số cơ bản được quan tâm là:

$$\lambda(G) := \max_{|\lambda_i|<d} |\lambda_i|.$$

Ta có thể suy ra được rất nhiều những tính chất thú vị của đồ thị từ giá trị của tham số này. Hiện tượng tổng quát là:

Hiện tượng III. *Nếu $\lambda(G)$ nhỏ hơn d một cách đáng kể thì các cạnh của G phân bố như trong một đồ thị ngẫu nhiên với mật độ cạnh d/n.*

Điều này dẫn đến khái niệm quan trọng về giả- hay tựa-ngẫu nhiên [11] [2]. Một sự kiện mang tính đại diện là sự kiện sau [3]. Cho A, B là tập hợp các đỉnh và $E(A, B)$ là số các cạnh với một đầu mút trong A và đầu mút còn lại trong B. Khi đó:

$$|E(A, B) - \frac{d}{n}|A||B|| \leq \lambda(G)\sqrt{|A||B|}. \tag{7.1}$$

Chú ý rằng số hạng $\frac{d}{n}|A||B|$ là kỳ vọng của số cạnh giữa A và B nếu G là ngẫu nhiên (trong nghĩa Erdös-Rényi) với mật độ cạnh d/n. Đồ thị với λnhỏ thường được gọi là giả-ngẫu nhiên [11, 40].

Người ta có thể sử dụng thông tin về phân bố cạnh để suy ra các tính chất khác nhau của đồ thị ([40] cho nhiều kết quả dạng này). Toàn bộ lý thuyết này có thể tổng quát hóa cho đồ thị không đều, sử dụng ma trận Laplace thay vì ma trận kề (xem, ví dụ, [12]). Từ (7.1), ta thấy rằng λ càng nhỏ thì tính "ngẫu nhiên" của G càng cao. *Nhưng λ có thể nhỏ như thế nào?*

Alon và Boppana [1] chứng minh rằng nếu d là cố định và n dần đến vô cùng thì:

$$\lambda(G) \geq 2\sqrt{d-1} - o(1).$$

Đồ thị thỏa mãn $\lambda(G) < 2\sqrt{d-1}$ được gọi là đồ thị Ramanujan. Rất khó có thể xây dựng một đồ thị, và tất cả các ví dụ như vậy, như là ví dụ của Lubotzky-Phillip-Sarnak [41] và Margulis [42] đều dựa vào các kết quả của lý thuyết số trong đó yêu cầu d phải có các giá trị đặc biệt. Một cách tiếp cận tổ hợp hơn được tìm ra bởi Markus, Spielman, và Snivastava [47]. Phương pháp của họ (ít nhất là trong trường hợp đồ thị hai phía) áp dụng được cho mọi d, nhưng phương pháp xây dựng này không tường minh.

Định lý 7.1. *Đồ thị hai phía Ramanujan tồn tại cho mọi bậc $d \geq 3$ cố định và mọi n đủ lớn.*

Trong khi việc chứng minh sự tồn tại của đồ thị Ramanujan đã là rất không tầm thường, câu hỏi thực sự, theo ý kiến của chúng tôi là tính phân phối giới hạn của $\lambda(G_{n,d}) - 2\sqrt{d-1}$ sau khi đã chuẩn hóa một cách thích hợp, điều sẽ dẫn đến xác suất chính xác để đồ thị đều ngẫu nhiên là Ramanujan. Được thúc đẩy bởi các nghiên cứu từ lý thuyết ma trận ngẫu nhiên, có vẻ có lý khi đưa ra giả thuyết rằng $n^{2/3}\dfrac{\lambda(G_{n,d})}{\sqrt{d-1}-2}$ dần đến phân phối Tracy-Widom.

Một giả thuyết yếu hơn, được đưa ra bởi Alon [1] khẳng định rằng với mọi d cố định, với xác suất 1–$o(1)$ thì:

$$\lambda_2(G_{n,d}) = 2\sqrt{d-1} + o(1).$$

Friedman [26] và Kahn và Szemerédi [36] chứng minh được rằng nếu d là cố định và n dần đến vô cùng thì với xác suất 1–$o(1)$, $\lambda(G_{n,d}) = O(\sqrt{d})$. Khoảng 10 năm trước, Friedman, trong một bài báo mang tính kỹ thuật cao [27], đã sử dụng phương pháp quán tính để chứng minh giả thuyết của Alon (cũng xem [28] cho những mở rộng mới nhất).

Định lý 7.2. *[27] Với với mọi d cố định, với xác suất 1–$o(1)$ thì:*

$$\lambda(G_{n,d}) = 2\sqrt{d-1} + o(1).$$

Điều gì sẽ xảy ra khi d cũng tiến đến vô cùng cùng với n? Để bắt đầu, là không khó để chứng minh rằng $\lambda(G(n,p))$ với $G(n,p)$ là đồ thị ngẫu nhiên Erdös-Réyi, bằng $(2+o(1))\sqrt{np(1-p)}$ với p đủ lớn (ví dụ $p \geq n^{-1+\epsilon}$ với mọi $0 < \epsilon < 1$). Điều này tạo động cơ cho:

Giả thuyết 7.1. *Giả sử rằng $d \leq n/2$ và cả d và n cùng tiến để vô cùng. Khi đó:*

$$\lambda(G_{n,d}) = (2 + o(1))\sqrt{d(1-d/n)}.$$

Nilli [49] chứng minh rằng với mọi đồ thị $d-$đều G có hai cạnh với khoảng cách giữa chúng ít nhất là $2k+2$, $\lambda_2(G) \geq 2\sqrt{d-1} - 2\sqrt{d-1}/(k+1)$. Mọi đồ thị d-đều với $d = n^{o(1)}$ có đường kính $\omega(1)$. Trong phạm vi này của d thì:

$$\lambda(G_{n,d}) \geq \lambda_2(G_{n,d}) \geq (2 + o(1))\sqrt{d}$$

với xác suất bằng 1. Điều này chứng minh cận dưới trong giả thuyết 7.1. Với d tổng quát, ta có thể chứng minh dễ dàng (bằng cách tính vết của bình phương của ma trận kề) rằng mọi đồ thị d-đều trên n đỉnh thỏa mãn:

$$\lambda(G) \geq \sqrt{d(n-d)/(n-1)} \approx \sqrt{d(1-d/n)}.$$

(Chúng tôi muốn cảm ơn N.Alon đã chỉ ra đánh giá này.)

Bây giờ ta quay sang đánh giá chặn trên. Với $d = o(n^{1/2})$, ta có thể theo cách tiếp cận của Kahn-Szemerédi để chứng minh rằng $\lambda(G_{n,d}) = O(\sqrt{d})$ với xác suất cao. Tuy nhiên, ta không biết điều này cho d lớn hơn. Ví dụ như giả thuyết sau đây vẫn mở

Giả thuyết 7.2. *Với xác suất $1 - o(1)$, $\lambda(G_{n,n/2}) = O(\sqrt{n})$.*

8. Véc-tơ Riêng

Nếu M là ma trận đối xứng thì các véc-tơ riêng (đơn vị) của chúng tạo thành một cơ sở trực chuẩn. Các công trình liên quan đến véc-tơ riêng được thúc đẩy bởi:

Hiện tượng IV. *Các véc-tơ riêng ngẫu nhiên có quy luật gần giống như véc-tơ ngẫu nhiên được chọn đều từ mặt cầu đơn vị.*

Một tham số được xem xét đến nhiều là chuẩn vô hạn, vì nó đóng một vai trò rất lớn trong những nghiên cứu gần đây về tính phổ dụng (xem [25, 72]). Tiếp theo các kết quả trước đây [24, 65], gần đây Vũ và Wang [79] đã chứng minh:

Định lý 8.1. *Với xác suất* $1 - o(1)$,

$$\max \|v\|_\infty \leq C\sqrt{\frac{\log n}{n}},$$

Trong đó max lấy trên "búi" các véc-tơ riêng của M_n^{sym}. *Nếu ta xét cả các véc-tơ riêng "bên rìa" ("edge" eigenvectors), thì cận trên sẽ trở thành* $C\dfrac{\log n}{\sqrt{n}}$, *trong đó* C *là hằng số.*

Chú ý rằng một véc-tơ được chọn đều từ mặt cầu đơn vị có tọa độ có độ lớn $\Theta(\sqrt{\frac{\log n}{n}})$ ta tin rằng cận $O(\sqrt{\frac{\log n}{n}})$ là chặt. Một kết quả tương tự, nhưng yếu hơn (với bậc của $\log n$ lớn hơn) cũng đúng cho mô hình không đối xứng M_n, tương ứng với cả các véc-tơ suy biến và véc-tơ riêng [58]. Tình hình với ma trận kề của đồ thị ngẫu nhiên thì phức tạp hơn một chút. Xét $A(n, p)$ với $p = \Theta(1)$. Tổng của mọi hàng gần với np. Điều này gợi ý là giá trị riêng lớn nhất λ_1 của $A(n, p)$ xấp xỉ bằng np và véc-tơ riêng v_1 tương ứng gần với $\frac{1}{\sqrt{n}}v_0$, trong đó v_0 là véc-tơ toàn 1. Điều này một cách trực quan được xác nhận bởi Komlós và Füredi [29] và được làm mạnh bởi Mitra [44].

Trong [17], Dekel, Lee và Linial, được thúc đẩy bởi các nghiên cứu về miền nút (nodal domains), đã đưa ra câu hỏi sau:

Câu hỏi. Phải chăng mọi véc-tơ riêng của u của $G(n, p)$ có $||u||_\infty = n^{-1/2+o(1)}$ với xác suất cao?

Xem nhiều kết quả liên quan, chúng tôi tham khảo [75, 22, 23]. Một câu hỏi khác được thúc đẩy bởi Hiện tượng IV là câu hỏi sau:

Giả thuyết 8.1. *Giả sử rằng* $p \geq \dfrac{(1+\epsilon)\log n}{n}$ *với hằng số* $\epsilon > 0$ *nào đó. Gọi* v *là ma trận đơn vị ngẫu nhiên với phân phối đều trên hình vuông đơn vị* n *chiều. Gọi* u *là véc-tơ riêng đơn vị (không tương ứng với trị riêng lớn nhất) của* $G(n, p)$. *Khi đó với mọi* $\delta > 0$ *cố định và véc-tơ đơn vị* w:

$$\P(|w \cdot u - w \cdot v| > \delta) = o(1).$$

Xem [74] để biết các kết quả riêng về giả thuyết này.

Bây giờ chúng ta xét đồ thị đều ngẫu nhiên. Gần đây Dimitriu và Pal [18] chứng minh được kết quả sau. Giả sử $d = \log^{\gamma} n$ với hằng số $0 < \gamma < 1$, và đặt $\eta_n := \dfrac{6(\log d)^{1+\sigma}}{\sqrt{\log n}}$, trong đó $\sigma > 0$ là hằng số. Véc-tơ đơn vị $v = (v_1, \dots, v_n)$ là (T, ϵ)-địa phương hóa nếu như tồn tại tập X kích thước T sao cho $\sum_{i \in X} v_i^2 \geq \epsilon$.

Định lý 8.2. *Với mọi $\epsilon > 0$ cố định, với xác suất $1 - o(1)$, không có véc-tơ riêng nào của $A(n, d)$ là $(o(\eta_n^{-1}), \epsilon)$-địa phương hóa.*

Một kết quả mới hơn của Brooks và Lindenstrauss [10] chứng tỏ rằng:

Định lý 8.3. *Cho d, ϵ là các hằng số. Khi đó tồn tại hằng số$\delta = \delta(d, \varepsilon) > 0$ sao cho điều sau đây đúng. Với xác suất $1 - o(1)$, không véc-tơ riêng nào của $A(n, d)$ là (n^{δ}, ϵ))-địa phương hóa.*

Thực tế, kết quả của Brooks và Lindenstrauss đúng cho đồ thị đơn định, với điều kiện trên các chu trình ngắn vốn đúng với xác xuất cao với các đồ thị đều ngẫu nhiên với bậc cố định.

Câu hỏi. Ta có thể thay (n^{δ}, ϵ)-địa phương hóa trong Định lý 8.3 bởi $(\delta n, \epsilon)$-địa phương hóa được không?

9. Đồ thị đều ngẫu nhiên: Luật Mc Kay và luật Wigner

Chúng ta thảo luận ngắn gọn về phân bố phổ của đồ thị đều ngẫu nhiên. Trong những năm 1950, Wigner [77] đã tìm ra nửa đường tròn nổi tiếng cho phân bố giới hạn của các giá trị riêng của ma trận ngẫu nhiên. Chứng minh của ông được mở rộng không mấy khó khăn, cho ma trận kề của $G(n, p)$, nếu giả thiết rằng $np \to \infty$ cùng với n.

Định lý 9.1. *Với $p = \omega(\frac{1}{n})$, phân phối phổ thực nghiệm (ESD) của ma trận $\frac{1}{\sqrt{n}\sigma} A_n$ hội tụ theo nghĩa phân phối đến luật nửa đường tròn có mật độ $\rho_{sc}(x)$ với giá trên $[-2, 2]$,*

$$\rho_{sc}(x) := \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2}.$$

Nếu $np = O(1)$, luật nửa đường tròn không còn đúng nữa. Trong trường hợp này, đồ thị hầu như sẽ có $\Theta(n)$ đỉnh cô lập, như thế trong giới hạn, điểm gốc sẽ có trọng lượng không đổi dương.

Trong trường hợp đồ thị đều ngẫu nhiên, $G_{n,d}$, được xem xét bởi McKay [43] khoảng 30 năm trước. Ông sử dụng phương pháp vết, đã chứng minh nếu d cố định và $n \to \infty$, thì hàm mật độ giới hạn sẽ là:

$$f_d(x) = \begin{cases} \dfrac{d\sqrt{4(d-1) - x^2}}{2\pi(d^2 - x^2)}, & \text{nếu } |x| \leq 2\sqrt{d-1}; \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Kết quả này thường được gọi là luật McKay hay luật Kesten-McKay. Dễ dàng kiểm tra được rằng khi $d \to \infty$, nếu ta chuẩn hóa biến x bởi $\sqrt{d-1}$, mật độ nói trên sẽ hội tụ về luật nửa đường tròn trên $[-2, 2]$. Vì vậy một cách tự nhiên khi đưa ra giả thuyết rằng định lý 9.1 đúng cho $G_{n,d}$ khi $d \to \infty$.

Định nghĩa:

$$M'_{n,d} := \frac{1}{\sqrt{d}}(A_{n,d} - \frac{d}{n}J).$$

Giả thuyết 9.1. *Nếu $d \to \infty$ thì ESD của $\frac{1}{\sqrt{n}} M'_{n,d}$ hội tụ tới luật nửa đường tròn.*

Dimitriu và Pal [18] chứng minh rằng giả thuyết đúng cho trường hợp d dần đến vô cùng rất chậm, $d = n^{o(1)}$. Chứng minh của họ, có sử dụng phương pháp vết, không áp dụng được cho trường hợp d lớn hơn vì nó dựa trên cấu trúc cây địa phương của đồ thì, vốn không còn đúng nếu $d = n^c$ với mọi hằng số $c > 0$. Rất gần đây, Trần, Vũ và Wang [75] đã chứng minh Giả thuyết 9.1 một cách tổng quát, sử dụng một phương pháp khác dựa trên độ tập trung sắc (sharp concentration) từ [32].

Định lý 9.2. *Nếu d dần đến vô cùng khi n dần đến vô cùng thì phân phối phổ thực nghiệm của $\frac{1}{\sqrt{n}} M'_n$ hội tụ trong phân phối về phân phối nửa đường tròn.*

10. Một số vấn đề khác

Khoảng 15 năm trước, Krivelevich có đặt cho tôi câu hỏi sau: Có phải chăng (với xác suất $1 - o(1)$), $A(n, 1/2)$ không có giá trị riêng bội?

Trong những trao đổi gần đây, L. Babai lưu ý rằng ông đã nghĩ đến câu hỏi như vậy sớm hơn nhiều. Chúng tôi có niềm tin mạnh mẽ rằng câu trả lời là khẳng định, và điều này cũng đúng cho các mô hình khác của ma trận ngẫu nhiên.

Giả thuyết 10.1. *Với xác suất $1 - o(1)$,*

- *$A(n, 1/2)$ không có giá trị riêng bội.*
- *M_n không có giá trị riêng bội.*
- *M_n không có giá trị suy biến bội.*
- *M_n^{sym} không có giá trị riêng bội.*
- *M_n^{sym} không có giá trị suy biến bội.*

Một giả thuyết thú vị khác (và có lẽ là rất khó) là giả thuyết sau, được nêu ra trong trao đổi giữa tác giả và P. Wood vào năm 2009. Mới đây, L.Babai thông báo cho chúng tôi rằng ông đã đưa ra giả thuyết giống như vậy (nhưng không công bố) vào những năm 1970.

Giả thuyết 10.2. *Với xác suất $1 - o(1)$, đa thức đặc trưng của M_n là bất khả quy.*

Đây là một giả thuyết khác:

Giả thuyết 10.3. *Một ma trận ± 1 là xác định bởi phổ của nó nếu không có một ma trận ± 1 khác có cùng phổ. Chứng minh rằng hầu như mọi ma trận ± 1 đều xác định bởi phổ của nó (không tính đến những hoán vị tầm thường).*

Giả thuyết dưới đây được thúc đẩy bởi công trình chung của chúng tôi với Tao trong [70]

Giả thuyết 10.4. *M_n có, với xác suất cao, $\Theta(\sqrt{n})$ giá trị riêng thực.*

Edelman, Kostlan và Shub [19] đã thu được công thức tính kỳ vọng của số giá trị riêng thức của ma trận Gauss (có bậc $\Theta(\sqrt{n})$). Trong [70], Tao và Vũ chứng minh được rằng công thức đó cũng đúng (theo nghĩa tiệm cận) cho những ma trận ngẫu nhiên nhất định với các hệ số $(0, \pm 1)$. Tuy nhiên, chúng ta không biết điều gì cho M_n. Sự thật là ngay cả bước đâu tiên như sau cũng là khó.

Câu hỏi. Chứng minh rằng M_n có, với xác suất cao, ít nhất 2 giá trị riêng thực.

Câu hỏi tiếp theo mang một số điểm tương đồng với vấn đề về "độ cứng" nổi tiếng trong khoa học máy tính. Cho M là một ma trận $1, -1$, ta ký hiệu $Res(M)$ là số hệ số nhỏ nhất ta cần đổi dấu (từ 1 thành -1 và ngược lại) để biến M thành suy biến. Nếu M được chọn từ M_n, thì dễ dàng chứng minh được rằng $Res(M)$, với xác suất cao, tối đa là $(1/2 + o(1))n$. Chúng tôi đưa ra giả thuyết rằng đây là đánh giá tốt nhất.

Giả thuyết 10.5. *Với xác suất $1 - o(1)$, $Res(M_n) = (1/2 + o(1))n$.*

Một câu hỏi có liên quan chặt chẽ (thúc đẩy bởi khái niệm phục hồi địa phương từ [62]) là câu hỏi sau đây . Gọi $\{-1, 1\}$ (n by n) ma trận M kích thước $(n \times n)$ là M *tốt* nếu tất cả các ma trận thu được bằng cách chuyển đổi các hệ số (1 thành -1 và ngược lại) trên đường chéo là không suy biến (có 2^n ma trận như vậy).

Giả thuyết 10.6. *Với xác suất $1 - o(1)$, M_n là tốt.*

Cuối cùng, chúng tôi liệt kê một vài bài báo gần đây liên quan đến các nhóm định nghĩa trên ma trận ngẫu nhiên với các hệ số trong trường hữu hạn [80, 48]. Hướng đi này là mới và các công trình này cần sự giới thiệu tỉ mỉ, sẽ xuất hiện những bài báo khác.

Lời cảm ơn. Tác giả muốn dành lời cảm ơn với sự giúp đỡ từ NSF và AFORS.

Như vậy, sau ba số Epsilon liên tục, chúng tôi, Ban Biên tập Epsilon đã giới thiệu trọn vẹn với độc giả bài báo cáo của GS Vũ Hà Văn tại Đại hội Toán học Thế giới 2014 (ICM 2014). Đây là lĩnh vực mới, ít có tài liệu tiếng Việt nên trong dịch thuật chúng tôi không thể tránh khỏi có thể có những chỗ chưa chuẩn, rất mong nhận được ý kiến đóng góp của bạn đọc. Và như ở hai số trước, chúng tôi cũng giới thiệu với độc giả bản gốc tiếng Anh cho bài viết ở trang sau.

Motivated by the singularity problem, it is also interesting to find a strong estimate for the probability that the permanent is zero. The current bound is only polynomial in n.

There are further studies concerning the distributions of $\log|\det M_n|$ and $\log|\det M_n^{sym}|$; see [31, 30, 54, 63] and the references therein.

7. Graph expansion and the second eigenvalue

Let G be a connected graph on n points and A its adjacency matrix with eigenvalues $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. If G is d-regular then $\lambda_1 = d$ and by Perron-Frobenius theorem no eigenvalue has larger absolute. A parameter if fundamental interest is

$$\lambda(G) := \max_{|\lambda_i|<d} |\lambda_i|.$$

One can derive many interesting properties of the graph from the value this parameter. The general phenomenon here is

Phenomenon III. *If $\lambda(G)$ is significantly less than d, then the edges of G distribute like in a random graph with edge density d/n.*

This leads to the important notion of pseudo- or quasi-randomness [11] [2]. A representative fact is the following [3]. Let A, B be sets of vertices and $E(A, B)$ the number of edges with one end point in A and the other in B, then

$$|E(A,B) - \frac{d}{n}|A||B|| \leq \lambda(G)\sqrt{|A||B|}. \tag{5}$$

Notice that the term $\frac{d}{n}|A||B|$ is the expectation of the number of edges between A and B if G is random (in the Erdös-Rényi sense) with edge density d/n. Graphs with small λ are often called *pseudo-random* [11, 40].

One can use this information about edge distribution to derive various properties of the graph (see [40] for many results of this kind). The whole concept can be generalized for non-regular graphs, using the Laplacian rather than the adjacency matrix (see, for example, [12]).

From (5), it is clear that the smaller λ, the more "random" is G. *But how small can λ be ?*

Alon and Boppana [1] proved that if d is fixed and n tends to infinity, then

$$\lambda(G) \geq 2\sqrt{d-1} - o(1).$$

Graphs which satisfy $\lambda(G) < 2\sqrt{d-1}$ are called Ramanujan graphs. It is very hard to construct such graphs, and all known constructions, such as those by Lubotzky-Phillip-Sarnak [41] and Margulis [42] rely heavily on number theoretic results, which requires d to have specific values. A more combinatorial approach was found recently by Markus, Spielman, and Snivastava [47]. Their method (at least in the bipartite case) works for all d, but the construction is not explicit.

Theorem 7.1. *A bipartite Ramanujan graph exists for all fix degrees $d \geq 3$ and sufficiently large n.*

While showing the existence of Ramanujan graphs is already highly non-trivial, the real question, in our opinion, is to compute the limiting distribution of $\lambda(G_{n,d}) - 2\sqrt{d-1}$ after to proper normalization, which would lead to the exact probability of a random regular graph being Ramanujan. Motivated by study from Random matrix theory, it seems plausible to conjecture that $n^{2/3}\frac{\lambda(G_{n,d})}{\sqrt{d-1}-2}$ tends to the Tracy-Widom distribution.

A weaker conjecture, by Alon [1] asserts that for any fixed d, with probability $1-o(1)$

$$\lambda_2(G_{n,d}) = 2\sqrt{d-1} + o(1).$$

Friedman [26] and Kahn and Szemerédi [36] showed that if d is fixed and n tends to infinity, then with probability $1-o(1)$, $\lambda(G_{n,d}) = O(\sqrt{d})$. About 10 years ago, Friedman, in a highly technical paper [27], used the moment method to prove Alon conjecture (see also [28] for a recent genearlization)

Theorem 7.2. *[27] For any fixed* d *and* n *tends to infinity, with probability* $1-o(1)$

$$\lambda(G_{n,d}) = 2\sqrt{d-1} + o(1).$$

What happens if d tends to infinity with n? To start, it is not hard to show that $\lambda(G(n,p))$, where $G(n,p)$ is the Erdös-Réyi random graph, is $(2+o(1))\sqrt{np(1-p)}$ for sufficiently large p (e.g., $p \geq n^{-1+\epsilon}$ for any fixed $0 < \epsilon < 1$). This motivates

Conjecture 7.3. *Assume that $d \leq n/2$ and both d and n tend to infinity. Then a.s*

$$\lambda(G_{n,d}) = (2+o(1))\sqrt{d(1-d/n)}.$$

Nilli [49] showed that for any d-regular graph G having two edges with distance at least $2k+2$ between them, $\lambda_2(G) \geq 2\sqrt{d-1} - 2\sqrt{d-1}/(k+1)$. Any d regular graph with $d = n^{o(1)}$ has diameter $\omega(1)$. In this range of d

$$\lambda(G_{n,d}) \geq \lambda_2(G_{n,d}) \geq (2+o(1))\sqrt{d}$$

with probability one. This proves the lower bound in Conjecture 7.3. For a general d, it is easy to show (by computing the trace of the square of the adjacency matrix) that any d-regular graph G on n vertices satisfies

$$\lambda(G) \geq \sqrt{d(n-d)/(n-1)} \approx \sqrt{d(1-d/n)}.$$

(We would like to thank N. Alon for pointing out this bound.)

Let us now turn to the upper bound. For $d = o(n^{1/2})$, one can follow Kahn-Szemerédi approach to show that $\lambda(G_{n,d}) = O(\sqrt{d})$ with high probability. However, we do not know this for larger d. For instance, the following is open

Conjecture 7.4. *With probability* $1 - o(1)$, $\lambda(G_{n,n/2}) = O(\sqrt{n})$.

8. Eigenvectors

If M is symmetric, then its (unit) eigenvectors form an orthonormal basis. Works concerning random eigenvectors are generally motivated by

Phenomenon IV. *Random eigenvectors should behave like a random vector sampled uniformly from the unit sphere .*

One parameter which has been looked at a lot is the infinite norm, as it plays a big role in recent studies on universality (see [25, 72] for surveys). Following earlier results [24, 65], recently Vu and Wang [79] proved

Theorem 8.1. *With probability* $1 - o(1)$,

$$\max \|v\|_\infty \leq C\sqrt{\frac{\log n}{n}},$$

where the maximum is taken over the "bulk" eigenvectors of M_n^{sym}. *If one also considers the "edge" eigenvectors, the bound becomes* $C\frac{\log n}{\sqrt{n}}$, *where* C *is a constant.*

Notice that a vector sampled uniformly from the unit sphere does have a coordinate of magnitude $\Theta(\sqrt{\frac{\log n}{n}})$, we believe that the bound $O(\sqrt{\frac{\log n}{n}})$ is best possible. Similar, but weaker, results (with higher powers of $\log n$) hold for the non-symmetric model M_n, with respect to both singular vectors and eigenvectors [**?**, 58].

The situation with the adjacency matrix of a random graph is somewhat more complicated. Consider $A(n,p)$ with $p = \Theta(1)$. The sum of any rows is close to np. It suggests that the largest eigenvalue λ_1 of $A(n,p)$ is approximately np and its corresponding eigenvector v_1 is close to $\frac{1}{\sqrt{n}} v_0$, where v_0 is the all-one vector. This intuition was confirmed by Komlós and Füredi [29], and strengthened by Mitra [44].

In [17], Dekel, Lee and Linial, motivated by the study of nodal domains, raised the following question.

Question 8.1. *Is it true that every eigenvector u of $G(n,p)$ has $||u||_\infty = n^{-1/2+o(1)}$ with high probability ?*

For many related results, we refer to [75, 22, 23]. Another question motivated by Phenomenon IV is the following.

Conjecture 8.2. *Assume $p \geq \frac{(1+\epsilon)\log n}{n}$ for some constant $\epsilon > 0$. Let v be a random unit vector whose distribution is uniform in the n-dimensional unit square. Let u be a unit eigenvector (not corresponding to the largest eigenvalue) of $G(n,p)$. Then for any fixed $\delta > 0$ and unit vector w*

$$\mathbf{P}(|w \cdot u - w \cdot v| > \delta) = o(1).$$

For partial results, see [74].

Let us now consider random regular graphs. Recently Dimitriu and Pal [18] proved the following result. Let $d = \log^\gamma n$ for a constant $0 < \gamma < 1$, and set $\eta_n := \frac{6(\log d)^{1+\sigma}}{\sqrt{\log n}}$ where $\sigma > 0$ is a constant. A unit vector $v = (v_1, \ldots, v_n)$ is (T,ϵ)-localized if there is a set X of size T such that $\sum_{i \in X} v_i^2 \geq \epsilon$.

Theorem 8.3. *For any fixed $\epsilon > 0$, with probability $1 - o(1)$, no eigenvector of $A(n,d)$ is $(o(\eta_n^{-1}), \epsilon)$-localized.*

A more recent result of Brooks and Lindenstrauss [10] showed

Theorem 8.4. *Let d, ϵ be constants. Then there is a constant $\delta = \delta(d,\varepsilon) > 0$ such that the following holds. With probability $1 - o(1)$, no eigenvector of $A(n,d)$ is (n^δ, ϵ) localized.*

In fact, Brooks and Lindenstrauss result holds for deterministic graphs, under a condition on short cycles, which hold with high probability for regular random graphs with constant degree.

Problem 8.2. *Can we replace the (n^δ, ϵ) -localization in Theorem 8.4 by $(\delta n, \epsilon)$-localization ?*

9. Random regular graphs: Mc Kay law and Wigner law

We briefly discuss the spectral distribution of regular random graphs. In 1950s, Wigner [77] discovered the famous semi-circle for the limiting distribution of the eigenvalues of random matrices. His proof extends, without difficulty, to the adjacency matrix of $G(n,p)$, given that $np \to \infty$ with n.

Theorem 9.1. *For $p = \omega(\frac{1}{n})$, the empirical spectral distribution (ESD) of the matrix $\frac{1}{\sqrt{n}\sigma} A_n$ converges in distribution to the semicircle law which has a density $\rho_{sc}(x)$ with support on $[-2,2]$,*

$$\rho_{sc}(x) := \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}.$$

If $np = O(1)$, the semicircle law no longer holds. In this case, the graph almost surely has $\Theta(n)$ isolated vertices, so in the limit, the origin has a positive constant mass.

The case of random regular graph, $G_{n,d}$, was considered by McKay [43] about 30 years ago. He proved, using the trace method, that if d is fixed, and $n \to \infty$, then the limiting density function is

$$f_d(x) = \begin{cases} \frac{d\sqrt{4(d-1)-x^2}}{2\pi(d^2-x^2)}, & \text{if } |x| \le 2\sqrt{d-1}; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

This is usually referred to as McKay or Kesten-McKay law. It is easy to verify that as $d \to \infty$, if we normalize the variable x by $\sqrt{d-1}$, the above density converges to the semicircle law on $[-2,2]$. It is thus natural to conjecture that Theorem 9.1 holds for $G_{n,d}$ with $d \to \infty$. Define

$$M'_{n,d} := \frac{1}{\sqrt{d}}(A_{n,d} - \frac{d}{n}J).$$

Conjecture 9.2. *If $d \to \infty$ then the ESD of $\frac{1}{\sqrt{n}} M'_{n,d}$ converges to the semicircle law.*

Dimitriu and Pal [18] showed that the conjecture holds for d tending to infinity very slowly, $d = n^{o(1)}$. Their proof which used trace method does not work for larger d as it relies on the tree-like local structure of the graph, which no longer holds if $d = n^c$ for any constant $c > 0$. Very recently, Tran, Vu and Wang [75] proved Conjecture 9.2 in full generality, using a completely different method based on a sharp concentration from [32].

Theorem 9.3. *If d tends to infinity as n goes to infinity, then the empirical spectral distribution of* $\frac{1}{\sqrt{n}} M'_n$ *converges in distribution to the semicircle distribution.*

10. Miscellany

About 15 years ago, Krivelevich asked me the following question: Is it true that (with probability $1 - o(1)$), $A(n, 1/2)$ does not have any multiple eigenvalues ?

In a more recent conversation, L. Babai mentioned that he came up with the same question much earlier. We strongly believe that the answer to this question is affirmative, and the same must hold for other models of random matrices.

Conjecture 10.1. *With probability* $1 - o(1)$,

- $A(n, 1/2)$ *does not have multiple eigenvalues.*
- M_n *does not have multiple eigenvalues.*
- M_n *does not have multiple singular values.*
- M_n^{sym} *does not have multiple eigenvalues.*
- M_n^{sym} *does not have multiple singular values.*

Another interesting (and seemingly very hard) conjecture is the following, which came up in the conversation between the author and P. Wood in 2009. Recently, L. Babai informed us that he made the same conjecture (unpublished) in the 1970s.

Conjecture 10.2. *With probability* $1 - o(1)$, *the characteristic polynomial of* M_n *is irreducible.*

Here is another conjecture

Conjecture 10.3. *A* ± 1 *matrix is determined by its spectrum if no other* ± 1 *matrix has the same spectrum. Prove that almost all* ± 1 *matrices are determined by their spectrum (not counting trivial permutations).*

The following conjecture is motivated by our joint work with Tao in [70]

Conjecture 10.4. M_n *has, with high probability,* $\Theta(\sqrt{n})$ *real eigenvalues.*

Edelman, Kostlan and Shub [19] obtained a formula for the expectation of the number of real eigenvalues for a gaussian matrix (which is or order $\Theta(\sqrt{n})$). In [70], Tao and Vu proved that the same formula holds (in the asymptotic sense) for certain random matrices with entries $(0, \pm 1)$. However, we do not know anything for M_n. As a matter of fact, even the following "first step" seems hard

Problem 10.1. *Prove that M_n has, with high probability, at least 2 real eigenvalues.*

The next problem bears some resemblance to the famous "rigidity" problem in computer science. Given $\{-1, 1\}$ matrix M, we denote by $Res(M)$ the minimum number of entries we need to switch (from 1 to -1 and vice versa) in order to make M singular. If M is a sample of M_n, it is easy to show that $Res(M)$ is, with high probability, at most $(1/2 + o(1))n$, We conjecture that this is the best one can do.

Conjecture 10.5. *With probability $1 - o(1)$, $Res(M_n) = (1/2 + o(1))n$.*

A closely related question (motivated by the notion of local resilience from [62]) is the following. Call a $\{-1, 1\}$ (n by n) matrix M *good* if all matrices obtained by switching (from 1 to -1 and vice versa) the diagonal entries of M are non-singular (there are 2^n such matrices).

Conjecture 10.6. *With probability $1 - o(1)$, M_n is good.*

Finally, let us list a few recent papers concerning groups defined over random matrices with entries from a finite field [80, 48]. This direction is new and these works need an elaborate introduction, which will appear else where.

Acknowledgement. The author would like to thank NSF and AFORS for their generous support.

References

[1] N. Alon, Eigenvalues and expanders, *Combinatorica* 6(1986), no. 2, 83-96.

[2] N. Alon and V. Milman, λ_1- isoperimetric inequalities for graphs, and supercon- centrators, *J. Combin. Theory Ser. B 38* (1985), no. 1, 73-88.

[3] N. Alon and J. Spencer, The probabilistic method, 3rd ed., *John Wiley & Sons Inc.*, Hoboken, NJ, 2008.

[4] R. Arratia and S. DeSalvo, On the singularity of random Bernoulli matricesnovel integer partitions and lower bound expansions, *Ann. Comb.* 17 (2013), no. 2, 251274.

[5] Z. Bai and J. Silverstein, Spectral analysis of large dimensional random matrices. Second edition. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 2010.

Tài liệu tham khảo

[1] N. Alon, Eigenvalues and expanders, *Combinatorica* 6(1986), no. 2, 83-96.

[2] N. Alon and V. Milman, λ_1- isoperimetric inequalities for graphs, and supercon- centrators, *J. Combin. Theory Ser. B 38* (1985), no. 1, 73-88.

[3] N. Alon and J. Spencer, The probabilistic method, 3rd ed., *John Wiley & Sons Inc.*, Hoboken, NJ, 2008.

[4] R. Arratia and S. DeSalvo, On the singularity of random Bernoulli matricesÑnovel integer partitions and lower bound expansions, *Ann. Comb.* 17 (2013), no. 2, 251-274.

[5] Z. Bai and J. Silverstein, Spectral analysis of large dimensional random matrices. Second edition. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 2010.

[6] B. Bollobás, Random graphs. Second edition, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 73. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[7] B. Bollobás, Combinatorics. Set systems, hypergraphs, families of vectors and combinatorial probability. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[8] C. Bordenave, M. Lelarge, and J. Salez, The rank of diluted random graphs, *Ann. Probab.* 39 (2011), no. 3, 1097-1121.

[9] J. Bourgain, V. Vu and P. M. Wood, On the singularity probability of discrete random matrices, *J. Funct. Anal.* 258 (2010), no. 2, 559–603.

[10] S. Brooks and E. Lindenstrauss, Non-localization of eigenfunctions on large regular graphs, *Israel J. Math.* 193 (2013), no. 1, 1–14

[11] Chung, F. R. K.; Graham, R. L.; Wilson, R. M. Quasi-random graphs. *Combinatorica* 9 (1989), no. 4, 345–362.

[12] F. Chung, Spectral graph theory, *CBMS series*, no. 92 (1997).

[13] K. Costello, Bilinear and quadratic variants on the Littlewood-Offord problem,*Israel J. Math.* 194 (2013), no. 1, 359–394.

[14] K. Costello and V. Vu, The ranks of random graphs. *Random Structures and Algorithm.* 33 (2008), 269-285

[15] K. Costello and V. Vu, The rank of sparse random matrices, *Combin. Probab. Comput.* 19 (2010), no. 3, 321–342.

[16] K. Costello, T. Tao and V. Vu, Random symmetric matrices are almost surely singular, *Duke Math. J.* 135 (2006), no. 2, 395–413.

[17] Y. Dekel, J. Lee, and N. Linial. Eigenvectors of random graphs: Nodal domains.*Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques,* pages 436-448, 2008.

[18] I. Dimitriu and S. Pal, Sparse regular random graphs: spectral density and eigenvectors, *Ann. Probab.* 40 (2012), no. 5, 2197–2235.

[19] A. Edelman, E. Kostlan and M. Shub, How many eigenvalues of a random matrix are real? *J. Amer. Math. Soc.* 7 (1994), no. 1, 247–267.

[20] A. Edelman, Eigenvalues and condition numbers of random matrices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **9** (1988), 543–560.

[21] P. Erdös, On a lemma of Littlewood and Offord, *Bull. Amer. Math. Soc.* **51** (1945), 898–902.

[22] L. Erdös, A. Knowles, H-T. Yau and J. Yin, Spectral statistics of Erd?s-RŽnyi graphs I: Local semicircle law, *Ann. Probab.* 41 (2013).

[23] L. Erdös, A. Knowles, H-T. Yau and J. Yin, Spectral statistics of Erd?s-RŽnyi Graphs II: Eigenvalue spacing and the extreme eigenvalues, *Comm. Math. Phys.* 314 (2012), no. 3, 587–640.

[24] L. Erdös, B. Schlein and H-T. Yau, Wegner estimate and level repulsion for Wigner random matrices, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2010, no. 3, 436–479.

[25] L. Erdös and H-T. Yau, Universality of local spectral statistics of random matrices, *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.) 49 (2012), no. 3, 377–414.

[26] J. Friedman. On the second eigenvalue and random walks in random d-regular graphs. *Technical Report* CX-TR-172-88, Princeton University, August 1988.

[27] J. Fiedman, A proof of Alon's second eigenvalue conjecture and related problems. (English summary)*Mem. Amer. Math. Soc.* 195 (2008), no. 910, viii+100 pp.

[28] J. Friedman and D-E. Kohler, The Relativized Second Eigenvalue Conjecture of Alon, *preprint*.

[29] Z. Füredi and J. Komlós, The eigenvalues of random symmetric matrices,*Combinatorica* 1 (1981), no. 3, 233-241.

[30] V. L. Girko, A refinement of the central limit theorem for random determinants. (Russian) Teor. Veroyatnost. i Primenen. 42 (1997), no. 1, 63–73; translation in Theory Probab. Appl. 42 (1997), no. 1, 121–129 (1998)

[31] V. L. Girko, A central limit theorem for random determinants. *Teor. Veroyatnost. i Mat. Statist.* 21 (1979), 35–39, 164.

[32] A. Guionnet and O. Zeitouni, Concentration of the spectral measure for large matrices, *Electron. Comm. Probab.* 5 (2000), 119–136.

[33] H. Golstein and J. von Neumman, Numerical inverting of matrices of high order, *Bull. Amer. Math. Soc.* 53 (1947), 1021-1099.

[34] G. Halász, Estimates for the concentration function of combinatorial number theory and probability, *Period. Math. Hungar.* **8** (1977), no. 3-4, 197–211.

[35] S. Janson, T. Luczak and A. Rucinski, Random Graphs,*Wiley-Interscience* (2000)

[36] J. Kahn and E. Szemerédi, STOC 1989.

[37] J. Kahn, J. Komlós, E. Szemerédi, On the probability that a random ± 1 matrix is singular, *J. Amer. Math. Soc.* **8** (1995), 223–240.

[38] J. Komlós, On the determinant of (0, 1) matrices, *Studia Sci. Math. Hungar.* **2** (1967) 7-22.

[39] J. Komlós, On the determinant of random matrices,*Studia Sci. Math. Hungar.* **3** (1968) 387–399.

[40] M. Krivelevich and B. Sudakov, Pseudo-random graphs.*More sets, graphs and numbers*, 199-262, Bolyai Soc. Math. Stud., 15, Springer, Berlin, 2006.

[41] A. Lubotzky, R. Phillips, and P. Sarnak. Ramanujan graphs, *Combinatorica*, 8(3):261-277, 1988.

[42] G.A. Margulis , Explicit group-theoretical constructions of combinatorial schemes and their application to the design of expanders and superconcentrators [in Russian] . *Problemy Peredachi Informatsii* 24 (1988), pp. 51-60.

[43] B.D. McKay. The expected eigenvalue distribution of a large regular graph.*Linear Algebra and its Applications,* 40:203-216, 1981.

[44] P. Mitra, Entrywise bounds for eigenvectors of random graphs. *Electron. J. Combin.* 16 (2009), no. 1, Research Paper 131,

[45] J. E. Littlewood and A. C. Offord, On the number of real roots of a random algebraic equation. III. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.* **12** , (1943). 277–286.

[46] A. Litvak, A. Pajor, M. Rudelson, N. Tomczak-Jaegermann, Smallest singular value of random matrices and geometry of random polytopes, *Adv. Math.* **195** (2005), no. 2, 491–523.

[47] A. Marcus, D. Spielman and N. Srivastava, Interlacing Families I: Bipartite Ramanujan Graphs of All Degrees, *preprint*.

[48] K. Maples, Symmetric random matrices over finite fields announcement, April 15, 2013, *preprint*.

[49] A. Nilli, On the second eigenvalue of a graph, *Discrete Mathematics* 91 (1991), 207-210.

[50] A. Nilli, Tight estimates for eigenvalues of regular graphs, *Electronic J. Combinatorics* 11 (2004), N9, 4pp.

[51] H. Nguyen, On the least singular value of random symmetric matrices, *Electron. J. Probab.* 17 (2012), no. 53.

[52] H. Nguyen, Inverse Littlewood-Offord problems and the singularity of random symmetric matrices, *Duke Math. J.* 161 (2012), no. 4, 545–586.

[53] H. Nguyen and V. Vu, Small probability, inverse theorems, and applications, Erdos' 100th Anniversary Proceeding, Bolyai Society Mathematical Studies, Vol. 25 (2013).

[54] H. Nguyen and V. Vu, Random matrices: Law of the determinant, *Annals of Probability* (2014), Vol. 42, No. 1, 146-167.

[55] M. Rudelson, Invertibility of random matrices: norm of the inverse, *Ann. of Math.* (2) 168 (2008), no. 2, 575–600.

[56] M. Rudelson, Lecture notes on non-aymptotic random matrix theory, notes from the AMS Short Course on Random Matrices, 2013.

[57] M. Rudelson and R. Vershynin, The Littlewood-Offord problem and invertibility of random matrices, *Adv. Math.* 218 (2008), no. 2, 600–633.

[58] M. Rudelson and R. Vershynin, Delocalization of eigenvectors of random matrices with independent entries, *preprint*.

[59] O. N. Feldheim and S. Sodin, A universality result for the smallest eigenvalues of certain sample covariance matrices, *Geom. Funct. Anal.* 20 (2010), no. 1, 88–123.

[60] A. Sárközy and E. Szemerédi, Uber ein Problem von Erdös und Moser, *Acta Arithmetica*, 11 (1965) 205-208.

[61] D. Spielman and S-H. Teng, D. Spielman, S.-H. Teng, *Smoothed analysis of algorithms*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002), 597–606, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

[62] B. Sudakov and V. Vu, Local resilience of graphs, *Random Structures Algorithms* 33 (2008), no. 4, 409–433.

[63] T. Tao and V. Vu, A central limit theorem for the determinant of a Wigner matrix, *Adv. Math.* 231 (2012), no. 1, 74–101.

[64] T. Tao and V. Vu, Random matrices: universal properties of eigenvectors, *Random Matrices Theory Appl.* 1 (2012), no. 1.

[65] T. Tao and V. Vu, Random matrices: Universality of the local eigenvalues statistics pdf file *Acta Math*. 206 (2011), no. 1, 127–204.

[66] T. Tao and V. Vu, On random ± 1 matrices: Singularity Determinant,*Random Structures Algorithms* 28 (2006), no. 1, 1–23.

[67] T. Tao and V. Vu, On the singularity probability of random Bernoulli matrices, *J. Amer. Math. Soc.* 20 (2007), no. 3, 603–628.

[68] T. Tao and V. Vu, Inverse Littlewood-Offord theorems and the condition number of random matrices, *Annals of Math.* 169 (2009), 595-632

[69] T. Tao and V. Vu, On the permanent of random Bernoulli matrices,*Advances in Mathematics* 220 (2009), 657-669.

[70] T. Tao and V. Vu, Random matrices: Universality of local spectral statistics of non-Hermitian matrices, *to appear in Annals of Probability*.

[71] T. Tao and V. Vu, Additive Combinatorics,*Cambridge Univ. Press*, 2006.

[72] T. Tao and V. Vu, Random matrices: The Universality phenomenon for Wigner ensembles, *preprint, to appear in AMS lecture notes on Random Matrices, 2013*.

[73] T. Tao and V. Vu, Random matrices: the distribution of the smallest singular values, *Geom. Funct. Anal.* 20 (2010), no. 1, 260–297.

[74] T. Tao and V. Vu, Random matrices: universal properties of eigenvectors, *Random Matrices Theory Appl.* 1 (2012), no. 1.

[75] L. Tran, V. Vu and K. Wang, Sparse random graphs: Eigenvalues and Eigenvectors, *Random Structures Algorithms* 42 (2013), no. 1, 110–134.

[76] R. Vershynin, Invertibility of symmetric random matrices, *Random Structures and Algorithms* 44 (2014), 135–182

[77] E.P. Wigner. On the distribution of the roots of certain symmetric matrices.*Annals of Mathematics,* 67(2):325-327, 1958.

[78] N.C. Wormald, Models of random regular graphs,*In Surveys in Combinatorics,* 1999, J.D. Lamb and D.A. Preece, eds, pp. 239-298.

[79] V. Vu and K. Wang, Random projection, random quadratic forms, and random eigenvectors, *to appear in Random Structures and Algorithms*.

[80] M. Wood, The distribution of sandpile groups of random graphs, *preprint*.