Epsilon

Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

MA TRẬN NGẪU NHIÊN (TIẾP THEO)
Vũ Hà Văn

ĐIỀU KIỆN NGOẠI TIẾP CỦA **MỘT TỨ GIÁC KHÔNG LỒI & ỨNG DỤNG**
Đỗ Thanh Sơn

VỀ **CHỨNG MINH VÀ TIẾN BỘ** TRONG TOÁN HỌC
William P. Thurston
(Nguyễn Dzuy Khánh dịch)

XẤP XỈ **DIOPHANTINE VÀ LIÊN PHÂN SỐ**
Lý Ngọc Tuệ

VÀ CÁC CHUYÊN MỤC KHÁC

Vì chúng ta có trí tuệ nên có thể dễ dàng đoán được nghĩa của một từ lạ thông qua ngữ cảnh. Còn đối với máy tính thì sao? Làm cách nào chúng ta có thể nói với nó rằng hãy dùng ngữ cảnh để học nghĩa của từ?

BIỂU DIỄN NGHĨA CỦA TỪ BẰNG VÉC-TƠ
Lê Phong

MAGAZINE

4

Số 3

ngày **13** tháng **06** năm **2015**

Epsilon

Tạp chí online của cộng đồng những người yêu Toán

MỤC LỤC

MA TRẬN NGẪU NHIÊN (TIẾP THEO)

Vũ Hà Văn

(*Đại học Yale, Mỹ*)

4. Xác suất suy biến: trường hợp đối xứng

Hoàn toàn tương tự, một cách tự nhiên ta đánh giá xác suất ma trận ngẫu nhiên đối xứng p_n^{sym} suy biến. Bài toán này được G.Kalai và N.Linial nhắc đến cho tác giả trong cuộc nó chuyện riêng vào khoảng năm 2004. Thật ngạc nhiên đối với chúng ta, vào thời điểm đó ngay cả một kết quả tương tự với định lý Komlós 1967 cũng chưa được biết đến. Theo Kalai và Linial, giả thuyết dưới đây được đưa ra bởi B.Weiss vào những năm 1980, nhưng hoàn toàn có thể là Komlós đã nghĩ về nó trước đó.

Giả thuyết 1. $p_n^{sym} = o(1)$.

Khó khăn chính liên quan đến M_n^{sym} là các dòng không còn độc lập nữa. Chẳng hạn như dòng cuối cùng gần như đã được xác định bởi các dòng trước đó. Như vậy quy trình xếp các dòng được xét đến trong trường hợp không đối xứng không còn áp dụng được nữa.

Trong [16], Costello, Tao và Vũ tìm được một phương pháp để vượt qua được tính phụ thuộc. Hóa ra là phương pháp đúng để xây dựng ma trận đối xứng không phải là theo từng dòng (như trường hợp của M_n^{sym}) mà là từ góc đến góc. Trong bước k, ta xét ma trận con bậc k ở góc trên bên trái. Chiến thuật, theo ý tưởng của Komlós [38] là chứng minh rằng với xác suất cao, đối hạng của ma trận này, khi k tăng sẽ có ứng xử như điểm cuối của một chuyển động ngẫu nhiên lệch trên tập hợp các số nguyên không âm với xu hướng mạnh đi về bên trái khi còn có thể. Điều này dẫn đến sự khẳng định của giả thuyết Weiss.

Định lý 4.1. $p_n^{sym} = o(1)$.

Công cụ kỹ thuật chính trong chứng minh Định lý 4.1 là phiên bản (hai chiều) sau đây của Định lý 2.5.

Định lý 4.2. *(Littlewood-Offord hai chiều) Giả sử a_{ij} là các số thực khác 0 và ξ_i, $1 \le i, j \le n$ là các biến ngẫu nhiên Bernoulli độc lập phân bố đều. Giả sử Q là dạng toàn phương $Q := \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}\xi_i\xi_j$.. Khi đó với mọi giá trị a:*

$$\mathbf{P}(Q = a) = O(n^{-1/4}).$$

Ta hãy xét bước cuối trong quá trì khi ma trận con bậc $(n-1) \times (n-1)$ đã được xây dựng. Để thu được M_{n-1}^{sym}, ta bổ sung dòng ngẫu nhiên $X = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ và chuyển vị của nó. Với điều kiện trên M_n^{sym}, định thức của ma trận $n \times n$ thu được là

$$\sum_{1 \le i,j \le n-1} a_{ij}\xi_i\xi_j + \det M_{n-1},$$

Trong đó a_{ij} (đúng đến dấu) là các thừa số của M_{n-1}. Nếu M_n^{sym} là suy biến, thì định thực của nó bằng 0, suy ra

$$Q := \sum_{1 \le i,j \le n-1} a_{ij} \xi_i \xi_j = -\det M_{n-1},$$

cho ta cơ sở để áp dụng định lý 4.2.

Được thúc đẩy bởi trường hợp không đối xứng, một cách tự nhiên ta đưa ra giả thuyết:

Giả thuyết 2. $p_n^{sym} = (1/2 + o(1))^n$.

Cận trên từ [16] là $n^{-1/8}$ và có thể dễ dàng cải thiện thành $n^{-1/4}$. Costello [13] cải thiện được cận trên thành $n^{-1/2+\epsilon}$ và Nguyen [52] đẩy xa hơn thành $n^{-\omega(1)}$.

Cận trên tốt nhất cho đến thời điểm này là $\exp(-n^c)$, với hằng số nhỏ $c > 0$ nào đó, thuộc về Vershynin [76]. Phép chứng minh ba kết quả cuối cùng, bên cạnh các chứng minh khác, làm cho việc sử dụng các kết quả kiểu định lý ngược Littlewood-Offord trở nên tinh vi; xem [53] cho một khảo sát của vấn đề này.

5. Hạng và đối hạng

Xác suất suy biến chính là xác suất để ma trận ngẫu nhiên có đối hạng ít nhất là 1. Thế đối hạng lớn hơn 1 thì sao? Giả sử $p_{n,k}$ ký hiệu xác suất để M_n có đối hạng ít nhất là k. Dễ dàng chứng minh được rằng

$$p_{n,k} \ge (\frac{1}{2} + o(1))^{kn}. \tag{1.1}$$

Điều này dẫn đến giả thuyết rằng đánh giá này là chặt cho hằng số k. Trong [37], Kalin, Komlós và Szemerédi chứng minh được rằng

Định lý 5.1. *Tồn tại hàm số $\epsilon(k)$ dần đến 0 cùng với k sao cho*

$$p_{n,k} \le \epsilon^n.$$

Trong Bourgain và các tác giả khác [9], các tác giả xem xét trường hợp của M_n trong đó l dòng đầu cố định và n–l dòng tiếp theo ngẫu nhiên. Gọi L là ma trận con xác định bởi l dòng đầu và ký hiệu mô hình này bởi $M_n(L)$. Rõ ràng $\mathrm{corank} M_n(L) \ge \mathrm{corank} L$. Các tác giả của [9] chứng minh được rằng ([9], Định lý 1.4).

Định lý 5.2. *Tồn tại hằng số dương c sao cho*

$$\mathbf{P}(\mathrm{corank} M_n(L) > \mathrm{corank} L) \le (1-c)^n.$$

Chúng ta hãy quay trở lại với mô hình đối xứng M_n^{sym} và nhìn nó dưới góc nhìn mới này, khai thác mối liên hệ với đồ thị ngẫu nhiên Erdös-Rényi $G(n, 1/2)$. Ta có thể thấy rằng

$$M_n^{sym} = 2A(n, 1/2) - J_n,$$

trong đó J_n là ma trận bậc n gồm toàn 1 (ở đây ta cho phép $G(n, 1/2)$ có khuyên, do đó các thành phần trên đường chéo của $A(n, 1/2)$ có thể là 1. Nếu ta cố định mọi thành phần đường

chéo bằng 0, phân tích không thay đổi gì đáng kể).) Vì J_n có hạng bằng 1, từ 4.1 suy ra rằng với xác suất $1 - o(1)$, $A(n, 1/2)$ có đối hạng ít nhất là 1.
Ta có thể đưa đối hạng về 0 bởi một lý luận kỹ thuật hơn một chút. Xét M_{n+1}^{sym} thay vì M_n^{sym} và chuẩn hóa sao cho các dòng và cột đầu tiên đều là -1. Cộng ma trận này với J_{n+1}, ta được ma trận có dạng

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_n^{sym} + J_n \end{pmatrix}$$

Như vậy ta có thể kết luận

Hệ quả 5.3. *Với xác suất* $1 - o(1)$, $\mathrm{corank} A(n, 1/2) = 0$.

Từ góc nhìn đồ thị ngẫu nhiên, một cách tự nhiên ta đặt câu hỏi là mệnh đề này có còn đúng cho các mật độ p khác. Rõ ràng câu trả lời sẽ là phủ định với p rất nhỏ. Thật vậy, nếu $p < (1 - \epsilon) \log n/n$ thì $G(n, p)$ có, với xác suất cao, những đỉnh cô lập (xem [6, 35]) có nghĩa là ma trận kề của nó sẽ có những dòng toàn 0 và do đó suy biến. Costello và Vũ [14] chứng minh được rằng $\log n/n$ là điểm chia đúng.

Định lý 5.4. *Với mọi hằng số* $\epsilon > 0$, *with probability* $1 - o(1)$,

$$\mathrm{corank} A(n, (1 + \epsilon) \log n/n) = 0.$$

Với $p < \log n/n$, đối hạng của $A(n, p)$ không còn bằng 0 như ở trên. Ứng xử của biến ngẫu nhiên này chưa được hiểu một cách hoàn toàn. Trong trường hợp khi $p = c \log n/n$ với hằng số $0 < c < 1$, Costello và các tác giả khác. [15] đã chứng minh được rằng với xác suất $1 - o(1)$, đối hạng được xác định bởi các đồ thị con nhỏ, điều này tương thích với Hiện tượng I. Ví dụ,

Định lý 5.5. *Với mọi hằng số* $\epsilon > 0$ *và* $(1/2 + \epsilon) \log n/n < p < (1 - \epsilon) \log n/n$, *với xác suất* $1 - o(1)$, $\mathrm{corank} A(n, (1 + p)$ *bằng số các đỉnh cô lập trong* $G(n, p)$.

Với các phạm vi khác của p, ta cần chú ý đến số các sơ-ri (sơ-ri là cặp các đỉnh bậc 1 có cùng kề với 1 đỉnh) và số các đồ thị con nhỏ khác. Kết quả chính của [15] cho công thức chính xác của đối hạng thông qua các tham số này.
Khi $p = c/n, c > 1$, $G(n, p)$ bao gồm một thành phần lớn và rất nhiều các thành phần nhỏ. Có lý khi ta tập trung vào thành phần lớn mà ta sẽ ký hiệu là $Giant(n, p)$. Vì $Giant(n, p)$ chứa những sơ-ri, ma trận kề của $Giant(n, p)$ là suy biến (với xác suất cao). Tuy nhiên, nếu ta nhìn vào $k-$lõi ($k-$core) của $Giant(n, p)$, với $k \geq 3$, thì có vẻ có lý rằng đồ thị con này sẽ có hạng đầy đủ.
Bordenave, Lelarge và Salez [8] đã chứng minh được kết quả liên quan dưới đây

Giả thuyết 3. *Cho k là số nguyên cố định không nhỏ hơn 3. Với xác suất* $1 - o(1)$, *ma trận kề của k-lõi của* $Giant(n, p)$ *không suy biến.*

Định lý 5.6. *Xét* $G(n, c/n)$ *với hằng số* $c > 0$ *nào đó. Khi đó với xác suất* $(1 - o(1))n$,

$$rank(A(n, c/n)) = (2 - q - e^{-cq} - cqe^{-cq} + o(1))n,$$

Trong đó $0 < q < 1$ *là nghiệm nhỏ nhất của phương trình* $q = \exp(-c \exp -cq)$.

Để kết thúc mục này, ta hãy xét đồ thị ngẫu nhiên $G_{n,d}$. Với $d = 2$, $G_{n,d}$ bản chất là hợp của các vòng tròn rời nhau. Không khó khăn để chứng minh rằng với xác suất $1 - o(1)$, một trong các vòng tròn này sẽ có độ dài chia hết cho 4 và vì thế ma trận kề của nó không suy biến (thực sự, đối hạng sẽ là $\Theta(n)$ khi số các vòng tròn có độ dài chia hết cho 4 có bậc như thế).
Thật bối rối nhưng giả thuyết sau vẫn hoàn toàn mở

Giả thuyết 4. *Với mọi* $3 \leq d \leq n/2$, *xác suất* $1 - o(1)$ $A_{n,d}$ *không suy biến.*

6. Định thức và vĩnh thức

Ta hãy bắt đầu từ câu hỏi cơ bản

Định thức của M_n lớn như thế nào?

Đây là động cơ thực sự của các nghiên cứu nguyên thủy của Komlos, như tiêu đề của các bài báo [38, 39] đã cho thấy. Tuy nhiên, các kết quả của ông (và các định lý khác trong Mục 2) không cho ta một đánh giá không tầm thường nào cho $|\det M_n|$, chờ đợi rằng $|\det M_n| > 0$ với xác suất lớn. Khi tất cả các hàng của M_n có chiều dài $\sqrt{n}$, từ bất đẳng thức Hadamard suy ra rằng $|\det M_n| \leq n^{n/2}$ Một giả thuyết được đưa ra là với xác suất gần bằng 1, $|\det M_n|$ gần với cận trên này.

Giả thuyết 5. *Gần như chắc chắn rằng* $|\det M_n| = n^{(1/2-o(1))n}$.

Giả thuyết này được hỗ trợ bởi nhận xét quen thuộc sau đây của Turan.

Tính chất 6.1.

$$\mathbf{E}((\det M_n)^2) = n!.$$

Để kiểm tra điều này, chú ý rằng

$$(\det M_n)^2 = \sum_{\pi,\sigma \in S_n} (-1)^{\text{ sign}\pi + \text{ sign}\sigma} \prod_{i=1}^{n} \xi_{i\pi(i)}\xi_{i\sigma(i)}.$$

Theo tính tuyến tính của suy biến và sự kiện $\mathbf{E}(\xi_i) = 0$, ta có

$$\mathbf{E}(\det M_n)^2 = \sum_{\pi \in S_n} 1 = n!.$$

Từ đây theo bất đẳng thức Markov ta suy ra rằng với mọi hàm số $\omega(n)$ dần đến vô cùng cùng với n, ta có

$$|\det M_n| \leq \omega(n)\sqrt{n!},$$

với xác suất dần đến 1.

Một khẳng định của Girko (kết quả chính của [31, 30]) suy ra rằng $|\det M_n|$ thường là gần với $\sqrt{n!}$.Tuy nhiên, chứng minh của tác giả này có thể chứa một số khoảng trống chưa xử lý được (xem [54] để biết chi tiết).

Trong [66], Tao và Vũ đã xác lập được cận dưới tương ứng, qua đó khẳng định Giả thuyết 5.

Định lý 6.1. *Với xác suất* $1 - o(1)$,

$$|\det M_n| \geq \sqrt{n!}\exp(-29\sqrt{n\log n}).$$

Ta phác họa ngắn gọn phép chứng minh thông qua một bổ đề hữu ích.

Trước hết ta coi $|\det M_n|$ như thể tích của khối lăng trụ căng trên n véc-tơ ngẫu nhiên $\{-1, 1\}$. Thể tích này là tích của các khoảng cách từ véc tơ thứ $(d + 1)$ đến không gian con sinh bởi d véc-tơ đầu, trong đó d chạy từ 0 đến n – 1.

Ta có thể có được một sự kiểm soát chặt chẽ về khoảng cách này (như một biến ngẫu nhiên) nhờ vào bổ đề dưới đây, được chứng minh bằng cách sử dụng bất đẳng thức của Talagrand [66, 79].

Bổ đề 6.2. *Cho W là một không gian con cố định chiều $1 \leq d \leq n-4$ và X là một véc tơ ngẫu nhiên ± 1. Khi đó với mọi $t > 0$*

$$\mathbf{P}(|\mathrm{dist}(X, W) - \sqrt{n-d}| \geq t+1) \leq 4\exp(-t^2/16). \tag{1.2}$$

Tuy nhiên bổ để không áp dụng được khi d rất gần với n. Trong trường hợp này, ta cần sử dụng tính ngẫu nhiên của W, trong một góc nhìn tương tự như chứng minh ở Mục 3.
Bổ đề 6.2 xuất hiện trong nhiều nghiên cứu khác và có thể sử dụng để chứng minh nhiều bất đẳng thức tập trung (concentration inequalities) khác (ví dụ như bất đẳng thức dạng Hanson-Wright cho sự tập trung của dạng toàn phương ngẫu nhiên); xem chi tiết ở [79].
Một cách tự nhiên khác để đánh giá $|\det M_n|$ là nhìn nó như tích của các giá trị suy biến của M_n. Theo luật Marcheko-Pastur [5], ta biết (một cách tiệm cận) hầu hết các giá trị suy biến. Trở ngại chính là những giá trị ít ỏi còn lại có thể rất nhỏ.
Như vậy, bài toán về cơ bản đưa về việc đánh giá chặn dưới cho giá trị suy biến nhỏ nhất. Vấn đề này đã được nêu ra đầu tiên bởi Goldstine và von Neumann vào những năm 1940 [33] và đã được nghiên cứu trong [20, 55, 57, 67, 73] (xem [46, 59] và tài liệu tham khảo ở đó liên quan đến ma trận chữ nhật). Đặc biệt, Rudelson và Vershynin [57] chứng minh được

Định lý 6.3. *Tồn tại các hằng số C $C, \epsilon > 0$ sao cho*

$$\mathbf{P}(\sqrt{n}\sigma_{min}(M_n) \leq t) \leq Ct$$

với mọi $t \leq (1-\epsilon)^n$, trong đó σ_{min} là giá trị suy biến nhỏ nhất.

Định lý 6.3 có thể coi như một sự làm mạnh của định lý 2.2; xem [56, 53] để biết thảo luận chi tiết. Đánh giá này là chặt tính đến hằng số C. Trong [73] phân bố giới hạn của $\sqrt{n}\sigma_{min}(M_n)$được xác định, từ đó suy ra giá trị chính xác của C trong phạm vi t nhỏ và giải quyết được giả thuyết của và một phần giả thuyết của Spielman và Teng [[61], Giả thuyết 2]. Bây giờ ta xem xét mô hình đối xứng M_n^{sym}. Một lần nữa, theo bất đẳng thức Hadamard
$|\det M_n^{sym}| \leq n^{n/2}$.

Giả thuyết 6. *Với xác suất $1 - o(1)$*

$$|\det M_n^{sym}| = n^{(1/2 - o(1))n}.$$

Đồng nhất thức Turan không còn đúng nữa bởi sự tương quan bị phá vỡ do tính đối xứng. Tuy nhiên, ta vẫn có thể chứng minh được

$$\mathbf{E}(\det M_n^{sym})^2 = n^{(1+o(1))n}.$$

Mặt khác, chứng minh chặn dưới cho $|\det M_n|$ khó khăn hơn nhiều. Bài toán tìm chặn dưới cho giá trị suy biến nhỏ nhất được giải quyết mới đây bởi Nguyễn [51] và Vershynin [76], mặc dù, không giống như trong trường hợp không đối xứng, chúng ta vẫn không biết sự phân bố giới hạn của tham số này. Các kết quả của Nguyễn và Vershynin, kết hợp với luật nửa vòng tròn Wigner, xác nhận Giả thuyết 6.

Định lý 6.4. *Vỡi xác suất $1 - o(1)$*

$$|\det M_n^{sym}| = n^{(1/2 - o(1))n}.$$

Bây giờ ta chuyển sang khái niệm liên quan: vĩnh thức. Nhắc lại định nghĩa hình thực của định thức của ma trận M (với các hệ số $m_{ij}, 1 \le i, j \le n$)

$$\det M := \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\operatorname{sign}\pi} \prod_{i=1}^{n} m_{i\pi(i)}.$$

Vĩnh thức của ma trận M được định nghĩa là

$$\operatorname{Per} M := \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^{n} m_{i\pi(i)}. \tag{1.3}$$

Dễ thấy rằng đồng nhất thức Turan vẫn đúng, cụ thể là

$$\mathbf{E}(\operatorname{Per} M_n)^2 = n!.$$

Điều này gợi ý là $|\operatorname{Per} M_n|$ sẽ bằng $n^{(1/2-o(1))n}$. Tuy nhiên, điều này sẽ khó chứng minh hơn nhiều. Giả thuyết dưới đây, được coi như phiên bản vĩnh thức của kết quả kinh điển của Komlos $p_n = o(1)$, vẫn còn là mở cho đến gần đây

Giả thuyết 7. $\mathbf{P}(\mathit{Per} M_n = 0) = o(1)$.

Nguyên nhân của mọi khó khăn ở đây là vĩnh thức, không giống như định thức, không có một sự giải thích hình học tốt (giống như thể tích trong trường hợp định thức).
Năm 2007, Tao và Vũ đã tìm được một cách tiếp cận hoàn toàn tổ hợp để tấn công bài toán vĩnh thức [69], dựa vào định nghĩa hình thức (1.3) và sử dụng kỹ thuật martingale từ lý thuyết tổ hợp xác suất. Họ đã chứng minh

Định lý 6.5. *Với xác suất* $1 - o(1)$

$$|\mathit{Per} M_n| = n^{(1/2-o(1))n}.$$

Mảnh ghép còn thiếu cuối cùng là định lý tương tự định lý 6.5 cho trường hợp đối xứng.

Giả thuyết 8. *Với xác suất* $1 - o(1)$

$$|\mathit{Per} M_n^{sym}| = n^{(1/2-o(1))n}.$$

Được thúc đẩy bởi bài toán suy biến, ta cũng quan tâm đến việc tìm một đánh giá tốt cho xác suất để vĩnh thức bằng 0. Các đánh giá hiện nay mới chỉ ở bậc đa thức theo n.
Có một số nghiên cứu khác liên quan đến sự phân bố của $\log|\det M_n|$ và $\log|\det M_n^{sym}|$ xem [31, 30, 54, 63] và các tài liệu tham khảo trong đó.

4. The singular probability: symmetric case

As an analogue, it is natural to estimate p_n^{sym}, the probability that the symmetric matrix M_n^{sym} singular.

This problem was mentioned to the author by G. Kalai and N. Linial (personal conversations) around 2004. To our surprise, at that point, even the analogue of Komĺos' 1967 result was not known. According to Kalai and Linial, the following conjecture was circulated by B. Weiss in the 1980s, although it is quite possible that Komlós had thought about it earlier.

Conjecture 4.1. *$p_n^{sym} = o(1)$.*

The main difficulty concerning M_n^{sym} is that its rows are no longer independent. In particular, the last row is almost determined by the previous ones. Thus, the row exposing procedure considered in the non-symmetric case is no longer useful.

In [16], Costello, Tao and Vu found a way to circumvent the dependency. It turns out that the right way to build the symmetric matrix M_n^{sym} is not row by row (as for M_n), but corner to corner. In step k, one considers the top left sub matrix of size k. The strategy, following an idea of Komlós [38] is to show that with high probability, the co-rank of this matrix, as k increases, behaves like the end point of a bias random walk on non-negative integers which has a strong tendency to go to the left whenever possible. This leads to a confirmation of Weiss' conjecture.

Theorem 4.2. *$p_n^{sym} = o(1)$.*

The key technical tool in the proof of Theorem 4.2 is the following (quadratic) variant of Theorem 2.5.

Theorem 4.3. *(Quadratic Littlewood-Offord) Let a_{ij} be non-zero real numbers and ξ_i, $1 \le i, j \le n$ be i.i.d Bernoulli random variables. Let Q be the quadratic form $Q := \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}\xi_i\xi_j$.. Then for any value a*

$$\mathbf{P}(Q = a) = O(n^{-1/4}).$$

Let us consider the last step in the process when the $(n-1) \times (n-1)$ submatrix M_{n-1}^{sym} has been built. To obtain M_n^{sym}, we add a random row $X = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ and its transpose. Conditioning on M_{n-1}^{sym}, the determinant of the resulting $n \times n$ matrix is

$$\sum_{1 \le i,j \le n-1} a_{ij}\xi_i\xi_j + \det M_{n-1},$$

where a_{ij} (up to the signs) are the cofactors of M_{n-1}. If M_n^{sym} is singular, then its determinant is 0, which implies

$$Q := \sum_{1\le i,j\le n-1} a_{ij}\xi_i\xi_j = -\det M_{n-1},$$

which gives ground for an application of Theorem 4.3.

Motivated by the non-symmetric case, it is natural to conjecture

Conjecture 4.4. $p_n^{sym} = (1/2+o(1))^n$.

The concrete bound from [16] is $n^{-1/8}$, which can be easily improved to $n^{-1/4}$. Costello [13] improved the bound to $n^{-1/2+\epsilon}$ and Nguyen [52] pushed it further to $n^{-\omega(1)}$. The best current bound is $\exp(-n^c)$, for some small constant $c>0$, due to Vershynin [76]. The proofs of the last three results, among others, made sophisticated use of Inverse Littlewood-Offord type results; see [53] for a survey.

5. Ranks and co-ranks

The singular probability is the probability that the random matrix has co-rank at least one. What about larger co-ranks ? Let us use $p_{n,k}$ to denote the probability that M_n has co-rank at least k. It is easy to show that

$$p_{n,k} \ge (\frac{1}{2}+o(1))^{kn}. \tag{2}$$

It is tempting to conjecture that this bound is sharp for constants k. In [37], Kahn, Komlós and Szemerédi showed

Theorem 5.1. *There is a function $\epsilon(k)$ tending to zero with k such that*

$$p_{n,k} \le \epsilon^n.$$

In Bourgain et. al. [9], the authors consider a variant of M_n where the first l rows are fixed and the next $n-l$ are random. Let L be the submatrix defined by the first l row and denote the model by $M_n(L)$. It is clear that $\mathrm{corank} M_n(L) \ge \mathrm{corank} L$. The authors of [9] showed ([9, Theorem 1.4])

Theorem 5.2. *There is a positive constant c such that*

$$\mathbf{P}(\mathrm{corank} M_n(L) > \mathrm{corank} L) \le (1-c)^n.$$

Let us go back to the symmetric model M_n^{sym} and view it from this new angle, exploiting a connection to Erdös-Rényi random graph $G(n, 1/2)$. One can see that

$$M_n^{sym} = 2A(n, 1/2) - J_n,$$

where J_n is the all-one matrix of size n. (Here we allow $G(n, 1/2)$ to have loops, so the diagonal entries of $A(n, 1/2)$ can be one. If we fix all diagonal entries to be zero, the analysis does not change essentially.) Since J_n has rank one, it follows from Theorem 4.2 that with probablity $1 - o(1)$, $A(n, 1/2)$ has corank at most one.

One can reduce the co-rank to zero by a slightly trickier argument. Consider M_{n+1}^{sym} instead of M_n^{sym} and normalize so that its first row and column are all- negative one. Adding this matrix with J_{n+1}, we obtain a matrix of the form

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_n^{sym} + J_n \end{pmatrix}$$

Thus we conclude

Corollary 5.3. *With probability* $1 - o(1)$*,* $\mathrm{corank} A(n, 1/2) = 0$*.*

From the random graph point of view, it is natural to ask if this statement holds for a different density p. It is clear that answer is negative if p is very small. Indeed, if $p < (1 - \epsilon) \log n/n$, then $G(n, p)$ has, with high probability, isolated vertices (see [6, 35]) which means that its adjacency matrix has all zero rows and so is singular. Costello and Vu [14] proved that $\log n/n$ is the right threshold.

Theorem 5.4. *For any constant* $\epsilon > 0$*, with probability* $1 - o(1)$*,*

$$\mathrm{corank} A(n, (1 + \epsilon) \log n/n) = 0.$$

For $p < \log n/n$, the co-rank of $A(n, p)$ is no longer zero as mentioned above. The behavior of this random variable is not entirely understood. For the case when $p = c \log n/n$ for some constant $0 < c < 1$, Costello et. al. [15] showed that with probability $1 - o(1)$, the co-rank is determined by small subgraphs, which is consistent with **Phenomenon I**. For example,

Theorem 5.5. *For any constant* $\epsilon > 0$ *and* $(1/2 + \epsilon) \log n/n < p < (1 - \epsilon) \log n/n$*, with probability* $1 - o(1)$*,* $\mathrm{corank} A(n, (1 + p)$ *equals the number of isolated vertices in* $G(n, p)$*.*

For other ranges of p, one needs to take into account the number of cherries (a cherry is a pair of vertices of degree one with a common neighbor) and the numbers of other small subgraphs. The main result of [15] gives a precise formula for the co-rank interim of these parameters.

When $p = c/n, c > 1$, $G(n,p)$ consists of a giant component and many small components. It makes sense to focus on the giant one which we denote by $Giant(n,p)$. Since $Giant(n,p)$ has cherries , the adjacency matrix of $Giant(n,p)$ is singular (with high probability). However, if we look at the k-core of $Giant(n,p)$, for $k \geq 3$, it seems plausible that this subgraph has full rank.

Conjecture 5.6. *Let k be a fixed integer at least 3. With probability $1 - o(1)$, the adjacency matrix of the k-core of $Giant(n,p)$ is non-singular.*

Bordenave, Lelarge and Salez [8] proved the following related result

Theorem 5.7. *Consider $G(n,c/n)$ for some constant $c > 0$. Then with probability $(1 - o(1))n$,*

$$rank(A(n,c/n)) = (2 - q - e^{-cq} - cqe^{-cq} + o(1))n,$$

where $0 < q < 1$ is the smallest solution of $q = \exp(-c \exp -cq)$.

To conclude this section, let us consider the random regular graph $G_{n,d}$. For $d = 2$, $G_{n,d}$ is just union of disjoint circles. It is not hard to show that with probability $1 - o(1)$, one of these circles has length divisible by 4, and thus its adjacency matrix is non-singular (in fact, the corank will by $\Theta(n)$ as the number of circles of length divisible by 4 is of this order). Somewhat embarrassingly, the following conjecture is totally open

Conjecture 5.8. *For any $3 \leq d \leq n/2$, with probability $1 - o(1)$ $A_{n,d}$ is non-singular.*

6. Determinant and Permanent

Let us start with a basic question

How big is the determinant of M_n?

This was actually the real motivation of Komlós' original study, as the titles of [38, 39] suggest. However, his results (and other theorems in Section 2) do not give any non-trivial estimate on $|\det M_n|$, expect that $|\det M_n| > 0$ with high probability.

As all rows of M_n has length $\sqrt{n}$. Hadamard's inequality implies that $|\det M_n| \leq n^{n/2}$. It has been conjectured that with probability close to 1, $|\det M_n|$ is close to this upper bound.

Conjecture 6.1. *Almost surely* $|\det M_n| = n^{(1/2-o(1))n}$.

This conjecture is supported by a well-known observation of Turán.

Fact 6.1.
$$\mathbf{E}((\det M_n)^2) = n!.$$

To verify this, notice that

$$(\det M_n)^2 = \sum_{\pi,\sigma \in S_n} (-1)^{\text{ sign}\pi + \text{ sign}\sigma} \prod_{i=1}^{n} \xi_{i\pi(i)}\xi_{i\sigma(i)}.$$

By linearity of singularity and the fact that $\mathbf{E}(\xi_i) = 0$, we have

$$\mathbf{E}(\det M_n)^2 = \sum_{\pi \in S_n} 1 = n!.$$

It follows immediately by Markov's bound that for any function $\omega(n)$ tending to infinity with n,

$$|\det M_n| \le \omega(n)\sqrt{n!},$$

with probability tending to 1.

A statement of Girko (the main result of [31, 30]) implies that $|\det M_n|$ is typically close to $\sqrt{n!}$. However, his proof appears to contain some gaps (see [54] for details).

In [66], Tao and Vu established the matching lower bound, confirming Conjecture 6.1.

Theorem 6.2. *With probability* $1 - o(1)$,

$$|\det M_n| \ge \sqrt{n!}\exp(-29\sqrt{n\log n}).$$

We sketch the proof very briefly as it contains a useful lemma.

First view $|\det M_n|$ as the volume of the parallelepiped spanned by n random $\{-1, 1\}$ vectors. This volume is the product of the distances from the $(d+1)$st vector to the subspace spanned by the first d vectors, where d runs from 0 to $n-1$. We are able to obtain a very tight control on this distance (as a random variable), thanks to the following lemma, which can be proved using a powerful concentration inequality by Talagrand [66, 79].

Lemma 6.3. *Let W be a fixed subspace of dimension $1 \le d \le n-4$ and X a random ± 1 vector. For any $t > 0$*

$$\mathbf{P}(|\text{dist}(X, W) - \sqrt{n-d}| \ge t + 1) \le 4\exp(-t^2/16). \tag{3}$$

The lemma, however, is not applicable when d is very close to n. In this case, we need to make use of the fact that W is random, in a fashion similar to the proof in Section 3.

Lemma 6.3 appears handy in many other studies and can be used to derive other concentration inequalities (such as Hanson-Wright type inequalities for concentration of random quadratic form); see [79] for more details.

Another natural way to estimate $|\det M_n|$ is to view it as the product of the singular values of M_n. By Marcheko-Pastur law [5], one knows (asymptotically) most singular values. The main obstacle is that the last few can be very small. Thus, the problem basically boils down to bounding the least singular value from below. This problem was first raised by Goldstine and von Neumann in the 1940s [33] and has been investigated in [20, 55, 57, 67, 73] (see also [46, 59] and the references therein for other works concerning rectangular matrices). In particular, Rudelson and Vershynin [57] proved

Theorem 6.4. *There are constants $C, \epsilon > 0$ such that*

$$\mathbf{P}(\sqrt{n}\sigma_{min}(M_n) \leq t) \leq Ct$$

for all $t \leq (1-\epsilon)^n$, where σ_{min} denotes the least singular value.

Theorem 6.4 can be seen as a strengthening of Theorem 2.2; see [56, 53] for more discussion. The bound is sharp, up to the constant C. In [73] the limiting distribution of $\sqrt{n}\sigma_{min}(M_n)$ was determined, yielding the exact value of C in a smaller range of t and settling a conjecture of Edelman and partially a conjecture by Spielman and Teng [61, Conjecutre 2].

Now we turn to the symmetric model M_n^{sym}. Again, by Hadamard's inequality $|\det M_n^{sym}| \leq n^{n/2}$.

Conjecture 6.5. *With probability* $1 - o(1)$

$$|\det M_n^{sym}| = n^{(1/2-o(1))n}.$$

Turán's identity no longer holds because of a correlation caused by symmetry. However, one can still show

$$\mathbf{E}(\det M_n^{sym})^2 = n^{(1+o(1))n}.$$

On the other hand, proving a lower bound for $|\det M_n|$ was more difficult. The problem of bounding the least singular value from below was solved only recently by Nguyen [51] and Vershynin [76], although, unlike the non-symmetric case, we still do not know the limiting distribution of this parameter. The results by Nguyen and Vershynin, combining with Wigner semi-circle law, confirm Conjecture 6.5

Theorem 6.6. *With probability* $1 - o(1)$

$$|\det M_n^{sym}| = n^{(1/2-o(1))n}.$$

Let us now turn to the related notation of permanent. Recall the formal definition of the determinant of a matrix M (with entries $m_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$)

$$\det M := \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\text{ sign}\pi} \prod_{i=1}^{n} m_{i\pi(i)}.$$

The permanent of M is defined as

$$\text{Per}M := \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^{n} m_{i\pi(i)}. \tag{4}$$

It is easy to see that Turán's identity still holds, namely

$$\mathbf{E}(\ \text{Per}M_n)^2 = n!.$$

It suggested that $|\ \text{Per}M_n|$ is typically $n^{(1/2-o(1))n}$. However, this was much harder to prove. The following conjecture, which can be seen as the permanent variant of Komlós classical result $p_n = o(1)$, was open for quite some time

Conjecture 6.7. $\mathbf{P}($ *$PerM_n = 0) = o(1)$.*

The source of difficulties here is that permanent, unlike determinant, does not admit any good geometric of linear algebraic interpretation.

In 2007, Tao and Vu found an entirely combinatorial approach to treat the permanent problem [69], relying on the formal definition (4) and making heavy use of martingale techniques from probabilistic combinatorics. They proved

Theorem 6.8. *With probability* $1 - o(1)$

$$|\ PerM_n| = n^{(1/2-o(1))n}.$$

The still missing (final) piece of the picture is the symmetric counterpart of Theorem 6.8.

Conjecture 6.9. *With probability* $1 - o(1)$

$$|\ PerM_n^{sym}| = n^{(1/2-o(1))n}.$$

Motivated by the singularity problem, it is also interesting to find a strong estimate for the probability that the permanent is zero. The current bound is only polynomial in n.

There are further studies concerning the distributions of $\log|\det M_n|$ and $\log|\det M_n^{sym}|$; see [31, 30, 54, 63] and the references therein.

7. Graph expansion and the second eigenvalue

Let G be a connected graph on n points and A its adjacency matrix with eigenvalues $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. If G is d-regular then $\lambda_1 = d$ and by Perron-Frobenius theorem no eigenvalue has larger absolute. A parameter if fundamental interest is

$$\lambda(G) := \max_{|\lambda_i| < d} |\lambda_i|.$$

One can derive many interesting properties of the graph from the value this parameter. The general phenomenon here is

Phenomenon III. *If $\lambda(G)$ is significantly less than d, then the edges of G distribute like in a random graph with edge density d/n.*

This leads to the important notion of pseudo- or quasi-randomness [11] [2]. A representative fact is the following [3]. Let A, B be sets of vertices and $E(A, B)$ the number of edges with one end point in A and the other in B, then

$$|E(A,B) - \frac{d}{n}|A||B|| \leq \lambda(G)\sqrt{|A||B|}. \tag{5}$$

Notice that the term $\frac{d}{n}|A||B|$ is the expectation of the number of edges between A and B if G is random (in the Erdös-Rényi sense) with edge density d/n. Graphs with small λ are often called *pseudo-random* [11, 40].

One can use this information about edge distribution to derive various properties of the graph (see [40] for many results of this kind). The whole concept can be generalized for non-regular graphs, using the Laplacian rather than the adjacency matrix (see, for example, [12]).

From (5), it is clear that the smaller λ, the more "random" is G. *But how small can λ be ?*

Tài liệu tham khảo

[1] N. Alon, Eigenvalues and expanders, *Combinatorica* 6(1986), no. 2, 83-96.

[2] N. Alon and V. Milman, λ_1- isoperimetric inequalities for graphs, and supercon- centrators, *J. Combin. Theory Ser. B 38* (1985), no. 1, 73-88.

[3] N. Alon and J. Spencer, The probabilistic method, 3rd ed., *John Wiley & Sons Inc.*, Hoboken, NJ, 2008.

[4] R. Arratia and S. DeSalvo, On the singularity of random Bernoulli matricesÑnovel integer partitions and lower bound expansions, *Ann. Comb.* 17 (2013), no. 2, 251-274.

[5] Z. Bai and J. Silverstein, Spectral analysis of large dimensional random matrices. Second edition. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 2010.

[6] B. Bollobás, Random graphs. Second edition, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 73. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[7] B. Bollobás, Combinatorics. Set systems, hypergraphs, families of vectors and combinatorial probability. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[8] C. Bordenave, M. Lelarge, and J. Salez, The rank of diluted random graphs, *Ann. Probab.* 39 (2011), no. 3, 1097-1121.

[9] J. Bourgain, V. Vu and P. M. Wood, On the singularity probability of discrete random matrices, *J. Funct. Anal.* 258 (2010), no. 2, 559–603.

[10] S. Brooks and E. Lindenstrauss, Non-localization of eigenfunctions on large regular graphs, *Israel J. Math.* 193 (2013), no. 1, 1–14

[11] Chung, F. R. K.; Graham, R. L.; Wilson, R. M. Quasi-random graphs. *Combinatorica* 9 (1989), no. 4, 345–362.

[12] F. Chung, Spectral graph theory, *CBMS series*, no. 92 (1997).

[13] K. Costello, Bilinear and quadratic variants on the Littlewood-Offord problem,*Israel J. Math.* 194 (2013), no. 1, 359–394.

[14] K. Costello and V. Vu, The ranks of random graphs. *Random Structures and Algorithm.* 33 (2008), 269-285

[15] K. Costello and V. Vu, The rank of sparse random matrices, *Combin. Probab. Comput.* 19 (2010), no. 3, 321–342.

[16] K. Costello, T. Tao and V. Vu, Random symmetric matrices are almost surely singular, *Duke Math. J.* 135 (2006), no. 2, 395–413.

[17] Y. Dekel, J. Lee, and N. Linial. Eigenvectors of random graphs: Nodal domains.*Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques,* pages 436-448, 2008.

[18] I. Dimitriu and S. Pal, Sparse regular random graphs: spectral density and eigenvectors, *Ann. Probab.* 40 (2012), no. 5, 2197–2235.

[19] A. Edelman, E. Kostlan and M. Shub, How many eigenvalues of a random matrix are real? *J. Amer. Math. Soc.* 7 (1994), no. 1, 247–267.

[20] A. Edelman, Eigenvalues and condition numbers of random matrices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **9** (1988), 543–560.

[21] P. Erdös, On a lemma of Littlewood and Offord, *Bull. Amer. Math. Soc.* **51** (1945), 898–902.

[22] L. Erdös, A. Knowles, H-T. Yau and J. Yin, Spectral statistics of Erd?s-RvZnyi graphs I: Local semicircle law, *Ann. Probab.* 41 (2013).

[23] L. Erdös, A. Knowles, H-T. Yau and J. Yin, Spectral statistics of Erd?s-RvZnyi Graphs II: Eigenvalue spacing and the extreme eigenvalues, *Comm. Math. Phys.* 314 (2012), no. 3, 587–640.

[24] L. Erdös, B. Schlein and H-T. Yau, Wegner estimate and level repulsion for Wigner random matrices, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2010, no. 3, 436–479.

[25] L. Erdös and H-T. Yau, Universality of local spectral statistics of random matrices, *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.) 49 (2012), no. 3, 377–414.

[26] J. Friedman. On the second eigenvalue and random walks in random d-regular graphs. *Technical Report* CX-TR-172-88, Princeton University, August 1988.

[27] J. Fiedman, A proof of Alon's second eigenvalue conjecture and related problems. (English summary)*Mem. Amer. Math. Soc.* 195 (2008), no. 910, viii+100 pp.

[28] J. Friedman and D-E. Kohler, The Relativized Second Eigenvalue Conjecture of Alon, *preprint*.

[29] Z. Füredi and J. Komlós, The eigenvalues of random symmetric matrices,*Combinatorica* 1 (1981), no. 3, 233-241.

[30] V. L. Girko, A refinement of the central limit theorem for random determinants. (Russian) Teor. Veroyatnost. i Primenen. 42 (1997), no. 1, 63–73; translation in Theory Probab. Appl. 42 (1997), no. 1, 121–129 (1998)

[31] V. L. Girko, A central limit theorem for random determinants. *Teor. Veroyatnost. i Mat. Statist.* 21 (1979), 35–39, 164.

[32] A. Guionnet and O. Zeitouni, Concentration of the spectral measure for large matrices, *Electron. Comm. Probab.* 5 (2000), 119–136.

[33] H. Golstein and J. von Neumman, Numerical inverting of matrices of high order, *Bull. Amer. Math. Soc.* 53 (1947), 1021-1099.

[34] G. Halász, Estimates for the concentration function of combinatorial number theory and probability, *Period. Math. Hungar.* **8** (1977), no. 3-4, 197–211.

[35] S. Janson, T. Luczak and A. Rucinski, Random Graphs,*Wiley-Interscience* (2000)

[36] J. Kahn and E. Szemerédi, STOC 1989.

[37] J. Kahn, J. Komlós, E. Szemerédi, On the probability that a random ± 1 matrix is singular, *J. Amer. Math. Soc.* **8** (1995), 223–240.

[38] J. Komlós, On the determinant of $(0, 1)$ matrices, *Studia Sci. Math. Hungar.* **2** (1967) 7-22.

[39] J. Komlós, On the determinant of random matrices,*Studia Sci. Math. Hungar.* **3** (1968) 387–399.

[40] M. Krivelevich and B. Sudakov, Pseudo-random graphs.*More sets, graphs and numbers*, 199-262, Bolyai Soc. Math. Stud., 15, Springer, Berlin, 2006.

[41] A. Lubotzky, R. Phillips, and P. Sarnak. Ramanujan graphs, *Combinatorica*, 8(3):261-277, 1988.

[42] G.A. Margulis , Explicit group-theoretical constructions of combinatorial schemes and their application to the design of expanders and superconcentrators [in Russian] . *Problemy Peredachi Informatsii* 24 (1988), pp. 51-60.

[43] B.D. McKay. The expected eigenvalue distribution of a large regular graph.*Linear Algebra and its Applications,* 40:203-216, 1981.

[44] P. Mitra, Entrywise bounds for eigenvectors of random graphs. *Electron. J. Combin.* 16 (2009), no. 1, Research Paper 131,

[45] J. E. Littlewood and A. C. Offord, On the number of real roots of a random algebraic equation. III. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.* **12** , (1943). 277–286.

[46] A. Litvak, A. Pajor, M. Rudelson, N. Tomczak-Jaegermann, Smallest singular value of random matrices and geometry of random polytopes, *Adv. Math.* **195** (2005), no. 2, 491–523.

[47] A. Marcus, D. Spielman and N. Srivastava, Interlacing Families I: Bipartite Ramanujan Graphs of All Degrees, *preprint*.

[48] K. Maples, Symmetric random matrices over finite fields announcement, April 15, 2013, *preprint*.

[49] A. Nilli, On the second eigenvalue of a graph, *Discrete Mathematics* 91 (1991), 207-210.

[50] A. Nilli, Tight estimates for eigenvalues of regular graphs, *Electronic J. Combinatorics* 11 (2004), N9, 4pp.

[51] H. Nguyen, On the least singular value of random symmetric matrices, *Electron. J. Probab.* 17 (2012), no. 53.

[52] H. Nguyen, Inverse Littlewood-Offord problems and the singularity of random symmetric matrices, *Duke Math. J.* 161 (2012), no. 4, 545–586.

[53] H. Nguyen and V. Vu, Small probability, inverse theorems, and applications, Erdos' 100th Anniversary Proceeding, Bolyai Society Mathematical Studies, Vol. 25 (2013).

[54] H. Nguyen and V. Vu, Random matrices: Law of the determinant, *Annals of Probability* (2014), Vol. 42, No. 1, 146-167.

[55] M. Rudelson, Invertibility of random matrices: norm of the inverse, *Ann. of Math.* (2) 168 (2008), no. 2, 575–600.

[56] M. Rudelson, Lecture notes on non-aymptotic random matrix theory, notes from the AMS Short Course on Random Matrices, 2013.

[57] M. Rudelson and R. Vershynin, The Littlewood-Offord problem and invertibility of random matrices, *Adv. Math.* 218 (2008), no. 2, 600–633.

[58] M. Rudelson and R. Vershynin, Delocalization of eigenvectors of random matrices with independent entries, *preprint*.

[59] O. N. Feldheim and S. Sodin, A universality result for the smallest eigenvalues of certain sample covariance matrices, *Geom. Funct. Anal.* 20 (2010), no. 1, 88–123.

[60] A. Sárközy and E. Szemerédi, Uber ein Problem von Erdös und Moser, *Acta Arithmetica*, 11 (1965) 205-208.

[61] D. Spielman and S-H. Teng, D. Spielman, S.-H. Teng, *Smoothed analysis of algorithms*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002), 597–606, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

[62] B. Sudakov and V. Vu, Local resilience of graphs, *Random Structures Algorithms* 33 (2008), no. 4, 409–433.

[63] T. Tao and V. Vu, A central limit theorem for the determinant of a Wigner matrix, *Adv. Math.* 231 (2012), no. 1, 74–101.

[64] T. Tao and V. Vu, Random matrices: universal properties of eigenvectors, *Random Matrices Theory Appl.* 1 (2012), no. 1.

[65] T. Tao and V. Vu, Random matrices: Universality of the local eigenvalues statistics pdf file *Acta Math*. 206 (2011), no. 1, 127–204.

[66] T. Tao and V. Vu, On random ± 1 matrices: Singularity Determinant,*Random Structures Algorithms* 28 (2006), no. 1, 1–23.

[67] T. Tao and V. Vu, On the singularity probability of random Bernoulli matrices, *J. Amer. Math. Soc.* 20 (2007), no. 3, 603–628.

[68] T. Tao and V. Vu, Inverse Littlewood-Offord theorems and the condition number of random matrices, *Annals of Math.* 169 (2009), 595-632

[69] T. Tao and V. Vu, On the permanent of random Bernoulli matrices,*Advances in Mathematics* 220 (2009), 657-669.

[70] T. Tao and V. Vu, Random matrices: Universality of local spectral statistics of non-Hermitian matrices, *to appear in Annals of Probability*.

[71] T. Tao and V. Vu, Additive Combinatorics,*Cambridge Univ. Press*, 2006.

[72] T. Tao and V. Vu, Random matrices: The Universality phenomenon for Wigner ensembles, *preprint, to appear in AMS lecture notes on Random Matrices, 2013*.

[73] T. Tao and V. Vu, Random matrices: the distribution of the smallest singular values, *Geom. Funct. Anal.* 20 (2010), no. 1, 260–297.

[74] T. Tao and V. Vu, Random matrices: universal properties of eigenvectors, *Random Matrices Theory Appl.* 1 (2012), no. 1.

[75] L. Tran, V. Vu and K. Wang, Sparse random graphs: Eigenvalues and Eigenvectors, *Random Structures Algorithms* 42 (2013), no. 1, 110–134.

[76] R. Vershynin, Invertibility of symmetric random matrices, *Random Structures and Algorithms* 44 (2014), 135–182

[77] E.P. Wigner. On the distribution of the roots of certain symmetric matrices.*Annals of Mathematics,* 67(2):325-327, 1958.

[78] N.C. Wormald, Models of random regular graphs,*In Surveys in Combinatorics,* 1999, J.D. Lamb and D.A. Preece, eds, pp. 239-298.

[79] V. Vu and K. Wang, Random projection, random quadratic forms, and random eigenvectors, *to appear in Random Structures and Algorithms*.

[80] M. Wood, The distribution of sandpile groups of random graphs, *preprint*.

XẤP XỈ DIOPHANTINE VÀ LIÊN PHÂN SỐ

Lý Ngọc Tuệ

(Đại học South Florida, Mỹ)

Trong bài này, chúng tôi giới thiệu một số kết quả cơ bản của lý thuyết xấp xỉ Diophantine trên tập số thực $\mathbb{R}$, cùng với một trong những công cụ mạnh nhất của nó: Liên phân số.

1. Xấp xỉ Diophantine là gì?

Lý thuyết xấp xỉ Diophantine có thể bắt đầu với câu hỏi/vấn đề cơ bản sau:

Câu hỏi 1.1. *Mỗi số vô tỉ $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ có thể được xấp xỉ bởi các số hữu tỉ $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tốt đến thế nào?*

Vì tập hợp các số hữu tỉ dày đặc trong tập các số thực, ta có được kết luận đầu tiên:

Quan sát 1.2. *Gọi $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ là một số vô tỉ bất kỳ. Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại vô số số hữu tỉ $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ sao cho:*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon.$$

Vậy ta có thể lượng hóa được độ dày đặc của tập số hữu tỉ trong tập số thực không? Để làm được như vậy, ta cần phải có cách đo độ phức tạp của các số hữu tỉ, và ước lượng mức độ dày đặc của tập số hữu tỉ theo độ phức tạp ấy. Lưu ý rằng vì ta đo độ dày đặc, nên với mỗi số hữu tỉ $\frac{p}{q}$, độ lớn của mẫu số q đóng vai trò quan trọng hơn là tử số p. Vì thế một trong những cách đơn giản nhất để đo độ phức tạp của phân số $\frac{p}{q}$ là giá trị tuyệt đối $|q|$ của mẫu số. Để cho đơn giản, ta sẽ giả sử là phân số $\frac{p}{q}$ có mẫu số dương $q > 0$. Vì hai phân số có mẫu số bằng q liên tiếp cách nhau đúng bằng $\frac{1}{q}$, ta có được:

Quan sát 1.3. *Với mọi số vô tỉ $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$, tồn tại vô số số hữu tỉ $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ với $q > 0$ sao cho:*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q}.$$

Câu hỏi tiếp theo được đặt ra là: hàm số $\frac{1}{2q}$ trong Quan sát 1.3 đã là tối ưu chưa? Hay nói một cách khác, ta có thể xấp xỉ số vô tỉ tốt hơn Quan sát 1.3 được không? Nhà toán học vĩ đại Leonhard Euler đã trả lời câu hỏi này vào năm 1748 khi ông phát triển lý thuyết về liên phân số với định lý sau đây:

Định lý 1.4 (Euler 1748 [3]). *Với mọi số vô tỉ $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$, tồn tại vô số số hữu tỉ $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ với $q > 0$ sao cho:*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}. \tag{1.1}$$

Lưu ý 1.5. Định lý 1.4 thường được gọi là Định lý Dirichlet theo tên của nhà toán học Peter Gustav Lejeune Dirichlet mặc dù ông chứng minh lại kết quả này gần 100 năm sau Euler. Tuy nhiên cách chứng minh của Dirichlet vừa đơn giản hơn, vừa giúp mở rộng Định lý 1.4 ra các không gian khác. Chúng ta sẽ quay trở lại với phương pháp của Dirichlet sau.

Trong các phần tiếp theo, chúng ta sẽ giới thiệu về liên phân số, một trong những công cụ mạnh nhất của lý thuyết xấp xỉ Diophantine trên tập số thực $\mathbb{R}$, và chứng minh Định lý 1.4. Liên phân số đã được đề cập đến trong số đầu tiên của Epsilon bởi Nguyễn Hùng Sơn [8]. Một số tài liệu tham khảo khác của phần này: Davenport [1, Chương IV], Hardy & Wright [4, Chương X], Khintchine [6], Niven & Zuckerman [9, Chương 7], và Schmidt [10, Chương I].

2. Liên phân số đơn hữu hạn và số hữu tỉ

Một *liên phân số hữu hạn* có độ dài $(n+1)$ là một biểu thức có dạng:

$$[a_0; a_1, ..., a_n] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

với một dãy số thực hữu hạn $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Khi $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$, ta gọi biểu thức dạng như trên là một *liên phân số đơn hữu hạn*.
Tuy trông có vẻ phức tạp, nhưng thật ra liên phân số đơn hữu hạn bắt nguồn từ thuật toán chia số nguyên Euclid như sau: Xét phân số $\frac{p}{q}$ ở dạng tối giản, đặt $u_0 = p$, $u_1 = p$ và áp dụng thuật toán Euclid, ta có được:

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_1 a_0 + u_2 && ,1 \le u_2 < u_1 \\
u_1 &= u_2 a_1 + u_3 && ,1 \le u_3 < u_2 \\
&\vdots \\
u_{n-1} &= u_n a_{n-1} + u_{n+1} && ,1 \le u_{n+1} < u_n \\
u_n &= u_{n+1} a_n
\end{aligned}$$

Với $0 \le i \le n$, đặt $\xi_i = \frac{u_i}{u_{i+1}}$, ta có được mối quan hệ sau đây:

$$\xi_i = a_i + \frac{1}{\xi_{i+1}} \quad \text{với } 0 \le i \le n-1, \quad \text{và} \quad \xi_n = a_n.$$

Thay thế lần lượt vào phân số ban đầu, ta sẽ có:

$$\frac{p}{q} = \xi_0 = a_0 + \frac{1}{\xi_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\xi_2}} = \cdots = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = [a_0; a_1, ..., a_n].$$

Lưu ý 2.1. Định nghĩa trên của ξ_i tương đương với $\xi_i = [a_i; a_{i+1}, ..., a_n]$.

Bài tập 2.2. Áp dụng phép chia Dirichlet để viết các phân số $\frac{355}{113}$ và $\frac{113}{355}$ thành các liên phân số đơn hữu hạn.

Bài tập 2.3. Cho a_0 là một số thực, $a_1, ..., a_n$, và c là các số thực > 0. So sánh $[a_0; a_1, ..., a_n + c]$ với $[a_0; a_1, ..., a_n]$.

Bổ đề 2.4. *Một số tính chất của liên phân số hữu hạn:*

(i) Với mọi $1 \le m \le n$: $[a_0; a_1, ..., a_n] = [a_0; a_1, ..., a_{m-1}, [a_m; a_{m+1}, ..., a_n]]$.

(ii) Trong liên phân số đơn $[a_0; a_1, ..., a_n]$, *nếu như* $a_n > 1$ *thì:*

$$[a_0; a_1, ..., a_n] = [a_0; a_1, ..., a_n - 1, 1].$$

Như vậy, (hiển nhiên) mỗi liên phân số đơn hữu hạn cho ta một số hữu tỉ, và theo chiều ngược lại, mỗi số hữu tỉ ngoài 0 và 1 cho ta **ít nhất** 2 liên phân số. Và thực chất đấy là 2 cách duy nhất để biểu diễn một số hữu tỉ dưới dạng liên phân số đơn hữu hạn:

Định lý 2.5. *Cho 2 liên phân số đơn hữu hạn bất kỳ* $[a_0; a_1, ..., a_n]$ *và* $[b_0; b_1, ..., b_m]$ *sao cho* $a_n > 1$ *và* $b_m > 1$. *Nếu như* $[a_0; a_1, ..., a_n] = [b_0; b_1, ..., b_m]$ *thì* $n = m$ *và* $a_i = b_i$ *với mọi* $i = 0, 1, ..., n$.

Chứng minh. Với $0 \le i \le n$ và $0 \le j \le m$, đặt:

$$\xi_i = [a_i; a_{i+1}, ..., a_n] \quad \text{và} \quad \gamma_j = [b_j; b_{j+1}, ..., b_m].$$

Khi ấy, giả thuyết $[a_0; a_1, ..., a_n] = [b_0; b_1, ..., b_m]$ có thể được viết lại thành $\xi_0 = \gamma_0$.
Vì $\xi_i = a_i + \frac{1}{\xi_{i+1}}$ với $0 \le i \le n-1$, và $\xi_n = a_n$:

$$\xi_{i+1} > 1 \quad \text{và} \quad a_i = \lfloor \xi_i \rfloor \quad \text{với mọi } 0 \le i \le n-1.$$

Tương tự:

$$\gamma_{i+1} > 1 \quad \text{và} \quad b_i = \lfloor \gamma_i \rfloor \quad \text{với mọi } 0 \le i \le m-1.$$

Giả sử với một $0 \le i < \min\{n, m\}$ bất kỳ sao cho $\xi_i = \gamma_i$, ta có được:

$$a_i = \lfloor \xi_i \rfloor = \lfloor \gamma_i \rfloor = b_i \quad \text{và} \quad \frac{1}{\xi_{i+1}} = \xi_i - a_i = \gamma_i - b_i = \frac{1}{\gamma_{i+1}}.$$

Điều đó dẫn đến: $\xi_{i+1} = \gamma_{i+1}$ và $a_{i+1} = b_{i+1}$. Theo quy nạp, ta có được $\xi_i = \gamma_i$ và $a_i = b_i$ với mọi $0 \le i \le \min\{n, m\}$.
Giả sử như $n > m$. Khi đấy

$$\xi_m = a_m + \frac{1}{\xi_{m+1}} > a_m = b_m = \gamma_m$$

trái với điều ta vừa chứng minh. Vậy $n = m$ và $a_i = b_i$ với mọi $0 \le i \le n$.

□

Áp dụng định lý trên, ta có được mối tương quan giữa số hữu tỉ và liên phân số đơn hữu hạn như sau:

Định lý 2.6. *Mỗi liên phân số đơn hữu hạn đại diện cho 1 số hữu tỉ, và ngược lại, mỗi số hữu tỉ khác 0 và 1 có thể được biểu diễn bằng đúng 2 liên phân số đơn hữu hạn.*

3. Liên phân số đơn vô hạn và số vô tỉ

Cho một dãy $a_0, a_1, a_2, ...$ với $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}$ với mọi $i \leq 1$. Để định nghĩa được liên phân số đơn vô hạn, đầu tiên ta phải chứng minh rằng dãy các liên phân số đơn hữu hạn tạo bởi n phần tử đầu tiên hội tụ. Với mọi $n \leq 0$, liên phân số đơn hữu hạn $[a_0; a_1, ..., a_n]$ được gọi là *phân số hội tụ thứ n* . Tử số và mẫu số của phân số hội tụ thứ n có thể được tính theo công thức quy hồi như sau:

$$\begin{aligned} p_{-2} = 0, p_{-1} = 1, \quad p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2} \quad , \text{ với } i \geq 0 \\ q_{-2} = 1, q_{-1} = 0, \quad q_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2} \quad , \text{ với } i \geq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Bổ đề 3.1. *Với mọi $n \geq 0$,*

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, ..., a_n].$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bổ đề bằng quy nạp theo độ dài n. Dễ dàng có thể kiểm tra được điều kiện ban đầu cho $n = 0$ và $n = 1$. Giả sử bổ đề đúng cho **mọi** liên phân số đơn hữu hạn với độ dài $n = k$. Gọi p_n, q_n có được từ công thức (3.1) với dãy $a_0, a_1, ...$ và p'_n, q'_n dựa theo dãy $a_1, a_2, ...$

Bài tập 3.2. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$,

$$p_n = a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1} \quad \text{và} \quad q_n = p'_{n-1}.$$

Bài tập 3.3. Áp dụng Bài tập 3.2 để chứng minh Bổ đề 3.1.

□

Bài tập 3.4. Tìm tất cả các phân số hội tụ của $\frac{43}{13}$.

Bổ đề 3.5.

(i) Với mọi $n \geq 0$:

$$p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n \quad \textit{và} \quad \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}.$$

(ii) Với mọi $n \geq 0$:

$$p_{n+2}q_n - p_n q_{n+2} = (-1)^n a_n \quad \textit{và} \quad \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n+2}}.$$

Bài tập 3.6. Chứng minh bổ đề 2.6.

Một số hệ quả đơn giản nhưng quan trọng của Bổ đề 3.5 như sau:

Hệ quả 3.7.

(i) Với mọi $n \geq 0$, p_n và q_n nguyên tố cùng nhau, hay nói cách khác, phân số $\frac{p_n}{q_n}$ là phân số tối giản.

(ii) Dãy các phân số hội tụ thỏa mãn tính chất sau:

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \cdots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$

Lưu ý rằng vì $a_n \geq 1$ với $n \geq 1$, dãy q_n là dãy tăng thực sự: $q_1 < q_2 < ...$, và vì thế $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$. Áp dụng Bổ đề 3.5, ta có được dãy $\frac{p_n}{q_n}$ là một dãy Cauchy:

Định lý 3.8. *Với mọi dãy $a_0, a_1, a_2, ...$ với $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, giới hạn*

$$\lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, ..., a_n]$$

tồn tại.

Một *liên phân số đơn vô hạn* từ dãy $a_0, a_1, ...$ được định nghĩa là giới hạn có được trong Định lý 3.8:

$$[a_0; a_1, ...] := \lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, ..., a_n]. \tag{3.2}$$

Mối tương quan giữa liên phân số đơn vô hạn và số vô tỉ được tổng kết lại trong định lý sau của Euler:

Định lý 3.9 (Euler 1748). *Mỗi số vô tỉ $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ có thể được biểu diễn bằng duy nhất một liên phân số đơn vô hạn $[a_0; a_1, a_2, ...]$. Và ngược lại, mỗi liên phân số đơn vô hạn $[a_0; a_1, ...]$ đại diện cho một số vô tỉ duy nhất.*

Ta sẽ chứng minh định lý trên từng bước một qua ba bổ đề sau:

Bổ đề 3.10 (Thuật toán Euler). *Giả sử $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ là một số vô tỉ bất kì. Đặt $\xi_0 = \xi$. Định nghĩa hai dãy $\xi_n \in \mathbb{R}$ và $a_n \in \mathbb{Z}$ với $n \geq 0$ lần lượt như sau:*

$$a_n = \lfloor \xi_n \rfloor \quad \text{và} \quad \xi_{n+1} = \frac{1}{\{\xi_n\}} = \frac{1}{\xi_n - a_n}. \tag{3.3}$$

Ta có được: $a_0 \in \mathbb{Z}, a_n \in \mathbb{N}$ với mọi $n \geq 1$, và

$$\xi = [a_0; a_1, a_2, ...].$$

Chứng minh. Theo định nghĩa, hiển nhiên mọi a_n là số nguyên, và theo quy nạp, ξ_n là số vô tỉ với mọi $n \geq 0$. Vì thế, với mọi $n \geq 0$,

$$0 < \xi_n - a_n < 1.$$

Điều đó dẫn đến:

$$\xi_{n+1} = \frac{1}{\xi_n - a_n} > 1 \quad \text{và} \quad a_{n+1} = \lfloor \xi_{n+1} \rfloor \geq 1 \quad \text{với mọi } n \geq 0.$$

Áp dụng đẳng thức: $\xi_n = a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}}$, ta có được:

$$\xi = [a_0; a_1, ..., a_n, \xi_{n+1}] \quad \text{với mọi } n \geq 0.$$

Áp dụng bài tập 2.3, khi n là một số chẵn,

$$\begin{aligned} &< \left[a_0; a_1, ..., a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}}\right] \\ &= [a_0; a_1, ..., a_n, \xi_{n+1}] \\ &< [a_0; a_1, ..., a_n, a_{n+1}]. \end{aligned}$$

và tương tự với n lẻ:

$$[a_0; a_1, ..., a_n] > \xi > [a_0; a_1, ..., a_{n+1}].$$

Theo định lý kẹp của giới hạn,

$$\xi = \lim_{n\to\infty}[a_0; a_1, ..., a_n] = [a_0; a_1, a_2, ...].$$

□

Bài tập 3.11. Với ký hiệu như trong Bổ đề 3.10, chứng minh rằng với mọi $n \geq 0$:

$$\xi = \frac{\xi_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\xi_{n+1} q_n + q_{n-1}}.$$

Bổ đề 3.12. *Với mọi dãy số $a_0, a_1, ...$ với $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $[a_0; a_1, ...]$ là một số vô tỉ.*

Chứng minh. Giả sử như $[a_0; a_1, ...] = \frac{p}{q}$ là một số hữu tỉ, $p, q \in \mathbb{Z}$. Khi đấy theo phần (ii) của Hệ quả 3.7 vả Bổ đề 3.5, với mọi $n \geq 0$:

$$0 < \left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Điều đó dẫn đến:

$$0 < |q_n p - p_n q| < \frac{q}{q_{n+1}}.$$

Khi n đủ lớn, $q < q_{n+1}$, ta có được:

$$0 < |q_n p - p_n q| < 1,$$

vô lý vì $q_n p - p_n q \in \mathbb{Z}$. Vậy liên phân số đơn vô hạn $[a_0; a_1, ...]$ là một số vô tỉ. □

Bổ đề 3.13. *Hai liên phân số đơn vô hạn khác nhau hội tụ về hai giá trị khác nhau.*

Chứng minh. Giả sử ta có 2 liên phân số đơn vô hạn $[a_0; a_1, ...]$ và $[b_0; b_1, ...]$ sao cho:

$$[a_0; a_1, ...] = \xi = [b_0; b_1, ...].$$

Ta có được:

$$\begin{aligned}
\xi &= \lim_{n\to\infty}[a_0; a_1, ..., a_n] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, ..., a_n]}\right) \\
&= a_0 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty}[a_1; a_2, ..., a_n]} \\
&= a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, ...]}
\end{aligned}$$

Vì $[a_1; a_2, ...] > a_1 \geq 1$, $a_0 < \xi < a_0 + 1$, ta có được: $a_0 = \lfloor \xi \rfloor$.
Tương tự với liên phân số $[b_0; b_1, ...]$:

$$b_0 = \lfloor \xi \rfloor \quad \text{và} \quad \xi = b_0 + \frac{1}{[b_1; b_2, ...]}.$$

Kết hợp lại, ta có được:

$$a_0 = b_0 \quad \text{và} \quad [a_1; a_2, ...] = [b_1; b_2, ...].$$

Áp dụng quy nạp, $a_n = b_n$ với mọi $n \geq 0$.

□

Sử dụng mối tương quan giữa liên phân số đơn và tập số thực, ta có thể chứng minh Định lý 1.4:

Theorem 1.4 Với mọi số vô tỉ $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tồn tại vô số số hữu tỉ $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ với $q > 0$ sao cho:

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Chứng minh. Theo Định lý 3.9, số vô tỉ x có thể được biểu diễn bằng duy nhất một liên phân số đơn vô hạn:

$$x = [a_0; a_1, ...].$$

Gọi $\frac{p_n}{q_n}$ là phân số hội tụ thứ n của x. Theo Định lý 3.8 và phần (ii) của Hệ quả 3.7,

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| &< \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \\ &= \frac{1}{q_n q_{n+1}} && \text{(theo phần (i) của Bổ đề 3.5)} \\ &< \frac{1}{q_n^2} && \text{(theo (3.1)).} \end{aligned}$$

Theo phần (i) của Hệ của 3.7, tất cả các phân số hội tụ $\frac{p_n}{q_n}$ đều khác nhau, và ta có được vô số phân số thỏa mãn Định lý 1.4.

□

4. Phân số xấp xỉ tốt nhất

Gọi $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ là một số vô tỉ bất kì. Các phân số hội tụ của x không hội tụ về x một cách ngẫu nhiên, mà lần lượt tiến gần x hơn:

Bổ đề 4.1.

$$\left| x - \frac{p_0}{q_0} \right| > \left| x - \frac{p_1}{q_1} \right| > \left| x - \frac{p_2}{q_2} \right| > ...$$

Chứng minh. Giả sử x có mở rộng liên phân số đơn $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$, và $\frac{p_n}{q_n}$ là các phân số hội tụ của x. Đặt $x_n = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, ...]$ như trong Bổ đề 3.10, ta có được:

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \left| \frac{x_{n+1} p_n + p_{n-1}}{x_{n+1} q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| && \text{(Bài tập 3.11)} \\ &= \frac{1}{q_n \left(x_{n+1} q_n + q_{n-1} \right)} && \text{(Bổ đề 3.5)} \\ &> \frac{1}{q_n \left(\left(a_{n+1} + 1 \right) q_n + q_{n-1} \right)} && (x_{n+1} < a_{n+1} + 1) \\ &= \frac{1}{q_n \left(q_{n+1} + q_n \right)} && (3.1) \\ &\geq \frac{1}{q_n \left(a_{n+1} q_{n+1} + q_n \right)} && (a_n \geq 1) \\ &= \frac{1}{q_n q_{n+2}} > \frac{1}{q_{n+1} q_{n+2}} > \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right|. \end{aligned}$$

□

Phân số $\frac{p}{q}$ $(q > 0)$ được gọi là *phân số xấp xỉ tốt nhất của x* nếu như với mọi phân số $\frac{r}{s}$ $(s > 0)$:

$$\left|x - \frac{r}{s}\right| < \left|x - \frac{p}{q}\right| \quad \Longrightarrow \quad s > q.$$

Định lý 4.2. *Phân số hội tụ $\frac{p_n}{q_n}$ của x là phân số xấp xỉ tốt nhất của x.*

Để chứng minh Định lý 4.2, ta sẽ dùng bổ đề sau:

Bổ đề 4.3. *Nếu như hai số nguyên p, q với $q > 0$ thỏa mãn:*

$$|xq - p| < |xq_n - p_n|,$$

thì $q \geq q_{n+1}$.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bằng phản chứng. Giả sử như $q < q_{n+1}$. Xét ma trận với hệ số nguyên:

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Theo Bổ đề 3.5, định thức của ma trận này là ± 1. Vì thế hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

có nghiệm nguyên $(y, z) \neq (0, 0)$. Hơn nữa, $z \neq 0$ vì $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$. Mặt khác, nếu $y = 0$ thì $q = zq_{n+1} \geq q_{n+1}$ trái với giả thuyết $q < q_{n+1}$. Vậy $y \neq 0$.
Vì $q = yq_n + zq_{n+1} < q_{n+1}$, y và z trái dấu với nhau. Theo phần (ii) của Hệ quả 3.7, $y\,(xq_n - p_n)$ và $z\,(xq_{n+1} - p_{n+1})$ có cùng dấu, và ta có được:

$$\begin{aligned} |xq - p| &= |x\,(yq_n + zq_{n+1}) - (yp_n + zp_{n+1})| \\ &= |y\,(xq_n - p_n) + z\,(xq_{n+1} - p_{n+1})| \\ &= |y\,(xq_n - p_n)| + |z\,(xq_{n+1} - p_{n+1})| \\ &> |xq_n - p_n| \end{aligned}$$

trái với giả thuyết. Vậy $q \geq q_{n+1}$.

□

Chứng minh Định lý 4.2. Vì x là số vô tỉ, nên không tồn tại một số hữu tỉ $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ với:

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| = \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right|.$$

Giả sử như tồn tại $\frac{p}{q}$ $(q > 0)$ sao cho:

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \qquad \text{và} \qquad q \leq q_n.$$

Nhân cả hai bất phương trình trên dân đến:

$$|xq - p| < |xq_n - p_n|.$$

Theo Bổ đề 4.3, $q \geq q_{n+1} > q_n$ trái với giả thuyết. Vậy $\frac{p_n}{q_n}$ là phân số xấp xỉ tốt nhất của x.

□

Theo chiều ngược lại, Định lý sau chỉ ra rằng khi một phân số xấp xỉ x 'đủ gần' thì phân số đó phải là một phân số hội tụ của x:

Định lý 4.4. *Nếu như số hữu tỉ $\frac{p}{q}$ $(q > 0)$ thỏa mãn:*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2},$$

thì tồn tại một phân số hội tụ $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q}$.

Lời giải. Giả sử mọi phân số hội tụ của x đều không bằng $\frac{p}{q}$. Gọi n là số nguyên dương sao cho $q_n \leq b < q_{n+1}$. Theo Bổ đề 4.3:

$$|xq_n - p_n| \leq |xq - p| < \frac{1}{2q}.$$

Từ đó ta suy ra:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{qq_n} \leq \frac{|qp_n - pq_n|}{qq_n} &= \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q}\right| \\
&\leq \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \\
&< \frac{1}{2qq_n} + \frac{1}{2q^2}
\end{aligned}$$

Điều này dẫn đến $q < q_n$, trái với giả thuyết. Vậy $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ với $n \geq 0$ nào đó.

□

5. Số mũ Dirichlet tối ưu và Số xấp xỉ kém

Trở lại về tính tối ưu của Định lý 1.4, ta có thể đặt câu hỏi cụ thể hơn như sau: Liệu hàm số q^{-2} trong Định lý 1.4 có thể được thay thế bởi một hàm số theo q khác tiến về 0 nhanh hơn khi q tiến ra vô cùng hay không?
Câu trả lời cho câu hỏi trên là không, hay nói cách khác, số mũ -2 trong Định lý 1.4 là tối ưu. Chúng ta sẽ chứng minh điều này bằng sự tồn tại của các số *xấp xỉ kém* được định nghĩa như sau: Số vô tỉ $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ được gọi là một số xấp xỉ kém nếu như tồn tại một hằng số $c > 0$ (có thể phụ thuộc vào x) sao cho với mọi phân số $\frac{p}{q}$:

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^2}. \tag{5.1}$$

Định lý 5.1. *Tồn tại vô số số xấp xỉ kém.*

Định lý 5.1 có thể được suy ra bởi mối liên hệ giữa số xấp xỉ kém và liên phân số đơn như sau:

Định lý 5.2. *Số vô tỉ $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ là một số xấp xỉ kém khi và chỉ khi mở rộng liên phân số đơn của x bị chặn. Nói cách khác, tồn tại $M > 0$ sao cho $a_n < M$ với mọi $n \geq 0$ với $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$.*

Ta sẽ dùng Bổ đề sau để chứng minh Định lý 5.2:

Bổ đề 5.3. *Với mọi $n \geq 0$:*

$$\frac{1}{q_n^2\left(a_{n+1}+2\right)} < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2 a_{n+1}}.$$

Lời giải. Theo như tính toán như trong phần chứng minh của Bổ đề 4.1:

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n\left(x_{n+1}q_n + q_{n-1}\right)} = \frac{1}{q_n^2\left(x_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} < \frac{1}{q_n^2 x_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2 a_{n+1}}.$$

Mặt khác,

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| > \frac{1}{q_n\left[\left(a_{n+1}+1\right)q_n + q_{n-1}\right]} = \frac{1}{q_n^2\left(a_{n+1} + 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} > \frac{1}{q_n^2\left(a_{n+1}+2\right)}.$$

□

Chứng minh Định lý 5.2. Giả sử như $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$ là một số xấp xỉ kém, với mọi $n \geq 0$, ta có được:

$$\frac{c}{q_n^2} < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2 a_{n+1}}.$$

Từ đó dẫn đến mở rộng liên phân số của x bị chặn:

$$\sup_{n \geq 0} a_n \leq \max\left\{a_0, \frac{1}{c}\right\}.$$

Theo chiều ngược lại, giả sử như x không phải là một số xấp xỉ kém. Điều đấy tương đương với tồn tại các dãy số $c_i > 0, \frac{r_i}{s_i}$ sao cho:

$$\lim_{i \to \infty} c_i = 0 \quad \text{và} \quad \left|x - \frac{r_i}{s_i}\right| \leq \frac{c_i}{q_i^2}.$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể đặt giả thiết là $c_i < \frac{1}{2}$. Theo Định lý 4.4, $\frac{r_i}{s_i} = \frac{p_n}{q_n}$ là một phân số hội tụ của x. Vì vậy:

$$\frac{1}{q_n^2\left(a_{n+1}+2\right)} < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{c_i}{q_n^2}.$$

Từ đó suy ra:

$$a_{n+1} > \frac{1}{c_i} - 2.$$

Vế phải $\to \infty$ khi $i \to \infty$, hay nói cách khác, dãy a_n không bị chặn. Ta có được điều phải chứng minh.

□

Hệ quả 5.4. *Tập các số xấp xỉ kém là không đếm được .*

Ví dụ cụ thể và gần gũi nhất về các số xấp xỉ kém là các số đại số bậc 2 như $\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, ...$:

Định lý 5.5 (Lagrange 1770 [7]). *Số vô tỉ x là số đại số bậc 2 khi và chỉ khi mở rộng liên phân số của x là vô hạn tuần hoàn .*

Lưu ý 5.6. Mệnh đề đủ trong Định lý 5.5 đã được chứng minh trước đấy bởi Euler [2]. Chiều khó hơn là mệnh đề cần được Lagrange chứng minh trong [7].

6. Hàm số Dirichlet tối ưu

Trong phần trước, chúng ta đã chứng minh rằng phần q^{-2} trong Định lý 1.4 là không thể cải thiện được. Tuy nhiên, hằng số 1 có thể được thay thế bằng một hằng số khác nhỏ hơn với kết quả sau của Hurwitz:

Định lý 6.1 (Hurwitz 1891 [5]). *Với mọi số vô tỉ $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tồn tại vô số số hữu tỉ $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ với $q > 0$ sao cho:*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}. \tag{6.1}$$

Lưu ý 6.2. Định lý 6.1 thật sự là tối ưu vì với $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, và với mọi hằng số $0 < C < \frac{1}{\sqrt{5}}$, chỉ tồn tại hữu hạn số hữu tỉ $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $q > 0$ thỏa mãn bất phương trình:

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^2}.$$

Bài tập 6.3. Chứng minh Lưu ý 6.2.

Định lý sau sẽ suy ra Định lý 6.1:

Định lý 6.4. *Ít nhất một trong 3 phân số hội tụ liên tiếp bất kỳ của x thỏa mãn bất đẳng thức* (6.1).

Lời giải. Theo như trong phần chứng minh của Bổ đề 4.1:

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n\left(x_{n+1}q_n + q_{n-1}\right)} = \frac{1}{q_n^2\left(x_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} \quad \text{với mọi } n \geq 0.$$

Giả sử như tồn tại n sao cho:

$$x_{i+1} + \frac{q_{i-1}}{q_i} \leq \sqrt{5} \quad \text{với } i = n-2, n-1, n.$$

Vì $x_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{x_n}$, và

$$\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} = \frac{a_{n-1}q_{n-2} + q_{n-3}}{q_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{q_{n-3}}{q_{n-2}},$$

$$\frac{1}{x_n} + \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} = x_{n-1} + \frac{q_{n-3}}{q_{n-2}} \leq \sqrt{5}.$$

Vì vậy:

$$1 = x_n\left(\frac{1}{x_n}\right) = \left(\sqrt{5} - \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right)\left(\sqrt{5} - \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}}\right).$$

Nói cách khác, phân số $\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}$ thỏa mãn bất đẳng thức:

$$\left(\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right)^2 - \sqrt{5}\left(\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right) + 1 \leq 0,$$

và ta có được:

$$\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Tương tự:

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Vì thế:

$$1 \le a_n = \frac{q_n}{q_{n-1}} - \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} < \frac{2}{\sqrt{5}-1} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 \quad \text{(vô lý)}.$$

Vậy với mọi $n \ge 2$, ít nhất 1 trong 3 phân số hội tụ $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}, \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}$ thỏa mãn bất đẳng thức (6.1).

□

Tài liệu tham khảo

[1] Davenport, H., *The higher arithmetic*, 7th ed., Cambridge University Press (1999).

[2] Euler, L., *De fractionibus continuis*, Commentarii Acad. Sci. Imperiali Petropolitanae **9** (1737).

[3] Euler, L., *Introductio in analysin infinitorum I*, (1748).

[4] Hardy, G., Wright, E. M., *An introduction to the theory of numbers*, 5th ed., Clarendon Press (1979).

[5] Hurwitz, A., *Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche*, Math. Ann. **39**, pp 279–284.

[6] Khintchine, A., *Continued fractions*, (1964).

[7] Lagrange, J. L., *Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques*, Mém. Berl. **24** (1770).

[8] Nguyễn Hùng Sơn, *Thuật toán phục hồi số hữu tỉ*, Epsilon **1**, (2015).

[9] Niven, I., Zuckerman, H. S., *An introduction to the theory of number*, 4th ed., John Wiley & Sons (1980).

[10] Schmidt, W. M., *Diophantine approximation*, Lectures Notes in Mathematics **785**, Springer (1980).

BIỂU DIỄN NGHĨA CỦA TỪ BẰNG VÉC-TƠ

Lê Phong

(*Đại học Amsterdam, Hà Lan*)

Tuy rằng thời điểm chúng ta có thể tạo ra những cỗ máy có trí tuệ như người chắc chắn sẽ không đến trong nay mai, việc làm cho máy tính hiểu được những gì chúng ta nói đã đạt được một số đột phá nhất định. Bài viết này sẽ giới thiệu một hướng nghiên cứu mà trong đó ngữ nghĩa của từ được biểu diễn bằng véc-tơ, từ đó tạo nền tảng cho việc xây dựng một hệ thống hoàn chỉnh có thể tự động giao tiếp với con người.

1. Máy hiểu Tiếng người

Con người đã chế tạo được những cỗ máy thám hiểm Sao Hoả, lặn xuống nơi sâu nhất đại dương, hay có khả năng tính toán siêu việt. Thế nhưng việc xây dựng trí tuệ nhân tạo thông minh như con người vẫn chỉ mới tồn tại trên phim ảnh, tiểu thuyết. Nói như thế không có nghĩa là điều đó không thể: máy tính chúng ta chế tạo ngày càng mạnh mẽ hơn, thông minh hơn. Một số nhà tương lai học, nổi bật là Ray Kurzweil, tin rằng thời điểm ra đời của trí tuệ nhân tạo đang đến rất gần [5].

Tuy nhiên, làm thế nào để biết được một cỗ máy có trí tuệ như chúng ta? Đây là một câu hỏi mang tính triết học hơn là khoa học kỹ thuật. Alan Turing, cha đẻ của ngành khoa học máy tính, đã đề xuất một bài kiểm tra [9] (vì thế mang tên là Turing test) dựa trên trò chơi "bắt chước" (imitation game)[1]. Bài kiểm tra này có thể mô tả nôm na như sau: có một máy tính A và hai người B, C. Người C không nhìn thấy và không biết A, B. Người C có thể giao tiếp với A và B thông qua gõ bàn phím. Sau khi giao tiếp xong mà C không thể phân biệt được đâu là máy tính, đâu là người thì máy tính A có thể coi là có trí tuệ như người.

Điều lẽ dĩ nhiên là có nhiều người không đồng tình với bài kiểm tra này. Một trong những lý do là tâm lý con người có thể bị đánh lừa bằng những mánh khoé hết sức đơn giản như là cố tình đưa ra những từ sai chính tả. Điều đáng nói ở đây là, nếu nhìn theo khía cạnh khoa học, một cỗ máy có trí tuệ nhân tạo thì phải *hiểu* được con người nói gì và sinh ra được lời đối đáp thích hợp. Chế tạo được cỗ máy như vậy là một trong những mục đích tối thượng của ngành Xử lý ngôn ngữ tự nhiên (Natural language processing).

Một ngôn ngữ (viết) là một tập hợp các chuỗi ký hiệu, cấu thành bằng việc kết nối các từ trong một tập từ vựng thông qua một bộ các nguyên tắc ghép từ, được gọi là ngữ pháp. Do đó, để có thể làm cho máy tính hiểu được ngôn ngữ, điều đầu tiên chúng ta có thể nghĩ đến là làm sao cho máy tính hiểu được nghĩa của các từ. Ví dụ như làm sao nó có thể hiểu được rằng "chó" và "mèo" là tên của hai loài động vật có bốn chân, có những hành vi tương đồng như ăn, ngủ, chạy, nhảy. Về mặt lý thuyết, chúng ta có thể mô tả nghĩa của từ cho máy tính hiểu bằng việc liệt kê

[1] "Imitation game" cũng là tên của một bộ phim kể về cuộc đời của Alan Turing. Ông đã giúp quân Đồng Minh giải mã những thông điệp của quân Đức trong Thế chiến thứ hai. Nhờ vậy mà chiến tranh đã được kết thúc sớm, giúp cứu sống rất nhiều sinh mệnh.

các đặc tính được kể ở trên. Về mặt thức tế, công việc như vậy đòi hỏi phải có những chuyên gia về ngôn ngữ học, khiến cho tốn rất nhiều thời gian và tiền bạc.
Một trong những hướng giải quyết thông dụng bây giờ là tận dụng một lượng đồ sộ các văn bản có sẵn trên Internet để tự động xây dựng nghĩa cho các từ. Bài viết này sẽ giới thiệu một hướng nghiên cứu như vậy, được gọi là *Distributional semantics*[2]. Bạn đọc sẽ thấy rằng, chỉ với một vài công cụ toán hết sức đơn giản, một lý thuyết về ngữ nghĩa học hợp lý, và một lượng lớn văn bản, chúng ta có thể làm được những thứ hết sức hữu dụng.

2. Distributional semantics

Câu hỏi trước tiên cần phải giải đáp chính là: cái gì quyết định nghĩa của từ? John Rupert Firth năm 1957 đề xuất một quan điểm mà bây giờ trở thành "phương châm" để giải quyết vấn đề tự động học nghĩa của từ:

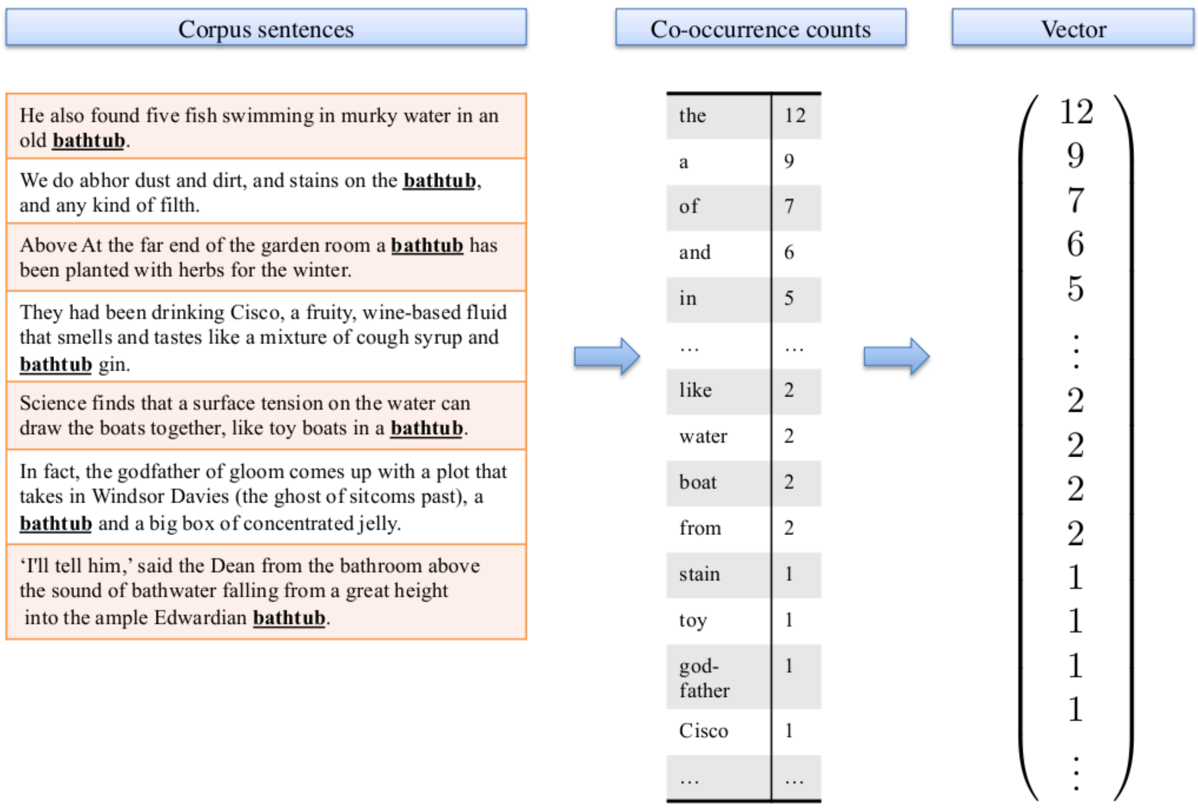
> You shall know a word by the company it keeps [4]

nghĩa là: nghĩa của một từ có thể được nhận biết bằng các từ đi kèm với nó. Để có thể hiểu được ý của Firth, chúng ta có thể hình dung một tình huống như sau: giả sử như chúng ta đang đọc một cuốn sách bằng tiếng Anh và gặp một từ rất lạ "bardiwac" lặp đi lặp lại nhiều lần:

- He handed her her glass of *bardiwac*.
- Beef dishes are made to complement the *bardiwac*.
- Nigel staggered to his feet, face flushed from too much *bardiwac*.
- Malbec, one of the lesser-known *bardiwac* grapes, responds well to Australia's sunshine.
- I dined off bread and cheese and this excellent *bardiwac*.
- The drinks were delicious: blood-red *bardiwac* as well as light, sweet Rhenish.

Điều đáng nói ở đây là chúng ta hoàn toàn có thể đoán được nghĩa của từ này bằng cách suy đoán dựa trên ngữ cảnh của nó. Từ câu đầu tiên, chúng ta có thể đoán rằng "bardiwac" là một thứ chất lỏng. Câu thứ hai gợi ý rằng từ này chỉ một thứ được dùng kèm khi ăn thịt bò. Với câu thứ ba, từ này dường như có nghĩa là một thứ khiến ta có thể say, vân vân... Và khi tổng hợp lại, chúng ta có thể đoán rất chính xác rằng "bardiwac" là một loại rượu đỏ được làm từ nho.
Tất nhiên, vì chúng ta có trí tuệ nên có thể dễ dàng đoán được nghĩa của một từ lạ thông qua ngữ cảnh. Còn đối với máy tính thì sao? Làm cách nào chúng ta có thể nói với nó rằng hãy dùng ngữ cảnh để học nghĩa của từ? Trong hai mục tiếp theo sau, hai phương pháp thông dụng là Đếm và Đoán sẽ được trình bày.

[2]Có thể dịnh là "Ngữ nghĩa có tính phân bố".



Hình 3.1: Xây dựng véc-tơ nghĩa của từ "bathtub" bằng phương pháp đếm (hình lấy từ [3]).

3. Phương pháp 1: Đếm

Trước tiên, chúng ta cần phải làm rõ khái niệm "ngữ cảnh" cho máy tính hiểu. Nôm na mà nói, ngữ cảnh là tất cả những gì xuất hiện xung quanh đối tượng cần quan tâm. Ở đây, chúng ta sẽ giới hạn "ngữ cảnh" là tập hợp những từ nằm trong cùng một câu với đối tượng, hoặc là những từ nằm trước đối tượng và nằm sau đối tượng không quá k vị trí.

Gọi $\mathcal{V}$ là tập từ vựng. Cách đơn giản, và cũng rất cổ điển, là thống kê các từ $u \in \mathcal{V}$ xuất hiện kèm theo từ $w \in \mathcal{V}$ mà ta quan tâm. Điều này tương đương với việc ước lượng phân bố xác suất có điệu kiện $P(U = u|W = w)$ thể hiện khả năng từ u thuộc ngữ cảnh của từ w. Để làm được như vậy, với mỗi từ u, ta đếm xem u xuất hiện bao nhiêu lần kèm theo từ w (vì thế phương pháp này có tên gọi là *co-occurrence count*[3]). Ví dụ minh họa được cho trong Hình 3.1. Có ba bước để biểu diễn nghĩa của từ w bằng véc-to. Trước hết, chúng ta thu thập các câu có chứa từ w. Sau đó, với mỗi từ u ta đếm xem nó thuộc về ngữ cảnh của từ w bao nhiêu lần. Và cuối cùng, chúng ta trích ra véc-tơ cho từ w. Ước lượng xác suất trở nên đơn giản là

$$P(U = u|W = w) = \frac{\text{số lần u thuộc về ngữ cảnh của w}}{\text{số lần w xuất hiện trong toàn bộ dữ liệu}} \tag{3.1}$$

Tuy nhiên, để thu được các véc-tơ tốt, có nhiều điều chúng ta cần phải xem xét. Thứ nhất, u nên là những từ như thế nào. Rõ ràng là những từ chức năng (functional words) (như "a", "an", "the", "how", "whom") (trong tiếng Việt thì có "ai", "rằng", "thì", "là", "mà") có tần suất xuất

[3]Có thể dịch là "đếm từ đồng xuất hiện"

hiện rất cao nhưng lại mang thông tin cú pháp hơn là ngữ nghĩa. Vì thế, u không nên là một trong những từ đó.
Kế tiếp, với cách đếm này, chúng ta xem các từ u có vai trò bình đẳng. Thực tế thì ngược lại vì có những từ mặc dù xuất hiện rất ít nhưng mang thông tin rất quan trọng (ví dụ như động từ thường quan trọng hơn trợ động từ). Để khắc phục điểm này, thông thường người ta áp dụng thêm một bước nữa gọi là đánh trọng số (weighting scheme). Một trong những cách đánh trọng số phổ biến là Pointwise mutual information

$$PMI(u,w) = \frac{P(U = u|W = w)}{P(V = u)} \tag{3.2}$$

trong đó $P(V = u)$ là xác suất xuất hiện của từ u trong toàn bộ dữ liệu. Nói nôm na là các từ hiếm u nên được tăng trọng số lên. Điều này khá là hợp lý bởi vì một từ với tần suất xuất hiện thấp có khả năng gây nhiễu cực thấp. Vì thế khả năng nó mang thông tin để mô tả từ cần quan tâm là lớn.
Thực tế là các véc-tơ thu được có số chiều lớn (2000 hoặc hơn) và thưa (vì chúng ta mong muốn dùng những từ hiếm u để tăng thêm thông tin ngữ nghĩa). Vì vậy, một phương pháp giảm số chiều (tương tự như PCA) sẽ được áp dụng sau cuối.

4. Phương pháp 2: Đoán

Ý tưởng của phương pháp Đoán thật ra rất giống như chúng ta trả lời câu hỏi chọn từ điền vào chỗ trống trong các bài thi TOEFL hay IELTS:

> ______ is the study of numbers, equations, functions, and geometric shapes and their relationships.
>
> a. physics
>
> b. mathematics
>
> c. geography
>
> d. theology

Nếu chúng ta đạt kết quả tốt trong bài kiểm tra thế này (tức là tỉ lệ phần trăm đúng cao hơn rất nhiều so với chọn ngẫu nhiên 25%), người kiểm tra sẽ cho rằng chúng ta *hiểu* được nghĩa của cả những từ cần được chọn lẫn những từ có mặt trong ngữ cảnh. Tương tự, với phương pháp Đoán, nếu các véc-tơ của các từ có thể giúp chúng ta làm tốt các câu hỏi như trên, các véc-tơ này được cho là thể hiện được nghĩa của các từ mà chúng biểu diễn.
Bây giờ chúng ta giả sử rằng mỗi từ $v \in \mathcal{V}$ được biểu diễn bởi một véc-tơ d-chiều $\mathbf{v}$, và chúng ta có một cách nào đó để tính xác suất $P(W = w|\mathcal{U} = (u_1, u_2, ..., u_l))$ thể hiện khả năng từ w xuất hiện trong ngữ cảnh $(u_1, u_2, ..., u_l)$. Điều chúng ta cần làm là đi tìm véc-tơ $\mathbf{v}$ cho mỗi từ v sao cho xác suất ở trên là cao nhất với mọi từ w và ngữ cảnh của nó $(u_1, u_2, ..., u_l)$.
Có nhiều phương pháp được đề xuất để tính $P(W|\mathcal{U})$, ở đây, phương pháp của [2][4] sẽ được trình bày. Trước tiên, chúng ta kết hợp véc-tơ của các từ $u_1, ..., u_l$ thuộc ngữ cảnh vào một véc-tơ $\mathbf{x}$ như sau:

$$\mathbf{x} = tanh(\mathbf{b} + \mathbf{V}_1\mathbf{u}_1 + ... + \mathbf{V}_l\mathbf{u}_l) \tag{4.1}$$

[4]Phương pháp này liên quan tới mạng nơ-ron nhân tạo. Để tránh phải giới thiệu thêm khái niệm mới, chỉ có dạng công thức toán được trình bày.

trong đó mỗi $\mathbf{V}_i$ là một ma-trận $n \times d$ và $\mathbf{b}$ là một véc-tơ n-chiều; hàm hyperbolic $tanh$ được áp dụng cho mỗi phần tử của véc-tơ đối số

$$tanh(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} tanh(y_1) \\ tanh(y_2) \\ ... \\ tanh(y_n) \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Tiếp theo, chúng ta chiếu $\mathbf{x}$ lên một không gian véc-tơ có số chiều bằng đúng $|\mathcal{V}|$, số lượng từ có trong tập từ vựng:

$$\mathbf{a} = \mathbf{c} + \mathbf{W}\mathbf{x} \tag{4.3}$$

Cuối cùng, dùng hàm $softmax$, chúng ta tính xác suất để w_k, từ thứ k trong tập từ vựng $\mathcal{V}$, xuất hiện trong ngữ cảnh $(u_1, ..., u_l)$

$$P(W = w_k|\mathcal{U} = (u_1, u_2, ..., u_l)) = softmax(k, \mathbf{a}) = \frac{e^{a_k}}{\sum_{i=1}^{|\mathcal{V}|} e^{a_i}} \tag{4.4}$$

Bây giờ, gọi $\theta = \langle \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{|\mathcal{V}|}, \mathbf{V}_1, ..., \mathbf{V}_l, \mathbf{b}, \mathbf{W}, \mathbf{c} \rangle$. Bởi vì mục đích cuối cùng là dự đoán đúng từ khi biết ngữ cảnh, chúng ta đi tìm θ sao cho có được log-likelihood (log của độ tương đồng) lớn nhất

$$L(\theta) = \sum_{w,(c_1,...,c_l)} \log P(W = w|\mathcal{U} = (u_1, ..., u_l)) \tag{4.5}$$

trong đó tổng được tính trên tất cả các ngữ cảnh và từ xuất hiện trong ngữ cảnh đó có thể tìm được trong văn bản dữ liệu. Đến đây chúng ta có bài toán tìm cực trị hàm đa biến quen thuộc.

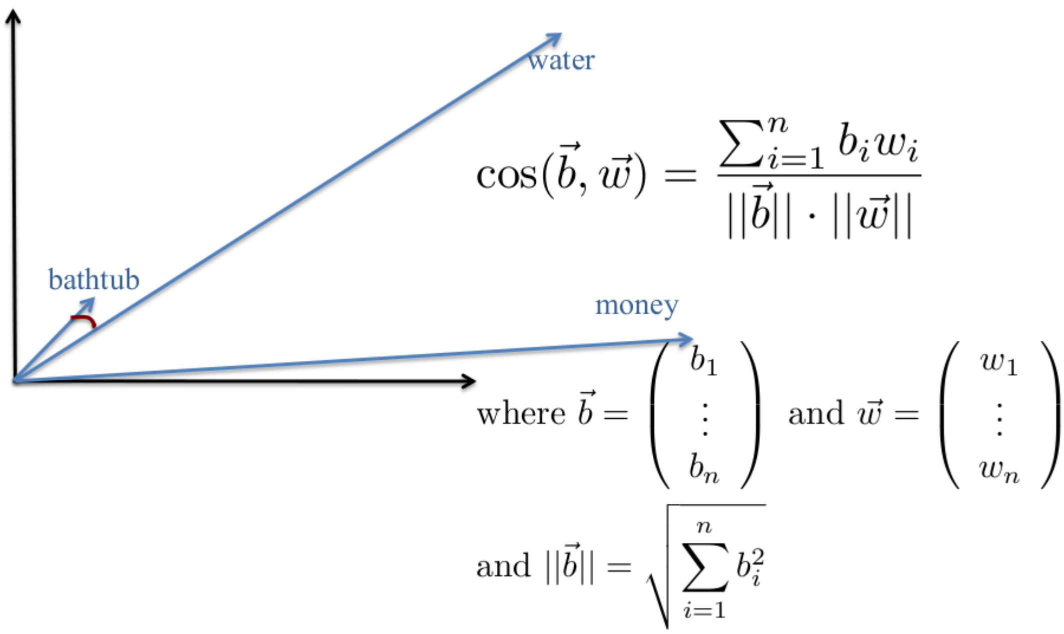
5. Tính chất và Ứng dụng

Liệu rằng khi nhìn vào các véc-tơ này, máy tính có thể biết được rằng "chó" và "mèo" đều có bốn chân, "chó" sủa gâu gâu còn "mèo" kêu meo meo? Câu trả lời có lẽ là "Không!", hoặc là rất khó để biết được. Tuy nhiên, điều đó không có nghĩa véc-tơ từ là vô dụng. Ngược lại, người ta nhận thấy rằng, các véc-tơ này cho chúng ta biết một thông tin hết sức quan trọng gọi là "mức độ tương đồng về nghĩa" (semantic similarity). Điều này xuất phát từ Giả thuyết phân bố (Distributional Hypothesis) [6] sau đây:

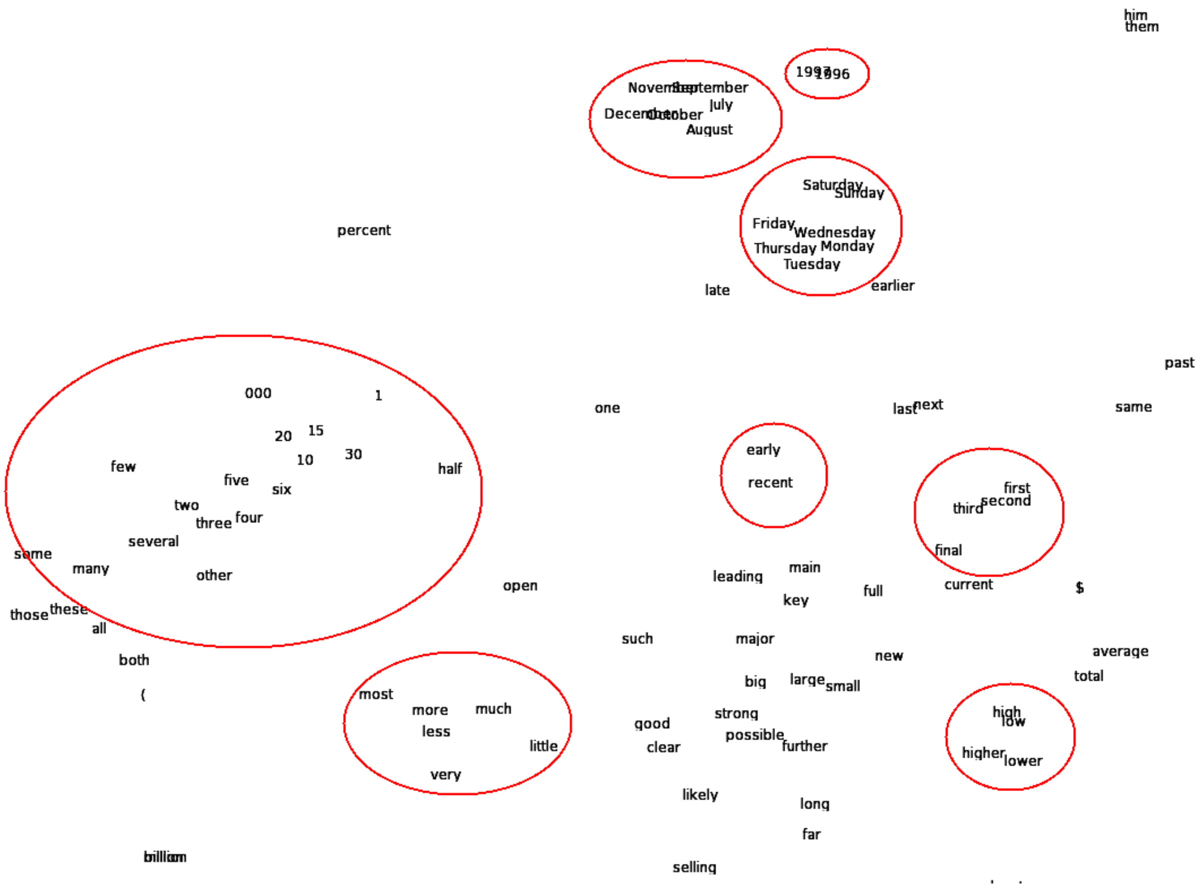
> Độ tương đồng về nghĩa giữa hai biểu thức ngôn ngữ A và B là một hàm của độ tương đồng của ngữ cảnh ngôn ngữ mà A và B xuất hiện trong đó.

Về mặt lý thuyết, chúng ta có thể sử dụng bất kỳ độ đo khoảng cách giữa hai véc-tơ nào. Trong thực tế, người ta thấy rằng cosine thường cho kết quả tốt nhất (xem Hình 3.2).
Khi chiếu các véc-tơ nghĩa của từ lên mặt phẳng 2D dùng phương pháp giảm số chiều (như là PCA), thường chúng ta sẽ thấy các từ có nghĩa tương đồng sẽ được gom cụm gần nhau (như Hình 3.3). Do đó, mặc dù máy tính sẽ không biết là chó có bốn chân, mèo kêu meo meo, nhưng mà nó sẽ biết được rằng chó và mèo nằm trong nhóm các động vật có tính chất tương đồng như bò, cọp, heo.
Gần đây, [7] dùng một phương pháp tương tự như Đoán, đã cho ra bộ véc-tơ mà trong đó một số mối quan hệ về nghĩa có thể được thể hiện thông qua phép tính véc-tơ, nổi bật nhất là:

$$\overrightarrow{king} - \overrightarrow{queen} \approx \overrightarrow{man} - \overrightarrow{woman} \tag{5.1}$$



Hình 3.2: Dùng hàm cosine để đo góc giữa hai véc-tơ. Kết quả thu được thể hiện sự tương đồng nghĩa giữa các từ (hình lấy từ [3]).



Hình 3.3: Các từ có nghĩa tương đồng thường nằm co cụm gần nhau.

5.0.0.1 Ứng dụng Distributional semantics có nhiều ứng dụng chủ yếu xuất phát từ tính chất kể trên. Một số được liệt kê dưới đây:

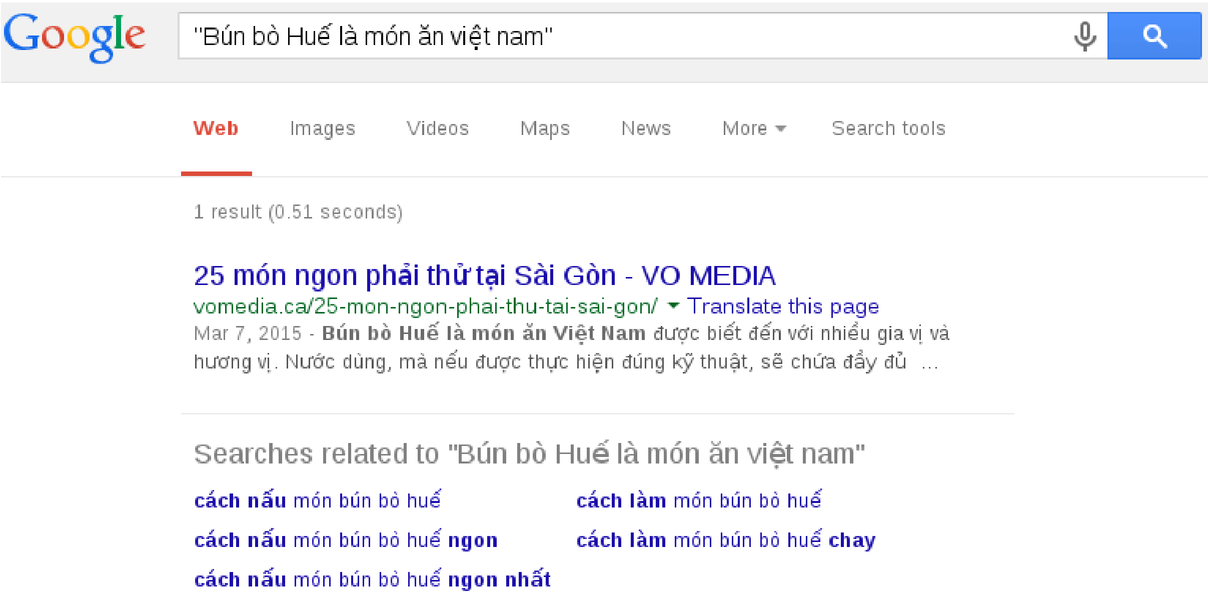
- xây dựng từ điển đồng nghĩa một cách tự động (điều này đặc biệt có ý nghĩa đối với những ngôn ngữ chưa được nghiên cứu kỹ, như là ngôn ngữ của các dân tộc thiểu số),
- mở rộng từ khóa tìm kiếm (ví dụ như Google bên cạnh tìm kiếm chính xác từ khóa người dùng nhập vào, sẽ mở rộng tìm kiếm bằng cách thay từ khóa đó bằng những từ gần nghĩa),

Đặc biệt, với xu thế ngày càng mở rộng của của deep learning[5] (dùng các mạng nơ-ron nhân tạo có nhiều lớp), việc dùng véc-tơ nghĩa của từ như xuất phát điểm trở nên vô cùng quan trọng trong rất nhiều ứng dụng như là phân tích cú pháp (syntactic parsing), phân loại văn bản (document classification), phân tích cảm nghĩ (sentiment analysis), dịch máy (machine translation).

6. Bàn luận

Ở phần trên đã trình bày hai phương pháp là Đếm và Đoán. Một sự nhẩm tính bình thường cũng có thể thấy rằng Đếm đơn giản hơn rất nhiều so với Đoán. Vì thế mà Đoán mãi gần đây, khi sức mạnh của máy tính tăng lên đáng kể, mới trở nên phổ biến. Đoán thường cho ra véc-tơ với số chiều ít hơn (khoảng 25-500), trong khi Đếm là khoảng 2000 hoặc hơn. Về chất lượng của véc-tơ, [1] đưa ra một số bằng chứng thực nghiệm cho thấy Đoán cho ra véc-tơ tốt hơn Đếm. Tuy nhiên, ngay sau đó, [8] chỉ ra rằng Đếm kết hợp với một phương pháp đánh trọng số thông minh và giảm số chiều hợp lý sẽ cho ra véc-tơ tốt hơn.
Bài viết này chỉ trình bày những điều hết sức cơ bản về Distributional semantics. Độc giả có "mắt đại bàng" sẽ thấy rằng còn nhiều thứ có thể mở rộng và còn nhiều việc phải làm để tiếp cận một hệ ngữ nghĩa hoàn chỉnh.
Thứ nhất, chúng ta đề cập đến nghĩa của từ dưới một sự ngầm hiểu rằng mỗi từ chỉ có một nghĩa (được biểu diễn bởi một véc-tơ). Tuy nhiên, trong thực tế ta thường bắt gặp những từ có nhiều nghĩa. Các nghĩa này có thể rất khác nhau (đồng âm khác nghĩa), hoặc có thể hơi tương đồng (đồng âm gần nghĩa). Việc có thể xây dựng các véc-tơ khác nhau cho các nghĩa khác nhau một cách tự động gọi là Word sense induction.
Thứ hai, khái niệm tương đồng nghĩa nên được hiểu là tương đồng nghĩa trong ngữ cảnh sử dụng. Nhìn vào Hình 3.3 chúng ta có thể thấy rằng những từ trái nghĩa lại rất gần nhau (như là "more" / "less", "high" / "low"). Điều này là bởi các từ trái nghĩa thường được đặt trong các ngữ cảnh rất giống nhau. Những từ ám chỉ cùng một sự vật như là "water" và "H_20" sẽ có véc-tơ rất khác nhau, bởi vì "water" thường được sử dụng trong ngữ cảnh đời thường, trong khi "H_20" dùng trong ngữ cảnh khoa học.
Thứ ba, mặc dù distributional semantics về mặt lý thuyết có thể mở rộng cho bất kỳ đối tượng ngôn ngữ nào (như là cụm từ, câu), nhưng trong thực tế thì không thể áp dụng cho các cụm từ lớn hoặc câu (xem ví dụ ở Hình 3.4). Để giải quyết vấn đề về nghĩa cho cụm từ và câu, hoặc lớn hơn là đoạn văn bản, người ta thường phải dựa vào Nguyên lý Kết hợp (principle of compositionality). Và việc tìm hàm kết hợp (composition function) là nhiệm vụ của hướng nghiên cứu Distributional Composition semantics.

[5] Xem giới thiệu về deep learning tại `https://en.wikipedia.org/wiki/Deep_learning`, và deep learning cho xử lý ngôn ngữ tự nhiên tại `http://nlp.stanford.edu/courses/NAACL2013/NAACL2013-Socher-Manning-DeepLearning.pdf`



Hình 3.4: Với những cụm từ lớn hoặc cả câu, chúng ta không có đủ ngữ cảnh để xây dựng véc-tơ. Ngay cả với kho dữ liệu khổng lồ lớn nhất hiện tại của Google, câu "Bún bò Huế là món ăn Việt Nam" chỉ có duy nhất một ngữ cảnh được tìm thấy.

Lời cảm ơn

Tác giả chân thành cảm ơn TS. Nguyễn Thị Hồng Nhung (Manchester) đã sửa lỗi và góp ý cho bản thảo.

Tài liệu tham khảo

[1] Baroni, M., Dinu, G., and Kruszewski, G. (2014). Don't count, predict! a systematic comparison of context-counting vs. context-predicting semantic vectors. In *Proceedings of the 52nd Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*, volume 1, pages 238–247.

[2] Bengio, Y., Ducharme, R., Vincent, P., and Janvin, C. (2003). A neural probabilistic language model. *The Journal of Machine Learning Research*, 3:1137–1155.

[3] Erk, K. (2012). Vector space models of word meaning and phrase meaning: A survey. *Language and Linguistics Compass*, 6(10):635–653.

[4] Firth, J. R. (1957). *Papers in Linguistics*. Oxford Univeristy Press.

[5] Kurzweil, R. (2005). *The singularity is near: When humans transcend biology*. Penguin.

[6] Lenci, A. (2008). Distributional semantics in linguistic and cognitive research. *From context to meaning: Distributional models of the lexicon in linguistics and cognitive science, special issue of the Italian Journal of Linguistics*, 20(1):1–31.

[7] Mikolov, T., Yih, W.-t., and Zweig, G. (2013). Linguistic regularities in continuous space word representations. In *HLT-NAACL*, pages 746–751.

[8] Pennington, J., Socher, R., and Manning, C. D. (2014). Glove: Global vectors for word representation. *Proceedings of the Empiricial Methods in Natural Language Processing (EMNLP 2014)*, 12:1532–1543.

[9] Turing, A. M. (1950). Computing machinery and intelligence. *Mind*, pages 433–460.

MÔ HÌNH HÓA BÀI TOÁN SẮP LỊCH DẠNG *FLOWSHOP* BẰNG ĐẠI SỐ MAXPLUS

Võ Nhật Vinh

(*Đại học François-Rabelais, Tours, Pháp*)

Chuyện kể rằng ở một vương quốc nọ, nhà vua có rất nhiều cung tần mỹ nữ và họ đều để tóc dài. Để chăm sóc cho mái tóc dài của các người đẹp, nhà vua ra lệnh cho một xưởng sản xuất dầu gội tin cậy sản xuất các loại sản phẩm khác nhau để đáp ứng nhu cầu của các mỹ nữ này. Hiện tại, nhu cầu của các người đẹp là bốn loại dầu gội mang hương bưởi, hương sen, hương lài và hương chanh. Trong xưởng sản xuất, ba giai đoạn cần được lưu ý theo thứ tự là tách mùi hương, pha trộn mùi và đóng chai. Mỗi loại dầu gội có thời gian đặc trưng để tách mùi hương, để pha trộn mùi và để đóng chai khác nhau. Có thời điểm, xưởng sản xuất quan tâm đến thứ tự các loại dầu gội cần được sản xuất để có thể hoàn thành tất cả các đơn hàng của các người đẹp trong thời gian sớm nhất. Có thời điểm, xưởng sản xuất cân nhắc thứ tự các loại dầu gội để tổng thời gian chờ đợi của các quý bà là ít nhất. Cũng có lúc, xưởng sản xuất phải lưu ý đến vai trò khác nhau của các nhóm người đẹp. Vì vậy, xưởng sản xuất phải suy nghĩ tìm lời giải tối ưu cho từng trường hợp.

Trong bài toán miêu tả phía trên, ta có bốn công việc cần hoàn thành (sản xuất bốn loại dầu gội) trên một dây chuyền gồm ba máy (ba bước sản xuất). Nhiệm vụ của xưởng sản xuất là sắp xếp thứ tự các sản phẩm để thời gian hoàn thành cuối cùng là nhanh nhất, hoăc để tổng thời gian hoàn thành tất cả sản phẩm là ngắn nhấn. Khi các nhóm người đẹp có vai trò khác nhau thì các sản phẩm yêu thích của các nhóm sẽ có trọng số khác nhau.

1. Giới thiệu chung

Câu hỏi về mối liên hệ giữa các ngành Toán Học, Tin Học và Kinh Doanh đã thúc đẩy tôi nghiên cứu sâu hơn về lý thuyết sắp lịch (*scheduling theory*). Thực tế, bài toán sắp lịch được nghiên cứu trong các khoa Tin Học bởi vì nó cần các kỹ thuật Tin Học cũng như các tài nguyên máy tính để tìm ra các kết quả số. Tuy vậy, các bài toán sắp lịch lại là những trường hợp cụ thể của các bài toán tối ưu hóa tổ hợp (*Combinatorial Optimisation*) mang đầy bản chất Toán Học. Vì thế mà lý thuyết sắp lịch cũng được nghiên cứu trong các đơn vị nghiên cứu Toán Học. Ngoài ra, sắp lịch nói riêng và vận trù học (*Operations Research*) nói chung được giảng dạy và nghiên cứu trong các trường về kinh doanh tại Anh và Bắc Mỹ. Thực vậy, trong bài viết của mình Shah, tác giả đã kết luận rằng sắp lịch quan trọng bởi hai lý do chính. Lý do thứ nhất liên quan đến các rủi ro kinh tế quan trọng (ví dụ sự bồi thường do chậm trễ tiến độ) nếu như một lịch trình tồi tệ được thực hiện. Lý do thứ hai liên quan đến sự nắm bắt các cơ hội (trong kinh doanh) nếu như chúng ta có một kỹ thuật sắp lịch hiệu quả. Vì lẽ đó, ta có thể nói rằng sắp lịch có mối quan hệ mật thiết với lĩnh vực kinh doanh, thương mại. Nói một cách khác, sắp lịch không chỉ đơn thuần là một ngành khoa học lý thuyết (Toán Học) mà còn là một ngành khoa học ứng dụng (Kinh Doanh). Trong khuôn khổ bài viết này, chúng ta sẽ quan tâm đến một dạng bài toán cụ thể trong lý thuyết sắp lịch và có liên quan mật thiết với sản xuất theo dây chuyền: Bài toán sắp lịch dạng *flowshop*.

Từ những năm 1950, các bài toán dạng *flowshop* đã không ngừng tiến triển và thu hút ngày càng nhiều sự quan tâm của các nhà nghiên cứu bởi cả những lợi ích cũng như độ khó của chúng. Thực tế, các bài toán dạng *flowshop* không chỉ đa dạng về các loại điều kiện ràng buộc mà còn về các mục tiêu tối ưu. Chính sự đa dạng này khiến các bài toán dạng *flowshop* rất gần với các bài toán thực tế. Dù vậy, ta quan tâm trong bài viết này một phương pháp tiếp cận có thể áp dụng được cho một lớp bài toán thay vì từng bài toán riêng lẻ.

Trong luận án của mình, Lenté đã giới thiệu đại số MaxPlus để mô hình hóa một số bài toán sắp lịch dạng *flowshop*. Phương pháp tiếp cận này đã được sử dụng để làm xuất hiện các quan hệ tuyến tính trong các bài toán $2-$ máy (bài toán cơ bản, bài toán với ràng buộc độ trễ cố định cùng thời gian chuẩn bị và tháo dỡ, bài toán không có độ trễ) cũng như trong các bài toán $m-$ máy với ràng buộc độ trễ cố định cùng thời gian chuẩn bị và tháo dỡ. Lợi ích của MaxPlus là đơn giản hóa các ký hiệu để dễ dàng làm nổi bật tính chất của các phép tính. Ngoài ra, MaxPlus còn cho phép ta biến đổi bài toán dạng *flowshop* thành bài toán ma trận. Nói một cách khác, chúng ta có thể thực hiện các phép tính và biến đổi trên ma trận.

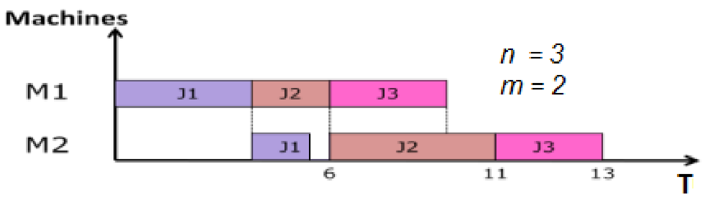
Trong bài viết này, chúng ta sẽ mô hình hóa một lớp bài toán sắp lịch bằng cách sử dụng đại số MaxPlus. Thật ra, chúng ta nhận thấy rằng độ trễ giữa các tác vụ (*operations*) thường được xét đến trong các bài toán dạng *flowshop*. Các độ trễ này có thể được gây nên bởi thời gian sấy khô, thời gian làm nguội hoặc thời gian bình ổn ... Một cách ẩn ý, chúng cũng có thể liên quan đến các loại ràng buộc khác như thời gian chuẩn bị hoặc thời điểm nhàn rỗi. Vì vậy, chúng ta hy vọng có thể mô hình hóa một lớp bài toán dạng *flowshop* với các điều kiện ràng buộc liên quan đến độ trễ.

Sau phần giới thiệu chung này, chúng ta sẽ nhắc lại định nghĩa và các quy ước của bài toán dạng *flowshop*, ký hiệu và các loại ràng buộc được nghiên cứu đến trong bài viết. Tiếp theo, sơ lược và các tính chất của đại số MaxPlus sẽ được trình bày. Cuối cùng, với mỗi bài toán cụ thể, ma trận công việc (*job associated matrix*) sẽ được thiết lập và từ đó, một bài toán trọng tâm (hàm chứa nhiều bài toán khác) sẽ được chỉ ra.

2. Bài toán dạng flowshop

2.1. Định nghĩa và quy ước

Một bài toán dạng *flowshop* $m-$ máy là một bài toán sắp xếp thứ tự cho n-công việc (*job*) khi chúng lần lượt được xử lý trên $m-$ máy (machine). Mỗi công việc bao gồm $m-$ tác vụ (*operation*) theo thứ tự định trước và hoàn toàn xác định: Tác vụ j của công việc i được xử lý bởi máy j trong khoảng thời gian p_{ij}. Thứ tự các tác vụ của mỗi công việc là giống nhau. Mọi công việc được quy ước là luôn ở trạng thái sẵn sàng để được xử lý cho đến khi chúng được xử lý xong hoàn toàn. Tại mỗi thời điểm bất kỳ, mỗi máy chỉ xử lý một công việc và một công việc chỉ được xử lý bởi duy nhất một máy. Trong phạm vi bài này, khi được xử lý, mỗi tác vụ sẽ được xử lý liên tục cho đến khi hoàn tất. Ngoài ra, chúng ta xem xét bài toán với thứ tự các công việc được xử lý trên mỗi máy là như nhau. Hình dưới đây thể hiện một bài toán dạng *flowshop* có $2-$ máy và $3-$ công việc.



Hình 4.1: Bài toán dạng *flowshop* 2− máy.

2.2. Ký hiệu

Ở đây ta sử dụng loại ký hiệu được đề xuất bởi Graham và các đồng tác giả để mô tả một bài toán sắp lịch: $\alpha\,|\beta|\,\gamma$. Trong loại ký hiệu này, α thể hiện dạng bài toán, β thể hiện tập hợp các điều kiện ràng buộc và γ thể hiện tiêu chí cần tối ưu. Bài viết này đề cập đến các bài toán dạng *flowshop* nên trường α chứa ký hiệu F_m, trong đó m thể hiện số lượng máy của hệ thống và trường γ có thể là bất cứ mục tiêu nào.

Ngoài ra, các ký hiệu dưới đây sẽ được sử dụng trong các phần kế tiếp.

- n : Số lượng công việc cần sắp lịch.
- $\mathcal{J} = \{J_1,\ J_2,\ \ldots,\ J_n\}$: Tập hợp các công việc cần sắp lịch.
- $\mathcal{M} = \{M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_m\}$: Tập hợp các máy để xử lý các công việc (quy ước các máy được sắp theo thứ tự của quy trình sản xuất).
- J_i : Công việc i $(i = 1,\ \ldots,\ n)$ được đánh số ngẫu nhiên (trừ khi có quy ước khác).
- M_j : Máy j $(j = 1,\ \ldots,\ m)$ được đánh số theo thứ tự của quy trình sản xuất.
- O_{ij} : Tác vụ j của công việc J_i.
- p_{ij} : Thời gian xử lý của tác vụ O_{ij}.
- δ_j : Thời điểm nhàn rỗi của máy M_j.
- $\vec{\delta} = \{\delta_1,\ \delta_2,\ \ldots,\ \delta_m\}$: Véc-tơ các thời điểm nhàn rỗi của các máy.
- σ : Tập hợp có thứ tự các công việc $(\sigma(1),\ \sigma(2),\ \ldots,\ \sigma(n))$ trong đó $\sigma(i)$ là công việc ở vị trí thứ i của tập hợp.
- $C_{ij}(\sigma)$: Thời điểm hoàn thành tác vụ O_{ij}.
- $C_i(\sigma)$: Thời điểm hoàn thành công việc J_i trên máy M_m.
- $C_{\sigma(i)}$: Thời điểm hoàn thành công việc thứ i của tập có thứ tự σ (trên máy cuối cùng). Vì vậy, $C_{\sigma(n)}$ hay $C(\sigma)$ hay $C_{max}(\sigma)$ còn được gọi là *makespan*.
- $\vec{C_i} = \{C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{im}\}$: Véc-tơ các thời điểm hoàn thành của công việc J_i trên các máy.
- S_{ij} : Thời gian chuẩn bị cần thiết trước khi xử lý tác vụ O_{ij}.

- R_{ij} : Thời gian tháo dỡ cần thiết sau khi xử lý tác vụ O_{ij}.
- α_{ij} : Độ trễ tối thiểu giữa hai tác vụ liên tiếp $O_{i(j-1)}$ và O_{ij}.
- β_{ij} : Độ trễ tối đa giữa hai tác vụ liên tiếp $O_{i(j-1)}$ và O_{ij}.
- $D_{ij}(\sigma)$: Thời điểm giải phóng máy M_j khỏi công việc J_i.
- D_i : Thời điểm giải phóng máy M_m khỏi công việc J_i.
- $D_{\sigma(i)}$: Thời điểm giải phóng máy M_m khỏi công việc thứ i của tập có thứ tự σ.
- $\vec{D}_i = \{D_{i1}, D_{i2}, \ldots, D_{im}\}$: Véc-tơ các thời điểm giải phóng các máy khỏi công việc J_i.

2.3. Các loại ràng buộc

Những phần trình bày dưới đây sẽ giới hạn những loại ràng buộc như sau:

- $perm$ được sử dụng trong bài toán dạng *flowshop* và thể hiện thứ tự (một hoán vị) các công việc giống nhau trên tất cả các máy.
- $no-wait$ xác định rằng không có bất kỳ độ trễ nào giữa thời điểm kết thúc và thời điểm bắt đầu của hai tác vụ liên tiếp nhau của cùng một công việc.
- $\min -delay$ ($\max -delay$ hay $\min - \max\ / delay$): xác định rằng có một độ trễ tối thiểu (tối đa hay cả tối thiểu lẫn tối đa) giữa thời điểm kết thúc và thời điểm bắt đầu của hai tác vụ liên tiếp nhau của cùng một công việc.
- S_{nsd} thể hiện rằng mỗi một tác vụ cần có một khoảng thời gian chuẩn bị trước khi được xử lý và hoàn toàn không bị chi phối bởi thứ tự của công việc.
- R_{nsd} thể hiện rằng mỗi một tác vụ cần có một khoảng thời gian tháo dỡ sau khi được xử lý xong và hoàn toàn không bị chi phối bởi thứ tự của công việc.

3. Đại số MaxPlus

3.1. Tổng quát

Phần này sẽ giới thiệu sơ lược về đại số MaxPlus, chi tiết có thể được tham khảo trong các tài liệu Gaubert 1992 và Gunawardena 1998. Đại số MaxPlus được xây dựng dựa trên tập hợp $E = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ được trang bị hai luật trong ký hiệu là $\oplus$ và $\otimes$. Trong đại số này, toán tử cộng $\oplus$ biểu diễn phép so sánh lớn nhất và toán tử nhân $\otimes$ biểu diễn phép cộng thông thường. Toán tử $\oplus$ có tính lũy đẳng, giao hoán, kết hợp và có phần tử trung hòa ký hiệu là $0\|$ (tương ứng với $-\infty$). Toán tử $\otimes$ có tính kết hợp, phân phối đối toán tử $\oplus$, có phần tử trung hòa ký hiệu là $1\|$ (tương ứng với 0) và nhận $0\|$ làm phần tử hấp thu.

Bổ đề 3.1. *Với mọi $a \in \mathbb{R}_{\max}$ và $a \neq 0\|$, tồn tại nghịch đảo của phần tử a được ký hiệu là a^{-1} hoặc $\frac{1\|}{a}$ sao cho: $a \otimes a^{-1} = a^{-1} \otimes a = 1\|$ (ta có thể lưu ý rằng với ký hiệu thông thường, phần tử nghịch đảo này chính là phần tử đối của a).*

Tồn tại một mối liên hệ giữa toán tử quan hệ thứ tự của các số thực với toán tử $\oplus$: Với mọi $a, b \in \mathbb{R}_{\max}$, $a \geq b \Leftrightarrow a \oplus b = a$. Chúng ta cũng có thể viết trong bài này theo cách: $a \otimes b = a \cdot b = ab$.

3.2. Phép tính ma trận

Trong đại số MaxPlus, ta có thể định nghĩa tổng và tích của các ma trận.

Định nghĩa 1. Cho A là một ma trận kích cỡ $m \times n$, cho B là một ma trận kích cỡ $m \times n$, ký hiệu $[.]_{\ell,c}$ là phần tử trên dòng thứ ℓ và cột thứ c. Ta định nghĩa $A \oplus B$ bằng:

$$[A \oplus B]_{\ell,c} = [A]_{\ell,c} \oplus [B]_{\ell,c} \ (1 \leqslant \ell \leqslant m,\ 1 \leqslant c \leqslant n).$$

Dưới đây là một ví dụ về tính tổng của hai ma trận:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \oplus 2 & 3 \oplus 6 \\ 4 \oplus 2 & 5 \oplus 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa 2. Cho A là một ma trận kích thước $m \times p$, cho B là một ma trận kích thước $p \times n$, ký hiệu $[.]_{\ell,c}$ là phần tử trên dòng ℓ và cột c. Ta định nghĩa $A \otimes B$ bằng:

$$[A \otimes B]_{\ell,c} = \bigoplus_{k=1}^{p} [A]_{\ell,k} \otimes [B]_{k,c} \ (1 \leq \ell \leq m,\ 1 \leq c \leq n).$$

Tích của hai ma trận được minh họa bằng ví dụ dưới đây:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} (2 \otimes 2) \oplus (3 \otimes 2) & (2 \otimes 6) \oplus (3 \otimes 3) \\ (4 \otimes 2) \oplus (5 \otimes 2) & (4 \otimes 6) \oplus (5 \otimes 3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \oplus 5 & 8 \oplus 6 \\ 6 \oplus 7 & 10 \oplus 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Theo định nghĩa 2, hai bổ đề dưới đây được phát biểu như sau:

Bổ đề 3.2. *Với mọi* $j \in \{1, \ldots, n\}$, *thì*

$$[A \otimes B]_{1j} \geq [A]_{11} \otimes [B]_{1j}.$$

Theo như ví dụ bên trên, ta kết luận rằng:

$$[A \otimes B]_{11} = 5 \geq 2 \otimes 2 = [A]_{11} \otimes [B]_{11} (= 4),$$

$$[A \otimes B]_{12} = 8 \geq 2 \otimes 6 = [A]_{11} \otimes [B]_{12} (= 8).$$

Bổ đề 3.3. *Với mọi* $\{\ell, j\} \in \{1, \ldots, n\}$, *thì*

$$[A \otimes B]_{1j} \geq [A]_{1\ell} \otimes [B]_{\ell j},$$

$$[A \otimes B]_{\ell j} \geq [A]_{\ell\ell} \otimes [B]_{\ell j}.$$

Vẫn theo ví dụ phía trên, ta có:

$$\begin{aligned}
&[A \otimes B]_{11} = 5 \geq 3 \otimes 2 = [A]_{12} \otimes [B]_{21} \ (= 5),\\
&[A \otimes B]_{12} = 8 \geq 3 \otimes 3 = [A]_{12} \otimes [B]_{22} \ (= 6),\\
&[A \otimes B]_{21} = 7 \geq 4 \otimes 2 = [A]_{21} \otimes [B]_{11} \ (= 6),\\
&[A \otimes B]_{21} = 7 \geq 5 \otimes 2 = [A]_{22} \otimes [B]_{21} \ (= 7),\\
&[A \otimes B]_{22} = 10 \geq 4 \otimes 6 = [A]_{21} \otimes [B]_{12} \ (= 10),\\
&[A \otimes B]_{22} = 10 \geq 5 \otimes 3 = [A]_{22} \otimes [B]_{22} \ (= 8).
\end{aligned}$$

3.3. Toán tử ngôi sao

Định nghĩa 3. Với mọi $a \in \mathbb{R}_{\max}$, toán tử ngôi sao được định nghĩa:

$$a^* = \lim_{q \to \infty} (1\| \oplus a \oplus a^2 \oplus \cdots \oplus a^q).$$

Đây là một ví dụ về toán tử ngôi sao trong $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$:

$$2^* = 1\| \oplus 2 \oplus 4 \oplus 6 \oplus \cdots = \infty.$$

Định nghĩa 4. Cho A là một ma trận kích thước $m \times m$, toán tử ngôi sao được định nghĩa như sau:

$$A^* = \lim_{q \to \infty} (1\| \oplus A \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^q).$$

Bổ đề 3.4. *Với mọi $a,\ b \in \mathbb{R}_{\max}$, ba^* là nghiệm nhỏ nhất của bất phương trình $x \geq b \oplus xa$ và a^*b là nghiệm nhỏ nhất của bất phương trình $x \geq b \oplus ax$. Ngoài ra, các nghiệm này làm thỏa mãn dấu đẳng thức, ba^* vì vậy cũng là nghiệm nhỏ nhất của phương trình $x = b \oplus xa$ và a^*b là nghiệm nhỏ nhất của phương trình của phương trình $x = b \oplus ax$.*

Kết quả này cũng được áp dụng vào các phép tính ma trận ($X \geq B \oplus AX$).

Đối với số thực, ví dụ sau thỏa mãn Bổ đề 4 :

$$(-2)^* = 1\| \oplus (-2) \oplus (-4) \oplus (-6) \oplus \cdots = 1\|.$$

Vì vậy, nghiệm nhỏ nhất của phương trình $x = b \oplus (-2)x$ là

$$x = (-2)^* b = 1\| b = b.$$

Đối với các ma trận gồm các thành phần trong $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$, ta có thể nhận được nghiệm nhỏ nhất của phương trình $X = B \oplus AX$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0\| & -2 \\ 2 & 0\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Bằng cách viết lại dưới dạng $\overline{X} = \overline{B} \oplus A\overline{X}$:

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0\| \\ 15 & 0\| \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0\| & -2 \\ 2 & 0\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0\| \\ 15 & 0\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix},$$

nghiệm nhỏ nhất là $\overline{X} = A^*\overline{B}$. Ta có

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1\| & 0\| \\ 0\| & 1\| \end{pmatrix}.$$

Thế nên

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 1\| & -2 \\ 2 & 1\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0\| \\ 15 & 0\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0\| \\ 15 & 0\| \end{pmatrix},$$

và nghiệm nhỏ nhất của phương trình ban đầu là $X = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \end{pmatrix}$.

3.4. Ứng dụng của đại số MaxPlus trong bài toán sắp lịch

Đại số MaxPlus được dùng trong các hệ thống điều khiển, nhất là các hệ thống có liên hệ với mạng Petri nhưng rất hiếm khi được sử dụng trong lý thuyết sắp lịch. Tuy nhiên, chúng ta cũng có thể tham khảo một vài nghiên cứu có liên quan của Giffler đối với bài toán sắp lịch dự án, của Hanen và Munier đối với các bài toán máy song song có chu kỳ, của Gaubert và Mairesses, và của Cohen cùng các đồng tác giả. Cohen đối với bài toán dạng *flowshop* có chu kỳ, của Gaubert và của Houssin đối với các bài toán dạng *jobshop* có chu kỳ.

Trong luận án của mình, Lenté đã chứng minh rằng các bài toán dạng *flowshop* $m-$ máy với ràng buộc hoán vị ($perm$) có thể được mô hình hóa bằng đại số MaxPlus. Cụ thể hơn, mỗi công việc J_i có thể được đặc trưng hoàn toàn bằng một ma trận T_i tương ứng. Ma trận T_i này hoàn toàn đặc trưng được các ràng buộc của bài toán. Cũng trong nghiên cứu này, tác giả đã chứng minh được rằng đại số MaxPlus cho phép ta biểu diễn một tập có thứ tự các công việc dưới dạng tích của các ma trận.

Trong Bouquard and Lenté, các tác giả cũng sử dụng đại số MaxPlus để mô hình hóa bài toán dạng *flowshop* $2-$ máy với độ trễ tối đa và tối thiểu ($F_2 \mid perm; \min-\max/delay \mid C_{\max}$), sau đó đã chỉ ra các chặn dưới và chặn trên bằng cách giảm nhẹ các ma trận MaxPlus. Kết quả này sau đó được mở rộng ra cho trường hợp $m-$ máy trong Augusto et al 2006.

Trong Vo and Lenté 2013, đại số này lại một lần nữa cho phép ta chứng minh sự tương đương giữa hai bài toán: Bài toán với ràng buộc độ trễ (tối đa và tối thiểu) $F_m \mid perm;\ \min-\max/delay \mid \gamma$ và bài toán với ràng buộc gồm độ trễ (tối đa và tối thiểu) và thời gian chuẩn bị và tháo dỡ

$$F_m \mid perm;\ \min-\max/delay;\ S_{nsd}; R_{nsd} \mid \gamma,$$

cũng như làm xuất hiện bài toán trọng tâm. Ngoài ra, trong Voo et al 2014, bằng cách sử dụng các ma trận MaxPlus, các tác giả đã tìm ra được các chặn dưới cho tổng các thời điểm hoàn thành ($F_m \mid perm;\ \beta \mid \sum C_i$) từ các chặn dưới của mỗi thời điểm hoàn thành của từng công việc. Một kết quả tương tự cũng đã được tìm ra với tổng trọng số các thời điểm hoàn thành ($F_m \mid perm;\ \beta \mid \sum w_i C_i$) nhờ vào đại số MaxPlus trong Vo and Lenté 2014. Những chi tiết về ứng dụng của đại số MaxPlus trong bài toán dạng *flowshop* cũng như các kết quả trên đây được trình bày cụ thể trong Vo and Lenté 2015.

4. Mô hình hóa bằng đại số MaxPlus

Phần này sẽ tập trung trình bày việc sử dụng đại số MaxPlus để mô hình hóa bài toán dạng *flowshop*, cụ thể là giới thiệu các ma trận MaxPlus tương ứng với mỗi công việc. Các kết quả chính sẽ được giới thiệu, các phép tính chi tiết có thể được tham khảo trong Vo and Lenté 2015.

4.1. Nguyên tắc chung

Các mô hình đã được thực hiện cho đến lúc này Lenté 2011 đều đưa đến một kết luận: Với mỗi công việc J_i, tồn tại một ma trận MaxPlus tương ứng T_i kích thước $m \times m$ được định nghĩa hoàn toàn bởi các dữ liệu của công việc J_i và các điều kiện ràng buộc của bài toán. Ma trận này biểu diễn mối quan hệ tuyến tính MaxPlus kết nối các thời điểm nhàn rỗi của các máy trước và sau khi thực thi một công việc. Các kết quả này, đã được chứng minh trong các nghiên cứu cho đến lúc này, được tóm tắt bởi mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 4.1. *Cho một công việc J_i, tồn tại một ma trận MaxPlus T_i kích thước $m \times m$ sao cho*

$$\vec{D}_i = \vec{\delta} \otimes T_i, \tag{4.1}$$

trong đó $\vec{\delta}$ là véc-tơ các thời điểm nhàn rỗi của các máy trước khi thực thi công việc J_i và $\vec{D}_i$ là véc-tơ các ngày nhàn rỗi của các máy sau khi thực thi.

Tất cả hệ số của ma trận T_i được tính trực tiếp từ công việc J_i và các điều kiện ràng buộc của bài toán, và ngược lại, ma trận này hoàn toàn đặc trưng cho công việc J_i cũng như các điều kiện ràng buộc của bài toán flowshop.

Các hệ số của ma trận T_i được ký hiệu $t^i_{\ell c}$.

$$T_i = \begin{pmatrix} t^1_{11} & t^1_{12} & \cdots & t^1_{1m} \\ t^1_{21} & t^1_{22} & \cdots & t^1_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t^1_{m1} & t^1_{m2} & \cdots & t^1_{mm} \end{pmatrix}.$$

Cần lưu ý rằng các thời điểm các máy được giải phóng sau khi thực hiện một công việc không nhất thiết trùng với thời điểm kết thúc các tác vụ. Điều này có thể vì nhiều lý do, ví dụ như thời gian tháo dỡ (xem hình dưới) hoặc các điều kiện ràng buộc về sự tắc nghẽn.
Ngay khi ta thiết lập được các ma trận T_i, ta cũng có thể định nghĩa các ma trận tương ứng với các tập có thứ tự các công việc.

Định nghĩa 5. (Ma trận tương ứng với tập có thứ tự các công việc)

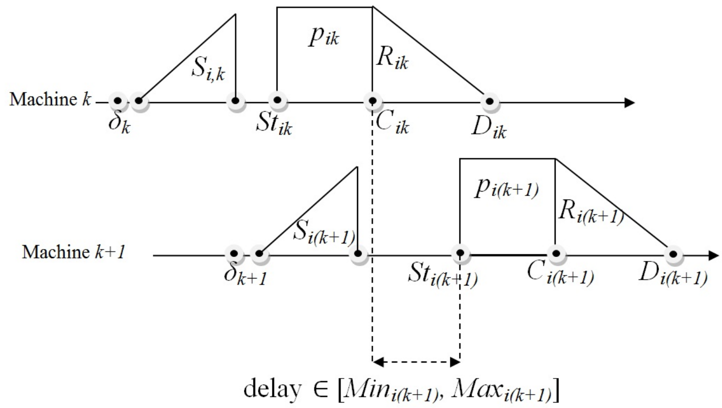
Cho σ là một tập có thứ tự của ν-công việc: Ma trận tương ứng của nó T_σ được định nghĩa bởi

$$T_\sigma = \bigotimes_{i=1}^{\nu} T_{\sigma(i)}.$$

Giống như các ma trận T_i, các ma trận T_σ định nghĩa quan hệ tuyến tính MaxPlus giữa các thời điểm nhàn rỗi của các máy trước và sau khi thực hiện tập có thứ tự các công việc.

Mệnh đề 4.2. *Cho $\vec{D}_\sigma$ là véc-tơ các thời điểm các máy được giải phóng bởi tập có thứ tự các công việc σ, ta có quan hệ sau:*

$$\vec{D}_\sigma = \vec{\delta} \otimes T_\sigma.$$



Hình 4.2: Bài toán *flowshop* với ràng buộc độ trễ, thời gian thiết lập, tháo dỡ.

4.2. Ma trận tương ứng với mỗi công việc

4.2.1. Bài toán cơ bản

Ta gọi bài toán cơ bản dạng *flowshop* là một bài toán dạng *flowshop* hoán vị và không có thêm điều kiện ràng buộc khác. Bài toán này được ký hiệu $F_m \mid perm \mid \gamma$ trong đó γ là một tiêu chí bất kỳ. Mệnh đề sau đã được thiết lập trong Lenté 2001.

Mệnh đề 4.3. *Với mọi công việc J_i, ma trận T_i thể hiện mối liên hệ giữa các thời điểm nhàn rỗi và kết thúc sớm nhất của một công việc được định nghĩa bởi:*

$$T_i = \begin{pmatrix} p_{i1} & p_{i1}p_{i2} & \cdots & p_{i1}p_{i2}\cdots p_{im} \\ 0\| & p_{i2} & \cdots & p_{i2}p_{i3}\cdots p_{im} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\| & 0\| & \cdots & p_{im} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Lời giải. Với mọi công việc J_i, các thời điểm kết thúc của $m-$ tác vụ trên $m-$ máy được thể hiện bởi các bất phương trình sau:

$$C_{i1} \geq \delta_1 + p_{i1} \tag{4.3}$$
$$C_{i2} \geq \max\{C_{i1} + p_{i2}, \delta_2 + p_{i2}\} \tag{4.4}$$
$$C_{ij} \geq \max\{C_{i(j-1)} + p_{ij}, \delta_j + p_{ij}\}\ (2 < j \leq m) \tag{4.5}$$

Bằng ký hiệu MaxPlus ta có

$$C_{i1} \geq \delta_1 p_{i1} \tag{4.6}$$
$$C_{i2} \geq C_{i1}p_{i2} \oplus \delta_2 p_{i2} \tag{4.7}$$
$$C_{ij} \geq C_{i(j-1)}p_{ij} \oplus \delta_j p_{ij}\ (2 < j \leq m) \tag{4.8}$$

Vì vậy, viết lại hệ bất phương trình trên dưới dạng ma trận, ta có $\vec{C_i} \geq \vec{\delta} T_i$ trong đó ma trận T_i được định nghĩa trong đẳng thức (4.2). Nghiệm nhỏ nhất của bất phương trình này tương ứng với dấu đẳng thức $\vec{C_i} = \vec{\delta} T_i$. Mối quan hệ này thể hiện sự liên hệ giữa các thời điểm nhàn rỗi và kết thúc sớm nhất của công việc J_i. Chi tiết có thể xem thêm trong Lenté 2001.

Lưu ý là trong trường hợp này, các thời điểm kết thúc của các tác vụ cũng chính là các thời điểm giải phóng các máy khỏi các tác vụ đó. Vì vậy, nghiệm trên có thể được viết lại là $\vec{D_i} = \vec{\delta} T_i$. □

4.2.2. Bài toán với ràng buộc độ trễ tối thiểu

Với bài toán với ràng buộc độ trễ tối thiểu ($F_m \mid perm,\ \min -delay \mid \gamma$ trong đó γ là một tiêu chí bất kỳ), cùng một cách thức, ta có thể có ma trận tương ứng với công việc J_i Lenté 2001.

$$T_i = \begin{pmatrix} p_{i1} & p_{i1}\alpha_{i2}p_{i2} & \cdots & p_{i1}\alpha_{i2}p_{i2}\cdots\alpha_{im}p_{im} \\ 0\| & p_{i2} & \cdots & p_{i2}\alpha_{i3}p_{i3}\cdots\alpha_{im}p_{im} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\| & 0\| & \cdots & p_{im} \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

và ta có thể thấy trong trường hợp này thì $\vec{D}_i = \vec{C}_i = \vec{\delta} T_i$.

4.2.3. Bài toán với ràng buộc độ trễ tối thiểu và tối đa

Một bài toán dạng *flowshop* với ràng buộc độ trễ là một bài toán dạng *flowshop* với sự có mặt của các độ trễ giữa hai tác vụ liên tiếp nhau của cùng một công việc. Mỗi một độ trễ phải bị chặn bởi một giới hạn dưới (độ trễ tối thiểu) và một giới hạn trên (độ trễ tối đa). Loại bài toán này được ký hiệu $F_m \mid perm,\ \min - \max /delay \mid \gamma$ trong đó γ là một tiêu chí bất kỳ. Mệnh đề dưới đây giới thiệu ma trận tương ứng với mỗi công việc trong dạng bài toán *flowshop* này. Kết quả này đã được trình bày trong Bouquard and Lenté 2006 cho trường hợp 2− máy và trong Augusto et al 2006 cho trường hợp 3− máy. Phần dưới đây sẽ chứng minh kết quả này cho trường hợp tổng quát $m-$ máy.

Mệnh đề 4.4. *Ma trận T_i tương ứng với công việc J_i được định nghĩa bởi:*

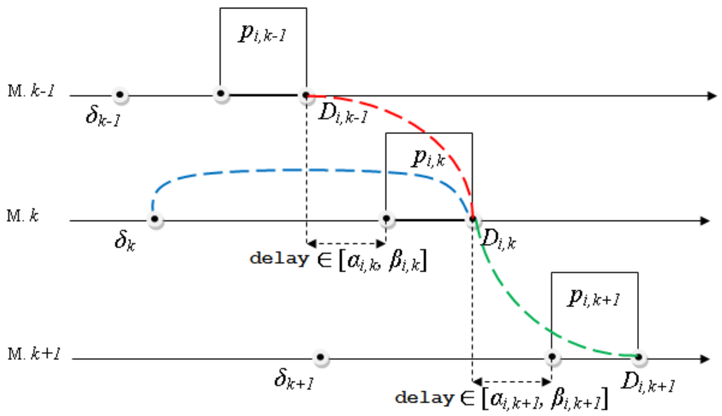
$$[T_i]_{\ell,c} = \begin{cases} p_{i\ell} \displaystyle\bigotimes_{k=\ell+1}^{c} p_{ik}\alpha_{ik} & si \quad \ell < c \\ p_{i\ell} & si \quad \ell = c \\ \dfrac{1\|}{\beta_{i\ell}} \displaystyle\bigotimes_{k=c+1}^{\ell-1} \dfrac{1\|}{p_{ik}\beta_{ik}} & si \quad c < \ell - 1 \\ \dfrac{1\|}{\beta_{i\ell}} & si \quad c = \ell - 1 \end{cases} \tag{4.10}$$

Trong trường hợp cụ thể 3-máy, ma trận này được biểu diễn như sau:

$$T_i = \begin{pmatrix} p_{i1} & p_{i1}\alpha_{i2}p_{i2} & p_{i1}\alpha_{i2}p_{i2}\alpha_{i3}p_{i3} \\ \dfrac{1\|}{\beta_{i2}} & p_{i2} & p_{i2}\alpha_{i3}p_{i3} \\ \dfrac{1\|}{\beta_{i2}p_{i2}\beta_{i3}} & \dfrac{1\|}{\beta_{i3}} & p_{i3} \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

Lời giải. Phần chứng minh được thực hiện theo hai bước: Đầu tiên, ta sẽ thiết lập một công thức ma trận để định nghĩa T_i và sau đó, ta sẽ tính toán các hệ số.

<u>Bước thứ nhất</u>: Công thức tính T_i. Các mối liên hệ giữa các thời điểm nhàn rỗi của các máy, các độ trễ, các thời gian xử lý tác vụ và các thời điểm giải phóng các máy được minh họa bằng hình dưới đây. Chúng được thể hiện cụ thể hơn trong các bất phương trình sau.
Lưu ý rằng trong trường hợp này, các thời điểm giải phóng các máy cũng là các thời điểm hoàn thành các tác vụ



Hình 4.3: Mối liên hệ giữa các thời điểm giải phóng khỏi các tác vụ trên ba máy liên tiếp.

$$
\begin{aligned}
D_{ik} &\geq D_{i(k-1)}\alpha_{ik}p_{ik} \ (2 \leq k \leq m), && (4.12)\\
D_{ik} &\geq D_{i(k+1)}\frac{1\|}{p_{i(k+1)}\beta_{i(k+1)}} \ (1 \leq k \leq m-1), && (4.13)\\
D_{ik} &\geq \delta_k p_{ik} \ (1 \leq k \leq m). && (4.14)
\end{aligned}
$$

Nhắc lại rằng mối quan hệ tuyến tính mà chúng ta đang kỳ vọng sẽ được viết dưới dạng:

$$\vec{D}_i = \vec{\delta} T_i, \qquad (4.15)$$

trong đó T_i là ma trận tương ứng với công việc J_i.

Bằng cách đặt các ma trận A_i và B_i như dưới đây, ta có thể thiết lập công thức của T_i (xem Mệnh đề 4.5).

Định nghĩa 6.

$$
\begin{aligned}
a_{ik} &= \alpha_{i(k+1)}p_{i(k+1)} \ (1 \leq k \leq m-1)\\
b_{ik} &= \frac{1\|}{\beta_{ik}p_{ik}} \ (2 \leq k \leq m)\\
P_i &= \begin{pmatrix} p_{i1} & 0\| & \cdots & 0\| \\ 0\| & p_{i2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0\| \\ 0\| & \cdots & 0\| & p_{im} \end{pmatrix}\\
A_i &= \begin{pmatrix} 0\| & a_{i1} & 0\| & \cdots & 0\| \\ b_{i2} & 0\| & a_{i2} & \cdots & \cdots \\ 0\| & b_{i3} & \cdots & \cdots & 0\| \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{i(m-1)} \\ 0\| & \cdots & 0\| & b_{im} & 0\| \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□

Mệnh đề 4.5. *Ma trận T_i tương ứng với công việc J_i được định nghĩa bởi:*

$$T_i = P_i {A_i}^* \qquad (4.16)$$

trong đó

$$A_i^* = \lim_{q \to \infty} (1 \oplus A_i \oplus A_i^2 \oplus \ldots \oplus A_i^q) \tag{4.17}$$

Lời giải. (của Mệnh đề 4.5)
Các bất phương trình (4.12), (4.13) và (4.14) được viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$\vec{D}_i \quad \geq \quad \vec{D}_i A_i \oplus \vec{\delta} P_i \tag{4.18}$$

Sử dụng Bổ đề **??** (trang **??**), véc-tơ nhỏ nhất $\vec{D}_i$ thỏa mãn bất phương trình (4.18) được xác định bởi:

$$\vec{D}_i = \vec{\delta} P_i {A_i}^* \tag{4.19}$$

So sánh kết quả này với mối quan hệ tuyến tính được kỳ vọng trong đẳng thức (4.15), ta rút ra được: $T_i = P_i {A_i}^*$, và đây là kết quả chứng minh của Mệnh đề 4.5. □

Giai đoạn 2 : ta sẽ tiếp tục tính các hệ số của ma trận A_i^* rồi đến các hệ số của ma trận T_i. Chi tiết của phần này được trình bày trong [14].
Các hệ số của ma trận A_i^* được xác định bởi:

$$\left[A_i^*\right]_{\ell,c} = \begin{cases} \bigotimes\limits_{k=\ell}^{c-1} a_{ik} & \text{si} \quad \ell < c \\ 1 & \text{si} \quad \ell = c \\ \bigotimes\limits_{k=c+1}^{\ell} b_{ik} & \text{si} \quad c < \ell \end{cases} \tag{4.20}$$

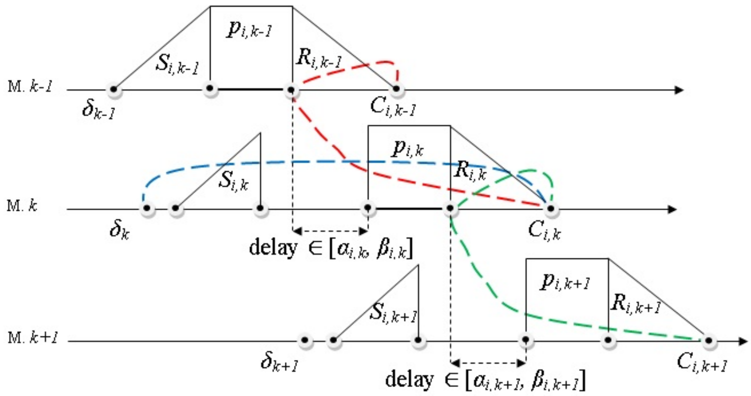
Từ đó, ta có thể tính được T_i nhờ mối liên hệ $T_i = P_i {A_i}^*$ (xem Mệnh đề 4.5):

$$[T_i]_{\ell,c} = \begin{cases} p_{i\ell} \bigotimes\limits_{k=\ell+1}^{c} p_{ik}\alpha_{ik} & \text{si} \quad \ell < c \\ p_{i\ell} & \text{si} \quad \ell = c \\ \dfrac{1}{\beta_{i\ell}} \bigotimes\limits_{k=c+1}^{\ell-1} \dfrac{1}{p_{ik}\beta_{ik}} & \text{si} \quad c < \ell - 1 \\ \dfrac{1}{\beta_{i\ell}} & \text{si} \quad c = \ell - 1 \end{cases}$$

Điều này kết thúc phần chứng minh của Mệnh đề 4.4.

4.2.4. Bài toán với ràng buộc độ trễ tối đa và tối thiểu cùng thời gian chuẩn bị và tháo dỡ

Chúng ta trở lại với bài toán ngay phía trên nhưng lần này có xem xét đến cả ràng buộc về thời gian chuẩn bị và tháo dỡ. Hình 4.4 dưới đây minh họa cho các ràng buộc về độ trễ và thời gian chuẩn bị, thời gian tháo dỡ liên quan đến tác vụ thứ k của công việc J_i. Những ràng buộc này được liên kết lại trong phương trình thể hiện bởi các công thức (4.21), (4.22) và (4.23). Chúng sẽ phục vụ cho việc xác định mối quan hệ tuyến tính MaxPlus giữa các thời điểm nhàn rỗi của các máy (δ_k) và các thời điểm các máy được giải phóng (D_{ik}).



Hình 4.4: Mối liên hệ giữa các thời điểm giải phóng các máy khỏi các tác vụ trên ba máy liên tiếp.

$$D_{ik} \geq D_{i(k-1)}\alpha_{ik}p_{ik}\frac{R_{ik}}{R_{i(k-1)}} \; (2 \leq k \leq m) \tag{4.21}$$

$$D_{ik} \geq D_{i(k+1)}\frac{1}{p_{i(k+1)}\beta_{i(k+1)}}\frac{R_{ik}}{R_{i(k+1)}} \; (1 \leq k \leq m-1) \tag{4.22}$$

$$D_{ik} \geq \delta_k S_{ik} p_{ik} R_{ik} \; (1 \leq k \leq m) \tag{4.23}$$

Cùng một cách thức như ở bài toán phía trên, ta có Mệnh đề sau.

Mệnh đề 4.6. *Ma trận T_i tương ứng với công việc J_i được xác định như sau:*

$$[T_i]_{\ell,c} = \begin{cases} S_{i\ell}p_{i\ell}R_{ic}\bigotimes_{k=\ell+1}^{c} p_{ik}\alpha_{ik} & \text{if} \quad \ell < c \\ S_{i\ell}p_{i\ell}R_{ic} & \text{if} \quad \ell = c \\ \dfrac{S_{i\ell}R_{ic}}{\beta_{i\ell}}\bigotimes_{k=c+1}^{\ell-1}\dfrac{1}{p_{ik}\beta_{ik}} & \text{if} \quad c < \ell - 1 \\ \dfrac{S_{i\ell}R_{ic}}{\beta_{i\ell}} & \text{if} \quad c = \ell - 1 \end{cases} \tag{4.24}$$

Lời giải. Phần chứng minh này được thực hiện tương tự như trường hợp bài toán chỉ có ràng buộc về độ trễ tối đa và tối thiểu. □

4.3. Bài toán trọng tâm

Những định nghĩa về các ràng buộc liên quan đến độ trễ mang đến cho chúng ta những sự liên hệ giữa chúng:

- Chỉ có ràng buộc độ trễ tối thiểu: độ trễ tối đa được xem như vô cùng.
- Chỉ có ràng buộc độ trễ tối đa: độ trễ tối thiểu được xem như bị triệt tiêu.
- Chỉ có ràng buộc độ trễ cố định: độ trễ tối thiểu và độ trễ tối đa được ấn định giá trị như nhau.

Nói cách khác, ta có thể quy các bài toán dạng *flowshop* với ràng buộc độ trễ về một bài toán duy nhất với ràng buộc bao gồm cả độ trễ tối thiểu và độ trễ tối đa.
Sau đây, ta sẽ xem xét bài toán với ràng buộc độ trễ tối thiểu và tối đa cùng với thời gian chuẩn bị và tháo dỡ ($F_m|perm; min - max\ delay; S_{nsd}; R_{nsd}|\gamma$). Ma trận tương ứng với mỗi công việc J_i đã được xác định như sau:

$$T_i = \begin{pmatrix} S_{i1}p_{i1}R_{i1} & S_{i1}p_{i1}\alpha_{i2}p_{i2}R_{i2} & \dots & S_{i1}p_{i1}\alpha_{i2}p_{i2}\dots\alpha_{im}p_{im}R_{im} \\ \frac{S_{i2}R_{i1}}{\beta_{i2}} & S_{i2}p_{i2}R_{i2} & \dots & S_{i2}p_{i2}\alpha_{i3}p_{i3}\dots\alpha_{im}p_{im}R_{im} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{S_{im}R_{i1}}{\beta_{i2}p_{i2}\dots\beta_{i(m-1)}p_{i(m-1)}\beta_{im}} & \dots & \frac{S_{im}R_{i(m-1)}}{\beta_{im}} & S_{im}p_{im}R_{im} \end{pmatrix}$$

Bằng cách sử dụng các ký hiệu mới $\overline{p}_{ik}$, $\overline{\alpha}_{ik}$ và $\overline{\beta}_{ik}$ như sau:

$$\begin{cases} \overline{p}_{ik} = S_{ik}p_{ik}R_{ik} & (1 \le k \le m) \\ \overline{\beta}_{ik} = \frac{\beta_{ik}}{S_{ik}R_{i(k-1)}} & (2 \le k \le m) \\ \overline{\alpha}_{ik} = \frac{\alpha_{ik}}{S_{ik}R_{i(k-1)}} & (2 \le k \le m) \end{cases} \tag{4.25}$$

ma trận T_i trở thành:

$$T_i = \begin{pmatrix} \overline{p}_{i1} & \overline{p}_{i1}\overline{\alpha}_{i2}\overline{p}_{i2} & \dots & \overline{p}_{i1}\overline{\alpha}_{i2}\overline{p}_{i2}\dots\overline{\alpha}_{im}\overline{p}_{im} \\ \frac{1}{\overline{\beta}_{i2}} & \overline{p}_{i2} & \dots & \overline{p}_{i2}\overline{\alpha}_{i3}\overline{p}_{i3}\dots\overline{\alpha}_{im}\overline{p}_{im} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\overline{\beta}_{i2}\overline{p}_{i2}\dots\overline{\beta}_{i(m-1)}\overline{p}_{i(m-1)}\overline{\beta}_{im}} & \dots & \frac{1}{\overline{\beta}_{im}} & \overline{p}_{im} \end{pmatrix}$$

Ma trận này cũng là ma trận tương ứng với mỗi công việc trong bài toán dạng *flowshop* với ràng buộc độ trễ tối thiểu và tối đa. Trong trường hợp này, ta vừa làm xuất hiện một bài toán trọng tâm.
Tóm lại, từ tập hợp các bài toán với các ràng buộc liên quan đến độ trễ, thời gian chuẩn bị và thời gian tháo dỡ, ta có thể quy về một bài toán duy nhất với ràng buộc độ trễ tối thiểu và độ trễ tối đa. Bài toán trọng tâm này giúp ta tập trung toàn bộ thời gian để giải quyết một bài toán duy nhất, thay vì giải quyết nhiều bài toán riêng lẻ.

5. Kết luận

Bài viết này giới thiệu việc sử dụng đại số MaxPlus để mô hình hóa bài toán dạng *flowshop*. Ta có thể xây dựng các ma trận hoàn toàn đặc trưng các công việc. Các kết quả thu được đã xác nhận mối quan hệ tuyến tính MaxPlus giữa các thời điểm nhàn rỗi của các máy trước và sau khi thực hiện công việc. Ưu điểm của đại số MaxPlus là cho phép ta đơn giản hóa các ký hiệu tính toán. Các kết quả này cũng giúp ta thực hiện việc nghiên cứu các bài toán ma trận thay vì nghiên cứu trực tiếp trên các bài toán dạng *flowshop*. Điều này cho phép ta có thể xây dựng các chặn dưới của các tiêu chí nhờ vào các phép tính trên ma trận.
Ngoài ra, chúng ta đã tìm ra được một bài toán trọng tâm với ràng buộc độ trễ tối thiểu và tối đa. Bài toán này cho phép ta tránh việc trùng lặp các nghiên cứu trên các bài toán dạng *flowshop* với các ràng buộc khác nhau. Bài toán trọng tâm này cho phép thay thế các bài toàn có ràng buộc liên quan độ trễ và thời gian chuẩn bị, tháo dỡ.

Tài liệu tham khảo

[1] Augusto, V., Lenté, C., and Bouquard, J.-L. (2006). Résolution d'un flowshop avec delais minimaux et maximaux. In *MOSIM*.

[2] Bouquard, J.-L. and Lenté, C. (2006). Two-machine flow shop scheduling problems with minimal and maximal delays. *4or*, 4(1):15–28.

[3] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J.-P., and Viot, M. (1985). A linear system-theoretic view of discret-event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. *IEEE Trans. Automatic Control*, 30:210–220.

[4] Gaubert, S. (1992). *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*. PhD thesis.

[5] Gaubert, S. and Mairesse, J. (1999). Modeling and analysis of timed Petri nets using heaps of pieces. *IEEE Trans. Automatic Control*, 44(4):683–698.

[6] Giffler, B. (1963). Schedule algebras and their use in formulating general systems simulations. In *Industrial scheduling*. Prentice Hall, New Jersey.

[7] Graham, R. L., Lawler, E. L., Lenstra, J. K., and Rinnooy Kan, A. H. (1979). Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: A survey. *Annals of Discrete Mathematics*, 5(2):287–326.

[8] Gunawardena, J. (1998). *Idempotency*. Publications of the Newton Institute.

[9] Hanen, C. and Munier, A. (1995). *Cyclic scheduling on parallel processors: an overview*. John Wiley.

[10] Houssin, L. (2011). Cyclic Jobshop Problem and (max, Plus) Algebra. In Sergio, B., editor, *World IFAC Congres*, number Ifac, pages 2717–2721.

[11] Lenté, C. (2001). *Analyse Max-Plus de problèmes d'ordonnancement de type Flowshop*. PhD thesis, Université François Rabelais de Tours.

[12] Lenté, C. (2011). *Mathématiques, Ordonnancement et Santé*. Habilitation à diriger des recherches, Université François Rabelais de Tours.

[13] Shah, N. (1996). Mathematical programming techniques for crude oil scheduling. *Computers & Chemical Engineering*, 20(96):S1227–S1232.

[14] Vo, N. V. (2015). *Approche algébrique de problèmes d'ordonnancement de type flowshop avec contraintes de délais*. PhD thesis, Université François Rabelais de Tours.

[15] Vo, N. V., Fouillet, P., and Lenté, C. (2014). General lower bounds for the total completion time in a flowshop scheduling problem - MaxPlus approach. In *Proceedings of the 3rd International Conference on Operations Research and Enterprise Systems*, Angers, France. SciTePress - Science and Technology Publications.

[16] Vo, N. V. and Lenté, C. (2013). Equivalence between Two Flowshop Problems - MaxPlus Approach. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Operations Research and Enterprise Systems*, pages 174–177, Barcelona. SciTePress - Science and Technology Publications.

[17] Vo, N. V. and Lenté, C. (2014). From MaxPlus algebra to general lower bounds for the total weighted completion time in flowshop scheduling problems. *Lecture Notes in Management Science*, 6:128–137.

Epsilon
Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

VỀ CHỨNG MINH VÀ TIẾN BỘ TRONG TOÁN HỌC

William P. Thurston

(*Dịch bởi Nguyễn Dzuy Khánh*)

Tóm tắt

Bài viết này trình bày về bản chất của phép chứng minh và tiến bộ trong toán học, được khuyến khích bởi bài báo của Jaffe và Quinn, "*Theoretical Mathematics: Toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics*" (Toán học lý thuyết: Hướng tới sự tổng hợp mang tính văn hóa của toán học và vật lý lý thuyết). Bài báo của họ nêu lên nhiều vấn đề thú vị mà các nhà toán học cần quan tâm tới nhiều hơn, nhưng nó cũng duy trì một số niềm tin và thái độ cần bị nghi ngờ và cần được kiểm chứng.

Bài báo có một đoạn miêu tả vài phần trong công trình của tôi theo một cách chệch đi với kinh nghiệm của tôi, và nó cũng chệch khỏi những quan sát của mọi người trong lĩnh vực mà tôi đã từng thảo luận cùng về nó như một phép thử thực tế.

Sau một hồi suy nghĩ, tôi thấy có vẻ như những gì Jaffe và Quinn viết là một ví dụ cho hiện tượng rằng mọi người thấy cái mà họ được định hướng để thấy. Sự mô tả của Jaffe và Quinn thu được qua việc chiếu tính xã hội học của toán học lên một thang kích thước một chiều (ức đoán và chặt chẽ), bỏ qua rất nhiều hiện tượng cơ bản.

Nhiều phản hồi tới bài báo của Jaffe và Quinn đã được gửi đi bởi rất nhiều những nhà toán học, và tôi kỳ vọng rằng nó nhận được nhiều phân tích và phản biện cụ thể từ những người khác. Bởi vậy, trong bài viết này, tôi sẽ tập trung vào khía cạnh tích cực thay vì khía cạnh phản phủ định. Tôi sẽ trình bày quan điểm của mình về tiến trình của toán học, chỉ đôi khi nhắc đến bài báo của Jaffe và Quinn qua việc so sánh.

Để thử lột bỏ các lớp của các giả thiết, điều quan trọng là phải thử bắt đầu với những câu hỏi đúng:

1. Các nhà toán học đạt được thành quả gì

Có nhiều vấn đề bị che khuất trong câu hỏi này, mà tôi đã cố gắng để diễn đạt lại theo cách không giả định trước bản chất của câu trả lời. Chẳng hạn, quả thực không tốt nếu ta bắt đầu với câu hỏi

Các nhà toán học chứng minh các định lý như thế nào?

Câu hỏi này dẫn đến một chủ đề thú vị, nhưng để bắt đầu với nó ta phải đánh giá hai giả định ẩn giấu:

(1) Rằng tồn tại lý thuyết và thực tiễn khách quan, bất biến và được kiểm chứng chắc chắn của phép chứng minh toán học.

(2) Rằng tiến bộ được tạo ra bởi các nhà toán học bao gồm việc chứng minh những định lý.

Những giả thuyết này đáng để ta kiểm chứng, thay vì chấp nhận chúng như là những điều hiển nhiên và tiếp tục tiến lên từ chúng.

Thậm chí, câu hỏi cũng không phải là

Các nhà toán học đã tạo ra những tiến bộ trong toán học như thế nào ?

Thay vì đó dạng câu hỏi cụ thể (và quan trọng) mà tôi ưa thích là

Làm thế nào mà các nhà toán học làm thúc đẩy hiểu biết của con người về toán học ?

Câu hỏi này đem đến một điều căn bản và có tính lan tỏa: việc mà chúng ta đang làm là tìm những cách giúp *con người* hiểu và tư duy về toán học.

Sự phát triển đột phá của máy vi tính đã giúp làm nổi bật luận điểm này, bởi vì các máy tính và con người rất khác nhau. Chẳng hạn, khi Appel và Haken hoàn tất phép chứng minh cho định lý 4 màu, sử dụng một khối lượng tính toán tự động khổng lồ, nó đã gây ra rất nhiều tranh cãi. Tôi hiểu rằng sự tranh cãi này không mấy liên quan đến tính xác thực của định lý hay sự chính xác của phép chứng minh mà người ta hoài nghi. Thay vì đó, nó phản ánh một niềm mong mỏi liên tục cho *hiểu biết của con người* về một phép chứng minh, ngoài việc biết rằng định lý là đúng.

Ở một mức độ bình dị hơn, thường thì người ta nỗ lực sử dụng các máy tính để thực hiện những tính toán ở thang kích thước lớn cho những thứ mà họ đã hoàn thành ở thang nhỏ hơn bằng tay. Họ có thể in ra một bảng gồm 10000 số nguyên tố đầu tiên, rồi chỉ để thấy rằng, sau cùng thứ mà họ in ra chẳng phải là thứ mà họ đã mong mỏi. Qua những việc như thế, họ khám phá ra rằng thứ mà họ thực sự muốn thường không phải là một tập hợp của "*các đáp án*" – thứ họ muốn là *sự thấu hiểu*.

Có vẻ như luẩn quẩn khi nói rằng điều mà các nhà toán học đang hoàn thành tốt là thúc đẩy hiểu biết của con người về toán học. Tôi sẽ không thử giải quyết vấn đề này bằng việc thảo luận toán học là gì, bởi vì nó sẽ đưa chúng ta đi lạc đề. Các nhà toán học thường cảm thấy rằng họ biết toán học là gì, nhưng cũng thấy rằng thật khó để trực tiếp đưa ra một định nghĩa tốt. Thực sự sẽ rất thú vị khi thử đặt vấn đề như vậy. Với tôi, câu trả lời "*lý thuyết của những quy luật hình thức*" là sát nhất, nhưng để thảo luận về nó thì lại phải cần thêm một bài viết khác mất.

Liệu rằng, khi nhấn mạnh rằng toán học có một đặc tính đệ quy căn bản thì sự khó khăn trong việc trực tiếp đưa ra một định nghĩa tốt là một vấn đề mang tính bản chất? Cùng với những quan điểm này, chúng ta có thể nói rằng toán học là một ngành tối giản nhất thỏa mãn những điều kiện sau:

- Toán học bao gồm các số tự nhiên, hình học Euclid trong mặt phẳng và không gian.
- Toán học là ngành mà các nhà toán học nghiên cứu.
- Các nhà toán học là những người thúc đẩy tiến bộ của nhân loại trong hiểu biết về toán học.

Nói cách khác, khi toán học tiến bộ, chúng ta thu nạp nó vào tư duy của mình. Khi tiến trình tư duy của chúng ta trở nên phức tạp hơn, chúng ta tạo ra thêm những khái niệm và cấu trúc toán học mới: Chủ đề của toán học thay đổi để phản ánh cách chúng ta suy nghĩ.

Nếu những gì chúng ta đang làm là xây dựng các cách tư duy mới hơn, thì chiều tâm lý và xã hội là căn bản cho một mô hình tốt cho tiến bộ của toán học. Những chiều này không xuất hiện trong mô hình phổ biến. Nói một cách châm biếm, mô hình thường thấy bao gồm

D. Các nhà toán học bắt đầu từ những cấu trúc toán học cơ bản và một tập hợp các tiên đề "*cho trước*" về những cấu trúc ấy mà

T. có nhiều câu hỏi quan trọng cần được trả lời về những cấu trúc mà có thể được phát biểu như là những định lý toán học hình thức, và

P. nhiệm vụ của các nhà toán học là tìm ra một cách suy diễn từ những tiên đề tới các định lý hay đưa ra sự phủ định.

Chúng ta có thể gọi đây là mô hình định nghĩa - định lý - chứng minh (DTP) của toán học.

Một khó khăn rõ ràng với mô hình DTP đó là nó không thể giải thích nguồn gốc của các câu hỏi. Jaffe và Quinn đã thảo luận về một ức đoán (mà họ đã dán cho một cái nhãn không mấy thích hợp đó là "*toán học lý thuyết*") như là những thành phần bổ sung quan trọng. Ức đoán này bao gồm việc thiết lập các giả thuyết, đặt ra những câu hỏi và đưa ra những phỏng đoán thông minh cũng như các lập luận mang tính khám phá về điều có thể đúng.

Mô hình DTP của Jaffe và Quinn vẫn không thành công trong việc chỉ ra một số vấn đề căn bản. Chúng ta không cố gắng đạt được một mức trừu tượng nhất định cho các định nghĩa, định lý, và chứng minh. Thước đo cho thành công của chúng ta đó là chúng ta có giúp được *con người* hiểu và tư duy về toán học một cách sáng sủa và hiệu quả hơn hay không.

Bởi vậy, chúng ta cần phải tự hỏi mình:

2. Con người hiểu về toán học như thế nào

Đây là một câu hỏi cực hóc búa. Hiểu biết là một vấn đề cá nhân và mang tính nội tại mà khó có thể hoàn toàn nhận biết, thấu hiểu và thường là khó có thể trao đổi với nhau được. Ở đây, chỉ có thể đề cập sơ sơ tới nó mà thôi.

Con người thường có nhiều cách hiểu khác nhau về những khái niệm toán học. Để minh họa điều này, tốt hơn hết là dẫn ra một ví dụ mà các nhà toán học có kinh nghiệm hiểu theo nhiều cách khác nhau, nhưng chúng ta lại thấy các sinh viên thì khốn đốn với nó. Đạo hàm của một hàm số là một ví dụ hoàn toàn thích hợp. Đạo hàm có thể được hiểu như:

(1) *Tính vô cùng bé*: Tỉ số giữa sự thay đổi vô cùng nhỏ trong giá trị của một hàm số với sự thay đổi vô cùng nhỏ của hàm số.

(2) *Tính ký hiệu*: Đạo hàm của x^n là nx^{n-1}, đạo hàm của $\sin(x)$ là $\cos(x)$, đạo hàm của $f \cdot g$ là $f^{'} \cdot g * g^{'}, \ldots$

(3) *Một cách logic*: $f^{'}(x) = d$ nếu và chỉ nếu với mỗi ϵ tồn tại δ sao cho khi $0 < |\Delta x| < \delta$,

$$\left| \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| < \delta.$$

(4) *Một cách hình học*: Đạo hàm là hệ số góc của một tiếp tuyến với đồ thị hàm số, nếu đồ thị có tiếp tuyến.

(5) *Tốc độ thay đổi*: Tốc độ tức thời của $f(t)$, với t là thời gian.

(6) *Xấp xỉ*: Đạo hàm của một hàm số là xấp xỉ tuyến tính tốt nhất của hàm số ở lân cận của một điểm.

(7) *Vi mô*: Đạo hàm của một hàm số là giới hạn bạn thu được qua việc quan sát nó bằng một kính hiển vi với độ phóng đại ngày càng tăng.

Đây là một danh sách các *cách suy nghĩ* hay *tiếp nhận* khác nhau về khái niệm đạo hàm, thay vì một danh sách *các định nghĩa mang tính lô-gic*. Nếu không có những nỗ lực to lớn để bảo toàn phong thái và đặc trưng của nhận thức nguyên thủy của con người, sự khác biệt sẽ bắt đầu tan biến ngay khi những khái niệm tư duy được dịch sang những định nghĩa chính xác, mang tính hình thức và cụ thể.

Tôi nhớ rằng mình đã tiếp thu mỗi một trong những khái niệm trên như điều gì đó mới mẻ và thú vị, dành nhiều thời gian, nỗ lực để suy nghĩ cẩn thận và thực hành cùng với mỗi một trong chúng, rồi đồng nhất chúng với nhau. Tôi cũng không quên sau đó quay trở lại để xem xét những khái niệm khác nhau này với những ý nghĩa và hiểu biết bổ sung.

Danh sách còn tiếp tục, không có lý do gì để nó phải ngừng lại cả. Một mục xa hơn bên dưới danh sách có thể giúp ích cho việc minh họa cho điều này. Chúng ta có thể nghĩ rằng ta đã biết tất cả mọi điều để nói về một chủ đề nhất định, nhưng những vẫn luôn có những góc nhìn mới ở đâu đó.

Hơn thế nữa, một hình ảnh rõ ràng trong sáng của người này lại là nỗi ám ảnh với người khác:

> 37. *Đạo hàm của một hàm số thực f trong một miền $\mathbb{D}$ là thành phần Lagrange của phân thớ đối tiếp xúc $T*(\mathbb{D})$ mà đưa ra dạng liên thông cho liên thông dẹt trên $\mathbb{R}-$ phân thớ tầm thường $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ mà ở đó đồ thị của f là song song.*

Những khác biệt này không phải chỉ là sự tò mò. Suy nghĩ của con người và tri thức không vận hành trên một đường đơn lẻ, giống như chiếc máy vi tính với duy nhất một bộ vi xử lý. Não bộ và tâm trí chúng ta có vẻ như được tổ chức trong một mớ những thành phần riêng biệt đầy sức mạnh. Những thành phần này vận hành cùng nhau một cách lỏng lẻo, "*truyền đạt*" cho nhau ở mức tổ chức cao thay vì ở mức tổ chức thấp.

Dưới đây là một cách phân loại chính, có vai trò quan trọng trong việc tư duy toán học

(1) Ngôn ngữ của con người. Chúng ta có những phương tiện có mục tiêu đặc trưng và đầy sức mạnh cho việc nói và hiểu về ngôn ngữ của con người, những thứ cũng gắn với việc đọc và viết. Phương tiện ngôn ngữ của chúng ta là một công cụ quan trọng cho việc tư duy, chứ không chỉ riêng cho việc giao tiếp. Một ví dụ thô đó là công thức nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn, mà nhiều người có thể vẫn còn nhớ qua câu hát ngắn, "*ex equals minus bee plus or minus the square root of bee squared minus four ay see over two ay*" (x bằng với trừ b cộng trừ căn bậc hai của b bình phương trừ bốn ac trên hai a). Ngôn ngữ toán học của các ký hiệu được gắn kết chặt chẽ với phương tiện ngôn ngữ của con người. Giữa những ký hiệu toán học phân mảnh, thứ có ý nghĩa với hầu hết sinh viên học giải tích chỉ là một động từ, $=$. Đây là lý do vì sao các sinh viên lại sử dụng nó khi họ thấy cần một động từ. Hầu hết những ai đã dạy lý thuyết vi phân và tích phân ở Mỹ đều đã từng thấy các sinh viên viết một cách bản năng kiểu như $x^3 = 3x^2$ hay đại loại tương tự như vậy.

(2) Tầm nhìn, cảm quan không gian, cảm quan vận động. Con người có những phương tiện mạnh để thu nạp thông tin một cách trực quan hay theo cảm quan vận động, và tư duy với cảm quan không gian của họ. Mặt khác, họ không có một có một công cụ sẵn có thực sự tốt để đảo ngược góc nhìn, tức là chuyển một hiểu biết nội tại về không gian thành một bức ảnh hai chiều. Hệ quả là, các nhà toán học thường có ít hình vẽ hơn hoặc có hình vẽ xấu hơn trong các bài báo hay những cuốn sách của họ so với trong đầu họ.

Một hiện tượng thú vị trong việc tư duy về không gian đó là kích thước tạo nên khác biệt lớn. Chúng ta có thể nghĩ về những vật thể nhỏ bé trong bàn tay mình, hay những cấu trúc to lớn hơn như cỡ cơ thể người mà chúng ta quét, hay về các cấu trúc không gian bao quanh chúng ta mà ta chuyển động quanh bên trong. Chúng ta có khuynh hướng tư duy một cách hiệu quả hơn với hình ảnh về không gian trên một thang kích thước lớn hơn: như là nếu não bộ của chúng ta tiếp nhận những thứ to lớn hơn một cách chặt chẽ hơn và có thể dành cho chúng nhiều năng lượng hơn.

(3) Lô-gic và diễn dịch. Chúng ta có một số cách thức sẵn có để suy luận và sắp xếp mọi thứ cùng nhau liên quan với cách mà chúng ta đưa ra các suy luận lô-gic: Nguyên nhân và kết quả (liên quan với những gì ẩn dấu), phản chứng hay phủ định, ..

Có vẻ như các nhà toán học không hoàn toàn dựa trên những quy tắc hình thức của suy luận như là họ nghĩ. Thay vì vậy, họ giữ một lượng rất ít cấu trúc lô-gic của một phép chứng minh trong tâm trí họ, phân các phép chứng minh thành những kết quả trung gian mà nhờ đó họ không phải giữ quá nhiều lô-gic cùng một lúc. Thực tế, thường thấy rằng nhiều nhà toán học xuất chúng còn không biết đến cách dùng các lượng từ thế nào cho chuẩn(với mọi hay tồn tại,) nhưng tất cả các nhà toán học đều thực hiện được những suy luận mà họ đã mã hóa.

Thật thú vị là mặc dù "*hoặc*", "*và*" hay "*suy ra*" có những cách sử dụng hình thức như nhau, chúng ta lại nghĩ về "*hoặc*" hay "*và*" như là liên từ, còn "*suy ra*" là một động từ.

(4) Trực giác, liên hệ, ẩn dụ. Con người có những công cụ tuyệt vời để cảm nhận về nhiều thứ mà họ không cần biết nó đến từ đâu (trực giác), để cảm nhận về những hiện tượng hay tình cảnh hay đối tượng nào đó giống thứ gì khác (liên hệ), và để xây dựng hay kiểm tra những liên kết và so sánh, mang trong tâm trí hai thứ cùng một lúc (ẩn dụ). Những công cụ này là khá quan trọng với toán học. Với riêng tôi, tôi đã dành nhiều nỗ lực để "*lắng nghe*" trực giác và tư duy liên hệ của mình, rồi xây dựng chúng thành những ẩn dụ và liên kết. Việc này bao hàm một kiểu tập trung và giữ tâm trí bình lặng một cách đồng thời. Ngôn từ, logic và những bức tranh chi tiết rầm rập chạy quanh có thể ngăn chặn trực giác và tư duy liên hệ.

(5) Kích thích-phản ứng. Điểm này thường được nhấn mạnh ở trong các trường học; chẳng hạn, nếu bạn thấy 3927×253, bạn viết số này lên trên số kia và vẽ một đường thẳng bên dưới, v.v. Đây cũng là một điều quan trọng trong nghiên cứu toán học: nhìn thấy hình vẽ của một nút, tôi sẽ viết ra một biểu diễn cho nhóm cơ bản của phần bù của nó bằng một quy trình tương tự với thuật toán nhân.

(6) Tiến trình và thời gian. Chúng ta có một công cụ để nghĩ về những quá trình hay một chuỗi những hành động có thể thường được dùng để thu được hiệu quả tốt trong suy luận toán học. Một cách hiểu về hàm số: đấy là một tác động, một quá trình, đi từ miền xác định tới miền giá trị. Suy nghĩ này thực sự có giá trị khi lấy hợp thành của các hàm số. Một ứng dụng khác của công cụ này đó là ghi nhớ những phép chứng minh: người ta thường ghi nhớ một phép chứng minh như một quá trình bao gồm một vài bước. Trong tôpô, khái niệm đồng luân thường hay được hiểu nhất là như một quá trình theo thời gian. Xét về mặt toán học, thời gian cũng không khác gì với việc thêm vào một trục tọa độ không gian, nhưng bởi vì con người tương tác với nó theo một cách tương đối khác, nên nó lại rất khác về mặt tâm lý.

3. Hiểu biết toán học được truyền đạt nhứ thế nào

Việc truyền đạt hiểu biết từ người này sang người khác là không tự động. Nó khó khăn và mẹo mực. Bởi vậy, để phân tích hiểu biết của con người về toán học, việc quan trọng là phải biết ai **hiểu**, hiểu **gì**, và **khi nào thì hiểu**.

Các nhà toán học đã phát triển những thói quen giao tiếp, thường hơi ... bất bình thường. Bất cứ ở đâu những nhà tổ chức hội thảo cũng động viên người trình bày giải thích nội dung bằng những thuật ngữ cơ bản. Tuy nhiên, hầu như thính giả ở hội thảo cỡ trung bình nhận được ít giá trị từ nó. Có lẽ họ đã mất dấu sau năm phút đầu tiên, và ngồi im lặng trong 55 phút còn lại. Hay có lẽ họ nhanh chóng mất hứng thú bởi vì người báo cáo đi quá sâu vào chi tiết mà không đưa ra bất kỳ suy luận nào để đánh giá chúng. Ở cuối buổi báo cáo, chỉ một số ít các nhà toán học làm gần với lĩnh vực của báo cáo viên đặt một hay hai câu hỏi để tránh khỏi phải xấu hổ.

Quy luật này cũng tương tự với những gì thường xảy ra trong lớp học, khi chúng ta nói về thực trạng rằng chúng ta nghĩ các sinh viên "*phải*" học, trong khi các sinh viên lại cố gắng nắm lấy những vấn đề cơ bản hơn trong việc học ngôn ngữ của chúng ta và dự đoán mô hình tư duy của chúng ta. Các cuốn sách bù đắp cho việc này bằng cách đưa ra cách giải tất cả các dạng bài tập về nhà. Các giáo sư bù đắp lại bằng cách đưa ra các bài tập về nhà và bài kiểm tra thường là dễ hơn những gì được "*phủ*" trong khóa học, và sau đó cho điểm bài tập về nhà và bài kiểm tra theo một thang điểm đòi hỏi rất ít sự thấu hiểu. Chúng ta cho rằng vấn đề nằm ở các sinh viên chứ không phải ở cách truyền đạt: Rằng các sinh viên hoặc không đủ khả năng để nắm bắt, hoặc là chẳng thèm quan tâm.

Những người ngoại đạo thấy ngạc nhiên với hiện tượng này, nhưng bên trong cộng đồng toán học, chúng ta gạt bỏ nó bằng những cái nhún vai.

Khó khăn lớn nhất nằm ở ngôn ngữ và văn hóa toán học, những thứ được chia thành các ngành hẹp. Những khái niệm cơ bản được sử dụng hàng ngày trong một ngành hẹp này có thể là ngoại ngữ với ngành hẹp khác. Các nhà toán học từ bỏ việc cố gắng hiểu những khái niệm căn bản thậm chí là của ngành hẹp lân cận, trừ phi họ phải hướng dẫn học viên sau đại học.

Ngược lại, sự trao đổi diễn ra rất tốt bên trong những ngành hẹp của toán học. Trong một ngành hẹp, người ta xây dựng một cây tri thức chung và những kỹ thuật đã biết. Bằng giao tiếp không hình thức, người ta học cách hiểu và sao chép những cách suy nghĩ của nhau, do vậy những ý tưởng có thể được giải thích một cách sáng sủa và dễ dàng.

Tri thức toán học có thể được truyền giao nhanh một cách đáng ngạc nhiên bên trong một ngành hẹp. Khi một định lý đáng chú ý được chứng minh, thường (nhưng không phải luôn luôn) xảy ra chuyện lời giải có thể được trao đổi trong vài phút từ người này sang người khác trong cùng một ngành đó. Chứng minh tương tự có thể được trao đổi và hiểu một cách tổng quan sau bài giảng kéo dài khoảng một giờ cho những thành viên trong ngành. Nó có thể là chủ đề của một bài báo 15 đến 20 trang, mà có thể được đọc và hiểu chỉ sau vài giờ hay có thể là vài ngày đối với thành viên của ngành hẹp.

Tại sao lại có một sự phát triển lớn từ những thảo luận không chính thức tới bài báo cáo rồi tới bài báo? Một cách trực tiếp, người ta sử dụng những kênh trao đổi rộng rãi, đi xa hơn ngôn ngữ toán học hình thức. Họ sử dụng cử chỉ, họ vẽ các hình vẽ và lược đồ, họ tạo ra hiệu ứng âm thanh và sử dụng ngôn ngữ cơ thể. Sự trao đổi có vẻ tựa như là theo hai hướng, do vậy người ta có thể tập trung vào những gì mà họ cần chú ý hơn. Với những kênh thông tin này, họ có được vị thế tốt hơn nhiều để tuyền tải những gì đang diễn ra, không chỉ bằng những công cụ lô-gic và ngôn ngữ của họ mà bằng cả những công cụ tinh thần nữa.

Khi báo cáo, người ta bị hạn chế hơn và cũng hình thức hơn. Các thính giả toán học thường không giỏi đặt các câu hỏi hay xuất hiện trong tâm trí con người, còn người báo cáo lại thường có bản đề cương soạn sẵn không thực tế ngăn cản họ nghĩ về các câu hỏi hay thậm chí là khi họ bị hỏi.

Trong bài báo, người ta còn hình thức hơn. Những người viết bài dịch các ý tưởng của họ thành ký hiệu và suy luận lô-gic, còn người đọc thì lại cố gắng dịch ngược lại.

Tại sao lại có sự không nhất quán giữa trao đổi trong một ngành hẹp với những trao đổi bên ngoài những ngành hẹp đó, nếu không muốn nói đến trao đổi bên ngoài toán học ?

Theo một nghĩa nào đó thì Toán học có một ngôn ngữ chung: Ngôn ngữ của các ký hiệu, những định lý, tính toán mang tính kỹ thuật, và lô-gic. Ngôn ngữ này truyền tải hiệu quả một số, nhưng không phải tất cả, các trạng thái tư duy toán học. Các nhà toán học học từ việc dịch gần như vô thức một số thứ nhất định từ một trạng thái tinh thần này tới trạng thái khác, do vậy các mệnh đề nhanh chóng trở nên rõ ràng. Những nhà toán học khác nhau nghiên cứu các bài báo theo những cách khác nhau, nhưng khi tôi đọc một bài báo trong một lĩnh vực mà tôi thành thạo, thì tôi tập trung vào những suy nghĩ giữa các dòng kiến thức. Tôi có thể nhìn vào một vài đoạn hay chuỗi các phương trình và tự nhủ rằng "*À phải rồi, họ đã đưa vào đủ những lời dẫn phức tạp để bước theo những ý tưởng như thế này.*" Khi ý tưởng là rõ ràng, cách thiết lập hình thức lại thường là không cần thiết và rườm rà – tôi thường cảm thấy rằng tôi có thể tự viết nó ra một cách dễ dàng hơn so với việc khám phá xem các tác giả thực sự viết gì. Nó cũng giống như một thợ làm bánh tập sự thử với một tờ hướng dẫn dài 16 trang vậy. Nếu bạn hiểu các người thợ làm bánh và bạn gặp một người thợ làm bánh tập sự, bạn sẽ thấy anh ta đưa nguyên liệu vào và xem nó có phù hợp hay không thay vì trước tiên phải đọc tất cả những chi tiết trong sách hướng dẫn.

Những người quen với các phương thức làm việc khác nhau trong một ngành hẹp nhận biết những quy luật đa dạng của các mệnh đề hay công thức như là thành ngữ hay lối diễn đạt cho một số khái niệm hay hình ảnh trí tuệ nào đó. Nhưng với nhiều người không quen với những gì đang diễn ra, cùng những quy luật như thế lại không mấy sáng tỏ; thậm chí chúng còn thường gây nhầm lẫn. Ngôn ngữ không còn tồn tại ngoại trừ với người đang sử dụng nó.

Ở đây, tôi muốn nhắc đến một chú ý quan trọng: Có một số nhà toán học, những người quen thuộc với những cách tư duy trong nhiều hơn một ngành hẹp, đôi khi là nhiều ngành như thế. Một số nhà toán học học được biệt ngữ của vài ngành hẹp khi là học viên cao học, một số lại nhạy bén với việc thu nạp những ngôn ngữ và văn hóa toán học của ngành khác còn một số khác thì lại ở các trung tâm của toán học nơi mà họ được tiếp xúc với rất nhiều ngành hẹp. Những người có thể làm việc thoải mái với nhiều hơn một ngành hẹp thường có một ảnh hưởng rất tích cực, họ bắc những cây cầu hay giúp đỡ những nhóm các nhà toán học học hỏi lẫn nhau. Nhưng khả năng hiểu biết của con người trong đa lĩnh vực có thể có ảnh hưởng tiêu cực, qua việc dọa dẫm người khác, hay giúp phê chuẩn và duy trì một hệ thống giao tiếp kém. Chẳng hạn, một hiệu ứng thường xuất hiện trong những buổi hội thảo chuyên đề, khi một hay hai người có hiểu biết rộng rãi ngồi ở hàng đầu có thể đóng vai trò như là người dẫn dắt tinh thần của báo cáo viên cho thính giả.

Có một hiệu ứng khác, có nguồn gốc từ những khác biệt lớn giữa cách chúng ta nghĩ về toán học và cách chúng ta viết nó. Một nhóm các nhà toán học tương tác với nhau có thể giữ một tập hợp các ý tưởng toán học tồn tại trong một quãng thời gian vài năm, mặc dù những phiên bản ghi chép về công trình toán học của họ khác với những gì họ thực sự nghĩ, lại nhấn mạnh nhiều hơn rất nhiều vào ngôn ngữ, ký hiệu, lô-gic và tính hình thức. Nhưng khi những nhóm các nhà toán học mới học về chủ đề này, họ có khuynh hướng mô tả những gì họ đọc và nghe bằng lời, do vậy những hình thức và cơ cấu có thể dễ dàng ghi lại hay trao đổi sẽ có khuynh hướng lấn át các hình thức tư duy khác. Có hai thước đo cho khuynh hướng này, do vậy toán học không hoàn bị đẩy vào tình thế khó khăn trong vấn đề hình thức. Thứ nhất, các thế hệ nhà toán học trẻ hơn đang tiếp tục tự khám phá và tái khám phá những cách nhận thức, do vậy đan cài lại những trạng thái tư duy đa dạng của con người vào toán học. Thứ hai, đôi khi các nhà toán học sáng tạo ra những cái tên và tình cờ thống nhất những định nghĩa mà thay thế các diễn đạt luẩn quẩn mang tính kỹ thuật và đưa ra những cách luận giải tốt cho các cách nhận thức. Những cái tên như "*nhóm*" để thay thế cho "*một hệ các phép thế thỏa mãn ...*", và "*đa tạp*" để thay thế cho

Chúng ta không thể đưa ra các tọa độ để tham số hóa một cách đồng thời tất cả các nghiệm của những phương trình của mình, nhưng trong lân cận của bất kỳ một nghiệm cụ thể nào ta có thể đưa ra các tọa độ

$$f_1(u_1, u_2, u_3),\ f_2(u_1, u_2, u_3),\ f_3(u_1, u_2, u_3),\ f_4(u_1, u_2, u_3),\ f_5(u_1, u_2, u_3)$$

trong đó có ít nhất một trong mười định thức ... [10 *định thức* 3×3 *cho các ma trận của những đạo hàm riêng] là khác không.*

có thể hoặc không thể diễn đạt được những đột phá trong nhận thức của các chuyên gia, nhưng chúng làm giảm rất nhiều những khó khăn trong việc trao đổi nhận thức.

Các nhà toán học cần phải dồn thêm nhiều tâm sức hơn nữa vào việc trao đổi các ý tưởng. Để hoàn thành việc này, chúng ta cần phải chú ý nhiều hơn tới việc trao đổi không chỉ những định nghĩa, định lý, và chứng minh, mà còn cả cách tư duy của mình nữa. Ta cần phải đánh giá đúng giá trị của những cách tư duy khác nhau về cùng một cấu trúc toán học.

Chúng ta cần phải tập trung thật nhiều năng lượng hơn nữa cho việc hiểu và giải thích các cơ sở tinh thần căn bản của toán học – và hệ quả là dành ít hơn năng lượng cho các kết quả mới. Điều này dẫn đến sự phát triển ngôn ngữ toán học mà có hiệu quả cho mục đích nguyên sơ của việc truyền giao ý tưởng cho những người chưa biết.

Một phần trong việc trao đổi này là qua các chứng minh.

4. Thế nào là một phép chứng minh

Khi tôi mới bắt đầu vào học sau đại học ở Berkeley, tôi có vấn đề với việc tưởng tượng làm thế nào mình có thể "*chứng minh*" một định lý toán học mới và thú vị. Tôi không thực sự hiểu thế nào là một "phép chứng minh".

Qua việc đi seminar, đọc các bài báo, và trò chuyện với các học viên sau đại học khác, tôi dần dần nắm được vấn đề. Trong bất kỳ ngành nào, có một số định lý và kỹ thuật nhất định được biết đến và chấp nhận rộng rãi. Khi bạn viết một bài báo, bạn nhắc đến chúng mà không cần dẫn chứng minh. Bạn nhìn vào những bài báo khác trong ngành, bạn thấy những cơ sở lập luận mà họ trích lại không kèm chứng minh, và những gì họ trích dẫn trong phần tài liệu tham khảo. Bạn học vài ý tưởng về các phép chứng minh từ những người khác. Và rồi bạn có thể tự do trích lại cùng định lý đó và cùng những trích dẫn kia. Bạn không cần phải đọc toàn bộ những bài báo hay các cuốn sách trong phần tài liệu tham khảo của bạn. Có rất nhiều thứ được biết đến rộng rãi là những thứ mà không còn văn bản nguồn được biết đến nữa. Chừng nào mà những người làm việc trong ngành đó còn thấy thoải mái vì những ý tưởng đó thực sự có tác dụng, nó không cần phải có một văn bản nguồn chính thức.

Đầu tiên, tôi đã thực sự rất nghi ngờ quá trình này. Tôi đã ngờ rằng liệu có một ý tưởng nào thực sự được công bố hay chưa. Nhưng tôi thấy rằng tôi có thể hỏi mọi người và họ có thể đưa ra những giải đáp và chứng minh, hoặc có thể giới thiệu tôi tới ai đó khác hay tới những văn bản nguồn mà có cung cấp những lời giải thích hay các chứng minh. Có những định lý đã được công bố mà cũng được biết đến rộng rãi là không chính xác hay những chứng minh là không hoàn thiện. Tri thức và hiểu biết toán học được ẩn trong tâm trí và trong kết cấu xã hội của cộng đồng những người nghiên cứu một chủ đề nhất định. Tri thức toán học này được hỗ trợ bởi những văn bản lưu trữ, nhưng những tài liệu ấy cũng không thực sự chính yếu.

Tôi nghĩ mẫu hình này thay đổi chút ít qua từng ngành. Tôi đã quan tâm đến lĩnh vực hình học của toán học, nơi bây giờ rất hiếm tìm được một tài liệu phản ánh tốt cách thức mà người ta thực sự tư duy. Trong những lĩnh vực đại số hơn hay mang tính ký hiệu nhiều hơn, thì không nhất thiết phải như thế, và tôi có ấn tượng rằng trong nhiều lĩnh vực, các tài liệu thực sự gần như là xương sống của ngành. Nhưng trong lĩnh vực nào cũng có một tiêu chuẩn xã hội mạnh cho tính hợp lệ và sự đúng đắn. Chứng minh của Andrew Wiles cho Định lý cuối cùng của Fermat là một ví dụ minh họa tốt cho điều này, trong một lĩnh vực mang nhiều tính đại số. Các chuyên gia nhanh chóng tin rằng chứng minh của ông căn bản là đúng trên nền tảng của những ý tưởng cao cấp, từ rất lâu trước khi những chi tiết trong chứng minh có thể được kiểm chứng. Chứng minh này sẽ nhận được rất nhiều sự xem xét và kiểm tra kỹ lưỡng so với hầu hết các phép chứng minh toán học khác, nhưng bất kể quá trình kiểm tra hé lộ điều gì, nó cũng giúp minh họa xem toán học tiến triển thế nào qua những hệ thống tâm lý học và quá trình xã hội học.

Khi mọi người làm toán, dòng các ý tưởng và tiêu chí xã hội cho giá trị và sự chính xác là đáng tin cậy hơn nhiều so với những tài liệu hình thức. Người ta thường không giỏi lắm trong việc kiểm tra *tính đúng đắn hình thức* của các phép chứng minh, nhưng họ lại khá chính xác trong việc phát hiện những điểm yếu tiềm tàng hay những lỗi sai trong các phép chứng minh ấy.

Để tránh giải thích sai, tôi muốn nhấn mạnh vào hai thứ mà tôi *không* đang nói đến. Trước tiên, tôi *không* bào chữa cho bất kỳ yếu kém nào của tiêu chí chuẩn về phép chứng minh của cộng đồng chúng ta, mà tôi đang cố gắng diễn tả quá trình chứng minh ấy thực sự vận hành như thế nào. Các phép chứng minh cẩn thận mà sẽ chống lại sự soi xét là rất quan trọng. Tôi nghĩ rằng, nếu xét toàn thể, quá trình của các phép chứng minh vận hành khá tốt trong cộng đồng toán học. Kiểu thay đổi mà tôi muốn bào chữa là các nhà toán học cẩn thận hơn với các phép chứng minh của họ, làm cho chúng rõ ràng và đơn giản nhất có thể và nhờ đó nếu bất kỳ điểm yếu nào xuất hiện, thì cũng dễ dàng được phát hiện.

Thứ hai, tôi *không* phê bình nghiên cứu toán học của các chứng minh hình thức, tôi cũng không phê bình những người dành năng lượng vào việc tạo ra những luận điểm toán học ngày một cụ thể và hình thức hơn. Chúng đều là những hoạt động có ích mà soi rọi những nhận thức mới về toán học.

Tôi đã khá nỗ lực trong nhiều quá trình của sự nghiệp của mình để khám phá những câu hỏi toán học bằng máy tính. Theo quan điểm của kinh nghiệm này, tôi đã ngạc nhiên khi thấy mệnh đề của Jaffe và Quinn rằng toán học là vô cùng chậm chạp và khó khăn, và rằng có thể xác minh được rằng nó là hoạt động mang tính chặt chẽ nhất trong tất cả các hoạt động của con người. Tiêu chuẩn cho sự chính xác và hoàn thiện để có được một chương trình máy tính vận hành được ở mức cao hơn hai lần so với tiêu chuẩn của cộng đồng toán học cho các phép chứng minh đúng đắn. Tuy nhiên, những chương trình máy tính lớn, thậm chí khi chúng đã được viết và kiểm tra một cách rất cẩn thận, thì lại luôn có vẻ như có lỗi.

Tôi nghĩ rằng toán học là một trong những phần thưởng trí tuệ lớn nhất trong các hoạt động của con người. Bởi vì chúng ta có một tiêu chuẩn cao cho sự rõ ràng và thuyết phục của tư duy và do chúng ta đặt một tiêu chuẩn cao trong việc lắng nghe và cố gắng tiếp thu lẫn nhau, chúng ta không tham gia vào những luận điểm dài dòng hay làm đi làm lại những vấn đề toán học của mình. Chúng ta được chuẩn bị để được thuyết phục bởi những người khác. Nói một cách trí tuệ, toán học chuyển động rất nhanh. Toàn bộ cảnh quan toán học thay đổi liên tục theo những cách đáng ngạc nhiên trong suốt một sự nghiệp đơn lẻ. Khi ta biết là viết một chương trình máy tính tiếp cận mục tiêu trí thức của một bài báo toán học tốt khó đến thế nào, và sẽ phải tốn nhiều nỗ lực và thời gian để biến nó thành "gần như" đúng một cách hình thức, thật phi lý khi khẳng định rằng toán học mà chúng ta đang thực hành lại không ở đâu gần đúng một cách hình thức.

Toán học mà chúng ta thực hành, một cách hình thức là hoàn thiện hơn rất nhiều và chính xác hơn nhiều ngành khoa học khác, nhưng nó thiếu hoàn thiện và chính xác một cách hình thức so với các phần mềm máy tính. Sự khác biệt không chỉ liên quan tới mức độ nỗ lực: kiểu nỗ lực khác biệt về lượng. Trong những phần mềm máy tính đồ sộ, một lượng nỗ lực khủng khiếp phải được sử dụng cho vô số vấn đề về tính tương thích: đảm bảo rằng tất cả các định nghĩa là nhất quán, phát triển những cấu trúc dữ liệu "tốt" mà hữu ích nhưng phần đông không làm vướng víu, quyết định trên sự tổng quát "phù hợp" cho các hàm số, etc. Tỉ lệ năng lượng sử dụng trên phần hoạt động của một phần mềm đồ sộ, để phân biệt với phần tínhtoán, là nhỏ đáng ngạc nhiên. Bởi vì những vấn đề tương thích mà hầu như chắc chắn vượt quá tầm kiểm soát do những định nghĩa "chuẩn" thay đổi khi nguyên tắc chung và phạm vi vận hành được thêm vào, các phần mềm máy tính hay cần phải được viết lại thường xuyên, thường là từ những hỗn độn.

Một kiểu nỗ lực tương tự có lẽ đã đi vào toán học để giúp toán học đúng đắn, hoàn thiện một cách hình thức. Không phải sự chính xác về mặt hình thức là khó đến không vượt qua được dưới thang kích thước nhỏ - mà là có rất nhiều sự lựa chọn khả dĩ cho sự hình thức hóa trên những thang kích thước nhỏ mà có thể dịch sang số lượng khổng lồ của lựa chọn độc lập trong thang kích thước lớn. Việc làm cho những lựa chọn này tương thích với nhau là rất khó, làm như thế sẽ chắc chắn dẫn đến việc quay ngược lại và viết lại từ hỗn độn tất cả những bài báo toán học cũ có những kết quả chúng ta phải phụ thuộc vào. Cũng khá khó khăn để đưa ra những lựa chọn kỹ thuật cho các định nghĩa mang tính hình thức thích hợp với những cách thức đa dạng mà các nhà toán học muốn sử dụng chúng và điều này sẽ thúc đẩy sự mở rộng trong tương lai của toán học. Nếu chúng ta tiếp tục cộng tác, hầu hết thời gian của chúng ta sẽ được dành cho những hội đồng tiêu chuẩn quốc tế để thiết lập những định nghĩa thống nhất và giải quyết những vấn đề gây tranh cãi khổng lồ.

Các nhà toán học có thể và thực sự khỏa lấp được những cách biệt, sửa chữa các lỗi, cung cấp thêm những chi tiết, phương pháp khoa học cẩn thận hơn khi họ được chọn hay thúc đẩy để làm như thế. Hệ thống của chúng ta làm khá tốt việc đưa ra những định lý tin cậy được mà có thể được lưu trữ một cách chắc chắn. Chỉ là tính tin cậy được không hoàn toàn đến từ chuyện các nhà toán học kiểm tra một cách hình thức các luận điểm hình thức, nó đến từ những nhà toán học suy nghĩ cẩn trọng, có phản biện về các ý tưởng toán học.

Ở một mức độ nền tảng, những cơ sở của toán học là rất thiếu vững chãi so với thứ toán học mà chúng ta nghiên cứu. Hầu hết các nhà toán học bám lấy những nguyên lý mà được biết đến như là những hư cấu tao nhã. Chẳng hạn, có một định lý nói rằng không tồn tại cách nào để thực sự xây dựng hay thậm chí là định nghĩa một thứ tự tốt trên tập hợp số thực. Có một nguyên nhân đáng kể (nhưng không có chứng minh) rằng chúng ta có thể bỏ những hư cấu này đi mà cũng không sao cả, nhưng điều này cũng không giúp chúng trở nên chính xác được. Các nhà tập hợp xây dựng nhiều những "hoàn vũ toán học" mâu thuẫn xen kẽ và đan cài lẫn nhau sao cho nếu một trong số đó mà nhất quán thì những cái còn lại cũng thế. Việc này để lại rất ít độ tin cậy rằng hoàn vũ này hay hoàn vũ khác là lựa chọn đúng đắn hay lựa chọn tự nhiên. Định lý bất toàn của Kurt Godel hàm ý rằng không thể có hệ hình thức nào lại nhất quán được, nhưng lại đủ mạnh để có thể phục vụ như một cơ sở cho tất cả toán học mà chúng ta nghiên cứu.

Đối nghịch với con người, máy tính lại giỏi thực hiện những quá trình hình thức. Một số người đang tích cực làm việc trong dự án hình thức hóa một cách thực sự các phần của toán học bằng máy tính, với những suy diễn hình thức chính xác. Tôi nghĩ rằng đây là một dự án lớn, rất đáng giá và tôi tự tin rằng chúng ta sẽ học được rất nhiều từ đó. Quá trình này sẽ giúp đơn giản hóa và làm toán học sáng sủa hơn. Không lâu nữa, tôi kỳ vọng chúng ta sẽ có những phần mềm máy tính mang tính tương tác mà có thể giúp con người dịch mã những khó khăn của toán học chính xác và hoàn thiện một cách hình thức (dựa trên một ít những giả định có lẽ vẫn yếu nhưng chí ít là cụ thể), và rằng chúng sẽ trở thành một phần của môi trường làm việc chuẩn của nhà toán học.

Tuy nhiên, chúng ta nên nhận thấy rằng những chứng minh có thể hiểu được và có thể kiểm chứng được dưới góc độ của con người mà chúng ta thực sự làm được là những thứ quan trọng nhất với chúng ta và chúng khá khác biệt với những chứng minh hình thức. Hiện tại, những chứng minh hình thức vẫn nằm ngoài tầm với và hầu như không thích hợp: chúng ta có những quá trình đủ tốt của con người để kiểm chứng tính chính xác toán học.

(Còn tiếp) ...

ỨNG DỤNG CỦA XÁC SUẤT

Huỳnh Xuân Tín

(*Trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên*)

1. Mở đầu

Các số Ramsey $R(k,l)$ được chỉ ra là luôn tồn tại với mọi $k,l \in \mathbb{N}$, nhưng chỉ rất ít trong các số đó là được biết giá trị chính xác. Năm 1947, P. Erdős đã đưa ra một chứng minh cho cận dưới của số Ramsey dạng đối xứng bằng một phương pháp mới lúc bấy giờ: **phương pháp xác suất.** Bài toán như sau:

Định lý 1. Với mọi số nguyên dương $k \geq 3$, ta có $R(k,k) > 2^{\frac{k}{2}}$.

Chứng minh. Đặt $G = K_n$, $n \leq 2^{\frac{k}{2}}$, và xét $2-$ tô màu cạnh cho G một cách ngẫu nhiên (mỗi cạnh được tô đỏ hoặc xanh ngẫu nhiên với xác suất $\frac{1}{2}$). Ta chứng minh tồn tại ít nhất một cách $2-$tô màu cho G sao cho nó không chứa đồ thị con K_k cùng màu.

Gọi S là một K_k-đồ thị con của G, đặt A_S là biến cố chỉ S có cùng màu cạnh. Chú ý rằng, một K_k-đồ thị con của G có tất cả C_k^2 cạnh, mỗi cạnh có 2 cách tô màu. Do đó

$$\mathbb{P}[A_S] = \frac{2}{2^{C_k^2}} = 2^{1-C_k^2}.$$

Theo tính chất của xác suất và chú ý rằng đồ thị G có tất cả C_n^k đồ thị con K_k, nên

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_S A_S\right] \leq \sum_S \mathbb{P}[A_S] = C_n^k \cdot 2^{1-C_k^2}.$$

Ta chứng minh $C_n^k \cdot 2^{1-C_k^2} < 1$.
Ta có

$$C_n^k = \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-1)n}{k!} < \frac{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}{k!} = \frac{n^k}{k!}. \tag{1.1}$$

Suy ra

$$C_n^k \cdot 2^{1-C_k^2} < \frac{n^k}{k!} \cdot 2^{1-C_k^2}.$$

Vì $n \leq 2^{\frac{k}{2}}$; $2^{1-C_k^2} = 2 \cdot 2^{-\frac{(k-1)k}{2}} = \dfrac{2^{1+\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k^2}{2}}}$, nên ta có

$$\frac{n^k}{k!} \cdot 2^{1-C_k^2} \leq 2 \cdot \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k!}. \tag{1.2}$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được $2 \cdot \dfrac{2^{\frac{k}{2}}}{k!} < 1$. Thật vậy,

Với $k = 3$, ta có $2 \cdot \dfrac{2^{3/2}}{2.3} < 1$.
Giả sử bất đẳng thức đã đúng với $k-1,\ k > 3$. Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với k vì

$$2 \cdot \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k!} = 2 \cdot \frac{2^{\frac{k-1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{(k-1)!k} < 2 \cdot \frac{2^{\frac{1}{2}}}{k} < \frac{3}{k} \le 1,$$

do đó

$$2 \cdot \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k!} < 1,\ \forall k \ge 3. \tag{1.3}$$

Từ (1.1), (1.2), (1.3) suy ra $C_n^k \cdot 2^{1-C_k^2} < 1,\ \forall k \ge 3$, bài toán được chứng minh. □

Gần đây, phương pháp xác suất đã phát triển mạnh mẽ và trở thành một công cụ hữu hiệu để giải quyết các bài toán tổ hợp. Cơ sở của phương pháp xác suất có thể được diễn tả như sau: để chứng minh sự tồn tại của một cấu trúc tổ hợp thỏa tính chất nào đó, ta xây dựng một không gian xác suất thích hợp rồi chỉ ra rằng một phần tử với tính chất đã cho được chọn ngẫu nhiên trong không gian đó có xác suất dương. Trong tài liệu này, chúng tôi cũng đề cập đến một số ứng dụng của phương pháp xác suất trong tổ hợp, đặc biệt là chứng minh bài toán tồn tại.

Nội dung chính là xem xét một số ứng dụng của phương pháp xác suất trong các bài toán tổ hợp và đồ thị theo hai hướng cơ bản: dựa vào định nghĩa xác suất và dựa vào tính chất của kỳ vọng. Ngoài các bài toán về tổ hợp và đồ thị, tác giả cũng đã đưa thêm các bài toán mà có thể ứng dụng phương pháp này trong các lĩnh vực khác.

2. Phép chứng minh sử dụng định nghĩa xác suất

Trước tiên ta cần mở rộng khái niệm đồ thị.
Một *siêu đồ thị* là một cặp $H = (V, E)$, ở đây V là tập hữu hạn các phần tử được gọi là các đỉnh và E là họ các tập con của V gọi là các cạnh. H được gọi là n-siêu đồ thị đều nếu mỗi cạnh của nó chứa đúng n đỉnh. Ta nói rằng H thỏa tính chất B hoặc 2-tô màu được nếu có một cách 2-tô màu cho các đỉnh trong V sao cho không có cạnh nào cùng màu. Ký hiệu $m(n)$ là số cạnh nhỏ nhất của một n-siêu đồ thị đều không có tính chất B. Ta đi xác định cận dưới cho $m(n)$.

Định lý 2. Mỗi n-siêu đồ thị đều với ít hơn 2^{n-1} cạnh có tính chất B. Do đó $m(n) \ge 2^{n-1}$.

Chứng minh. Đặt $H = (V, E)$ là một n-siêu đồ thị đều với ít hơn 2^{n-1} cạnh. Tô màu ngẫu nhiên cho V bằng 2 màu (mỗi màu có xác suất được chọn là $\frac{1}{2}$). Với mỗi cạnh $e \in E$, đặt A_e là biến cố chỉ e có cùng màu. Khi đó

$$\mathbb{P}[A_e] = \frac{2}{2^n} = 2^{1-n}.$$

Do đó, xác suất để có ít nhất một cạnh trong E cùng màu là

$$\mathbb{P}\left[\bigcup\nolimits_{e \in E} A_e\right] \le \sum\nolimits_{e \in E} \mathbb{P}[A_e] < 1,$$

tức là $1 - \mathbb{P}\left[\bigcup_{e \in E} A_e\right] > 0$.

Điều này cho thấy rằng tồn tại một cách 2−tô màu cho V sao cho không có cạnh cùng màu. □

Dưới đây là một số bài toán liên quan:

Bài 1. Cho $G = (V, E)$ là đồ thị hai mảng n đỉnh với một tập $S(v)$ chứa nhiều hơn $\log_2 n$ màu gắn với mỗi đỉnh $v \in V$. Chứng minh rằng có một cách tô màu thích hợp cho G mà mỗi đỉnh v được tô một màu từ tập màu $S(v)$ của nó.

Lời giải. Do G là đồ thị hai mảng nên tập V có thể phân hoạch thành hai tập rời nhau V_1 và V_2 sao cho mỗi cạnh trong G có một đỉnh trong V_1 và một đỉnh trong V_2, đặt $S = \bigcup\limits_{v \in V} S(v)$ là tập tất cả các màu có thể.

Xét phân hoạch ngẫu nhiên $S = S_1 \cup S_2$, trong đó mỗi màu được chọn ngẫu nhiên, độc lập cho vào S_1 hoặc S_2 với xác suất bằng nhau (và bằng $\frac{1}{2}$). Ta sẽ chứng minh tồn tại một phân hoạch của S sao cho tất cả các đỉnh trong $V_i,\ i = 1, 2$, có thể được tô màu bằng các màu trong $S_i,\ i = 1, 2$.

Lấy $v \in V_i,\ i = 1, 2$, khi đó xác suất để không có màu nào trong tập màu $S(v)$ nằm trong S_i xác định bởi:

$$\mathbb{P}[S(v) \cap S_i = \emptyset] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|S(v)|} < \frac{1}{n},\ (\text{do } |S(v)| > \log_2 n).$$

Vậy ta có

$$\mathbb{P}\left[\bigcup\nolimits_{v \in V_i} \{S(v) \cap S_i = \emptyset\}\right] < \frac{|V_i|}{n},$$

do đó, xác suất để có ít nhất một đỉnh không thể được tô bằng một màu bất kì trong tập màu của đỉnh đó sẽ bị chặn bởi $\frac{|V_1|}{n} + \frac{|V_2|}{n} = 1$.

Vậy có một phân hoạch $S = S_1 \cup S_2$ sao cho tất cả các đỉnh trong V_i có thể được tô bằng các màu trong $S_i,\ i = 1, 2$. □

Bài 2. Cho $m, n \in \mathbb{Z}$ và $n \geq m > 2,014 \log_2 n > 0$. Khi đó, ta có thể tô màu mỗi cạnh của $K_{n,n}$ là đỏ hoặc xanh sao cho không có đồ thị con $K_{m,m}$ có cùng màu cạnh được tạo thành.

Lời giải. Đồ thị $K_{m,m}$ có $2m$ đỉnh và m^2 cạnh, do đó số cách để 2-tô màu cạnh cho đồ thị con $K_{m,m}$ của đồ thị $K_{n,n}$ là 2^{m^2}, và trong các cách tô màu đó chỉ có 2 kết quả thuận lợi để được $K_{m,m}$ cùng màu. Suy ra, xác suất để được $K_{m,m}$ cùng màu cạnh là

$$\frac{2}{2^{m^2}} = 2^{1-m^2}.$$

Đồ thị $K_{n,n}$ có $(C_n^m)^2$ đồ thị con $K_{m,m}$, mỗi đồ thị con $K_{m,m}$ có khả năng cùng màu cạnh như nhau. Do đó, xác suất để có ít nhất một đồ thị con $K_{m,m}$ cùng màu luôn nhỏ hơn hoặc bằng $(C_n^m)^2 \cdot 2^{1-m^2}$.

Do đó để chứng minh yêu cầu của bài toán, ta chỉ cần chứng minh

$$(C_n^m)^2 \cdot 2^{1-m^2} < 1.$$

Vì $m > 2,014 \log_2 n > 2$, nên ta có

$$2(C_n^m)^2 = 2\left[\frac{(n-m+1)(n-m+2)\cdots(n-1)n}{m!}\right]^2 < n^{2m}.$$

Vì $m > 2,014\log_2 n > 2\log_2 n$, nên suy ra $n^{2m} < (2^{\frac{m}{2}})^{2m}$.

Từ 2 điều trên, suy ra $2(C_n^m)^2 < n^{2m} < (2^{\frac{m}{2}})^{2m} = 2^{m^2}$.

Bản chất của số $2,014$ trong điều kiện $m > 2,014\log_2 n$ đó là nó lớn hơn 2. Bởi vậy, bất kì số $2+\varepsilon$, với $\varepsilon > 0$ nào đó đều có thể được. $\square$

Bài 3. (Định lý Erdős - Ko - Rado) Nếu $|X| = n,\ n \geq 2k$ và $\mathcal{F}$ là họ giao nhau các k-tập con của X, tức là $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \cap B \neq \emptyset$, thì ta có

$$|\mathcal{F}| \leq C_{n-1}^{k-1}.$$

Chứng minh. Ta cần bổ đề sau:

Bổ đề 1. Xét $X = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, và với $0 \leq s < n$, ta định nghĩa $A_s = \{s, s+1, \ldots, s+k-1\} \subseteq X$ với phép cộng modulo n. Khi đó, với $n \geq 2k$, thì bất kì họ giao nhau $\mathcal{F}$ các k-tập con của X đều chứa nhiều nhất k tập A_s.

Thật vậy,

Nếu $A_i \in \mathcal{F}$, thì bất kì tập $A_s \in \mathcal{F}$ nào đó khác A_i phải là 1 trong số các tập $A_{i-k+1}, \ldots, A_{i-1}$ hoặc $A_{i+1}, \ldots, A_{i+k-1}$. Có $2k-2$ tập như thế, các tập này có thể được chia thành $(k-1)$ cặp có dạng (A_s, A_{s+k}). Vì $n \geq 2k$, $A_s \cap A_{s+k} = \emptyset$ và chỉ có một tập trong mỗi cặp là có thể xuất hiện trong $\mathcal{F}$, nên ta có điều phải chứng minh.

Tiếp theo, giả sử $X = \{0, , 1, \ldots, n-1\}$ và $\mathcal{F}$ là họ giao nhau các k-tập con của X. Với một hoán vị $\sigma : X \longrightarrow X$, ta định nghĩa

$$\sigma(A_s) = \{\sigma(s), \sigma(s+1), \ldots, \sigma(s+k-1)\},$$

với phép cộng modulo n. Các tập $\sigma(A_s)$ chính là các tập nói trong bổ đề 3 với các phần tử được gán nhãn lại bởi hoán vị σ, do đó, theo bổ đề trên thì có nhiều nhất k trong số n tập này nằm trong $\mathcal{F}$. Do đó, nếu chọn s độc lập, ngẫu nhiên và đều, thì

$$\mathbb{P}[\sigma(A_s) \in \mathcal{F}] \leq \frac{k}{n}.$$

Nhưng việc chọn $\sigma(A_s)$ này tương đương với việc chọn ngẫu nhiên một k-tập con của X. Bởi vậy

$$\mathbb{P}[\sigma(A_s) \in \mathcal{F}] = \frac{|\mathcal{F}|}{C_n^k},$$

và $|\mathcal{F}| = C_n^k \cdot \mathbb{P}[\sigma(A_s) \in \mathcal{F}] \leq C_n^k \cdot \frac{k}{n} = C_{n-1}^{k-1}$. $\square$

Bài 4. Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và $B_1, B_2, \ldots, B_n$ là các tập con phân biệt của $\mathbb{N}$ sao cho
- $|A_i| = k$ và $|B_i| = l, \quad \forall\ 1 \leq i \leq n$,
- với mỗi i, $A_i \cap B_i = \emptyset$, và
- với mỗi $i \neq j$, $A_i \cap B_j \neq \emptyset$.

Chứng minh rằng $n \leq C_{k+l}^k$.

Lời giải. Đặt $X = \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cup B_i)$ và xét một cách sắp thứ tự các thành phần trong X một cách ngẫu nhiên (có tất cả $|X|!$ cách sắp thứ tự có xác suất như nhau). Đặt U_i là biến cố chỉ mỗi phần tử của A_i đứng trước mỗi phần tử của B_i. Ta có

$$\mathbb{P}[U_i] = \frac{C_{|X|}^{k+l} \cdot k! \cdot l! \cdot (|X| - k - l)!}{|X|!} = \frac{1}{C_{k+l}^{k}}, \ 1 \le i \le k.$$

Ta cần chú ý rằng U_i và U_j không xảy ra đồng thời với $i \neq j$. Thật vậy, giả sử U_i và U_j xảy ra đồng thời. Không mất tính tổng quát ta giả sử phần tử cuối cùng của A_i không đứng sau phần tử cuối cùng của A_j. Nhưng trong trường hợp này, tất cả các phần tử của A_i đều đứng trước tất cả các phần tử của B_j. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $A_i \cap B_j \neq \emptyset$.
Vậy ta có $1 \ge \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[U_i] = \frac{n}{C_{k+l}^{k}}$. □

Bài 5. Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và $B_1, B_2, \ldots, B_n$ là các tập con phân biệt của $\mathbb{N}$ sao cho
- $|A_i| = r$ và $|B_i| = s, \ \ \forall\ 1 \le i \le n$,
- với mỗi i, $A_i \cap B_i = \emptyset$, và
- với mỗi $i \neq j$, $(A_i \cap B_j) \cup (A_j \cap B_i) \neq \emptyset$.

Chứng minh rằng $n \le \dfrac{(r+s)^{r+s}}{r^r \cdot s^s}$.

Lời giải. Đặt $X = \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cup B_i)$. Định nghĩa $p = \frac{r}{r+s}$, và xét một đồng xu có một mặt là A, một mặt là B với xác suất xuất hiện mặt A là p.

Với mỗi phần tử trong X, ta tung đồng xu một cách độc lập, điều này xác định một ánh xạ $f : X \longrightarrow \{A, B\}$. Định nghĩa E_i là biến cố xảy ra khi tất cả các phần tử $x \in A_i$ có $f(x) = A$ và tất cả các phần tử $y \in B_i$ có $f(y) = B$. Ta có

$$\mathbb{P}[E_i] = p^r \cdot (1-p)^s, \ \ 1 \le i \le n.$$

Chú ý rằng E_i và E_j không xảy ra đồng thời nếu $i \neq j$, vì nếu ngược lại, thì sẽ có phần tử thuộc hoặc $A_i \cap B_j$, hoặc $A_j \cap B_i$, và nó không thể là A cũng không thể là B, mâu thuẫn. Do đó, các biến cố E_i rời nhau,

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[E_i] = n \cdot p^r (1-p)^s.$$

Suy ra

$$1 \ge \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[E_i] = n \cdot p^r (1-p)^s,$$

hay $n \le p^r \cdot (1-p)^s = \dfrac{(s+r)^{s+r}}{r^r \cdot s^s}$. □

Bài 6. Chứng minh rằng có một hằng số $c > 0$ với tính chất như sau. Cho A là ma trận $n \times n$ có các phần tử đôi một khác nhau, thì có một hoán vị của các dòng của A sao cho không có cột nào trong ma trận hoán vị chứa một dãy con tăng độ dài ít nhất $c\sqrt{n}$.

Lời giải. Ta cần chứng minh hai bổ đề sau:

Bổ đề 2. Với mọi số n nguyên dương lớn hơn 1 thì

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Chứng minh.. Bằng quy nạp, ta có

$$\begin{aligned}(n+1)! = n!(n+1) > \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (n+1) &= \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot e \\ &= \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot e > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \quad (\text{do } e^{\frac{1}{n}} > 1 + \tfrac{1}{n}.)\end{aligned}$$

□

Bổ đề 3. Với n là số nguyên dương và $n \geq k$, ta có $C_n^k < \left(\frac{en}{k}\right)^k$.

Chứng minh.. $C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} < \frac{n^k}{\left(\frac{k}{e}\right)^k} = \left(\frac{ne}{k}\right)^k$. □

Trở lại bài toán,

Xét hoán vị ngẫu nhiên các dòng của A. Cố định $c > 0$ (sẽ được giới hạn sau), và ký hiệu $\mathcal{E}_i$ là tập của các hoán vị dòng cho ta ít nhất một dãy con tăng độ dài (ít nhất) $c\sqrt{n}$ trong cột i. Hiển nhiên rằng, mỗi cột trong A có $C_n^{c\sqrt{n}}$ dãy con độ dài $c\sqrt{n}$, và mỗi dãy con sẽ là dãy tăng với xác suất $\dfrac{1}{(c\sqrt{n})!}$, ta có

$$\mathbb{P}[\mathcal{E}_i] \leq \frac{1}{(c\sqrt{n})!} \cdot C_n^{c\sqrt{n}}.$$

Theo các bổ đề trên, ta có

$$(c\sqrt{n})! > n^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{c\sqrt{n}}{e}\right)^{c\sqrt{n}},$$

$$C_n^{c\sqrt{n}} < \left(\frac{en}{c\sqrt{n}}\right)^{c\sqrt{n}} = \left(\frac{e\sqrt{n}}{c}\right)^{c\sqrt{n}},$$

suy ra

$$\mathbb{P}[\mathcal{E}_i] \leq \frac{1}{(c\sqrt{n})!} \cdot C_n^{c\sqrt{n}} < \left(\frac{e}{c}\right)^{2c\sqrt{n}} \cdot n^{-1/4}.$$

Do đó

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_i \mathcal{E}_i\right] \leq \sum_i \mathbb{P}[\mathcal{E}_i] < \left(\frac{e}{c}\right)^{2c\sqrt{n}} \cdot n^{\frac{3}{4}}.$$

Theo giả thiết bài toán, tức luôn có một hoán vị của các dòng của A sao cho không có cột nào trong ma trận hoán vị chứa một dãy con tăng độ dài ít nhất $c\sqrt{n}$, nên bắt buộc

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_i \mathcal{E}_i\right] < 1.$$

Vậy ta chỉ cần chọn $c > e$ đủ lớn, suy ra điều cần chứng minh. □

Bài 7. Chứng minh rằng giữa 2^{100} người, không nhất thiết phải có 200 người đôi một quen nhau hoặc 200 người đôi một không quen nhau.

Lời giải. Ta sẽ cho một cặp hai người bất kì quen nhau hoặc đôi một không quen nhau bằng cách tung một đồng xu đối xứng. Trong một nhóm gồm 200 người, xác suất để họ đôi một quen nhau hoặc đôi một không quen nhau là: $2.2^{-C_{200}^2} = 2^{-19899}$.
Vì có $C_{2^{100}}^{200}$ cách chọn ra 200 người, xác suất tồn tại 200 người đôi một quen nhau hoặc đôi một không quen nhau nhiều nhất bằng:

$$C_{2^{100}}^{200}.2^{-19899} < \frac{(2^{100})^{200}}{200!}.2^{-19899} = \frac{2^{101}}{200!} < 1.$$

Từ đây suy ra xác suất không tồn tại 200 người đôi một quen nhau hoặc đôi một không quen nhau lớn hơn 0. Nói cách khác, không nhất thiết phải có 200 người đôi một quen nhau hoặc đôi một không quen nhau. Bài toán được chứng minh. □

Ta thấy ở đây phương pháp tổng quát để xây dựng ví dụ ngẫu nhiên: Nếu xác suất của tồn tại ví dụ ta cần là dương thì tồn tại ví dụ đó.

Bài 8. Trong mỗi ô của bảng 100×100, ta viết một trong các số nguyên $1, 2, \ldots, 5000$. Hơn nữa, mỗi một số nguyên trong bảng xuất hiện đúng hai lần. Chứng minh ta có thể chọn được 100 ô của bảng thỏa mãn ba điều kiện sau:

1. Mỗi một hàng được chọn đúng một ô.
2. Mỗi một cột được chọn đúng một ô.
3. Các số trong các ô được chọn đôi một khác nhau.

Lời giải. Chọn hoán vị ngẫu nhiên $a_1, \ldots, a_{100}$ của $\{1, \ldots, 100\}$ và chọn ô thứ a_i trong hàng thứ i. Cách chọn như vậy thõa mãn (1) và (2). Với mỗi $j = 1, \ldots, 5000$, xác suất để chọn được hai ô có cùng số j là 0 nếu hai ô này cùng hàng hoặc cùng cột và là $\frac{1}{100}.\frac{1}{99}$ trong trường hợp ngược lại. Do đó xác suất để cách chọn này thỏa mãn (3) ít nhất là:

$$1 - 5000.\frac{1}{100.99} > 0$$

và ta có điều phải chứng minh. □

Tiếp theo ta dùng tính chất của xác suất để giải toán

Bài 9. Cho p, q là các số thực dương sao cho $p + q = 1$. Chứng minh rằng:

$$p + pq + pq^2 + pq^3 \cdots = 1.$$

Lời giải. Xét thí nghiệm tung đồng xu với xác suất ra mặt ngửa là p và mặt sấp là q. Ta thực hiện cho đến khi ra được mặt ngửa. Gọi X là số lần tung, khi đó: $P(X = n) = pq^{n-1}$.
Vế trái của đẳng thức bằng $P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = n) + \cdots$ và dĩ nhiên bằng 1. □

Bài 10. (IMO Shortlist 2006) Cho S là tập hữu hạn các điểm trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Với mỗi đa giác lồi P với các điểm thuộc S, gọi $a(P)$ là số các điểm của P và $b(P)$ là số các điểm của S nằm ngoài P . Chứng minh rằng với mọi số thực x, ta có đẳng thức:

$$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1$$

Trong đó tổng được tính theo tất cả các đa giác lồi có đỉnh thuộc S và quy ước đoạn thẳng, một điểm và tập rỗng được coi là đa giác lồi với 2, 1, 0 đỉnh tương ứng).

Lời giải. Ta tô màu một cách ngẫu nhiên các điểm bằng màu đen và màu trắng, trong đó các điểm được tô màu đen với xác suất x. Với mỗi đa giác lồi P, gọi EP là biến cố tất cả các đỉnh nằm treenchu vi của P có màu đen và tất cả các đỉnh nằm ngoài P có màu trắng.

Các biến cố này đôi một xung khắc nhau, như thế vế trái là xác suất của sự kiện chắn chắn xảy ra: ta chỉ cần xét bao lồi của tất cả các điểm màu đen. □

Để tính xác suất của một biến cố theo định nghĩa cổ điển ta thường phải giải quyết hai bài toán tổ hợp: tính số kết quả thuận lợi và tính số các kết quả có thể. Thông thường bài toán sau đơn giản hơn bài toán trước. Và chính điều này tạo ra một ứng dụng thú vị của xác suất: Nếu ta tính được số các kết quả có thể và xác suất thì sẽ tính đượ số kết quả thuận lợi.

Bài 11. Trong số cách chọn ra ba đỉnh của hình lập phương đơn vị, có bao nhiêu cách chọn thỏa mãn điều kiện ba đỉnh được chọn là ba đỉnh của một tam giác đều.

Lời giải. Ta lần lượt chọn các đỉnh:
Đỉnh đầu tiên có thể là một đỉnh tùy ý.

Với đỉnh thứ hai, khi đỉnh thứ nhất đã được chọn thì ta có thể chọn một trong ba đỉnh có khoảng cách $\sqrt{2}$ đến đỉnh ban đầu. Xác suất thành công là $\frac{3}{7}$.

Ở lượt cuối cùng, xác suất thành công là $\frac{2}{6}$

Như vậy xác suất để ba đỉnh được chọn là ba đỉnh của một tam giác đều sẽ là $\frac{1}{7}$. Vì số cách chọn ba đỉnh từ 8 đỉnh là C_8^3 nên số cách chọn thỏa mãn điều kiện 3 đỉnh được chọn là đỉnh của một tam giác đều sẽ bằng $\frac{1}{7}C_8^3$. □

Bài 12. Trong một kì thi có n môn thi, trong đó có đề tiếng Pháp và đề tiếng Anh. Thí sinh có thể thi bao nhiêu môn tùy ý, nhưng thí sinh chỉ có thể chọn một trong hai ngôn ngữ cho mỗi môn thi. Với hai môn thi bất kỳ, tồn tại một thí sinh thi hai môn này bằng các ngôn ngữ khác nhau. Nếu mỗi một môn có nhiều nhất 10 thí sinh dự thi. Chứng minh rằng $n \leq 1024$.

Lời giải. Ta gán ngẫu nhiên cho các thí sinh là *"người Pháp"* hoặc *"người Anh"*. Gọi E_j là biến cố "mọi thí sinh thi môn j" đều thi bằng đề đúng với quốc tích mình được gán".

Vì có nhiều nhất 10 thí sinh ở mỗi môn thi, ta có xác suất

$$P(E_j) \geq 2^{-10} = \frac{1}{1024}.$$

Vì với môn thi bất kì, tồn tại một thi sinh thi hai môn này bằng hai ngôn ngữ khác nhau, nên không có hai E_j nào có thể xảy ra đồng thời. Từ đây suy ra

$$P(\text{ít nhất một trong các } E_j \text{ xảy ra}) = P(E_1) + \cdots + P(E_n) \geq \frac{n}{1024}$$

Nhưng vì xác suất của một biến cố bất kì không vượt quá 1 nên từ đây ta suy ra $1 \geq \frac{n}{1024}$ hay $n \leq 1024$. □

3. Phép chứng minh tồn tại sử dụng kỳ vọng

Một điều hiển nhiên rằng giá trị trung bình của một tập các số không bao giờ vượt quá số lớn nhất trong tập này. Điều này cũng đúng cho kỳ vọng.

Định lý 3. Cho $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ là một biến ngẫu nhiên sao cho tập hợp $S = \{X(u)/u \in \Omega\}$ là hữu hạn, và đặt j là phần tử lớn nhất của S. Khi đó ta có $j \geq \mathbb{E}[X]$.

Chứng minh. Theo định nghĩa của $\mathbb{E}[X]$, ta có
$\mathbb{E}[X] = \sum\limits_{i \in S} i \cdot \mathbb{P}[X = i] \leq j \cdot \sum\limits_{i \in S} \mathbb{P}[X = i] = j.$ Sau đây sẽ là một số ứng dụng của định lý trên trong việc giải quyết các bài toán tồn tại. □

Bài 13. (Szele 1943) Chứng minh rằng có một đồ thị đầy đủ có hướng n đỉnh chứa ít nhất $\frac{n!}{2^{n-1}}$ đường Hamilton. Kết luận gì về số vòng Hamilton?

Lời giải. Lấy một đồ thị đầy đủ K_n và định hướng mỗi cạnh của nó một cách ngẫu nhiên để được một đồ thị đầy đủ có hướng T. Nếu p là một xích Hamilton trong K_n, thì đặt $X_p(T) = 1$ nếu p trở thành một đường Hamilton trong T và đặt $X_p(T) = 0$ nếu ngược lại. Vì p có $n - 1$ cạnh, nên

$$\mathbb{E}[X_p] = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Đặt $X = \sum\limits_{p} X_p$, p chạy khắp $n!$ xích Hamilton trong K_n, thì X chính là số đường Hamilton trong T. Theo định lý về tính chất của kỳ vọng ta có

$$\mathbb{E}[X] = n! \cdot \mathbb{E}[X_p] = \frac{n!}{2^{n-1}},$$

và áp dụng định lý 3 ta có điều phải chứng minh. Với vòng Hamilton thì chỉ khác với đường Hamilton là chúng có thêm 1 cạnh có hướng. Do đó, tồn tại một đồ thị đầy đủ có hướng n đỉnh với ít nhất $\frac{n!}{2^n}$ vòng Hamilton. □

Bài 14. Cho G là một đồ thị đơn với tập đỉnh $[n]$, và có m cạnh. Khi đó G chứa một đồ thị con 2 mảng với ít nhất $\frac{m}{2}$ cạnh.

Lời giải. Đặt $G = (V, E)$, và chọn ngẫu nhiên một tập con $T \subseteq V$ (ở đây, các biến cố $x \in T$ là độc lập lẫn nhau với xác suất $\frac{1}{2}$). Với một cạnh e cho trước, gọi X_e là biến chỉ của biến cố có đúng một đỉnh của cạnh e nằm trong T. Khi đó

$$\mathbb{E}[X_e] = \frac{1}{2}.$$

Nếu ký hiệu X là số cạnh có đúng một đỉnh nằm trong T, thì

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{e \in E} \mathbb{E}[X_e] = \frac{m}{2}.$$

Vậy với bất kì $T \subseteq V$, tồn tại ít nhất $\frac{m}{2}$ cạnh có một đỉnh trong T và một đỉnh trong $V \setminus T$, tạo thành một đồ thị hai mảng. □

Tiếp theo là một bài toán được liên hệ tới một vấn đề nổi tiếng trong lý thuyết phức tạp, có thể gọi là **"vấn đề ở giữa"**.

Bài 15. Cho $L = (L_1, L_2, \cdots, L_k)$ gồm các bộ ba thứ tự $L_i = (a_i, b_i, c_i)$ sao cho với i bất kì, các số a_i, b_i, c_i là các phần tử khác nhau của $[n]$. Tuy nhiên, các ký hiệu đó với các chỉ số i và j khác nhau có thể ký hiệu cho cùng một số.
Đặt $p = p_1 p_2 \dots p_n$ là một n-hoán vị. Ta nói rằng p thỏa mãn L_i nếu phần tử b_i ở giữa a_i và c_i trong p (không quan tâm đến thứ tự của 3 phần tử này trong p là $a_i b_i c_i$ hay $c_i b_i a_i$).

Chứng minh rằng tồn tại một n-hoán vị p thỏa mãn ít nhất $\frac{1}{3}$ của tất cả L_i trong một L cho trước.

Lời giải. Đặt Y_i là biến chỉ của biến cố một n-hoán vị p được chọn ngẫu nhiên thỏa mãn L_i. Rõ ràng $\mathbb{P}[Y_i = 1] = \frac{1}{3}$, do đó

$$\mathbb{E}[Y_i] = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Nếu đặt $Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k$ thì Y chính là số L_i trong L được thỏa mãn bởi hoán vị p. Theo định lý về tính chất của kỳ vọng ta có

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}[Y_i] = k \cdot \mathbb{E}[Y_1] = \frac{k}{3}.$$

Áp dụng định lý trong mục 1, ta được điều phải chứng minh. □

Bài 16. Cho đồ thị $G = (V, E)$. Một tập $U \subseteq V$ được gọi là *độc lập* trong G nếu không tồn tại cạnh trong U. Chứng minh: nếu G có n đỉnh và ký hiệu d_v là bậc của đỉnh v, $v \in V$, thì G có một tập độc lập có lực lượng ít nhất $\sum_v \frac{1}{d_v+1}$. Hơn nữa, nếu G có e cạnh thì G có một tập độc lập có lực lượng ít nhất $\frac{n^2}{2e+n}$.

Lời giải. Xét một thứ tự ngẫu nhiên của các phần tử của V. Chú ý rằng với mỗi $v \in V$, thì tập chứa v và tất cả các đỉnh kề với nó có lực lượng $d_v + 1$. Do đó

$$\mathbb{P}[v \text{ đứng trước tất cả các đỉnh kề với nó trong thứ tự trên}] = \frac{1}{d_v + 1}.$$

Nếu gọi S là tập tất cả các đỉnh v sao cho v đứng trước tất cả các đỉnh kề của nó trong thứ tự trên, thì rõ ràng S là độc lập, và

$$\mathbb{E}[|S|] = \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1},$$

do đó tồn tại ít nhất một tập độc lập có lực lượng ít nhất $\sum\limits_{v \in V} \frac{1}{d_v+1}$.
Trường hợp G có e cạnh. Ta chú ý rằng $\sum_v d_v = 2e$, nên

$$\sum\nolimits_v (d_v + 1) = 2e + n,$$

và áp dụng tính lồi của hàm $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $(0, +\infty)$, ta suy ra

$$\sum_v \frac{1}{d_v + 1} \geq \sum_v \frac{1}{(2e + n)/n} = \frac{n^2}{2e + n}.$$

Bài toán được chứng minh. □

Bài 17. (Iran Team Selection Test 2008/6) Giả sử 799 đối thủ tham gia vào một giải đấu, trong đó mỗi cặp đối thủ thi đấu với nhau đúng một lần. Chứng minh rằng tồn tại 2 tập rời nhau A và B gồm 7 đối thủ sao cho mỗi đối thủ trong A đều thắng mỗi đối thủ trong B.

Lời giải. Giải đấu này có thể diễn tả bằng một đồ thị đầy đủ có hướng G có tập đỉnh E gồm 799 điểm (trong mặt phẳng hoặc trong không gian) tương ứng với 799 đối thủ, hai đỉnh x, y bất kì được nối với nhau bằng một cung từ x đến y nếu đối thủ x thắng đối thủ y.

Gọi A là 7-tập con của E được chọn ngẫu nhiên. Đặt X là số đỉnh có cung đi vào từ các đỉnh trong A. Ta chứng minh $\mathbb{E}[X] \geq 7$.
Gọi X_i là biến chỉ của biến cố đỉnh i có cung đi vào từ các đỉnh trong A, suy ra

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{C_{d_i^-}^7}{C_{799}^7}.$$

Theo tính chất tuyến tính của kỳ vọng, ta có

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{799} \mathbb{E}[X_i] = \sum_i \frac{C_{d_i^-}^7}{C_{799}^7}.$$

Mà

$$\sum_i d_i^- = C_{799}^2 = \frac{798 \cdot 799}{2} = 399 \cdot 799,$$

điều này nghĩa là bậc vào trung bình của một đỉnh i bất kì đúng bằng 399, và áp dụng tính lồi của hàm $f(x) = C_x^k$ trên $[k, +\infty)$, ta được:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i \frac{C_{d_i^-}^7}{C_{799}^7} \geq 799 \cdot \frac{C_{399}^7}{C_{799}^7} \approx 6.025.$$

Vì X là một số nguyên nên ta có điều phải chứng minh. □

Bài 18. Trong một giải cờ vua có 40 kỳ thủ. Có tổng cộng 80 ván đã được đấu, và hai kỳ thủ bất kì đấu với nhau nhiều nhất một lần. Với mọi số nguyên n, chứng mình tồn tại n kỳ chưa hề đấu với nhau. (Tất nhiên là số n càng lớn càng tốt.)

Lời giải. Ta gán một xếp hạng ngẫu nhiên cho 40 kỳ thủ, và ta chỉ chọn ra những người chỉ chơi với người có thứ hạng thấp hơn. Chú ý rằng bằng cách này hai kỳ thủ bất kỳ được chọn không đấu với nhau. Giả sử kỳ thủ thứ i chơi d_i ván. Vì có 80 ván đấu ta có:

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_{40} = 80.2$$

Ta cũng thấy, kỳ thủ thứ i được chọn nếu và chỉ nếu anh ta đước gán với thứ hạng cao nhất giữa chính anh ta và những người anh ta chơi với, và xác suất của sự kiện này là $\frac{1}{d_i+1}$. Như vậy số trung bình kỳ thủ được là:

$$\frac{1}{d_1+1} + \cdots + \frac{1}{d_{40}+1} \geq \frac{40^2}{d_1 + d_2 + \cdots + d_{40}} = \frac{40^2}{160+40} = 8$$

Có nghĩa là tồn tại 8 kỳ thủ đôi một không đấu với nhau. □

Bài 19. (MOP Test 2007) Trong một ma trận $n \times n$, mỗi số $1, 2, \ldots, n$ xuất hiện đúng n lần. Chứng minh rằng có một dòng hoặc cột chứa ít nhất $\sqrt{n}$ số phân biệt.

Lời giải. Chọn một dòng hoặc một cột ngẫu nhiên, có $2n$ cách chọn. Đặt X là số phần tử khác nhau trên dòng hoặc cột đã chọn, ta chứng minh $\mathbb{E}[X] \geq \sqrt{n}$. Gọi I_i là biến chỉ phần tử i xuất hiện trên dòng hoặc cột đã chọn, khi đó

$$X = \sum_i I_i.$$

Hiển nhiên, $\mathbb{E}[I_i] = \mathbb{P}[I_i \geq 1]$. Đặt $A = \{(p,q) /$ phần tử ở vị trí (p,q) là $i\}$ ở đây (p,q) kí hiệu cho vị trí ở dòng thứ p, cột thứ q trong ma trận $n \times n$. Khi đó $|A| = n$.
Nhận thấy rằng số kết quả thuận lợi để i xuất hiện trên dòng hoặc cột đã chọn chính là số dòng hoặc cột chứa i. Gọi

$$B = \{p \,/\, (p,q) \in A\} \text{ và } C = \{q \,/\, (p,q) \in A\}.$$

Vì $(p,q) \in A$ suy ra $p \in B$ và $q \in C$, do đó $A \subseteq B \times C$. Mà

$$|B| \cdot |C| = |B \times C| \geq |A| = n,$$

nên theo bất đẳng thức Côsi, thì

$$|B| + |C| \geq 2\sqrt{|B| \cdot |C|} \geq 2\sqrt{n}.$$

Sử dụng tính tuyến tính của kỳ vọng và bất đẳng thức vừa nêu trên, ta được

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[I_i] = n \cdot \mathbb{P}[I_i \geq 1] \geq n \cdot \frac{2\sqrt{n}}{2n} = \sqrt{n}.$$

□

Bài 20. (Russia 1996/C4) Tại Duma có 1600 đại biểu, thành lập 16000 ủy ban. Mỗi ủy ban gồm 80 đại biểu. Chứng minh rằng ta có thể tìm được 2 ủy ban có ít nhất 4 thành viên chung.

Lời giải. Chọn một cặp ủy ban ngẫu nhiên trong số C_{16000}^2 cặp. Đặt X là số người thuộc vào cả 2 ủy ban được chọn. Chú ý rằng

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{1600},$$

ở đây X_i là biến chỉ của biến cố đại biểu thứ i thuộc vào cả 2 ủy ban được chọn.

Theo tính chất tuyến tính của kỳ vọng, ta có

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \cdots + \mathbb{E}[X_{1600}].$$

Để tính $\mathbb{E}[X_i]$, đặt n_i là số ủy ban có người thứ i tham gia, khi đó

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{P}[\text{Đại biểu thứ } i \text{ thuộc vào 2 ủy ban được chọn}] = \frac{C_{n_i}^2}{C_{16000}^2}.$$

Mà $\sum_i n_i = 16000 \cdot 80$, do đó giá trị trung bình của các n_i là

$$\overline{n} = \frac{16000 \cdot 80}{1600} = 800,$$

và theo tính lồi của hàm $f(x) = C_x^k$ trên $[k, +\infty)$, suy ra

$$\mathbb{E}[X] \geq 1600 \cdot \frac{C_n^2}{C_{16000}^2} = 1600 \cdot \frac{800 \cdot 799}{16000 \cdot 15999} \approx 3.995.$$

Do X luôn là số nguyên, nên ta có điều phải chứng minh. □

Bài 21. (IMO Shortlist 1999/C4) Đặt A là tập gồm n thặng dư mod n^2. Chỉ ra rằng có một tập B gồm n thặng dư mod n^2 sao cho ít nhất một nửa thặng dư mod n^2 có thể viết dưới dạng $a + b$ với $a \in A$ và $b \in B$.

Lời giải. Chọn ngẫu nhiên, độc lập n thặng dư từ n^2 thặng dư (ta có $(n^2)^n$ cách chọn) và sắp xếp chúng vào một tập B. Cần chú ý rằng, do quá trình chọn là độc lập nên tập cuối cùng thu được có thể có lực lượng nhỏ hơn n. Nhưng nếu vẫn xảy ra ít nhất một nửa thặng dư biểu diễn được dưới dạng $a + b$, $a \in A$ và $b \in B$, thì ta có thể làm đầy B để $|B| = n$.

Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số thặng dư có dạng $a + b$. Ta chứng minh $\mathbb{E}[X] \geq \frac{n^2}{2}$.

Với mỗi thặng dư i, có đúng n cách để chọn b sao cho $A + b \ni i$ (vì $|A| = n$). Do đó, kết quả thuận lợi để thặng dư i không xuất hiện trong $A + B$ là $(n^2 - n)^n$. Khi đó

$$\mathbb{P}[\text{Thặng dư } i \text{ không xuất hiện trong } A + B] = \left(\frac{n^2 - n}{n^2}\right)^n.$$

Do đó

$$\mathbb{P}[\text{Thặng dư } i \text{ xuất hiện trong } A + B] = 1 - \left(\frac{n^2 - n}{n^2}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Gọi I_i là biến chỉ của biến cố thặng dư i xuất hiện trong $A + B$. Khi đó,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{E}[I_i] = n^2 \cdot \mathbb{P}[I_i = 1] = n^2\Big[1 - \big(1 - \frac{1}{n}\big)^n\Big].$$

Do $e^x \geq 1 + x\ \forall x \in \mathbb{R}$, nên $1 - \frac{1}{n} \leq e^{-\frac{1}{n}}$, và sử dụng $e \approx 2.718\ldots$, ta được

$$\mathbb{E}[X] = n^2\Big[1 - \big(1 - \frac{1}{n}\big)^n\Big] \geq n^2(1 - \frac{1}{e}) > \frac{n^2}{2}.$$

□

Bài 22. (Taiwan 1997/9) Với $n \geq k \geq 3$, đặt $X = \{1, 2, \ldots n\}$ và $\mathcal{F}_k$ là họ các k-tập con của X sao cho bất kì hai tập con trong $\mathcal{F}_k$ đều có nhiều nhất $k - 2$ phần tử chung. Chứng minh rằng tồn tại một tập con M_k của X với ít nhất $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ phần tử mà không chứa tập con nào trong $\mathcal{F}_k$.

Lời giải. Chú ý rằng, mỗi $(k - 1)$ phần tử đều chứa trong nhiều nhất một tập trong $\mathcal{F}_k$, mỗi tập trong $\mathcal{F}_k$ đều chứa đúng k tập con có $(k - 1)$ phần tử. Do đó

$$|\mathcal{F}_k| \leq \frac{1}{k} \cdot C_n^{k-1}.$$

Đặt $t = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$. Nếu $t < k$, ta có điều cần chứng minh, do đó ta giả sử $t \geq k$. Lấy ngẫu nhiên t-tập con của $[n]$, đặt X là biến ngẫu nhiên chỉ số thành phần của $\mathcal{F}_k$ là tập con của t-tập. Gọi I_F là biến chỉ một thành phần F của $\mathcal{F}_k$ chứa trong t-tập, tức là

$$I_F = \begin{cases} 1 & \text{nếu } F \text{ chứa trong } t\text{-tập} \\ 0 & \text{ngoài ra.} \end{cases}$$

Khi đó
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{F \in \mathcal{F}_k} \mathbb{E}[I_F] = |\mathcal{F}_k| \cdot \mathbb{P}[I_F = 1].$$

Để F chứa trong t-tập đã chọn thì t-tập đó phải là hợp của F và một $(t-k)$-tập trong số $n-k$ phần tử. Do đó
$$\mathbb{P}[I_F = 1] = \frac{C_{n-k}^{t-k}}{C_n^t}.$$

Hiển nhiên $C_t^k \leq 2^t \leq 2n$, sử dụng cận trên của $|\mathcal{F}_k|$ và rút gọn ta thu được

$$\mathbb{E}[X] \leq \frac{1}{n-k+1} \cdot C_t^k.$$

Chú ý rằng
$$\frac{1}{n-k+1} \cdot C_t^k < 1 \Longleftrightarrow C_t^k < 2^{t-1} - k + 1,$$
do đó để chứng minh $\mathbb{E}[X] < 1$, ta đi chứng minh $C_t^k < 2^{t-1} - k + 1$.

Ta có $C_t^k = C_{t-1}^{k-1} + C_{t-1}^k$, mà $\sum\limits_{i=0}^{t-1} C_{t-1}^i = 2^{t-1}$, nên suy ra

$$2^{t-1} \geq C_t^k + (t-2), \text{hay } C_t^k \leq 2^{t-1} - t + 2.$$

Do
$$C_t^k \leq 2^{t-1} - t + 2 < 2^{t-1} - k + 1 \text{ với mọi } k < t-1,$$
nên ta chỉ cần xét trường hợp $k \geq t-1$. Có hai khả năng sau:
Với $k = t-1$. Ta chứng minh được $2t < 2^{t-1} + 2 \ \forall t \geq 4$.
Thật vậy, khi $t = 4$, bất đẳng thức hiển nhiên. Giả sử bất đẳng thức đã đúng với $t > 4$, ta chứng minh nó đúng với $t+1$. Vì
$$2^t - 2^{t-1} = 2^{t-1} > 2,$$
nên suy ra
$$2^t + 2 > 2^{t-1} + 2 + 2 > 2t + 2.$$
Với $k = t$. Chứng minh tương tự trên, ta được $t < 2^{t-1} \ \forall t \geq 3$, tức là

$$C_t^k < 2^{t-1} - k + 1, \ k = t \geq 3.$$

Vậy $C_t^k < 2^{t-1} - k + 1$, và do đó ta có điều cần chứng minh. □

Bài 23. (Định lý sperner) Chứng minh rằng: Nếu $\mathcal{F}$ là họ các tập con của $[n]$ sao cho không tồn tại 2 tập $A, B \in \mathcal{F}$ thỏa mãn $A \subset B$, thì

$$|\mathcal{F}| \leq C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Lời giải. Lấy $\sigma \in S_n$ là một hoán vị ngẫu nhiên của $[n]$ và xét biến ngẫu nhiên

$$X = |\{i : \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i)\} \in \mathcal{F}\}|.$$

Dễ thấy X bị chặn bởi 1, suy ra $\mathbb{E}[X] \leq 1$. Các tập $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(k)\} \in \mathcal{F}$ rời nhau với k phân biệt. Đặt N_k là số k-tập con trong $\mathcal{F}$.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}[\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(k)\} \in \mathcal{F}] = \sum_{k=1}^{n} \frac{N_k}{C_n^k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{N_k}{C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}}.$$

Do $\mathbb{E}[X] \leq 1$, nên suy ra

$$\sum_{k=1}^{n} N_k \leq C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 24. Cho đồ thị $G = (V, E)$ có n đỉnh và $\frac{nd}{2}$ cạnh, $d \geq 1$. Chứng minh rằng có một tập con U gồm các đỉnh đôi một không kề nhau có lực lượng $\geq \frac{n}{2d}$.

Lời giải. Đặt $S \subseteq V$ là một tập con ngẫu nhiên được định nghĩa bởi

$$\mathbb{P}[v \in S] = p,$$

với $p \in [0, 1]$, các biến cố $v \in S$ là độc lập lẫn nhau. Đặt $X = |S|$ và Y là số cạnh của G trong S. Với mỗi $e = (i, j) \in E$, đặt Y_e là biến chỉ của biến cố $i, j \in S$ sao cho $Y = \sum_{e \in E} Y_e$. Với bất kì e như thế

$$\mathbb{E}[Y_e] = \mathbb{P}[i, j \in S] = p^2,$$

theo tính tuyến tính của kỳ vọng, ta có

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{e \in E} \mathbb{E}[Y_e] = \frac{nd}{2} \cdot p^2.$$

Rõ ràng, $\mathbb{E}[X] = np$, do đó theo tính tuyến tính của kỳ vọng

$$\mathbb{E}[X - Y] = np - \frac{nd}{2} p^2.$$

Ta sử dụng $p = \frac{1}{d},\ d \geq 1$, thu được

$$\mathbb{E}[X - Y] = \frac{n}{2d}.$$

Vậy tồn tại tập S sao cho số đỉnh trong S trừ số cạnh trong S luôn lớn hơn bằng $\frac{n}{2d}$. Với mỗi cạnh trong S, chọn một đỉnh bất kì và xóa nó, ta thu được một tập, gọi tập này là U, với ít nhất $\frac{n}{2d}$ đỉnh. (Tất cả các cạnh trong U đều bị phá hủy.) □

Bài 25. Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E)$. Một tập $U \subseteq V$ được gọi là tập bao quát trong G nếu mỗi đỉnh $v \in V \setminus U$ có ít nhất một đỉnh kề của nó nằm trong U. Chứng minh rằng: Nếu G có n đỉnh, với bậc nhỏ nhất $\delta > 1$, thì G có một tập bao quát với nhiều nhất $n \cdot \frac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1}$ đỉnh.

Lời giải. Lấy ngẫu nhiên một tập con X của V gồm các đỉnh được chọn độc lập với xác suất p ($p \in [0, 1]$ sẽ được xác định sau). Đặt Y là tập (ngẫu nhiên) của tất cả các đỉnh $v \in V \setminus X$ và không có đỉnh kề nào của v nằm trong X. Rõ ràng, ta có:

$$\mathbb{E}[|X|] = np.$$

Với mỗi đỉnh $v \in V$, do v có bậc ít nhất là δ nên

$$\mathbb{P}[v \in Y] = \mathbb{P}[v \text{ và các đỉnh kề của nó không nằm trong } X] \leq (1-p)^{\delta+1}.$$

Hơn nữa, nếu gọi Y_v, $v \in V$, là biến chỉ của biến cố $v \in Y$, thì ta có

$$\mathbb{E}[|Y|] = \sum_{v \in V} \mathbb{E}[Y_v] = \sum_{v \in V} \mathbb{P}[v \in Y] \leq n \cdot (1-p)^{\delta+1}.$$

Do đó

$$\mathbb{E}[|X \cup Y|] \leq np + n(1-p)^{\delta+1},$$

tức là tồn tại ít nhất một cách chọn $X \subseteq V$ sao cho

$$|X| + |Y| \leq np + n(1-p)^{\delta+1}.$$

Đặt $U = X \cup Y$, thì rõ ràng U là một tập bao quát trong G, và sử dụng $e^{-p} \geq 1 - p$, ta được

$$|U| \leq np + n(1-p)^{\delta+1} \leq np + ne^{-p(\delta+1)}.$$

Do hàm $f(p) = np + ne^{-p(\delta+1)}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $p = \frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}$, nên $|U| \leq f\left(\dfrac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}\right) = n \cdot \dfrac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1}$. □

Bài 26. (Singapore, 2012) Cho $a_j, b_j, c_j, 1 \leq j \leq N$ là các số nguyên. Giả sử rằng với mỗi j, trong ba số a_j, b_j, c_j có một số lẻ. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên r, s, t sao cho $ra_j + sb_j + tc_j$ là lẻ với ít nhất $\frac{4N}{7}$ giá trị của $j, 1 \leq j \leq N$.

Lời giải. Ta xét tất cả theo mod2, vì trong bài này chỉ quan tâm đến tính chẵn lẻ. Ta có 7 cách chọn bộ (r, s, t) không đồng thời bằng 0; với mỗi bộ (a, b, c), có đúng 4 trong 7 bộ sao cho: $ra + sb + tc \equiv 1$

Suy ra với (a_i, b_i, c_i) đã cho nếu chọn ngẫu nhiên $(r, s, t) \neq (0, 0, 0)$ thì giá trị kỳ vọng của số các biểu lẻ là $\frac{4N}{7}$. Nhưng nếu đây là số trung bình thì phải có ít nhất một bộ (r, s, t) có số này lớn hơn hay bằng $\frac{4N}{7}$.

Bài toán được chứng minh xong. □

Bài 27. (APMO 1998) Cho F là tập hợp các bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ trong đó mỗi $A_i, i = 1, 2, \ldots, n$ là tập con của $\{1, 2, \ldots, 1998\}$. Giả sử $|A|$ ký hiệu số phần tử của tập A, hãy tìm

$$\sum_{(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in F} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$

Lời giải. Chú ý rằng tập hợp $\{1, 2, \ldots, 1998\}$ có 2^{1998} tập con. Vì thế có tất cả 2^{1998n} số hạng trong tổng trên.

Bây giờ ta tính giá trị trung bình của mỗi số hạng. Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, 1998$, ta có i là phần tử của $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ nếu và chỉ nếu nó là phần tử của ít nhất một trong các $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Xác suất của biến cố này là $1 - 2^{-n}$. Do đó giá trị trung bình của mỗi số hạng trong tổng là $1998(1 - 2^{-n})$, và như thế đáp sô $2^{1998n}1998(1 - 2^{-n})$. □

4. Một số bài toán Đại số, Số học

Bài 28. (Bulgaria MO 1984) *Cho $x_i, y_i (i = 1, 2, \dots, n)$ là $2n$ số thực dương sao cho $x_i + y_i = 1$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m, ta đều có: $(1 - x_1x_2 \dots x_n)^m + (1 - y_1^m)(1 - y_2^m) \dots (1 - y_n^m) \geq 1$.*

Lời giải. Xét thí nghiệm xác suất: Cho $c_1, c_2, \dots, c_n$ là các đồng xu sao cho với mỗi i, xác suất để c_i ra mặt sấp là x_i. Ta tung các xu này một cách độc lập m lần . Khi đó $(1 - x_1x_2 \dots x_n)^m$ là xác suất $P(A)$ của biến cố *"với mỗi một trong m lần tung, có ít nhất một đồng xu ra mặt ngửa"*.

Chú ý rằng $A = B \cup C$, trong đó B là biến cố "tồn tại một đồng xu ra mặt ngửa ở mỗi một trong m lần tung" và C là biến cố "có ít nhất một đồng xu ra mặt ngửa ở mỗi lần tung, nhưng đồng xu này không giống nhau qua mỗi lần tung". Hơn nữa, $B \cap C = \emptyset$, do đó: $P(A) = P(B) + P(C)$.

Mặt khác, $(1 - y_1^m)(1 - y_2^m) \dots (1 - y_n^m)$ là xác suất của biến cố mỗi một đồng xu không ra mặt ngửa trong m lần tung bằng $P(\overline{B})$, trong đó $\overline{B}$ là biến cố đốicủa biến cố B.

Như vậy vế trái của bất đẳng thức đã cho là:

$$P(A) + P(\overline{B}) = P(B) + P(\overline{B}) + P(C) = 1 + P(C) \geq 1.$$

Chú ý đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $n = 1$. □

Bài 29. (MOP Test 2008) Giả sử a, b, c là các số thực dương sao cho với mọi n nguyên dương thì: $[an] + [bn] = [cn]$. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba số a, b, c nguyên.

Lời giải. Giả sử không có số nào trong ba số a, b, c là số nguyên. Chia hai vế cho n và cho n dần đến vô cùng ta được $a + b = c$.
Từ đó suy ra $\{an\} + \{bn\} = \{cn\}$ $(*)$
Nếu x vô tỷ thì $\{xn\}$ phân bố đều trên đoạn [0; 1] . Nói riêng nếu ta chọn n một cách ngẫu nhiên trong $\{1, 2, \dots, N\}$ thì $E(\{xn\}) \to \frac{1}{2}$ khi $N \to \infty$. Mặt khác, nếu x là số hữu tỷ có dạng tối giản $\frac{p}{q}$ thì $\{xn\}$ có kỳ vọng tiến đến

$$\frac{q-1}{2q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2q}.$$

Như vậy nó nằm trong khoảng $[\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$. Tóm lại, với mọi số không nguyên x, ta có $E(\{xn\}) \to t$ trong đó $t \in [\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$. Lấy kỳ vọng hai vế của $(*)$ và n dần đến vô cùng, ta thấy rằng cách duy nhất để có đẳng thức là $E(\{an\})$ và $E(\{bn\})$ phải tiến đến $\frac{1}{4}$.

Nhưng cách duy nhất để có kỳ vọng $\frac{1}{4}$ là khi a, b hữu tỷ, còn cách duy nhất để có kỳ vọng $\frac{1}{2}$ là c vô tỷ. Nhưng do $a + b = c$ nên ta không thể hai số hữu tỷ cộng ra số vô tỷ, mâu thuẫn. □

5. Một số bài tập tự luyện

Bài 30. Cho $S_1, S_2, \dots, S_m \subseteq S$, $|S_i| = l$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$. Chứng minh rằng nếu $m < 2^{l-1}$, thì luôn tồn tại 2-tô màu tập S sao cho không có S_i nào được tô cùng màu.

Gợi ý. Tương tự cách giải của bài toán đầu tiên. Mỗi phần tử của S được tô bằng một trong hai màu đỏ hoặc xanh, do đó xác suất để phần tử này được tô đỏ hoặc xanh đều bằng $\frac{1}{2}$.

Với mọi i, ta có

$$\mathbb{P}[S_i \text{ có cùng màu}] = \mathbb{P}[S_i \text{ có màu xanh}] + \mathbb{P}[S_i \text{ có màu đỏ}]$$

và

$$\mathbb{P}[S_i \text{ bất kì có cùng màu}] \leq \sum_i \mathbb{P}[S_i \text{ có cùng màu}] = \frac{m}{2^{l-1}} < 1.$$

Suy ra $\mathbb{P}[$Không có S_i nào được tô cùng màu$] = 1 - \mathbb{P}[S_i$ bất kì đều có cùng màu$] > 0$, do đó ta có điều cần chứng minh. □

Bài 31. Cho G là một đồ thị đơn. Nếu G có $2n$ đỉnh và e cạnh thì nó chứa một đồ thị con hai mảng với ít nhất $\frac{en}{2n-1}$ cạnh. Nếu G có $2n+1$ đỉnh và e cạnh thì nó chứa một đồ thị con hai mảng với ít nhất $\frac{e(n+1)}{2n+1}$ cạnh.

Gợi ý. Trong bài toán này ta cần chọn T là một n-tập con của V. □

Bài 32. Giả sử $n \geq 4$ và H là một n-siêu đồ thị đều với ít nhất $\frac{4^{n-1}}{3^n}$ cạnh. Chứng minh có một cách tô màu cho các đỉnh của H bằng 4 màu sao cho mỗi cạnh đều có 4 màu.

Gợi ý. Gọi E là tập cạnh của H, tô màu mỗi đỉnh của H bằng một trong bốn màu một cách độc lập, ngẫu nhiên (mỗi màu có xác suất được chọn bằng $\frac{1}{4}$). Với mỗi $e \in E$, đặt A_e là biến cố chỉ các đỉnh trong cạnh e được tô bằng nhiều nhất 3 màu. Suy ra

$$\mathbb{P}[A_e] \leq \frac{4 \cdot 3^n}{4^n}.$$

Áp dụng

$$\mathbb{P}\left[\bigcup\nolimits_{e\in E} A_e\right] \leq \sum\nolimits_{e\in E} \mathbb{P}[A_e]$$

và giả thiết bài toán, suy ra điều cần chứng minh. □

Bài 33. (Austrian-Polish Competition 1997/8) Cho $|X| = n$. Tìm số lớn nhất các tập con khác nhau của X sao cho mỗi tập con này có 3 phần tử và không có 2 tập con nào rời nhau.

Gợi ý. Ta xét hai trường hợp: $n \leq 5$ và $n \geq 6$ suy ra yêu cầu bài toán. (Trong trường hợp $n \geq 6$, thì đây là một trường hợp riêng của Định lý Erdős - Ko - Rado) □

Bài 34. Một giải đấu T với n đối thủ chính là một sự định hướng cho các cạnh của K_n. Ta nói rằng T thỏa mãn tính chất S_k nếu với bất kì k-tập của n đối thủ, thì luôn có một đối thủ thắng tất cả các đối thủ còn lại. Chứng minh rằng: nếu $C_n^k \cdot (1-2^{-k})^{n-k} < 1$, thì có một giải đấu trên K_n với tính chất S_k.

Gợi ý. Xét 1 giải đấu ngẫu nhiên trên tập n đối thủ $V = \{1, 2, \dots n\}$ Với mỗi k-tập con K của V, đặt A_K là biến cố không có đối thủ nào thắng tất cả các đối thủ trong K. Do xác suất để một đối thủ $v \in V \setminus K$ không thắng tất cảc các đối thủ trong K là $1 - 2^{-k}$, suy ra

$$\mathbb{P}[A_K] = \left(1 - 2^{-k}\right)^{n-k}.$$

Tiếp tục, ta chỉ ra

$$\mathbb{P}\Big[\bigcup_{\substack{K\subset V\\|K|=k}} A_K\Big] < 1,$$

và suy ra điều cần chứng minh. □

Bài 35. Đặt $p = p_1 p_2 \cdots p_n$ là một n-hoán vị. Chỉ số i được gọi là *chỉ số vượt* của p nếu $p_i > i$. Trung bình một n-hoán vị có bao nhiêu chỉ số vượt?

Gợi ý. Đặt X_i là biến chỉ của biến cố i là một chỉ số vượt của p. Suy ra

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{n-i}{n}.$$

Tiếp theo, ta đặt $X(p)$ là số chỉ số vượt của p, rồi tính $\mathbb{E}[X]$ và suy ra điều cần chứng minh. □

Bài 36. Cho G là một đồ thị có $n \geq 10$ đỉnh và giả sử rằng: nếu ta thêm vào G bất kì một cạnh nào đó không nằm trong G thì số đồ thị K_{10} của G tăng lên. Chứng minh rằng số cạnh trong G ít nhất là $8n - 36$.

Gợi ý. Gọi E là tập cạnh trong $\overline{G}$. Với mỗi $e \in E$, ta xây dựng A_e, B_e như sau:

Đặt B_e là các đầu mút của cạnh e, còn A_e ta chọn một đồ thị K_{10} tạo thành khi cạnh e được thêm vào trong G, và đặt A_e là tập đỉnh của G không có trong K_{10} này.

Ta chỉ ra A_e và B_e thỏa yêu cầu, tức $A_e \cap B_e = \emptyset$ và $A_f \cap B_e \neq \emptyset$, suy ra

$$|E| \leq C_{n-8}^2.$$

Từ đó suy ra số cạnh trong G là

$$C_n^2 - |E| \geq C_n^2 - C_{n-8}^2 = 8n - 36.$$

□

Bài 37. (IMO, 1970) Trên mặt phẳng cho 100 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Xét tất cả các tam giác có đỉnh tại các điểm đã cho. Chứng minh rằng không quá 70% các tam giác này là tam giác nhọn.

Gợi ý. Trước hết ta chứng minh rằng trong 4 điểm, xác suất để một tam giác là nhọn không quá 75%. Sử dụng kết quả này hãy chứng minh rằng trong 5 điểm thì xác suất một tam giác là nhọn không quá 70%. Cuối cùng sử dụng kết quả này để giải toán. □

Bài 38. (IMO, 1971) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương m, tồn tại tập hữu hạn S các điểm trên mặt phẳng với tính chất sau: Với mỗi điểm A trong S, có đúng m điểm của S có khoảng cách 1 đến A.

Gợi ý. Chọn m vector ngẫu nhiên trên đường tròn đơn vị. Gọi S là tập hợp các tổng của mỗi một trong 2^m tập con các vector. □

Bài 39. (China MO, 1986) Cho $z_1, z_2, \ldots, z_n$ là các số phức. Chứng minh rằng tồn tại tập con $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho

$$\Big|\sum_{j\in S} z_j\Big| \geq \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n} |z_j|$$

Gợi ý. Cho r là một ia ngẫu nhiên xuất phát từ gốc tọa độ. Gọi S là tập các chỉ số j sao cho z_j tạo một góc nhọn với r. Xét hình chiếu của mỗi z_j lên r. Kỳ vọng cuả trị tuyết đối của mỗi hình chiếu là bao nhiêu? □

Bài 40. (IMO Shorlist, 1987) Chứng minh rằng ta có thể tô màu các phần tử của tập hợp $\{1, 2, \ldots, 1987\}$ bởi 4 màu sao cho mọi cấp số cộng 10 phần tử của tập hợp này đều không đơn sắc.

Gợi ý. Xét một phép tô ngẫu nhiên các số từ 1 đến 1987 bằng 4 màu. Xác suất để một cấp số cộng độ dài 10 đơn sắc bằng bao nhiêu? Có bao nhiêu cấp số cộng độ dài 10 trong $1, 2, \ldots, 1987$? □

Bài 41. (Zarankiewicz) Chứng minh rằng tồn tại một cách chia tập hợp các số nguyên dương thành hai tập con sao cho mỗi tập con đều không chứa cấp số cộng với vô số phần tử và không chứa ba số nguyên liên tiếp.

Gợi ý. Tô màu mỗi số nguyên lẻ bằng hai màu đỏ và xanh một cách ngẫu nhiên. Tô màu mỗi số chẵn bằng màu đối của màu số lẻ trước nó. □

Bài 42. (IMO 1987) Gọi $p_n(k)$ là số các hoán vị của tập hợp $\{1, 2, ..., n\}$ $n \geq 1$, có đúng k điểm bất động. Chứng minh $\sum\limits_{k=0}^{n} kp_n(k) = n!$

Gợi ý. Gọi f là một hoán vị ngẫu nhiên của $1, 2, \ldots, n$. Xác suất để 1 là điểm bất động bằng bao nhiêu? Câu hỏi tương tự với 2? Và cứ như thế cho đến n. Cộng các xác suất này lại để tìm kỳ vọng của số các điểm bất động của f. □

Bài 43. (IMO 1998) Trong một cuộc thi, có a thi sinh và b giám khảo, trong đó $b \geq 3$ là một số nguyên lẻ. Một giám khảo sẽ đánh giá thí sinh *"đậu"* hoặc *"rớt"*. Giả sử k là số sao cho với mỗi cặp hai giám khảo, đánh giá của họ trùng ở nhiều nhất k thí sinh. Chứng minh rằng:

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

Gợi ý. Gọi C là một thí sinh ngẫu nhiên. Gọi p là số các giám khảo cho C đậu và f là số các giám khảo cho C rớt. Ta có $C_p^2 + C_f^2 \geq \frac{(b-1)^2}{4}$.

Lấy kỳ vọng của cả hai vế. Bạn có thể giải thích $E(C_p^2)$ thế nào theo ngôn ngữ bài toán ban đầu? $E(C_f^2)$? □

Bài 44. (Bay Area MO 2004) Cho n số thực không đồng thời bằng 0 có tổng bằng 0. Chứng minh rằng tồn tại một cách đánh số các số này là $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sao cho:

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 < 0.$$

Gợi ý. Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là hoán vị ngẫu nhiên của các số ban đầu. Giá trị kỳ vọng của biểu thức vế trái bằng bao nhiêu? □

Bài 45. Cho p, q là các số không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: $(1-p^m)^n + (1-p^n)^m \geq 1$.

Gợi ý. Xét một ma trận ngẫu nhiên kích thước $m \times n$ trong đó mỗi một ô được điền số 1 với xác suất p và số 0 với xác suất là q. Xác suất để mỗi một dòng có ít nhất một số 0 bằng bao nhiêu? □

Tài liệu tham khảo

[0] Phan Huy Khải (2007), Các bài toán hình học tổ hợp, NXB Giáo dục.

[0] Trần Nam Dũng, Võ Quốc Bá Cẩn, Lê Phúc Lữ, Các phương pháp giải toán qua các kỳ thi Olympic, tháng 8 năm 2012.

[0] N. Alon, J. Spencer (2000), The Probabilistic Method, A Wiley-Interscience Pubblication. John Wiley and Sons, Inc.

[0] M. Bóna (2002), A Walk Through Combinatoric, An Introduction to Enumeration and Graph Theory, World Scientific Publishing Co. , Inc.

[0] M. Bóna, G. Tóth (1996), "A Ramsey-type problem on right - angles in space", Discrete Math 1-3, 61-67.

[0] M. Bóna (1993), "A Euclidean Ramsey theorem", Discrete math, 349-352.

[0] A. Engel (1998), Problem - Solving Strategies, Springer.

[0] P. Erd os, R. L. Graham, P. Montgomery, B. L. Rothschild, J. Spencer and E. G. Straus (1973), "Euclidean Ramsey theorems I", Journal of combinatorial Theory, Series A, 341-363.

[0] `http://www.princeton.edu/$\sim$ploh/docs/math/mop2008/prob-comb-soln.pdf`, 10/12/2008.

[0] `http://www.math.ust.hk/$\sim$mabfchen/Math391I/pigeonhole.pdf`, 6/11/2008.

[0] Jole Spencer, sample chapters of the probabilistic method, Internet.

[0] Po-Shen Loh, probabilistic method in combinatorics, Internet.

ĐỊNH LÝ FERMAT-EULER VỀ TỔNG HAI BÌNH PHƯƠNG

V. Tikhomirov

(*Trần Nam Dũng dịch từ tạp chí Kvant – bản dịch năm 1995*)

Các bạn hãy để ý xem những số nguyên tố đầu tiên: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 . . . . Các số 5, 13 và 17 có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của hai bình phương:

$$5 = 12 + 22, 13 = 22 + 32, 17 = 12 + 42, \ldots$$

còn các số còn lại $(3, 7, 11, 19)$ thì không thể biểu diễn được. Có thể bằng cách nào đó giải thích điều đó hay không? Có, và đúng hơn là ta có định lý sau:

Định lý 0.1. *Điều kiện cần và đủ để một số nguyên tố có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của hai bình phương là số dư trong phép chia số ấy cho* 4 *bằng* 1.

(Thật thế, $5 = 4.1 + 1, 13 = 4.3 + 1, 17 = 4.4 + 1$, còn $3 = 4.0 + 3, 7 = 4.1 + 3, 11 = 4.2 + 3, 19 = 4.4 + 3 \ldots$)

1. Đôi chút về lịch sử định lý

Ai là người đầu tiên phát hiện ra điều này, và khi nào? Vào dịp Noel năm 1640 (trong thư đề ngày 25.12.1640) nhà toán học vĩ đại Pier Fermat (1601-1665) đã thông báo cho Mersenne, bạn thân của Descartes và là "liên lạc viên" chính của các nhà bác học đương thời rằng "Mọi số nguyên tố có số dư trong phép chia cho 4 bằng 1 đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tổng của hai bình phương".
Thời đó chưa có các tạp chí toán học, tin tức được trao đổi qua các lá thư và các kết quả thông thường chỉ được thông báo mà không kèm theo chứng minh.
Thực ra thì sau gần 20 năm sau bức thư đó, trong bức thư gửi cho Carcavi, được gửi vào tháng 8 năm 1659, Fermat đã tiết lộ ý tưởng của phép chứng minh định lý trên. Ông viết rằng ý tưởng chính của phép chứng minh là dùng *phương pháp xuống thang*, cho phép từ giả thiết rằng định lý không đúng với $p = 4k + 1$, suy ra nó không đúng với một số nhỏ hơn . . . cuối cùng ta sẽ đi đến số 5, mà khi đó rõ ràng là mâu thuẫn.
Những cách chứng minh đầu tiên được Euler (1707-1783) tìm ra trong khoảng 1742-1747. Hơn nữa, để tỏ rõ vị trí của Fermat, người mà ông hết sức kính trọng, Euler đã tìm ra phép chứng minh dựa theo đúng ý tưởng trên đây của Fermat. Vì vậy, ta gọi định lý này là định lý Fermat-Euler.
Những kết quả toán học thường có một tính chất chung: ta có thể đến được bằng nhiều con đường khác nhau, có thể tấn công chúng từ nhiều hướng, và mỗi một con đường như vậy sẽ đem đến cho những người không biết sợ khó khăn những khoái cảm tuyệt vời.
Tôi muốn chứng tỏ điều này trên ví dụ định lý Fermat-Euler.
Ta sẽ đi đến đỉnh cao, được phát minh vào thế kỷ XVII bằng ba con đường khác nhau. Một trong chúng được tìm ra vào thế kỷ XVIII, con đường khác – thế kỷ XIX và con đường thứ ba - ở thế kỷ XX.

2. Các cách chứng minh định lý

2.1. Cách chứng minh của Lagrange

Cách chứng minh này (có thay đổi đôi chút) hiện nay được trình bày trong hầu hết các cuốn sách về lý thuyết số. Nó dựa trên bổ đề Wilson (1741-1793):
Nếu p là số nguyên tố thì số $(p-1)!+1$ chia hết cho p.
Để không quá đi sâu vào chứng minh kết quả phụ này, ta chỉ tường minh ý tưởng chính của phép chứng minh trên ví dụ số 13. Với mỗi số nằm giữa 2 và 11 (kể cả những số này), ta tìm một số mà tích của chúng khi chia 13 cho dư 1: $(13-1)! = 12! = (2.7).(3.9).(4.10).(5.8).(6.11).12(2.7 = 14 = 13+1, 3.9 = 27 = 13.2+1, 4.10 = 40 = 13.3+1, 6.11 = 66 = 13.5+1)$.
Từ những đẳng thức đã viết suy ra rằng số 12! Khi chia 13 sẽ dư 12, nghĩa là $12!+1$ chia hết cho 13. Trường hợp tổng quát cũng có thể được chứng minh tương tự như vậy.
Từ bổ đề Wilson, ta rút ra hệ quả sau:
Nếu $p = 4n+1$ là số nguyên tố thì $((2n)!)^2+1$ chia hết cho p.
Thật vậy, bởi vì (bổ đề Wilson) $(4n)!+1$ chia hết cho p, bằng những phép biến đổi cơ bản, ta thu được

$$(4n)!+1 = 1.2\dots 2n.(2n+1)\dots(4n)+1 = 1.2\dots 2n.(p-2n)(p-2n+1)\dots(p-1)+1$$
$$= (2n)!(-1)^{2n}(2n)! + pk + 1 \equiv ((2n)!)^2+1 \pmod p$$

từ đó suy ra đpcm.
Đặt $N = (2n)!$. Như vậy ta đã chứng minh rằng $N^2 \equiv -1 \pmod p$.
Bây giờ ta sẽ phải vượt qua khó khăn chính. Xét tất cả các cặp số nguyên $(m; s)$ sao cho $0 \le m, s \le \left[\sqrt{p}\right]$ ($\left[\sqrt{p}\right]$- phần nguyên của $\sqrt{p}$).
Số các cặp số như vậy bằng $\left(\sqrt{p}+1\right)^2 > p$. Như vậy với ít nhất hai cặp số $(m_1; s_1)$ và $(m_2; s_2)$, số dư trong phép chia m_1+Ns_1 và m_2+Ns_2 cho p sẽ giống nhau, nghĩa là số $a+Nb$, trong đó $a = m_1 – m_2, b = s_1 – s_2$ sẽ chia hết cho p. Nhưng khi đó, $a^2 – N^2b^2 = (a+Nb)(a-Nb)$ chia hết cho p, và, nghĩa là, chú ý rằng $N \equiv -1 \pmod p$ ta thu được a^2+b^2 chia hết cho p, nghĩa là $a^2+b^2 = rp$, r nguyên dương. Mặt khác, $a^2+b^2 < 2p$, nghĩa là $r = 1$ và $a^2+b^2 = p$. Định lý được chứng minh.

2.2. Chứng minh của D.Tsagir

Phép chứng minh của nhà toán học đương đại D.Tsagir làm tôi hoàn toàn bất ngờ: đây là một điều kỳ diệu khi mà kết quả thu được tưởng chừng như không từ cái gì. Sau đây là cách chứng minh đó.
Ta hãy xét phép biến đổi mà mỗi bộ ba số nguyên dương $(x; y; z)$ được đặt tương ứng với ba số $(x'; y'; z')$ theo quy tắc:

$$x' = x+2z, y' = z, z' = y – x – z, \text{ nếu } x < y – z \tag{1}$$

$$x' = 2y – x, y' = y, z' = x – y + z, \text{ nếu } y – z \le x \le 2y \tag{2}$$

$$x' = x – 2y, y` = x – y + z, z' = y \text{ trong các trường hợp còn lại} \tag{3}$$

Ta ký hiệu phép biến đổi này là B: $B(x, y, z) = (x', y', z')$.

Rất dễ dàng chứng minh rằng phép biến đổi B giữ nguyên dạng $x^2 + 4yz$. Ta chứng minh điều này, chẳng hạn cho trường hợp (1). Ta có

$$x'^2 + 4y'z' = (x + 2z)^2 + 4z(y - x - z) = x^2 + 4xz + 4z^2 + 4zy – 4zx – 4z^2 = x^2 + 4yz.$$

Trong các trường hợp còn lại, việc kiểm tra cũng đơn giản như vậy. Có nghĩa là nếu như đối với một số p nào đó ta có đẳng thức $x^2 + 4yz = p$, thì đẳng thức này cũng giữ nguyên sau phép biến đổi B.
Ta kiểm chứng rằng phép biến đổi B là xoắn, có nghĩa là nếu áp dụng B hai lần, chúng ta sẽ quay trở lại ví trí ban đầu. Ta lại làm điều này cho (1).
Với $x < y – z$, khi đó $x' = 2z + x$, $y' = z$, $z' = y – z – x$, từ đó $x' + x + 2z > 2z = 2y'$ và nghĩa là phải tính $B(x', y', z')$ theo công thức (3): $x" = x' – 2y' = x + 2z – 2z = x; y" = x' – y' + z' = x + 2z – z + y – x – z = y; z" = y' = z$. Các trường hợp khác cũng tương tự.
Bây giờ ta giả sử rằng p là số nguyên tố dạng $4n+1$. Khi đó, thứ nhất, phương trình $x^2+4yz = p$ có ít nhất hai nghiệm:

$$x = 1, y = n, z = 1 \text{ và } x = y = 1, z = n.$$

Và, thứ hai, phương trình này có hữu hạn nghiệm (nguyên dương!). Nếu như giả sử rằng trong các nghiệm của phương trình này không có nghiệm mà $y = z$ (nếu như có nghiệm như vậy thì định lý được chứng minh: $p = x^2 + (2y)^2$), ta thu được rằng phép biến đổi B chia tất cả các nghiệm thành các cặp $((x, y, z), B(x, y, z))$, nếu như, tất nhiên $(x, y, z) \neq B(x, y, z)$. Ta thử tìm xem, có những cặp như vậy không, hay, như người ta thường nói, tồn tại chăng những điểm bất động của phép biến đổi B.
Nếu nhìn vào các công thức (1) – (3) ta sẽ dễ dàng nhận thấy rằng những điểm bất động của B là những điểm mà $x = y$. Nhưng khi $x = y > 1$ thì phương trình $x^2 + 4yz = p$ không có nghiệm (vì p không chia hết cho y). Nghĩa là chỉ có 1 điểm bất động duy nhất $(1, 1, n)$. Từ tất cả các lý luận trên ta suy ra rằng số nghiệm của phương trình $x^2 + 4yz = p$ là số lẻ: có một điểm bất động $(1, 1, n)$, còn tất cả các nghiệm khác được chia thành từng cặp.
Nhưng, ta lại có một phép biến đổi nữa, ta ký hiệu là J. J thay đổi chỗ y và z: $J(x, y, z) = (x, z, y)$. Phép biến đổi này, tất nhiên, cũng giữ nguyên dạng $x^2 + 4yz$ và cũng xoắn. Ta thử xem, những bộ ba số nào (trong những nghiệm của phương trình $x^2 + 4yz = p$) được J giữ nguyên, tức là những bộ (x, y, z) sao cho $J(x, y, z) = (x, y, z)$.
Ta đã giả sử từ trước là $y \neq z$. Nhưng khi đó thì không thể có điểm bất động! Nghĩa là tất cả các nghiệm được chia thành từng cặp. Như vậy số các nghiệm là chẵn. Nhưng ta vừa khẳng định rằng số nghiệm là lẻ. Mâu thuẫn. Nghĩa là, chắc chắn phải tồn tại nghiệm của phương trình $x^2 + 4yz = p$ mà $y = z$, như thế p là tổng của hai bình phương. Định lý được chứng minh.

2.3. Cách chứng minh thứ ba

Cách chứng minh của Minkowsky, được sửa đổi đôi chút, mà chúng ta sẽ nói đến đây, sẽ còn làm chúng ta ngạc nhiên gấp bội. Đáng tiếc là cách chứng minh này không sơ cấp lắm, cụ thể là, ta cần biết thế nào là ellipse và công thức tính diện tích của ellipse.
Tất cả bắt đầu từ một kết quả của Minkowsky mà tưởng chừng nhưng không có liên hệ gì với định lý Fermat-Euler

Định lý 2.1. *Cho a, b, và c là các số nguyên $a > 0$ và $ac – b^2 = 1$. Khi đó phương trình $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ có nghiệm nguyên.*

Lời giải. Ta xét hệ toạ độ Descartes vuông góc và cho trên đó tích vô hướng bằng công thức

$$((x, y), (x', y')) = axx' + bxy' + bx'y + cyy'$$

Tích vô hướng này cho ta "khỏang cách" từ gốc toạ độ đến điểm (x, y)

$$d((0,0), (x, y)) = \sqrt{(x, y)(x, y)} = \sqrt{ax^2 + 2bxy + cy^2}.$$

Ta tìm "khoảng cách" ngắn nhất từ gốc toạ độ đến một điểm khác $(0, 0)$ nào đó của lưới nguyên (m, n) (m và n là những số nguyên). Ta gọi khỏang cách này là d^* và đạt tại điểm (m^*, n^*), như thế

$$(am^*)^2 + 2bm^*n^* + (cn^*)^2 = d^{*2} \tag{4}$$

Tập hợp những điểm (x, y) của mặt phẳng thoả mãn bất đẳng thức

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \le d^{*2}$$

là một ellipse. Từ cách xây dựng của ta suy ra rằng nếu vị tự ellipse này theo tỷ số $\frac{1}{2}$ rồi đưa ellipse "co" này đến các tâm nằm trên các điểm nguyên (tịnh tiến) thì tất cả các ellipse thu được nếu có cắt nhau thì chỉ cắt theo những điểm biên.
Dễ dàng thấy rằng diện tích phần giao của các ellipse với tam giác có đỉnh ở $(0, 0)$, $(1, 0)$ và $(1, 1)$ bằng 1 nửa diện tích của toàn ellipse. Mà diện tích này thì bằng

$$\frac{\pi(d^*)^2}{4} \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \frac{\pi(d^*)^2}{4}(ac - b^2) = \frac{\pi(d^*)^2}{4}(ac - b^2)$$

(chỗ không sơ cấp duy nhất!). Như vậy, diện tích phần mà các ellipse chiếm trong tam giác bằng $\frac{\pi d^{*2}}{8}$ và đây chỉ là một phần của diện tích tam giác, bằng $\frac{1}{2}$, nghĩa là

$$\frac{\pi d^{*2}}{8} < \frac{1}{2} \Rightarrow d^{*2} < \frac{4}{\pi}$$

Nhưng d^{*2} là số nguyên dương. Nghĩa là $d^{*2} = 1$ và từ đó $d^* = 1$! Định lý Minkowsky được chứng minh. □

Nhưng kết quả tuyệt vời này thì có liên quan gì đến định lý Fermat-Euler? Liên quan trực tiếp đấy!
Ta biết từ bổ đề Wilson rằng số $b^2 + 1$, trong đó $b = \left(\frac{p-1}{2}\right)!$ chia hết cho p, đúng không?
Bây giờ áp dụng định lý Minkowsky cho các số $a = p$, $b = \left(\frac{p-1}{2}\right)!$ và $c = \frac{b^2+1}{a}$. Ta thu được rằng tồn tại những số nguyên m và n sao cho

$$1 = am^2 + 2bmn + cn^2$$

từ đó

$$a = a^2m^2 + 2abmn + (b^2 + 1)n^2 = (am + bn)^2 + n^2$$

Như thế (nhớ lại rằng $a = p$)

$$p = (am + bn)^2 + n^2$$

nghĩa là p là tổng của hai bình phương. Và một lần nữa định lý được chứng minh.

MỘT BẤT ĐẲNG THỨC THÚ VỊ

Nguyễn Văn Huyện

(Đại học GTVT, Tp. HCM)

Trong bài viết nhỏ này tác giả xin được giới thiệu với bạn đọc một bất đẳng thức rất thú vị, có thể phát biểu ở nhiều dạng khác nhau.

Bài toán 1. *Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq \frac{k}{|ab+bc+ca|}, \tag{1}$$

luôn đúng với mọi số thực $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $abc \neq 0$ và $a+b+c=0$.

(Nguyễn Văn Huyện)

Lời giải 1. Từ giả thiết, ta có $c=-(a+b)$, nên

$$ab+bc+ca = ab-(a+b)^2 = -(a^2+ab+b^2) < 0.$$

Do đó ta có thể viết bất đẳng thức (1) lại như sau

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(a+b)^2} \geq \frac{k}{a^2+ab+b^2}.$$

Từ đây cho $a=b$, ta được $k \leq \frac{27}{4}$. Ta sẽ đi chứng minh $k_{\max} = \frac{27}{4}$ tức chứng minh

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(a+b)^2} \geq \frac{27}{4(a^2+ab+b^2)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a^2+ab+b^2 \geq \frac{3}{4}(a+b)^2,$$

nên

$$\frac{27}{4(a^2+ab+b^2)} \leq \frac{9}{(a+b)^2}.$$

Như vậy để hoàn tất lời giải thì ta cần chỉ ra

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \geq \frac{8}{(a+b)^2}.$$

Là một bất đẳng thức đúng vì

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{8}{(a+b)^2} = \frac{(a-b)^2(a^2+4ab+b^2)}{a^2b^2(a+b)^2} \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $(a,\ b,\ c)$ là hoán vị của $(t,\ t,\ -2t)$ và $(-t,\ -t,\ 2t)$ với $t>0$. Lời giải của ta được hoàn tất. $\square$

Lời giải 2. Ở đây, ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{27}{4|ab+bc+ca|}.$$

Thật vậy, ta có biến đổi

$$-(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq\frac{27}{4}, \tag{1.1}$$

Vì $a+b+c=0$ nên $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$, do đó (1.1) tương đương

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq\frac{27}{2}. \tag{1.2}$$

Như vậy, thay vì chứng minh (1.1) ta sẽ chứng minh (1.2). Đặt

$$u=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a},\ v=\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b},$$

ta thấy

$$u+v=\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}=-3.$$

Ta cần chứng minh

$$u^2-2v+v^2-2u+3\geq\frac{27}{2},$$

hay

$$u^2+v^2-2(u+v)+3\geq\frac{27}{2},$$

$$u^2+v^2\geq\frac{9}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$u^2+v^2\geq\frac{(u+v)^2}{2}=\frac{9}{2}.$$

Chứng minh hoàn tất. □

Qua 2 lời giải trên ta thấy đây là một bài toán khá dễ và không có gì để bàn về những chứng minh của nó vì chúng ta chỉ cần sử dụng những kiến thức cơ bản. Tuy nhiên, chúng ta hãy cùng để ý đến nhưng phát triển tiếp theo sau đây.

Vì $a+b+c=0$ nên

$$2(ab+bc+ca)=-(a^2+b^2+c^2)<0,$$

nên (1.1) còn một dạng tương đương sau

$$-2(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq\frac{27}{2}.$$

Khai triển vế trái ra, ta được

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}\le -\frac{27}{4},$$

mà chúng ta đã biết

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}=-3,$$

nên ta được

$$\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}\le -\frac{15}{4},$$

và thu được bài toán mới sau đây.

Bài toán 2. *Với ba số thực $a,\ b,\ c$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $abc \neq 0$ và $a+b+c=0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}\le -\frac{15}{4}. \tag{2}$$

(Nguyễn Đình Thi)

Lời giải 1. Theo nguyên lí Dirichlet trong ba số $a,\ b,\ c$ sẽ có hai số cùng dấu, giả sử hai số đó là $a,\ b$ khi đó $ab \ge 0$. Đặt $t=\frac{ab}{(a+b)^2}$, ta sẽ được $0<t\le \dfrac{1}{4}$.

Bằng một số biến đổi nhỏ, ta thấy

$$\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}=\frac{c(a^3+b^3)}{a^2b^2}=-\frac{(a+b)^2(a^2-ab+b^2)}{a^2b^2}=-\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-3\right),$$

nên bất đẳng thức (2) được viết lại như sau

$$t-\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-3\right)\le -\frac{15}{4},$$

hay

$$t^2+\frac{15}{4}\cdot t-\frac{1}{t}+3\le 0.$$

Vì $0<t\le \dfrac{1}{4}$, nên ta có

$$t^2+\frac{15}{4}\cdot t-\frac{1}{t}+3\le \left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{4}-4=3=0.$$

Chứng minh hoàn tất. □

Lời giải 2. Ta cũng giả sử $ab\ge 0$, khi đó thay $c=-a-b$, vào vế trái của (2) và áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}&=\frac{ab}{(a+b)^2}-\frac{b(a+b)}{a^2}-\frac{a(a+b)}{b^2}\\&=\frac{ab}{(a+b)^2}-\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\\&\le\frac{1}{4}-(2+2)=-\frac{15}{4}.\end{aligned}$$

Chứng minh hoàn tất. □

Do $a+b+c=0$ nên ta có đẳng thức quen thuộc $a^3+b^3+c^3=3abc$. Sử dụng kết quả này, ta có biến đổi
$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=3,$$
dẫn đến
$$\begin{aligned}9-2\left(\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}\right)&=\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)^2-2\left(\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}\right)\\&=\frac{a^4}{b^2c^2}+\frac{b^4}{c^2a^2}+\frac{c^4}{a^2b^2}.\end{aligned}$$
Mặt khác
$$9-2\left(\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}\right)\geq\frac{33}{2},$$
nên
$$\frac{a^4}{b^2c^2}+\frac{b^4}{c^2a^2}+\frac{c^4}{a^2b^2}\geq\frac{33}{2}.$$
Vì $a+b+c=0$, nên ta có thể đặt $a=x-y,\ b=y-z,\ c=z-x$ (với $x,\ y,\ z$ là các số thực) và có được một bất đẳng thức khá đẹp mắt sau.

Bài toán 3. *Cho ba số thực $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$. Chứng minh rằng*
$$\frac{(x-y)^4}{(y-z)^2(z-x)^2}+\frac{(y-z)^4}{(z-x)^2(x-y)^2}+\frac{(z-x)^4}{(x-y)^2(y-z)^2}\geq\frac{33}{2}.\tag{3}$$
(Võ Quốc Bá Cẩn, Mongolia 2010)

Lời giải. Giả sử $x>y>z$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có
$$x-z=(x-y)+(y-z)\geq 2\sqrt{(x-y)(y-z)},$$
suy ra
$$\frac{(z-x)^4}{(x-y)^2(y-z)^2}\geq 16.$$
Nên để chứng minh (3), ta chỉ cần chứng minh
$$\frac{(x-y)^4}{(y-z)^2(z-x)^2}+\frac{(y-z)^4}{(z-x)^2(x-y)^2}\geq\frac{1}{2},$$
tương đương với
$$\frac{(x-y)^4}{(y-z)^2}+\frac{(y-z)^4}{(x-y)^2}\geq\frac{(z-x)^2}{2}.$$
Nhưng theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, thì
$$\begin{aligned}\frac{(x-y)^4}{(y-z)^2}+\frac{(y-z)^4}{(x-y)^2}&\geq\frac{[(x-y)^2+(y-z)^2]}{(y-z)^2+(x-y)^2}\\&=(x-y)^2+(y-z)^2\\&\geq\frac{(x-y+y-z)^2}{2}\\&=\frac{(z-x)^2}{2}.\end{aligned}$$
Đẳng thức xảy ra khi $a+b=2c$, $b+c=2a$, $c+a=2b$. Chứng minh hoàn tất. □

Nhận xét. Ta có đẳng thức

$$\sum \frac{(x-y)^4}{(y-z)^2(z-x)^2} - \frac{33}{2} = \frac{(x+y-2z)^2(y+z-2x)^2(z+x-2y)^2}{2(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2}.$$

Ta còn có một kết quả tương tự

$$\frac{(y-z)^2(z-x)^2}{(x-y)^4} + \frac{(z-x)^2(x-y)^2}{(y-z)^4} + \frac{(x-y)^2(y-z)^2}{(z-x)^4} \geq \frac{129}{16}. \tag{3}$$

Lại sử dụng đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, ta biến đổi (2) như sau

$$\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} \leq -\frac{15}{4},$$

$$abc\left(\frac{1}{c^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\right) \leq -\frac{15}{4},$$

tương đương với

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \cdot \left(\frac{1}{c^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\right) \leq -\frac{15}{4},$$

$$(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) \leq -\frac{45}{4}.$$

Đến đây đổi biến $a = x - y,\ b = y - z,\ c = z - x$ ta có bài toán sau.

Bài toán 4. *Với $x,\ y,\ z$ là ba số thực đôi một khác nhau. Chứng minh rằng*

$$\left[(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3\right]\left[\frac{1}{(x-y)^3} + \frac{1}{(y-z)^3} + \frac{1}{(z-x)^3}\right] \leq -\frac{45}{4}. \tag{4}$$

(Nguyễn Văn Huyện)

Lời Giải. Đặt $a = x - y,\ b = y - z,\ c = z - x$ thì $a + b + c = 0$. Sử dụng hằng đẳng thức quen thuộc

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx),$$

ta được $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, và

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 3a^2b^2c^2 + (ab+bc+ca)^3 = 3a^2b^2c^2 - \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{8}.$$

Ta đưa bài toán về chứng minh

$$9 - \frac{3(a^2+b^2+c^2)^3}{8a^2b^2c^2} \leq -\frac{45}{4},$$

hay

$$(a^2+b^2+c^2)^3 \geqslant 54a^2b^2c^2. \tag{4.1}$$

Thay $a = -(b+c)$ vào (4.1) ta được

$$4(b^2+bc+c^2)^3 \geq 27b^2c^2(b+c)^2.$$

Nhưng đây là một bất đẳng thức đúng vì

$$4(b^2+bc+c^2)^3 - 27b^2c^2(b+c)^2 = (b-c)^2(2b+c)^2(2c+b)^2 \geqslant 0.$$

Chứng minh hoàn tất. ☐

Quay trở (1.2) vì $a + b + c = 0$ nên ta đặt $a = x - y,\ b = y - z,\ c = z - x$ và viết (1.2) lại dưới dạng

$$\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right]\left[\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}\right] \geq \frac{27}{2},$$

hay

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx\right)\left[\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}\right] \geq \frac{27}{4},$$

và dẫn đến một bài toán sau.

Bài toán 5. *Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực đôi một khác nhau, chứng minh rằng*

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)\left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}\right] \geq \frac{27}{4}. \tag{5}$$

Lời giải. Giả sử $a > b > c$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \\ &\geq \frac{1}{2}\left[\frac{(a-b+b-c)^2}{2} + (c-a)^2\right] \\ &= \frac{3}{4}\cdot(c-a)^2, \end{aligned}$$

và theo bất đẳng thức AM-GM, thì

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} \geq \frac{2}{(a-b)(b-c)} \geq \frac{8}{(a-b+b-c)^2} = \frac{8}{(c-a)^2}.$$

Nhân hai bất đẳng thức này lại với nhau, ta được

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)\left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}\right] \geq \frac{27}{4}.$$

Chứng minh hoàn tất. □

Nhận xét.

(1) Bài toán (5) là một kết quả mạnh hơn của bất đẳng thức nổi tiếng

$$(a^2 + b^2 + c^2)\left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}\right] \geq \frac{9}{2}. \tag{5.1}$$

(Đào Hải Long)

Thật vậy vì

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a+b+c)^2}{3} \\ &\geqslant \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + c(c-a)^2}{3}, \end{aligned}$$

nên ta cần chứng minh

$$\left[\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{3}\right]\left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}\right] \geq \frac{9}{2},$$

hay
$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right]\geq\frac{27}{4}.$$
Đây chính là bất đẳng thức (5).

(2) Ta có thể tổng quát (5) như sau
$$\left[a^2+b^2+c^2+k(ab+bc+ca)\right]\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right]\geq\frac{9(2-k)}{4},$$
với mọi số thực k thuộc $(-1,2)$.

(Trần Nam Dũng, Hello IMO 2007)

Từ bất đẳng thức (4.1) ta cho $a^2+b^2+c^2=1$, ta sẽ được bài toán sau

Bài toán 6. *Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng*
$$a^2b^2c^2\leqslant\frac{1}{54}.$$
(Ailen MO 2009)

Lời giải. Đặt $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$, $r=abc$, khai triển bất đẳng thức hiển nhiên
$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\geqslant 0,$$
ta được
$$p^2q^2-4q^3+2p(9q-2p^2)r-27r^2\geqslant 0.$$
Do $p=a+b+c=0$, nên
$$-4q^3-27r^2\geqslant 0,$$
hay
$$4(ab+bc+ca)^3+27a^2b^2c^2\leqslant 0. \tag{6.1}$$
Mặt khác vì $a+b+c=0$ nên
$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=-2(ab+bc+ca).$$
Bất đẳng thức (6.1) lúc này trở thành
$$(a^2+b^2+c^2)^3\geqslant 54a^2b^2c^2.$$
Theo giả thiết $a^2+b^2+c^2=1$, nên ta được
$$a^2b^2c^2\leqslant\frac{1}{54}.$$
Bài toán được chứng minh. □

Bài toán 7. *Cho a, b, c là ba số thực bất kỳ. Chứng minh rằng*
$$(a-b)^3(b-c)^3+(b-c)^3(c-a)^3+(c-a)^3(a-b)^3+\frac{15}{4}(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\leq 0.$$
(Bao Qian Liu, Nguyễn Văn Huyện)

Lời giải. Đặt $x = a - b,\ y = b - c,\ z = c - a$ thì $x + y + z = 0$. Ta cần chứng minh

$$x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 + \frac{15}{4}x^2y^2z^2 \le 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 &= (xy + yz + zx)^3 - 3(xy + yz)(yz + zx)(zx + xy) \\ &= (xy + yz + zx)^3 + 3x^2y^2z^2. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức trở thành

$$(xy + yz + zx)^3 + 27x^2y^2z^2 \le 0.$$

Dễ thấy đây chính là bất đẳng thức (6.1), nên ta có điều phải chứng minh. Tuy nhiên tác giả lại mong muốn tìm được một lời giải độc lập cho mỗi bài toán, khi đó những dạng phát biểu khác nhau của (1) mới có nhiều ý nghĩa.

Từ giả thiết ta có $x^2 = (y + z)^2 \ge 4yz$. Suy ra

$$\begin{aligned} 4(xy + yz + zx)^3 + 27x^2y^2z^2 &= 4[xy + z(x + y)]^3 + 27x^2y^2z^2 \\ &= 4\left(xy - z^2\right)^3 + 27 \cdot (xy)^2 \cdot z^2 \\ &\le 4\left(\frac{z^2}{4} - z^2\right)^3 + 27 \cdot \left(\frac{z^2}{4}\right)^2 \cdot z^2. \end{aligned}$$

Dễ thấy

$$4\left(\frac{z^2}{4} - z^2\right)^3 + 27 \cdot \left(\frac{z^2}{4}\right)^2 \cdot z^2 = -\frac{27}{16} \cdot z^6 + \frac{27}{16} \cdot z^6 = 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a + b = 2c,\ b + c = 2a,\ c + a = 2b$. Chứng minh hoàn tất. □

Nhận xét. Từ chứng minh trên ta thấy

$$-4\sum(a-b)^3(b-c)^3 = 15\prod(a-b)^2 + \prod(a+b-2c)^2.$$

Thông qua mỗi chuỗi các bài toán ở trên bạn đọc chắc hẳn có thể đồng đồng ý với tác giả rằng đây là một bất đẳng thức hết sức thú vị, một bài toán có thể phát biểu ở nhiều dạng và quan trọng hơn ở dạng đó ta lại tìm được 1 hoặc 2 lời giải độc lập với nhau. Giải được một bài toán là điều hết sức thú vị, nhưng khi phân tích và phát hiện ra được nguồn gốc, xuất xứ của bài toán đó lại càng thú vị hơn. Đến đây, tác giả xin tạm dừng bài viết của mình, mong rằng bạn đọc cũng sẽ tìm được những bài toán thú vị như bất đẳng thức này.

VỀ HAI BÀI HÌNH TRONG KỲ THI IMO 2015

Trần Quang Hùng

(*Trường THPT chuyên KHTN, ĐH KHTN, Hà Nội*)

Tóm tắt

Bài viết giải quyết và đưa ra các ý tưởng mở rộng cùng nhiều ứng dụng cho các đề hình học thi IMO năm 2015.

1. Bài hình ngày thứ nhất

1.1. Mở đầu

Đề thi IMO ngày thứ nhất năm 2015 [1] có bài hình học như sau:

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H, đường cao AF và M là trung điểm BC. Đường tròn đường kính HA cắt (O) tại Q khác A. Đường tròn đường kính HQ cắt (O) tại K khác Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KHQ và KFM tiếp xúc nhau.*

Lời giải thứ nhất. Vẽ đường kính AE và QR của (O). L, N lần lượt là trung điểm HR, QA.

Dễ thấy Q, H, M, E thẳng hàng. Từ đó suy ra $ML \parallel ER \parallel QA$ và

$$ML = \frac{1}{2}ER = \frac{1}{2}QA = NQ,$$

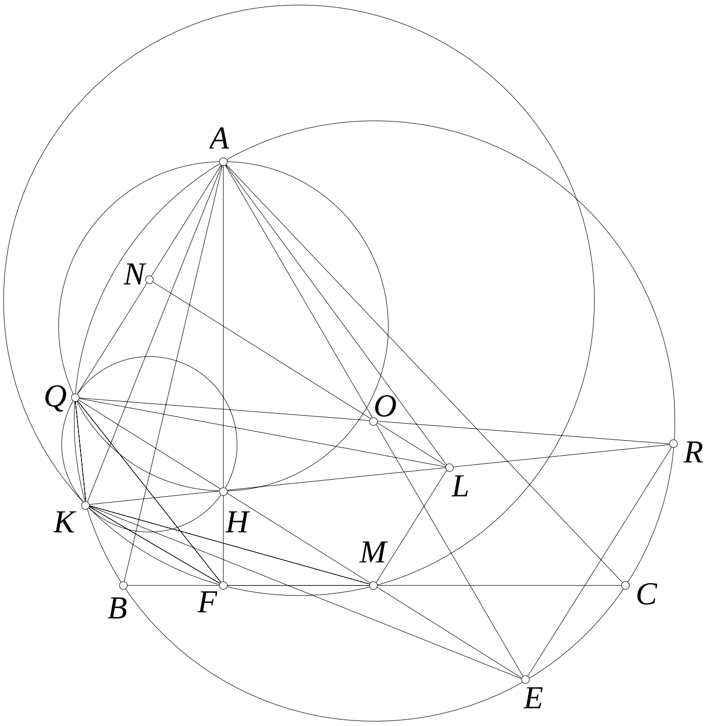
nên $NQML$ là hình bình hành. Do đó, $LN \perp QA$. Từ đó ta được $LA = LQ$. Mặt khác, $ML \parallel QA$ nên ML tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp $\triangle LAQ$ tại L (1).

Mà

$$HA \cdot HF = HK \cdot HL = HQ \cdot HM,$$

nên phép nghịch đảo tâm H phương tích $\overline{HA} \cdot \overline{HF}$ biến

$$M \to Q,\ L \mapsto K,\ A \mapsto F, Q \mapsto M.$$



Do đó từ (1) kết hợp với phép nghịch đảo tâm H suy ra đường tròn ngoại tiếp $\triangle KHQ$, $\triangle KFM$ tiếp xúc nhau. $\square$

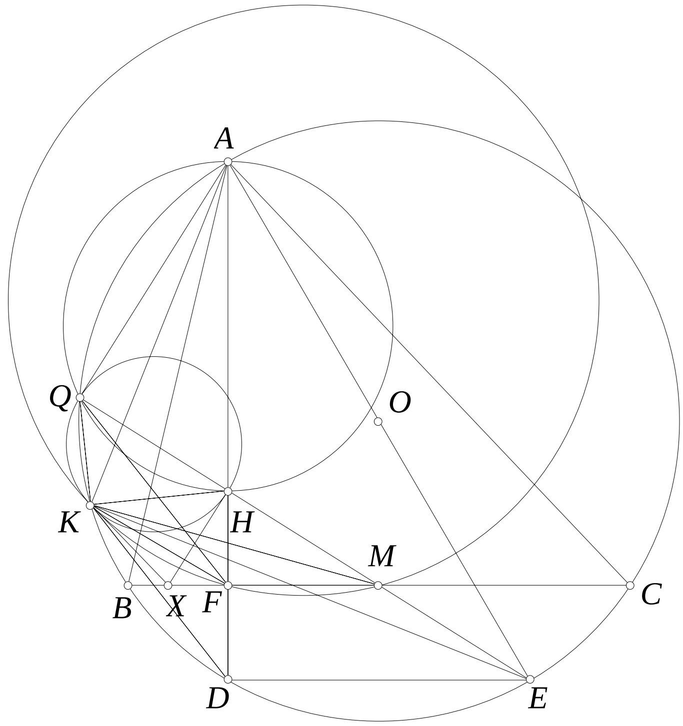
Lời giải thứ hai. Gọi AE là đường kính của (O) và D đối xứng H qua BC thì D nằm trên (O). Dễ thấy Q, H, M, E thẳng hàng. Gọi tiếp tuyến tại K, H của đường tròn ngoại tiếp tam giác KHQ cắt nhau tại X.

Ta có

$$\begin{aligned}\angle KXH &= 180^\circ - 2\angle KHX = 180^\circ - 2\angle KQH \\ &= 2(90^\circ - \angle KQH) = 2(90^\circ - \angle KAE) \\ &= 2\angle AEK \\ &= 2\angle KDH.\end{aligned}$$

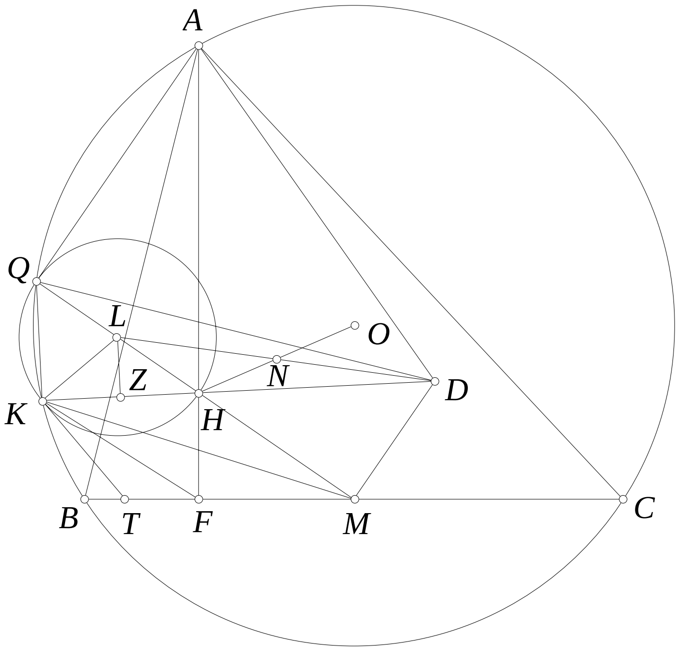
Lại có $XK = XH$, từ đó X là tâm ngoại tiếp tam giác KDH. Do BC là trung trực HD nên X nằm trên BC. Từ đó theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có

$$XK^2 = XH^2 = XF \cdot XM.$$



Hay XK là tiếp tuyến chung của đường tròn ngoại tiếp tam giác KQH và KFM hay hai đường tròn này tiếp xúc nhau tại K. □

Lời giải thứ ba. Gọi đường thẳng qua M vuông góc với QM cắt KH tại D.



Gọi L, Z là trung điểm của HQ, HK thì L, Z nằm trên đường tròn Euler (N) mà M cũng thuộc (N) nên N là trung điểm LD. N cũng là trung điểm OH nên $OD \parallel LH \perp QA$.

Từ đó có $DQ = DA$ và

$$HA \cdot HF = HQ \cdot HM = HK \cdot HD.$$

Kẻ tiếp tuyến KT của đường tròn ngoại tiếp tam giác KQH ta có

$$\begin{aligned}\angle TKF &= \angle TKH - \angle HKF = \angle KQH - \angle HAD\\ &= \angle HDM - (\angle QAD - \angle QAH)\\ &= \angle HDM - \angle QDM + \angle HMF\\ &= \angle HMF - \angle QDH = \angle HMF - \angle HMK\\ &= \angle KMF.\end{aligned}$$

Do đó KT cũng là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KFM. Bài toán được chứng minh. □

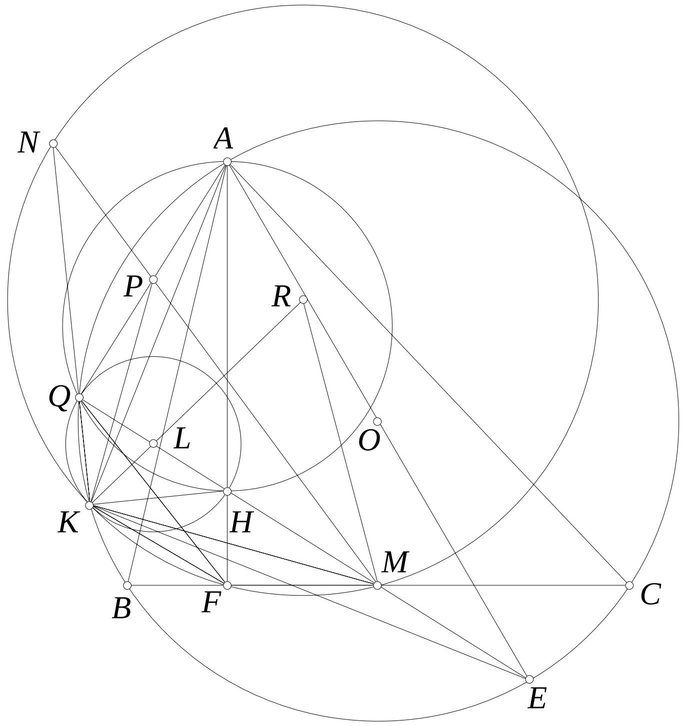
Nhận xét. Bài toán này là bài toán thứ 3 của ngày thứ nhất, được đánh giá là một bài khó. Tuy vậy một bài toán chứng minh hai đường tròn tiếp xúc mà đã có sẵn tiếp điểm thì mức độ khó chưa cao vì vậy xếp là bài số 3 là hợp lý. Lời giải thứ nhất là một ý tưởng khá tự nhiên khi có hai đường tròn tiếp xúc ta nghĩ tới việc nghịch đảo để đi chứng minh đường thẳng tiếp xúc đường tròn để giảm số lượng đường tròn đi. Lời giải này cùng được nghĩ ra bởi **Telv Cohl** và **Trịnh Huy Vũ** học sinh lớp $12A1$ Toán THPT chuyên KHTN, bạn **Vũ** đã giúp tác giải trình bày lại lời giải của mình như trên. Cũng có rất nhiều lời giải khác nhau đã được đề xuất. Lời giải thứ hai trên có ý tưởng thuần túy hình học rất thông minh là của **Jeck Lim**, nick name **oneplusone** trong [1], tác giả đã chỉnh sửa một chút cách dựng điểm X và biến đổi góc gọn hơn. Lời giải thứ ba thực chất xuất phát từ một ý tưởng nghịch đảo trong khi tác giả trao đổi của **Hồ Quốc Đăng Hưng** đã được tác giả chỉnh sửa lại gọn hơn, bỏ đi cách trình bày nghịch đảo và làm lại thuần túy hình học. Trong lời giải này thì điểm T không cần thiết nhưng ta dựng như vậy cho đẹp. Bài toán có nhiều ứng dụng và mở rộng, phần sau chúng tôi xin giới thiệu một số ứng dụng và mở rộng.

1.2. Khai thác bài toán IMO

Bài toán IMO là một cấu hình đẹp, trong cấu hình đó ta sẽ còn thấy rất nhiều bài toán thú vị khác. Bài toán đầu tiên này được tác giả tìm ra một cách tình cờ khi đang cố giải bài toán IMO sử dụng phương pháp đồng dạng trung tuyến.

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H, đường cao AF và M là trung điểm BC. Đường tròn đường kính HA cắt (O) tại Q khác A. Đường tròn đường kính HQ cắt (O) tại K khác Q. KQ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KFM tại N khác K. Chứng minh rằng MN chia đôi AQ.*

Lời giải. Gọi L, R là tâm ngoại tiếp tam giác KQH và KFM thì L là trung điểm QH và theo bài toán 1 thì K, L, R thẳng hàng.



Gọi P là trung điểm QA, ta sẽ chứng minh M, N, P thẳng hàng, thật vậy. Gọi AE là đường kính của (O) thì Q, H, M, E thẳng hàng. Từ đó $\angle KQH = \angle KAE$ nên hai tam giác vuông KQH và KAE đồng dạng suy ra hai tam giác KQA và KHE đồng dạng, chúng có trung tuyến là KP, KM nên $\angle QPK = \angle QMK$ và $\angle QKP = \angle HKM$. Cũng từ đó tứ giác $QPMK$ nội tiếp. Ta có

$$\begin{aligned}\angle CMN &= \angle QKF = \angle QKL + \angle LKM + \angle MKF\\ &= \angle KPM + \angle RMK + 90^\circ - \angle RMF\\ &= 90^\circ - \angle PMK + \angle RMK\\ &= 90^\circ - \angle PMK + \angle RMK + 90^\circ - \angle RMF\\ &= 180^\circ - \angle BMP = \angle CMP.\end{aligned}$$

Từ đó M, N, P thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Chính nhờ ý tưởng của bài toán này cho ta một cách nhìn rất thú vị khi giấu đi tiếp điểm ở bài toán gốc như sau:

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC nhọn với trực tâm H, đường cao AF và M là trung điểm BC. Đường tròn đường kính HA cắt HM tại Q khác A. X thuộc BC sao cho $XH \perp QM$. Gọi L, P là trung điểm QH, QA. Đường thẳng qua Q song song LX cắt MP tại N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác NFM tiếp xúc đường tròn đường kính QH.*

Lời giải thứ nhất. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi AE là đường kính của (O) thì Q, H, M, E thẳng hàng. Gọi D đối xứng H qua BC. Đường tròn (X, XH) cắt đường tròn (O) tại K khác D. Ta có

$$\angle XKH = \angle XHK = 90^\circ - \angle KDH = 90^\circ - \angle KEA = \angle KAE = \angle KQE,$$

từ đó KH, KX tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác QKH. Lại có

$$\angle KQH = \angle KHX = 90^\circ - \angle KHQ,$$

nên $\angle QKH = 90°$. K thuộc đường tròn đường kính QH nên

$$LX \perp KH \perp QK,$$

suy ra $QK \parallel LX \parallel QN$ nên K, Q, N thẳng hàng. Từ tam giác KQH và tam giác KAE đồng dạng suy ra KQA và KHE đồng dạng, lại có trung tuyến tương ứng là KP, KM nên tam giác KQP và KHM đồng dạng hay KQH và KPM đồng dạng. Lại có

$$XK^2 = XH^2 = XM \cdot XF,$$

suy ra XK tiếp xúc đường tròn (R) ngoại tiếp tam giác KFM. Từ đó K, L, R thẳng hàng. Vậy

$$\angle LKQ = \angle LQK = \angle KPM = 90° - \angle KHQ = 90° - \angle PMK,$$

từ đây dễ suy ra $\angle KRM = 2\angle N$. Từ đó N thuộc (R) hay (R) là đường tròn ngoại tiếp tam giác NFM. Hiển nhiên (R) tiếp xúc đường tròn đường kính QH. Ta có điều phải chứng minh. □

Lời giải thứ hai. Gọi đường tròn đường kính QH cắt (O) tại K khác A và D đối xứng H qua BC. Chứng minh tương tự bài toán gốc thì QE tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác KHD mà $HX \perp QE$ nên tâm ngoại tiếp tam giác KHD nằm trên HX, lại có X thuộc trung trực HD nên tâm ngoại tiếp tam giác KHD chính là X vậy $XH = XK$. Mà dễ thấy XH tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác QHK nên XK cũng vậy. Từ đó $KH \perp LX \perp QK$ nên $QK \parallel LX \parallel QN$. Từ đó Q, K, N thẳng hàng. Ta có

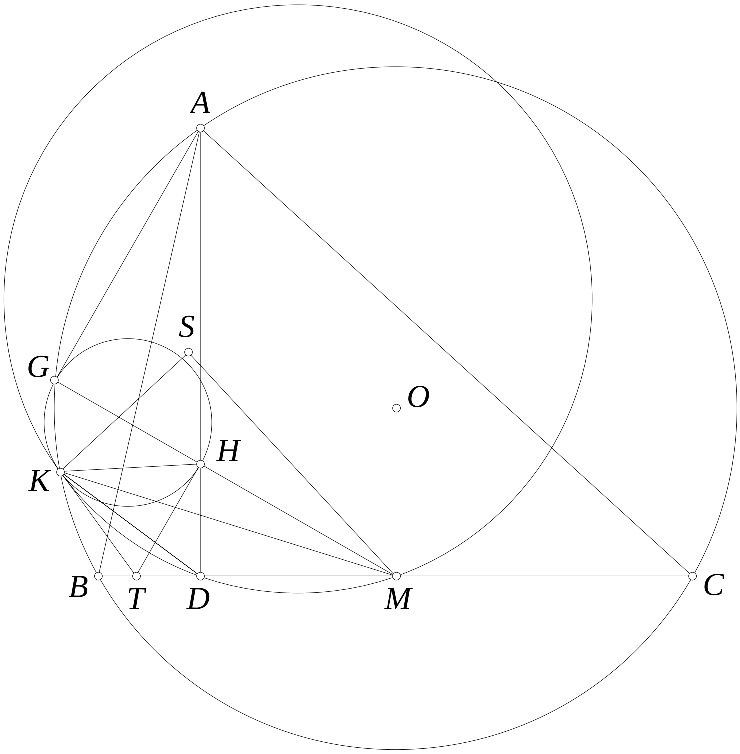
$$\begin{aligned}
\angle QKF + \angle FMN &= \angle QKL + \angle RKM + \angle MKF + \angle FMP \\
&= 90° - \angle KHQ + \angle RMK + 90° - \angle RMF + \angle FMP \\
&= 180°,
\end{aligned}$$

hay tứ giác $NKFM$ nội tiếp. Từ đó đường tròn ngoại tiếp tam giác NFM tiếp xúc đường tròn đường kính QH. □

Ta lại có một ý tưởng khác phát triển bài toán IMO như sau:

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H và đường cao AD. Đường tròn đường kính HA cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính HG cắt (O) tại K khác G. S đối xứng với D qua HK. Chứng minh rằng đường thẳng qua S vuông góc SK chia đôi BC.*

Lời giải. Gọi M là trung điểm BC, ta sẽ chứng minh rằng tam giác KSM vuông tại S.



Thật vậy, theo bài toán IMO đường tròn ngoại tiếp tam giác KGH và KDM tiếp xúc nhau tại K. Gọi T thuộc BC sao cho KT là tiếp tuyến cung của hai đường tròn đó. Ta có

$$\begin{aligned}\angle SKM &= \angle SKH + \angle HKM = \angle HKD + \angle GHK - \angle GMK \\ &= \angle HKT - \angle DKT + \angle GHK - \angle GMK \\ &= \angle HGK + \angle GHK - \angle KMD - \angle GMK = 90^\circ - \angle HMD \\ &= \angle DHM.\end{aligned}$$

Cũng theo chứng minh bài toán gốc ta lại có TK và TH là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KGH và hai tam giác TKD và TMK đồng dạng. Từ đó

$$\frac{KS}{KM} = \frac{KD}{KM} = \frac{TK}{TM} = \frac{TH}{TM} = \frac{HD}{HM}.$$

Từ đó dễ thấy tam giác KSM và tam giác HDM đồng dạng với nhau nên $\angle KSM = 90^\circ$. Chứng minh hoàn tất □

Từ hai bài toán trên ta đi đến phát triển sau:

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H và đường cao AD, trung tuyến AM. Đường tròn đường kính HA cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính HG cắt BC tại K khác G. KG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM tại N khác K. KH cắt MN tại Q. Chứng minh rằng $QD = QM$.*

Lời giải thứ nhất được tác giả đưa ra dựa trên kết quả bài trước:

Lời giải thứ nhất. Gọi S đối xứng D qua KH và KS cắt MM tại T. Theo chứng minh bài trước thì MN đi qua trung điểm P của GA nên

$$\angle QHM = \angle GHK = \angle KMQ.$$

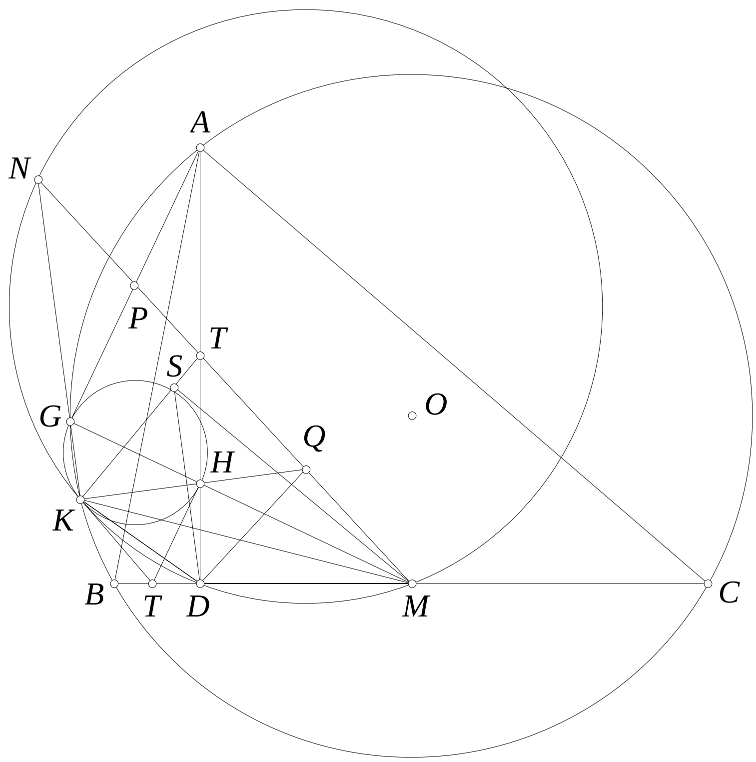
Từ đó $\angle QMH = \angle QKM$. Vậy

$$\angle HKD = 90^\circ - \angle HMD - \angle HKM = 90^\circ - \angle QMD.$$

Từ đó

$$\angle KSD = 90^\circ - \angle SKH = 90^\circ - \angle HKD = \angle QMD,$$

suy ra tứ giác $STMD$ nội tiếp. Theo bài trước thì $\angle TSK = 90^\circ$. Từ đây suy ra $\angle TDM = 90^\circ$ hay T thuộc AH.



Cũng từ $\angle HKD = 90^\circ - \angle QMD = \angle MTD$ nên tứ giác $KTQD$ nội tiếp, ta thu được $\angle DQM = \angle TKD$ hay hai tam giác QDM và KDS đồng dạng hay $QD = QM$. □

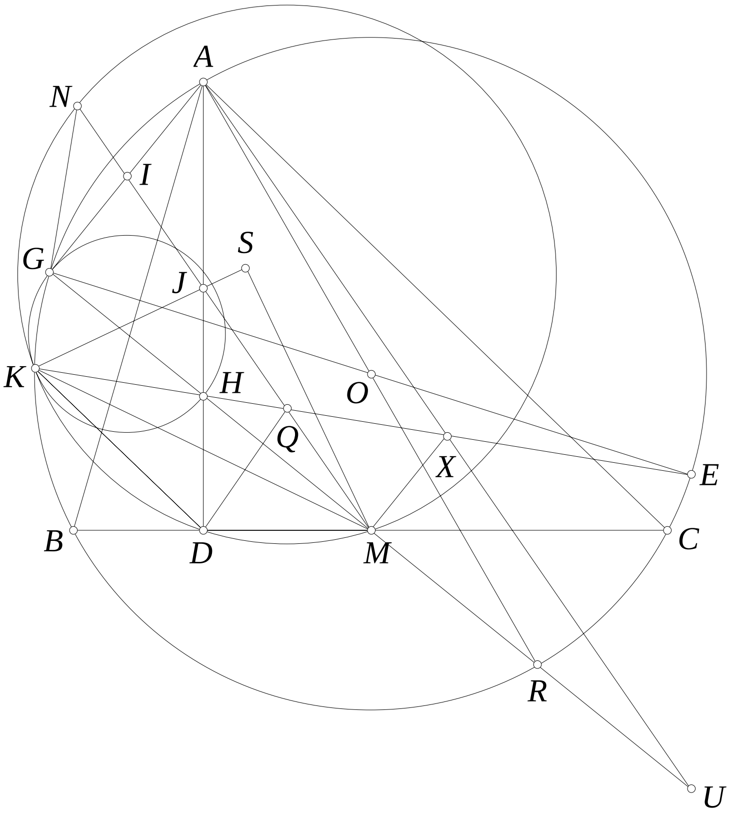
Lời giải thứ hai là chứng minh trực tiếp của bạn **Trịnh Huy Vũ**:

Lời giải thứ hai. Vẽ đường kính AR, GE của (O). Gọi I là trung điểm GA. Từ kết quả bài trước ta đã có I nằm trên đường thẳng MN. Gọi X là trung điểm HE. Ta có kết quả quen thuộc G, H, M, R thẳng hàng. Từ đó suy ra $MX \parallel GA$ và

$$MX = \frac{1}{2}RE = \frac{1}{2} \cdot GA = IA = IG,$$

vậy $AIMX$, $IGMX$ là các hình bình hành. Do đó $AX \parallel MI$ và $XI \perp GA$. Nên $XA = XG$. Gọi MI cắt AD tại J. Lấy U đối xứng A qua X.

Do $XA = XG$ suy ra $\angle AGU = 90^\circ$. Do đó U nằm trên đường thẳng HM. Vậy KH chia đôi MJ do $MJ \parallel AU$ và KH chia đôi AU tại X.



Suy ra Q là trung điểm của MJ, kết hợp với $\angle JDM = 90°$, ta suy ra tiếp $QD = QM$. Bài toán được chứng minh. $\square$

Từ đó nếu ta sử dụng kết quả bài này thì bạn **Vũ** lại đưa ra một lời giải khác cho bài toán trước như sau:

Lời giải bài trước. Ta vẫn sử dụng các kí hiệu như lời giải thứ hai ở trên.

Từ bài toán này ta suy ra Q là tâm ngoại tiếp tam giác DMS. Suy ra

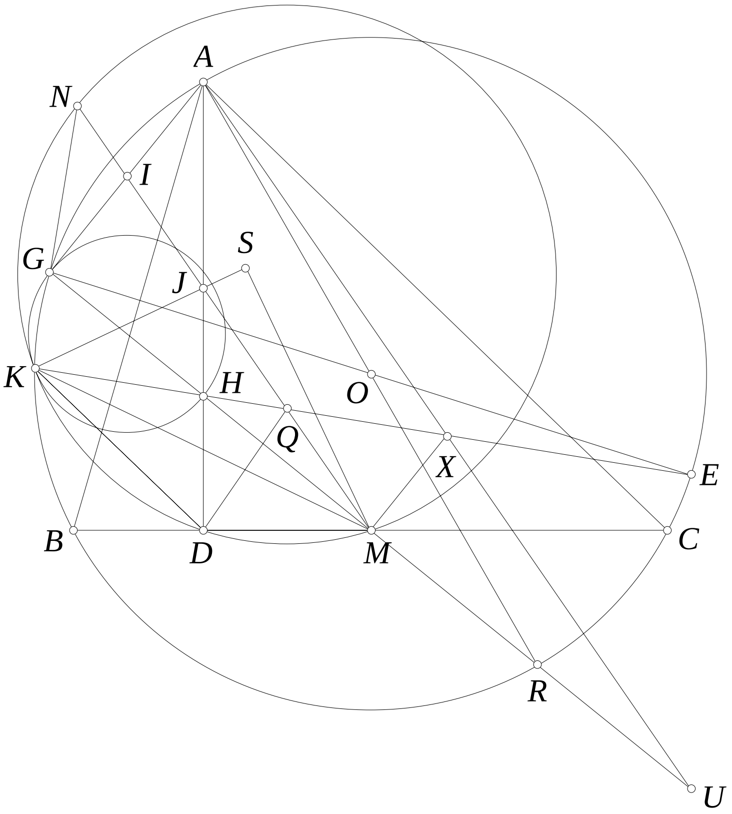
$$\angle DSM = \frac{1}{2}\angle DQM.$$

Ta có

$$HK \cdot HX = HK \cdot \frac{1}{2}HE = HG \cdot \frac{1}{2}HR = HG \cdot HM = HA \cdot HD.$$

Suy ra tứ giác $AXDK$ nội tiếp. Do đó ta có

$$\begin{aligned}\angle KSD = \angle KDS = 90° - \angle DKH &= 90° - \angle DAX \\ &= 90° - \angle DJM = 90° - \frac{1}{2} \cdot \angle DQM \\ &= 90° - \angle DSM.\end{aligned}$$



Vậy $\angle KSM = \angle KSD + \angle DSM = 90°$. □

Nếu sử dụng thêm định lý con bướm ta có hai khai thác sau:

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC nhọn với tâm ngoại tiếp O với trực tâm H, đường cao AD và trung tuyến AM. G là hình chiếu của A lên HM. L là trung điểm HG. K đối xứng với G qua OL. KL cắt trung trực DM tại S. KG cắt BC tại T. Lấy X thuộc MK sao cho $TX \perp ST$, Y đối xứng X qua T. P là trung điểm AG. Chứng minh rằng KG, YD, MP đồng quy.*

Ta cũng có thể phát biểu bài toán trên cách khác, và nó cũng có nhiều giá trị.

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC nhọn với tâm ngoại tiếp O với trực tâm H, đường cao AD và trung tuyến AM. G là hình chiếu của A lên HM. L là trung điểm HG. K đối xứng với H qua OL. KL cắt trung trực DM tại S. P là trung điểm GA. N là đối xứng của M qua hình chiếu của S lên MP. NG cắt BC tại T. Lấy X thuộc ND sao cho $XT \perp ST$. Y đối xứng với X qua T. Chứng minh rằng các đường thẳng MY, NG, KL đồng quy.*

Như vậy từ mô hình bài toán gốc ta đã thu được một số bài toán khác nhau đều là các kết quả đẹp và có giá trị.

1.3. Mở rộng bài toán IMO

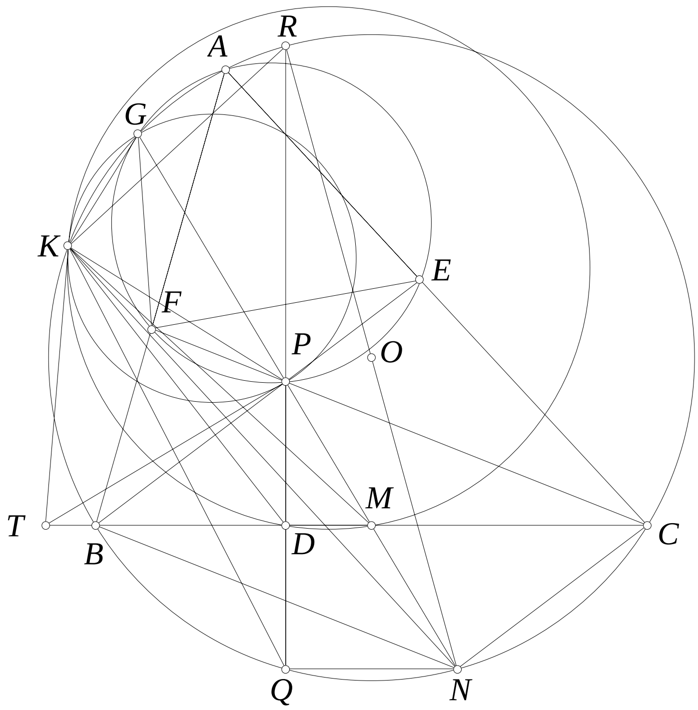
Bài toán IMO này là một bài toán hay theo nghĩa có nhiều phát triển mở rộng. Trong [1] cũng đưa ra nhiều mở rộng nhưng trong bài viết này tôi chỉ viết về các mở rộng của mình, ta đi tới mở rộng đầu tiên như:

Bài toán 8. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm trong tam giác sao cho $\angle BPC = 180° - \angle A$. Giả sử PB, PC cắt CA, AB lần lượt tại E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính PG cắt (O) tại K khác G. D là hình chiếu của P lên BC và M là trung điểm BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KGP và KDM tiếp xúc với nhau.*

Lời giải. Gọi Q là đối xứng của P qua D, thì Q nằm trên (O). Gọi GP cắt (O) tại N khác G. Ta thấy

$$\angle NPC = \angle FPG = \angle FAG = \angle BNP,$$

suy ra $BN \parallel PC$. Tương tự, $CN \parallel BP$.



Từ đó M là trung điểm của PN. Gọi AS, NR là đường kính của (O). Ta dễ thấy $\angle PQN = 90°$ vậy nên P, Q, R thẳng hàng. Từ đó, GN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KPQ. Gọi tiếp tuyến tại K, P của đường tròn ngoại tiếp tam giác KPG cắt nhau tại T. Ta có

$$\angle KTP = 180° - 2\angle KGP = 2(90° - \angle KRN) = 2\angle RNK = 2\angle KQP,$$

và $TK = TP$. Từ đó T là tâm ngoại tiếp tam giác KPQ nhưng vì BC là trung trực PQ nên T thuộc BC. Do đó $TK^2 = TP^2 = TD \cdot TM$.

Suy ra TK là tiếp tuyến chung của đường tròn ngoại tiếp các tam giác KDM và tam giác KHM, hay hai đường tròn đó tiếp xúc nhau tại K. □

Nhận xét. Mở rộng trên lần đầu được tác giải đăng trong [1] và sau đó tác giả cũng chỉnh sửa lại cho ngắn gọn hơn như trên. Khi cho P là trực tâm hoặc khi cho góc A đặc biệt ta sẽ thu được nhiều trường hợp riêng giá trị. Một cách nhìn khác dễ dàng hơn khi dễ thấy P là trực tâm tam giác RBC nên ta áp dụng trực tiếp bài toán gốc trên tam giác RBC thì thu bài toán trên. Sau đây là một mở rộng khác của tôi cho bài toán này.

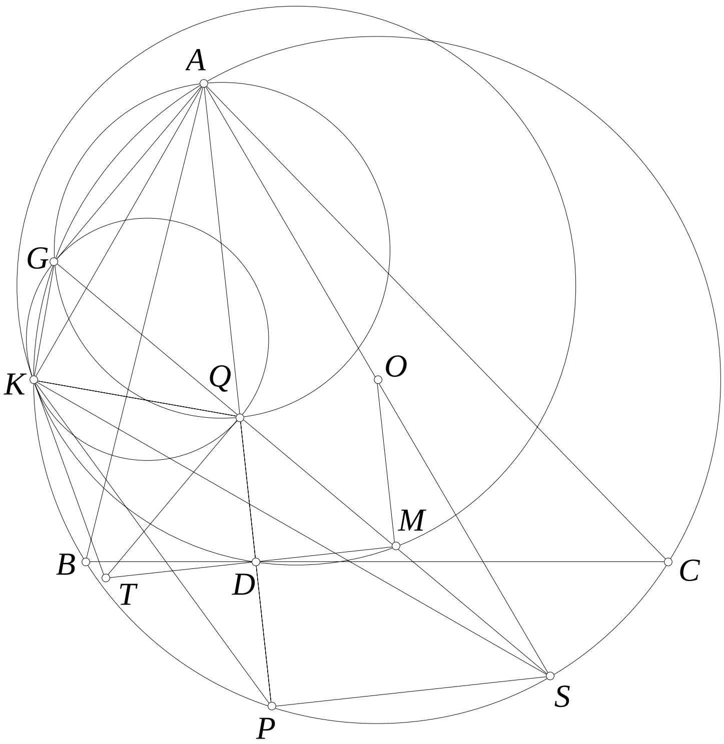
Bài toán 9. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. AP cắt BC tại D. Q đối xứng với P qua D. Đường tròn đường kính AQ cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính GQ cắt (O) tại K khác G. GQ cắt đường thẳng qua O song song với AP tại M. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KGQ và KDM tiếp xúc với nhau.*

Lời giải. Gọi GQ cắt (O) tại S khác G, do $\angle AGQ = 90°$ nên AS là đường kính của (O). Do $OM \parallel AP$ và O là trung điểm AS nên M là trung điểm QS. Từ đó $DM \parallel PS \perp PA$ nên DM là trung trực PA. Lại có

$$\angle KQG = 90° - \angle KGQ = 90° - \angle KAS = \angle ASK = \angle QPK.$$

Từ đó GS tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác KQP. Gọi tiếp tuyến tại K, Q của đường tròn ngoại tiếp tam giác GKQ cắt nhau tại T. Ta có

$$\angle KTQ = 180° - 2\angle KGQ = 2\angle KQG = 2\angle KPQ.$$



Từ đó T là tâm ngoại tiếp tam giác KPQ. Ta đã chứng minh DM là trung trực PQ nên T thuộc DM. Từ đây ta có

$$TK^2 = TP^2 = TD \cdot TM,$$

suy ra TK là tiếp tuyến chung của đường tròn ngoại tiếp các tam giác KGQ và KDM hay hai đường tròn đó tiếp xúc nhau tại K. □

Nhận xét. Mở rộng này khá quan trọng vì nó dựa trên một mô hình rất giống bài toán gốc. Do đó những ứng dụng của bài toán gốc đều có thể phát triển trên mô hình này. Tuy nhiên ta cũng có thể có cái nhìn đơn giản hơn khi kéo dài trung trực PQ cắt (O) tại hai điểm Y, Z thì Q là trực tâm tam giác AYZ nên áp dụng bài toán gốc IMO vào tam giác AYZ. Ta thu được bài toán này. Một cách tương tự các bạn có thể làm với mở rộng sau:

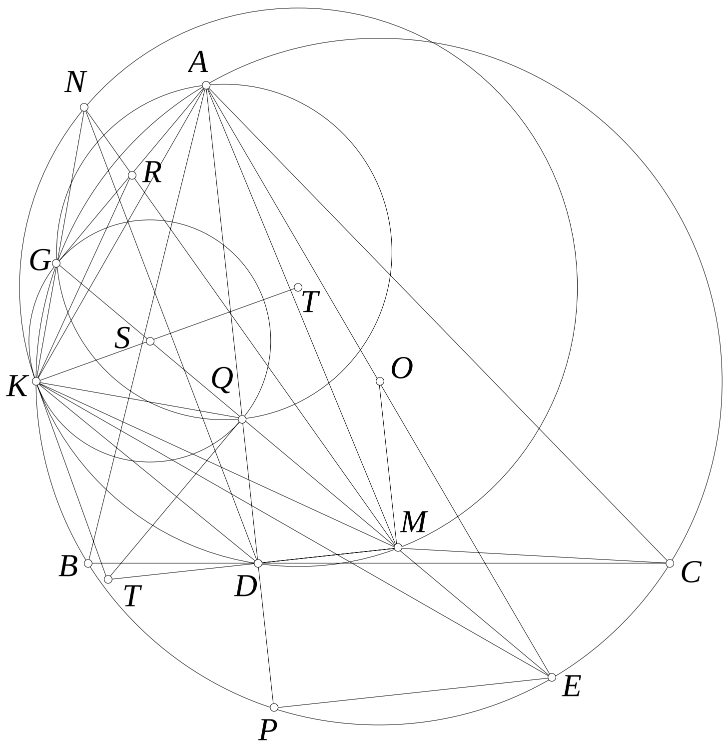
Bài toán 10. *Cho tam giác ABC có P là hai điểm trong tam giác. X, Y, Z là đối xứng của P qua BC, CA, AB. PX cắt đường tròn (Q) ngoại tiếp tam giác XYZ tại T khác X. Đường tròn đường kính PT cắt (Q) tại G khác T. Đường tròn đường kính PG cắt (Q) tại K khác G. D, M là hình chiếu của P, Q lên BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM và KPG tiếp xúc nhau.*

Như vậy qua hai bài toán trên có thể thấy bài toán IMO gốc vẫn đóng một vài trò rất quan trọng, khi áp dụng bài toán đó vào các mô hình khác nhau sẽ cho ta nhiều bài toán phát triển mới rất thú vị.

Ta tiếp tục đi tới một số khai thác của bài toán tổng quát giống như các khai thác của bài toán IMO.

Bài toán 11. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm thuộc $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. AP cắt BC tại D. Q đối xứng với P qua D. Đường tròn đường kính AQ cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính GQ cắt (O) tại K khác G. GQ cắt đường thẳng qua O song song với AP tại M. KG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM tại N khác K. Chứng minh rằng MN chia đôi GA.*

Lời giải. Gọi AE là đường kính của (O).

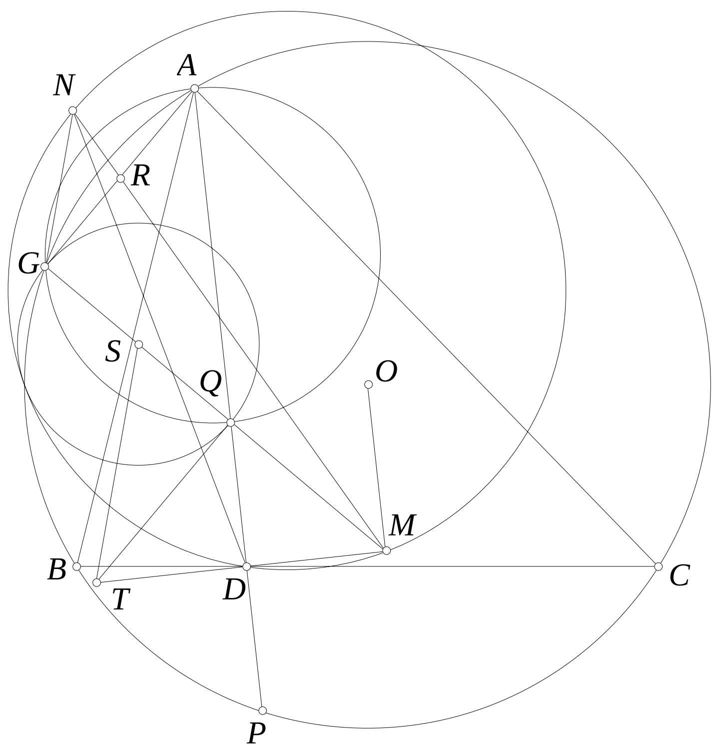


Chứng minh tương tự bài toán 1.9 ta có G, Q, M, E thẳng hàng và M là trung điểm QE. Từ đó dễ có các tam giác vuông KGQ và KAE đồng dạng, suy ta giác KGQ và KQE đồng dạng. Gọi R là trung điểm GA thì hai tam giác KGR và KQM đồng dạng. Từ đó dễ thấy tứ giác $KGRM$ nội tiếp. Ta có

$$\begin{aligned}\angle DMN &= 180^\circ - \angle DKN = 180^\circ - (\angle GKS + \angle TKM + \angle MKD)\\ &= 180^\circ - (90^\circ - \angle KMR + \angle TMK + 90^\circ - \angle TMD)\\ &= \angle DMR.\end{aligned}$$

Từ đó ta có $M,\ N,\ R$ thẳng hàng. □

Bài toán 12. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Giả sử P là điểm thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ (không chứa A). AP cắt BC tại D. Q đối xứng với P qua D. Đường tròn đường kính AQ cắt (O) tại G (khác A). GQ cắt đường thẳng qua O song song với AP tại M. Đường thẳng qua Q vuông góc GM cắt DM tại T. $S,\ R$ lần lượt là trung điểm của $GQ,\ GA$. Đường thẳng qua G song song ST cắt MR tại N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MND tiếp xúc đường tròn đường kính GQ.*



Ta còn xây dựng thêm các mô hình khác nữa cho bài toán IMO.

Bài toán 13. *Cho tam giác ABC vuông tại A. P là một điểm trên BC. Đường tròn đường kính BP cắt đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác APC tại Q khác P. Gọi $M,\ N$ là trung điểm của $BC,\ AB$:*

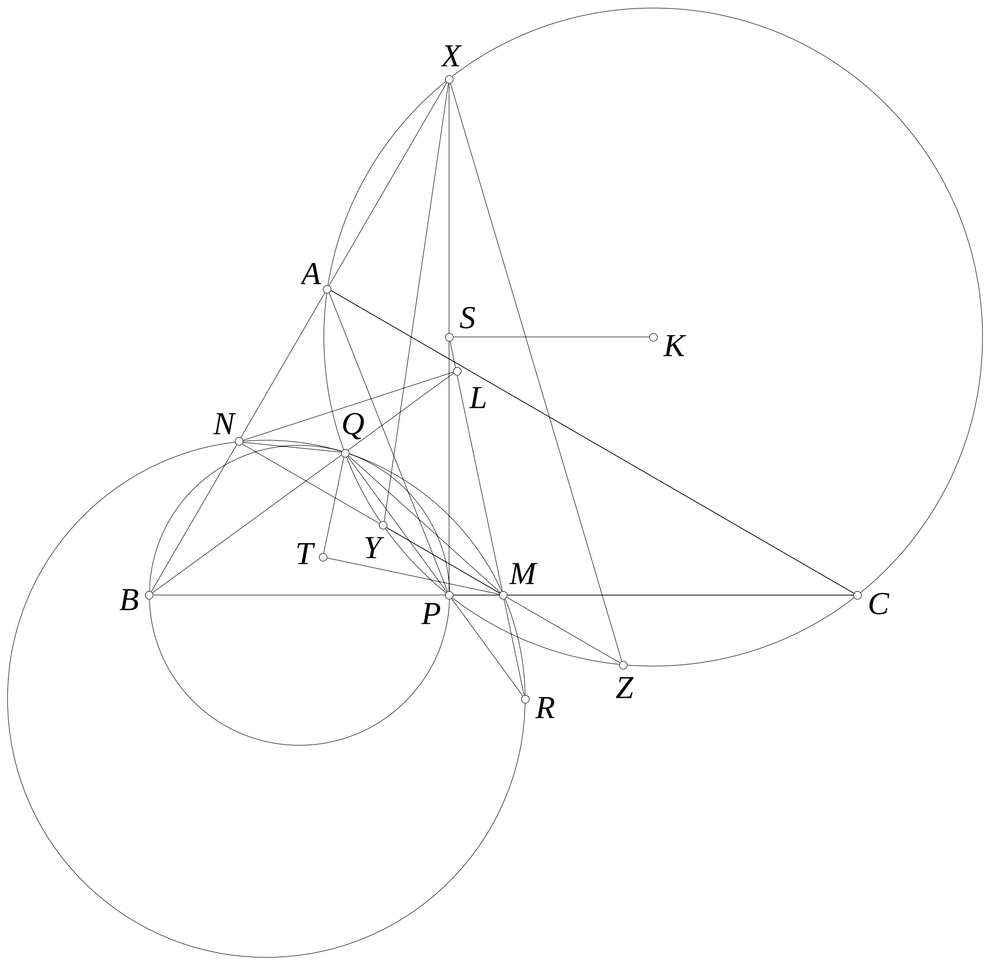
(a) *Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác QMN và QPB tiếp xúc nhau.*

(b) *Gọi PQ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác QMN tại R khác Q. MR cắt đường thẳng qua P vuông góc BC tại S. Chứng minh rằng $KS \parallel BC$.*

(c) *Gọi T đối xứng N qua BQ. Chứng minh rằng $\angle QTM = 90°$.*

(d) *Gọi BQ cắt ST tại L. Chứng minh rằng tam giác LMN cân.*

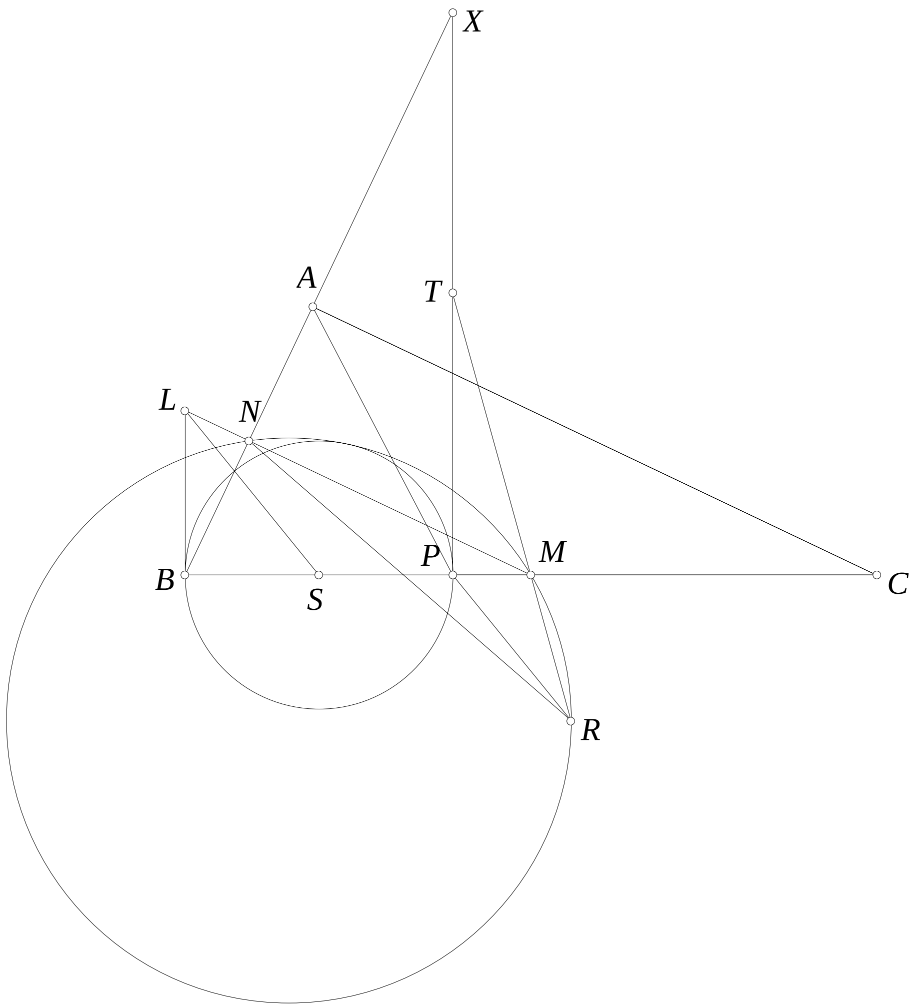
Lời giải. Gọi AB cắt (K) tại X khác A và MN cắt (K) tại $Y,\ Z$. Dễ thấy B là trực tâm tam giác XYZ.



Áp dụng các bài toán đã xây dựng cho tam giác XYZ trực tâm B ta thu được điều phải chứng minh. $\square$

Ta lại sử dụng cách đã làm để giấu đi tiếp điểm ta thu được bài toán thú vị sau:

Bài toán 14. *Cho tam giác ABC vuông tại A. M, N là trung điểm BC, AB. Một đường thẳng vuông góc BC tại P cắt AB tại X. S, T là trung điểm PB, PX. Lấy điểm L thuộc MN sao cho $BL \perp BC$. Lấy R thuộc MT sao cho $PR \parallel LS$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác RMN tiếp xúc đường tròn đường kính PB.*



Ngoài ta tôi còn thu được một bài toán tổng quát khá lạ rất thú vị như sau:

Bài toán 15. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) đi qua B, C cắt CA, AB tại E, F. BE cắt CF tại H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính HG cắt (O) tại L khác G. D là hình chiếu của K lên AH. GK cắt BC tại M. ML cắt KD tại N. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác LHG và LDN tiếp xúc nhau.*

Mặt khác bài toán gốc vẫn còn nhiều phát triển và mở rộng khác các bạn hãy luyện tập các bài sau:

Bài toán 16. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có đường kính AD. M là một điểm trên BC. MD cắt (O) tại G khác D. Q là đối xứng của D qua M. Đường tròn đường kính QG cắt (O) tại K khác G. N là hình chiếu của M lên AQ.*

(a) *Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN và KQG tiếp xúc nhau.*

(b) *Gọi KG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN tại P khác K. Chứng minh rằng MP chia đôi AG.*

(c) *Gọi R đối xứng N qua QK. Chứng minh rằng $\angle KRM = 90°$.*

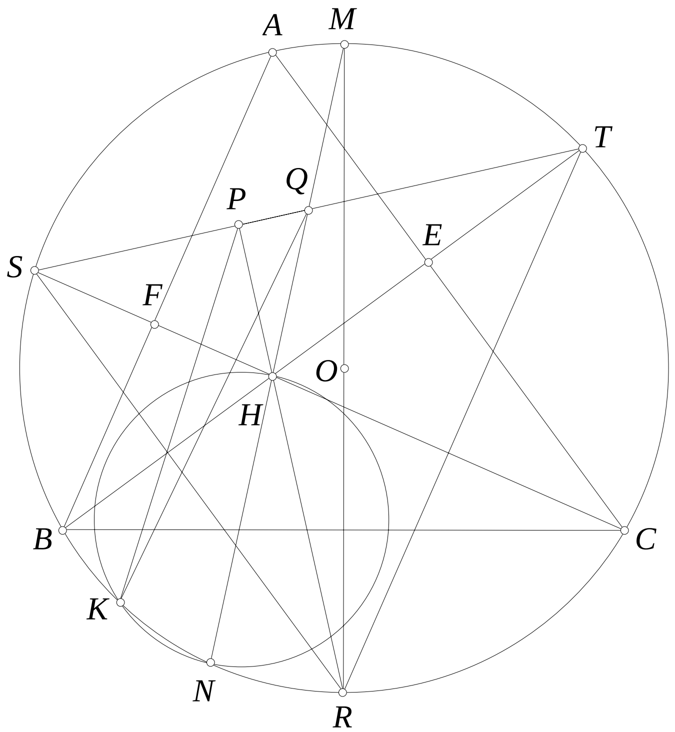
Bài toán 17. *Cho tam giác ABC có $\angle A = 60^\circ$ và nội tiếp đường tròn (O). Đường cao BE, CF cắt nhau tại H. M là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A. Giả sử MH cắt (O) tại N (khác điểm M). Đường tròn đường kính HN cắt (O) tại K khác N. P là đối xứng của H qua EF và Q là trung điểm HM.*

(a) *Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KPQ và KHN tiếp xúc nhau.*

(b) *Gọi KN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KPQ tại L khác K và R là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. Chứng minh rằng QL chia đôi KR.*

(c) *Gọi Z đối xứng P qua KH. Chứng minh rằng $\angle KZQ = 90^\circ$.*

Lời giải. Gọi S, T đối xứng H qua F, E và MR là đường kính của (O). Từ $\angle BAC = 60^\circ$ ta thấy H là trực tâm tam giác RST. Từ đó áp dụng các bài toán đã biết trên tam giác RST.



Ta thu được điều phải chứng minh. □

Bài toán 18. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) tâm nội tiếp I. Đường tròn A-mixtilinear tiếp xúc (O) tại P. Đường tròn đường kính PI cắt (O) tại K khác P. N là trung điểm AI và trung trực AI cắt PI tại M.*

(a) *Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KMN và KPI tiếp xúc nhau.*

(b) *Giả sử KP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN tại L (khác điểm K). AI cắt (O) tại D khác A. Chứng minh rằng ML chia đôi PD.*

(c) *Gọi Q đối xứng N qua KI. Chứng minh rằng $\angle KQM = 90^\circ$.*

Bài toán 19. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có đường cao BE, CF. K, L đối xứng O qua CA, AB. KE cắt LF tại H. T thuộc trung trực BC sao cho $HT \parallel OA$. M là trung điểm AT. MO cắt tiếp tuyến qua A của (O) tại N. Đường thẳng qua N song song OA cắt đường thẳng Euler của tam giác ABC tại P.G là hình chiếu của T lên NH. Q là trung điểm HG. S đối xứng G qua PQ. TH cắt AN tại D.*

(a) *Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác SDN và SGH tiếp xúc nhau.*

(b) *Gọi GS cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác SDN tại R khác S. Chứng minh rằng NR chia đôi TG.*

(c) *Gọi W đối xứng với D qua SH. Chứng minh $\angle SWN = 90°$.*

Cuối cùng là một mô hình mở rộng đã có trong [1] được tìm ra bởi bạn **Trịnh Huy Vũ**.

Bài toán 20. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (D) bất kì đi qua B, C cắt CA, AB tại E, F. Dựng đường kính AP của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. K là hình chiếu của D trên AP. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) lần thứ hai tại G. Đường tròn đường kính GP cắt (O) lần thứ hai tại J.*

(a) *Chứng minh rằng đường tron ngoại tiếp tam giác JGP và JKD tiếp xúc nhau.*

(b) *Đặt JG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác JKD lần thứ hai tại M. Chứng minh rằng DM chia đôi GA.*

(c) *Gọi L đối xứng K qua JP. Chứng minh rằng $\angle JLD = 90°$.*

2. Bài hình ngày thứ 2

2.1. Mở đầu

Đề thi IMO ngày thứ hai năm 2015 [2] có bài hình học rất thú vị như sau.

Bài toán 21. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (A) tâm A cắt BC tại D, E và cắt (O) tại G, H sao cho D nằm giữa B, E và tia AB nằm giữa tia AC, AG. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDG và CEH lần lượt cắt AB, AC tại K, L khác B, C. Chứng minh rằng GK và HL cắt nhau trên AO.*

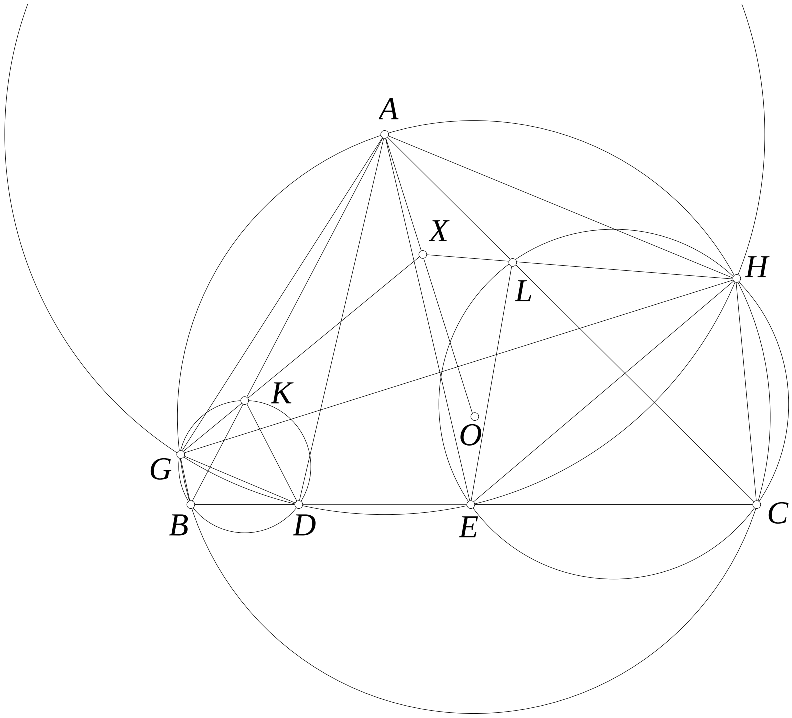
Tôi xin trình bày lời giải của mình cho bài toán này.

Lời giải. Gọi GK cắt LH tại X ta dễ thấy AO là trung trực GH. Ta chỉ cần chứng minh X thuộc trung trực GH là bài toán hoàn tất, thật vậy. Ta thấy

$$\angle EHC = \angle GHC - \angle GHE = 180° - \angle GBD - \angle GDB = \angle BGD.$$

Từ đó

$$\begin{aligned}\angle XGH &= \angle XGD - \angle HGD = \angle KBD - \angle HEC \\ &= 180° - (\angle GBA + \angle BGD + \angle BDG) - \angle HEC \\ &= 180° - (\angle HCA + \angle EHC + \angle EHG) - \angle HEC \\ &= \angle ACB - \angle GHE = \angle XHE - \angle GHE \\ &= \angle XHG.\end{aligned}$$



Từ đó tam giác XGH cân ta có điều phải chứng minh. $\square$

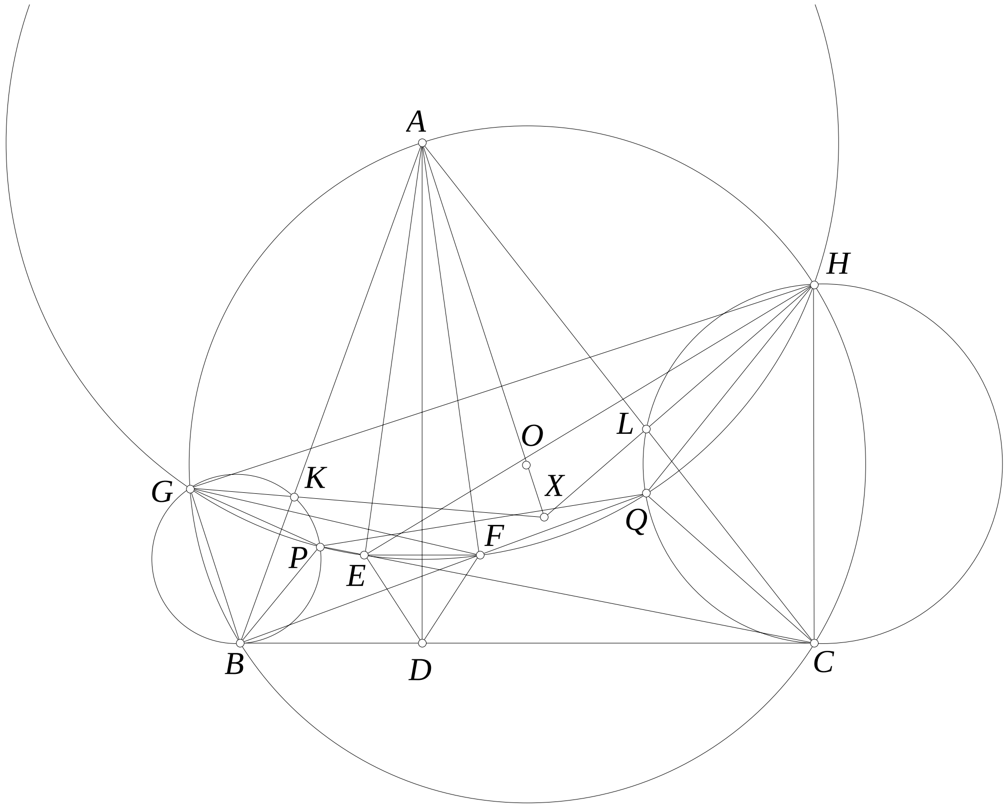
Nhận xét. Bài toán này là bài toán thứ 4 của ngày thứ hai được đánh giá là bài ở mức độ dễ. Lời giải dùng các kỹ thuật cộng góc rất cơ bản. Đây là bài toán đẹp, cấu hình không phức tạp mà đơn giản, có rất nhiều ý nghĩa trong kiểm tra đánh giá cũng như phát triển tư duy. Bài toán cũng có một số mở rộng và ứng dụng, chúng ta hãy theo dõi ở phần sau.

2.2. Mở rộng và khai thác

Đầu tiên ta thấy có thể thay thế đường tròn tâm A thành một đường tròn tâm bất kỳ trên đường thẳng AO bài toán có lời giải hoàn toàn tương tự. Chúng ta đi vào một mở rộng khác có ý nghĩa hơn.

Bài toán 22. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD.. (A) là đường tròn bất kỳ tâm A. Gọi E, F là hai điểm thuộc (A) sao cho E, F đối xứng qua AD và tia AE nằm giữa AB, AF. Đường tròn (A) cắt (O) tại G, H sao cho tia AB nằm giữa tia AG, AC. CE, BF lần lượt cắt đường tròn (A) tại P, Q khác E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG và CQH lần lượt cắt BA, CA tại K, L khác B, C.. Chứng minh rằng GK và HL cắt nhau trên AO.*

Lời giải. Trước hết ta có $EF \parallel BC$ nên $\angle QPE = \angle EFB = \angle FBC$.



Từ đó tứ giác $PQCB$ nội tiếp. Lại có

$$\begin{aligned}\angle EHC &= 180^\circ - \angle GBC - \angle GHE\\ &= 180^\circ - \angle GBP - \angle PBC - \angle GFE\\ &= \angle BGP + \angle GPB - (180^\circ - \angle BPC - \angle PCB) + 180^\circ - \angle GPE\\ &= \angle BGP + \angle FEC = \angle BGP + \angle PGF\\ &= \angle BGF.\end{aligned}$$

Từ đó

$$\begin{aligned}\angle HGX &= \angle HGP - \angle PGK = \angle HEC - \angle PBK\\ &= \angle HEC - (\angle GBF - \angle GBA - \angle PBF),\end{aligned} \quad (1).$$

tương tự

$$\angle GHX = \angle GFB - (\angle HCE - \angle HCA - \angle QCE). \quad (2).$$

Lại dễ có $\angle GBA = \angle HCA$, $\angle PBF = \angle QCE$ và $\angle BGF = \angle CHE$ nên

$$\angle GBF + \angle GFB = \angle HEC + \angle EHC.$$

hay

$$\angle HEC - \angle GBF = \angle GFB - \angle EHC. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta dễ suy ra $\angle HGX = \angle GHX$. $\square$

Nhận xét. Bài toán tổng quát vẫn đúng khi thay thế đường tròn (A) thành đường tròn bất kỳ tâm thuộc OA với cách giải biến đổi góc tương tự. Ta để ý kỹ là trong lời giải này cũng như lời giải bài toán gốc thì việc biến đổi góc để chỉ ra $\angle EHC = \angle FGB$ là một bước quan trọng.

Có thể thấy rằng thực chất việc G, H nằm trên (O) cũng không mấy quan trọng, ta đi tới bài toán tổng quát hơn như sau.

Bài toán 23. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD. (A) là đường tròn bất kỳ tâm A. Gọi E, F là hai điểm thuộc (A) sao cho E, F đối xứng qua AD và tia AE nằm giữa AB, AF. Trên đường tròn (A) lấy hai điểm G, H sao cho $GH \perp OA$ đồng thời tia AB nằm giữa tia AG, AC. Gọi CE, BF lần lượt cắt đường tròn (A) tại P, Q khác E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG và CQH lần lượt cắt BA, CA tại K, L khác B, C. Chứng minh rằng GK và HL cắt nhau trên AO.*

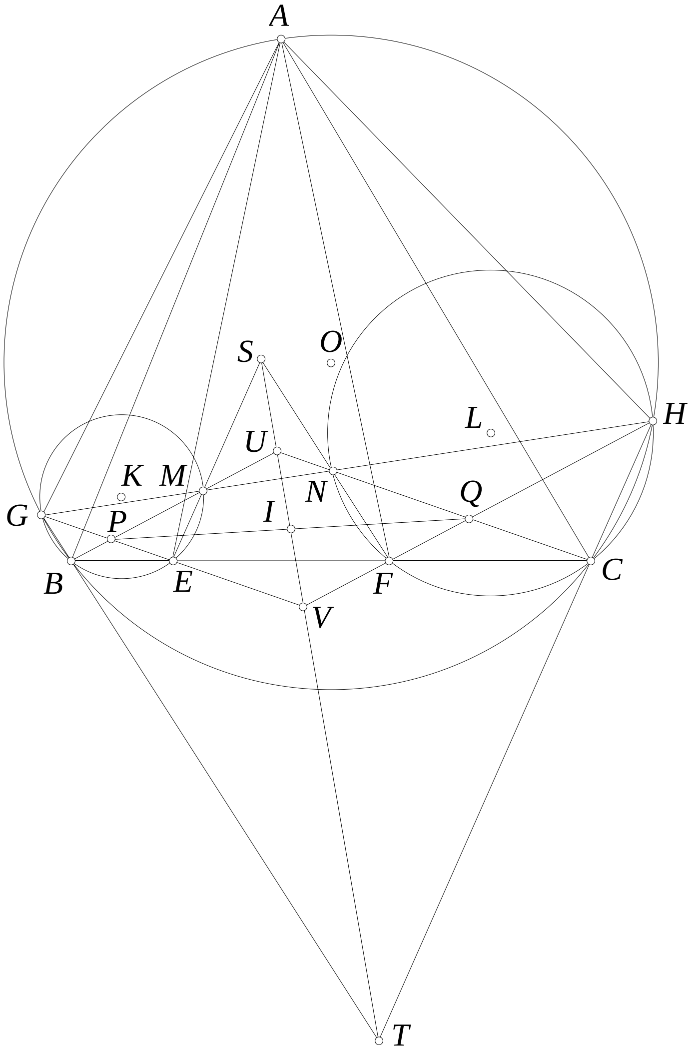
Hơn nữa ta có thấy trong bài toán trên ta có thể thay đường tròn (A) thành một đường tròn bất kỳ có tâm trên OA. Từ đó ta nghĩ rằng ta có thể thay đường thẳng OA thành trung trực của một dây cung của (O), ta lại có bài toán sau.

Bài toán 24. *Cho tứ giác $XYBC$ nội tiếp đường tròn (O). (A) là đường tròn bất kỳ tâm với tâm A thuộc trung trực XY. D là hình chiếu của A lên BC. Gọi E, F là hai điểm thuộc (A) sao cho E, F đối xứng qua AD và tia AE nằm giữa AB, AF. Trên đường tròn (A) lấy hai điểm G, H sao cho $GH \perp OA$ đồng thời tia AB nằm giữa tia AG, AC. Gọi CE, BF lần lượt cắt đường tròn (A) tại P, Q khác E, F Đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG và CQH lần lượt cắt BY, CX tại K, L khác B, C. Chứng minh rằng GK và HL cắt nhau trên AO.*

Nhờ đó ta có thể có nhiều cách khai thác bài toán, ssu đây chúng tôi trình bày một số khai thác trên mô hình bài toán này.

Bài toán 25. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (A) tâm A cắt BC tại E, F và cắt (O) tại G, H sao cho E nằm giữa B, E và tia AB nằm giữa tia AC, AG. GH cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác BEG và CFH lần lượt M, N khác G, H. Gọi GE, HF lần lượt cắt BM, CN tại P, Q. Gọi ME, GB lần lượt cắt NF, HC tại S, T. Chứng minh rằng ST chia đôi PQ.*

Lời giải. Theo chứng minh bài toán gốc ta đã chỉ ra $\angle BGE = \angle CHF$.



Từ đó có

$$\begin{aligned}\angle FNH &= \angle FNC + \angle CFH = \angle FHC + \angle CFH\\ &= \angle EGB + \angle EGM = \angle BGM\\ &= \angle MEF.\end{aligned}$$

Từ đó tứ giác $MNFE$ nội tiếp. Dễ thấy

$$\angle HNC = \angle HFC = \angle EGH = \angle MBE,$$

suy ra tứ giác $BMNC$ nội tiếp.

Gọi (K), (L) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BEG và CFH thì từ các tứ giác $EMNF$ và $BGHC$ nội tiếp ta suy ra ST là trục đẳng phương của (K) và (L).

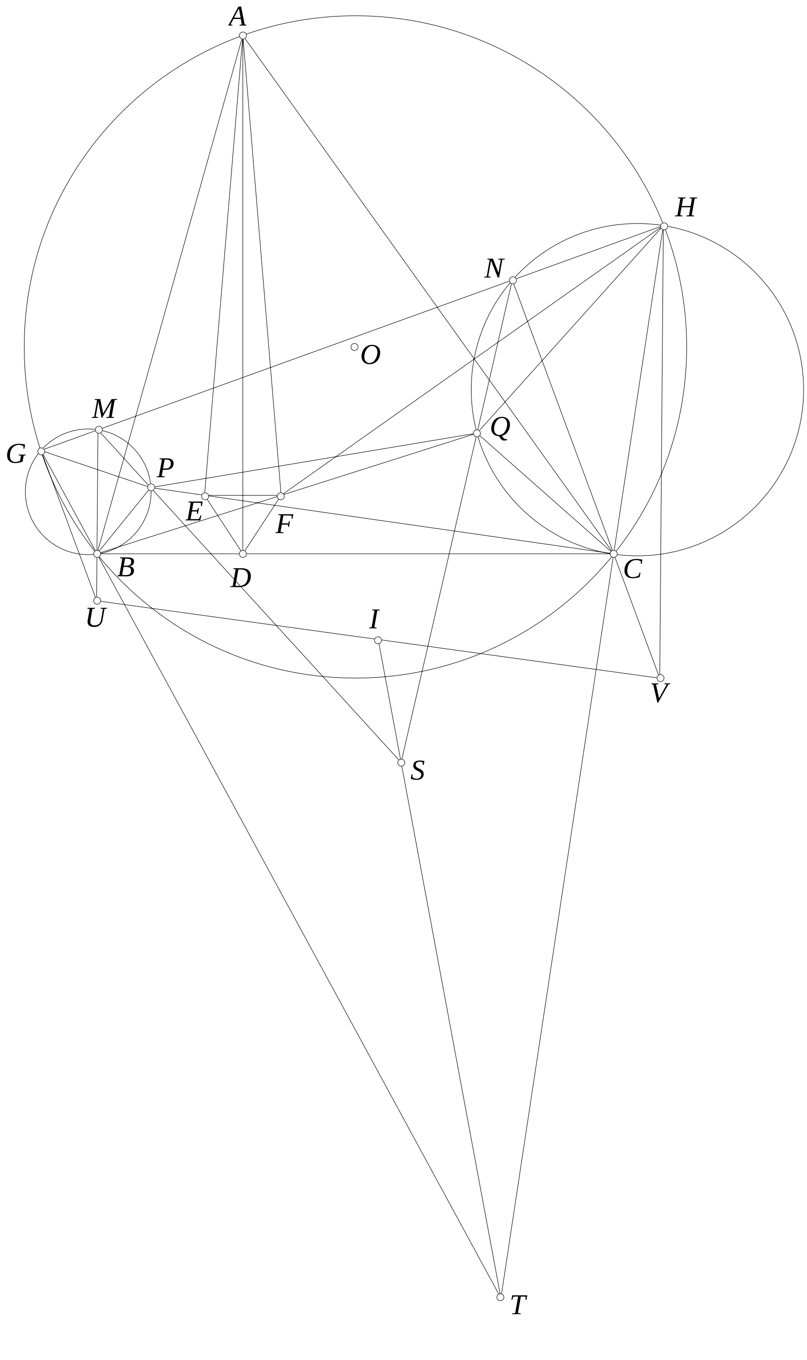
Ta lại có $\angle GEB = \angle GMB = \angle NCB$ nên $GE \parallel NC$, tương tự $HF \parallel MB$. Gọi BM, GE lần lượt cắt CN, HF tại U, V thì $PUQV$ là hình bình hành nên UV chia đôi PQ.

Cũng từ các tứ giác $BMNC$ và $GEFH$ nội tiếp ta suy ra U, V cũng thuộc trục đẳng phương của (K), (L) là ST.

Vậy từ đó ST chia đôi PQ. $\square$

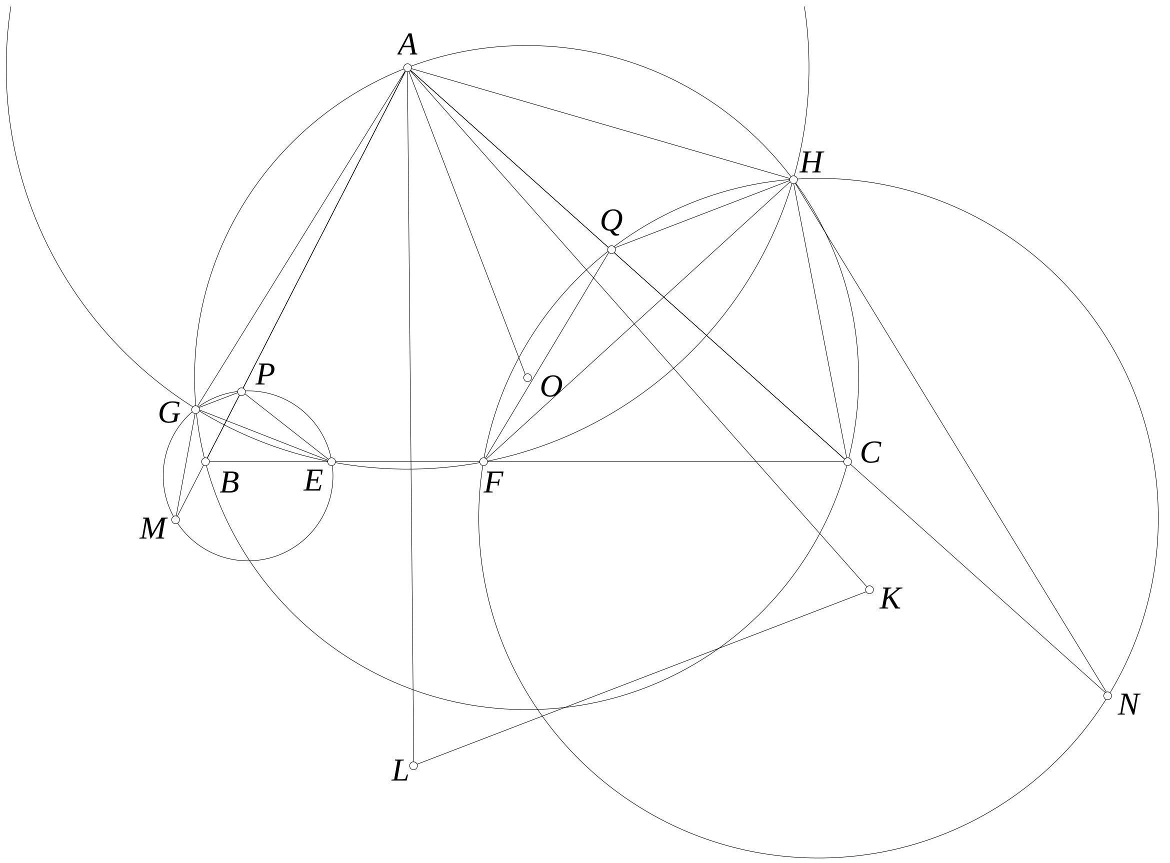
Một cách hoàn toàn tương tự, ta thu được một bài toán chia đôi đoạn thẳng thú vị trên mô hình bài toán tổng quát.

Bài toán 26. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD. (A) là đường tròn bất kỳ tâm A. Gọi E, F là hai điểm thuộc (A) sao cho E, F đối xứng qua AD và tia AE nằm giữa AB, AF. Đường tròn (A) cắt (O) tại G, H sao cho tia AB nằm giữa tia AG, AC. CE, BF lần lượt cắt đường tròn (A) tại P, Q khác E, F. GH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG và CQH lần lượt tại M, N. MP, GB lần lượt cắt NQ, HC tại S, T. Lấy các điểm U, V trên đường thẳng MB, NC sao cho $UG \parallel NC$ và $VH \parallel MB$. Chứng minh rằng ST chia đôi UV.*



Nếu biết sử dụng phép nghịch đảo các bạn có thể làm thêm bài toán sau để luyện tập.

Bài toán 27. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (A) tâm A cắt BC tại E, F và cắt (O) tại G, H sao cho E nằm giữa B, F và tia AB nằm giữa tia AC, AG. Đường tròn qua H, C tiếp xúc HA cắt CA tại Q khác C. Đường tròn qua G, B tiếp xúc GA cắt AB tại P khác B. Đường tròn ngoại tiếp tam giác GPE và HQF cắt AB, AC tại M, N khác P, Q. Chứng minh rằng bán kính ngoại tiếp hai tam giác AGM và AHN bằng nhau.*



3. Kết luận

Kỳ thi IMO năm nay lại tiếp tục có hai bài hình lần lượt ở vị trí số 3 và số 4. Hai bài toán hình học thi IMO năm nay đều là các bài toán hay có giá trị cao. Ngoài việc đưa ra những mở rộng khác nhau bài viết còn có ứng dụng các bài toán thi này vào những bài toán chia đôi đoạn thẳng đẹp mắt. Cũng từ bài toán chia đôi đoạn thẳng của ngày thứ nhất ta thu được một cách phát biểu thú vị về hai đường tròn tiếp xúc nhau từ các cách phát biểu mới thu được lại có thể ứng dụng phát biểu cho bài toán tổng quát thứ hai, điều này làm tăng sự hấp dẫn cho bài toán thi. Bài toán chia đôi đoạn thẳng trong phát triển ngày thứ hai cũng không kém phần thú vị, đó là sự kết hợp ứng dụng của trục đẳng phương và hình bình hành. Hai bài toán hình của kỳ thi năm nay đẹp và có tính gợi mở và phát triển cao, rất xứng đáng là đề bài thi IMO.

Cuối cùng tác giả muốn được nói lời cảm ơn tới bạn **Trịnh Huy Vũ** học sinh lớp 12A1 Toán THPT chuyên KHTN học trò của tác giả, người đã có nhiều đóng góp cho bài viết và giúp tác giả chỉnh sửa một số lỗi trong bài viết.

Tài liệu tham khảo

[1] Topic Problem 3.

http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1112748_problem3

[2] Topic Problem 4 :

http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1113163_problem_4

MỞ RỘNG CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC BẰNG PHÉP QUY NẠP

Nguyễn Văn Linh

(*Hà Nội*)

1. Mở đầu

Quy nạp là một phương pháp quen thuộc trong toán học. Nó cho phép ta rút ra quy luật tổng quát dựa trên những trường hợp riêng. Có thể sử dụng phép quy nạp để mở rộng rất nhiều định lý hình học, xây dựng các định nghĩa mới.

Trong bài viết này, tác giả xin giới thiệu tới bạn đọc một số định lý hình học hay cũng như những tìm tòi của tác giả khi sử dụng phép quy nạp trong hình học.

2. Một số ví dụ

Chúng ta bắt đầu từ một định lý quen thuộc về điểm Miquel:

Trên mặt phẳng cho 4 đường thẳng cắt nhau tạo thành 4 tam giác. Khi đó đường tròn ngoại tiếp 4 tam giác đồng quy tại một điểm gọi là điểm Miquel của 4 đường thẳng.

Miquel cũng chứng minh trong trường hợp 5 đường thẳng rằng:

5 điểm Miquel của mỗi bộ 4 trong 5 đường thẳng cùng nằm trên một đường tròn, gọi là đường tròn Miquel của 5 đường thẳng.

Cũng xin nêu một trường hợp rất đẹp là đường tròn Miquel của hình sao năm cánh, được phát biểu như sau:

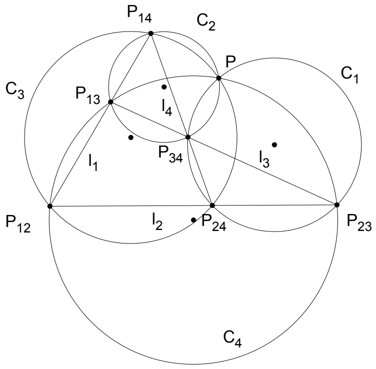
Cho ngũ giác lồi $B_1B_2B_3B_4B_5$. Gọi A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng

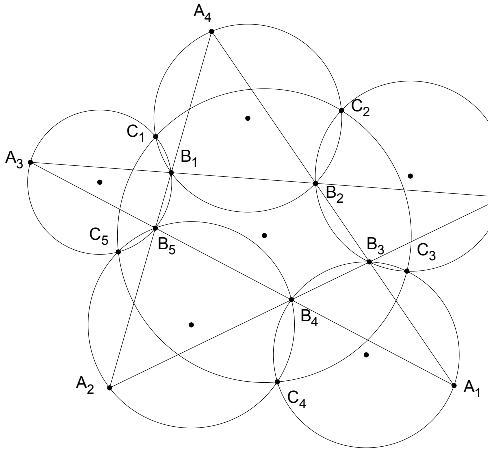
$$(B_2B_3,\, B_4B_5), (B_3B_4,\, B_1B_5), (B_4B_5,\, B_1B_2), (B_2B_3,\, B_5B_1), (B_1B_2,\, B_3B_4).$$

Gọi C_1 là giao điểm của $(A_4B_1B_2)$ và $(A_3B_1B_5)$.

Tương tự ta xác định C_2, C_3, C_4, C_5. Khi đó 5 điểm C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 cùng thuộc một đường tròn (xem [2]).

Một câu hỏi đặt ra là liệu có thể tổng quát định lý nêu trên không?





Năm 1870, W.K.Clifford, một nhà toán học Anh, đã tổng quát bài toán cho n đường thẳng. Cụ thể,

1. với $n = 6$, ta có 6 đường tròn Miquel của mỗi bộ 5 trong 6 đường thẳng đồng quy tại một điểm, gọi là điểm Clifford của 6 đường thẳng.

2. Với $n = 7$, ta có 7 điểm Clifford của mỗi bộ 6 trong 7 đường thẳng cùng thuộc một đường tròn, gọi là đường tròn Clifford của 7 đường thẳng.

3. Với $n = 8$, ta có 8 đường tròn Clifford của mỗi bộ 7 trong 8 đường thẳng đồng quy tại một điểm, gọi là điểm Clifford của 8 đường thẳng.

Bài toán cũng đúng với trường hợp n bất kì lớn hơn 3. Có hai trường hợp xảy ra như sau:

1. Nếu n chẵn, n đường tròn Clifford của mỗi bộ $n - 1$ trong n đường thẳng đồng quy tại điểm Clifford của n đường thẳng.

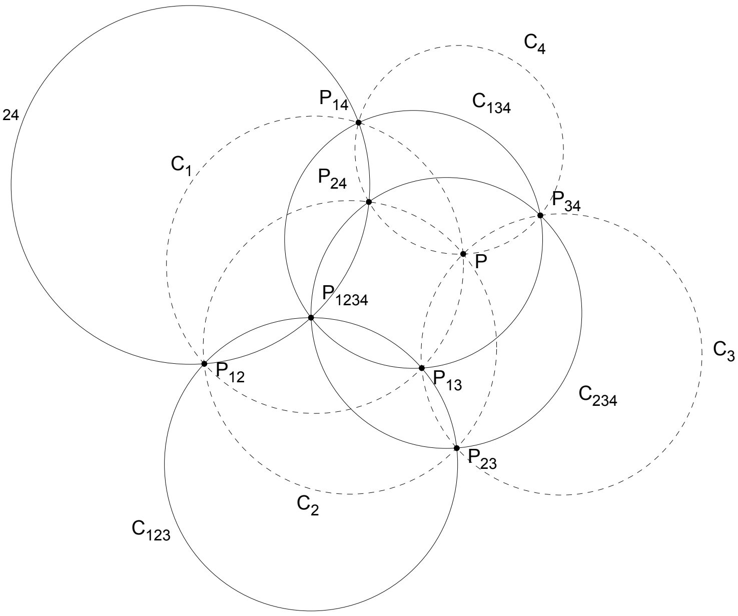
2. Nếu n lẻ, n điểm Clifford của mỗi bộ $n - 1$ trong n đường thẳng cùng thuộc đường tròn Clifford của n đường thẳng.

Quay lại định lý về điểm Miquel, sử dụng phép nghịch đảo phương tích bất kì có tâm là điểm bất kì nằm ngoài 4 đường thẳng và không nằm trên 4 đường tròn ngoại tiếp 4 tam giác. Định lý Miquel trở thành bài toán:

Cho một điểm P bất kì trên mặt phẳng và 4 đường tròn $C_i(i = \overline{1,4})$ đi qua P. Gọi P_{ij} là giao điểm thứ hai của C_i và C_j; C_{ijk} là đường tròn qua 3 điểm P_{ij}, P_{jk}, P_{ik}. Khi đó 4 đường tròn $C_{234}, C_{134}, C_{124}, C_{123}$ đồng quy tại điểm P_{1234} gọi là điểm Clifford của 4 đường tròn $C_i(i = \overline{1,4})$.

Bằng một số suy luận đơn giản ta cũng nhận thấy P là điểm Clifford của 4 đường tròn C_{234}, C_{134}, C_{124}, C_{123}. Sử dụng phép nghịch đảo tương tự trong trường hợp 5 đường thẳng, gọi C_5 là đường tròn thứ 5 đi qua P. Khi đó 5 điểm $P_{2345}, P_{1345}, P_{1245}, P_{1235}, P_{1234}$ cùng thuộc đường tròn C_{12345} gọi là đường tròn Clifford của 5 đường tròn.

Tổng quát, cho n đường tròn $C_i(i = \overline{1,n})$ đi qua P. Trường hợp n chẵn, n đường tròn $C_{23\ldots n}, C_{13\ldots n}, \ldots, C_{12\ldots n-1}$ đồng quy tại điểm $P_{12\ldots n}$. Trường hợp n lẻ, n điểm $P_{23\ldots n}, P_{13\ldots n}$, $\ldots, P_{12\ldots n-1}$ cùng thuộc đường tròn $C_{12\ldots n}$. Đó là dạng phát biểu thứ hai của định lý về chuỗi đường tròn Clifford.



Sau đây chúng ta sẽ chứng minh dạng phát biểu thứ hai của định lý chuỗi đường tròn Clifford. Bạn đọc cũng có thể tìm thấy lời giải khác cho dạng phát biểu thứ nhất trong [7].

Chứng minh. Trường hợp $n = 4$ là một định lý quen thuộc nên xin nhường lại cho bạn đọc. Với $n = 5$. Gọi C là đường tròn qua 3 điểm P_{2345}, P_{1345}, P_{1245}.

Có 4 đường tròn qua điểm P_{2345} là $C, C_{345}, C_{245}, C_{235}$. Ta thấy rằng:
3 đường tròn $C_{345}, C_{245}, C_{235}$ có các giao điểm thứ hai lần lượt là P_{45}, P_{35}, P_{25}. Đồng thời 3 điểm này cùng thuộc đường tròn C_5.

3 đường tròn C, C_{345}, C_{245} có các giao điểm thứ hai lần lượt là P_{1345}, P_{1245}, P_{45}. Đồng thời 3 điểm này cùng thuộc đường tròn C_{145}.

Lại có C_5 giao C_{145} tại 2 điểm P_{15} và P_{45}. Như vậy P_{15} là điểm Clifford của 4 đường tròn $C, C_{345}, C_{245}, C_{235}$.

Mặt khác, 3 đường tròn C, C_{345}, C_{235} giao nhau tại 3 điểm P_{1345}, X, P_{35} (2.1). Ta suy ra X thuộc đường tròn qua 3 điểm P_{1345}, P_{35}, P_{15} (đường tròn C_{135}). Lại có X thuộc đường tròn C_{235} nên X là điểm P_{1235} hoặc P_{35}. Do X và P_{35} phân biệt theo (2.1) nên X là P_{1235}, tức là P_{2345}, P_{1345}, P_{1245}, P_{1235} cùng thuộc một đường tròn. Tương tự suy ra trường hợp $n = 5$ đúng.

Với $n = 6$, ta chứng minh $C_{23456}, C_{13456}, C_{12456}, C_{12356}$ đồng quy.

- Giao điểm của $C_{13456}, C_{12456}, C_{12356}$ lần lượt là P_{1456}, P_{1356}, P_{1256}. Khi đó, 3 điểm này cùng thuộc đường tròn C_{156}.
- Giao điểm của $C_{23456}, C_{12456}, C_{12356}$ lần lượt là P_{2456}, P_{2356}, P_{1256}. Khi đó, 3 điểm này cùng thuộc đường tròn C_{256}.
- Giao điểm của $C_{23456}, C_{13456}, C_{12356}$ lần lượt là P_{3456}, P_{2356}, P_{1356}. Khi đó, 3 điểm này cùng thuộc đường tròn C_{356}.
- Giao điểm của $C_{23456}, C_{13456}, C_{12456}$ lần lượt là P_{3456}, P_{2456}, P_{1456}. Khi đó, 3 điểm này cùng thuộc đường tròn C_{456}.

4 đường tròn $C_{156}, C_{256}, C_{356}, C_{456}$ cùng đi qua P_{56} nên áp dụng định lý điểm Clifford của 4 đường tròn ta thu được $C_{23456}, C_{13456}, C_{12456}, C_{12356}$ đồng quy tại điểm Clifford của 4 đường tròn $C_{156}, C_{256}, C_{356}, C_{456}$. Chứng minh tương tự suy ra trường hợp $n = 6$ đúng.

Trường hợp tổng quát hoàn toàn chứng minh tương tự hai trường hợp $n = 5; 6$. Bằng phép nghịch đảo suy ra dạng phát biểu thứ nhất của đường tròn Clifford đúng. Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét.
Một điều thú vị là ta đã xây dựng một tập hợp gồm

$$C_n^1 + C_n^3 + \cdots + C_n^{2[(n-1)/2]+1} = 2^{n-1} \text{ đường tròn và}$$

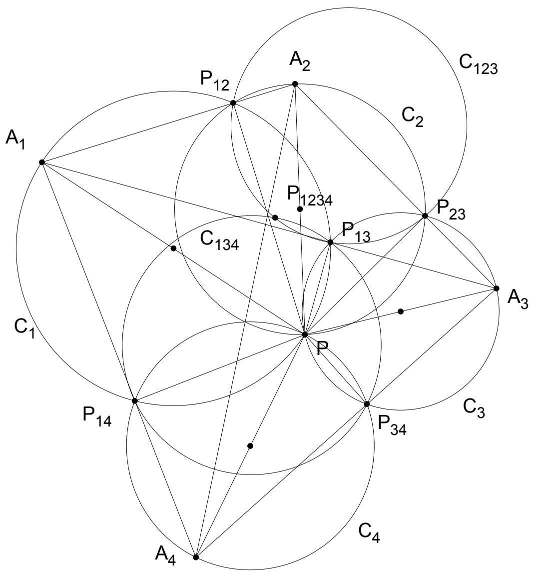
$$C_n^2 + C_n^4 + \cdots + C_n^{2[n/2]} = 2^{n-1} \text{ điểm.}$$

Trong đó mỗi đường tròn đều đi qua n điểm và mỗi điểm đều nằm trên n đường tròn.

Thật vậy, xét đường tròn bất kì $C_{k_1k_2\ldots k_j}(k_q \in \{1, 2, \ldots, n\}, q = \overline{1, j})$. Khi đó $C_{k_1k_2\ldots k_j}$ đi qua $P_{k'_1k'_2\ldots k'_{j-1}}(k'_q \in \{k_1, k_2, \ldots, k_j\}, q = \overline{1, j-1})$ và $P_{k_1k_2\ldots k_jk_i}(i \in \{1, 2, \ldots, n\}, i > j)$. Như vậy $C_{k_1k_2\ldots k_j}$ đi qua $j + (n - j) = n$ điểm.

Tương tự ta cũng chứng minh được mỗi điểm đều thuộc n đường tròn. Tiếp theo, chúng ta đến với một bài toán của tạp chí **Toán học và tuổi trẻ.**

Bài toán 1. *Trong mặt phẳng cho 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 và một điểm P bất kì. Khi đó đường tròn pedal của P ứng với các tam giác $A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_4, A_1A_2A_3$ đồng quy tại một điểm (xem [8]).*



Lời giải. Gọi C_1, C_2, C_3, C_4 lần lượt là đường tròn đường kính PA_1, PA_2, PA_3, PA_4. Kí hiệu P_{ij} là giao điểm thứ hai của C_i và $C_j(i; j = \overline{1, 4})$. C_{ijk} là đường tròn ngoại tiếp tam giác $P_{ij}P_{jk}P_{ki}(k = \overline{1, 4})$.

Theo định lý đường tròn Clifford ta thu được $C_{234}, C_{134}, C_{124}, C_{123}$ đồng quy tại P_{1234}.

Mặt khác, ta nhận thấy $P_{ij}P_{jk}P_{ki}$ là tam giác pedal của tam giác $A_iA_jA_k(k = \overline{1, 4})$. Từ đó suy ra đpcm. □

Nhận xét.
Bài toán 1 có thể coi là một dạng phát biểu khác của đường tròn Clifford. Một cách tương tự ta có thể tổng quát bài toán 1 cho n điểm $A_i (i = \overline{1,n})$ như sau.

Bài toán 2. *Với $n = 5$, cho điểm P và 5 điểm $A_i (i = \overline{1,5})$. Gọi P_{ijkm} là giao điểm của các đường tròn*

$$C_{jkm}, C_{ikm}, C_{ijm}, C_{ijk} (i, j, k, m = \overline{1,5}).$$

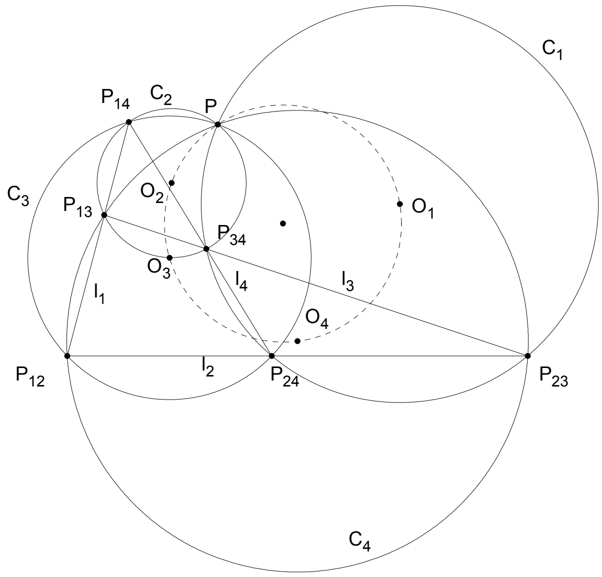
Khi đó, 5 điểm $P_{2345}, P_{1345}, P_{1245}, P_{1235}, P_{1234}$ cùng thuộc đường tròn C_{12345}. Các điểm và đường tròn được định nghĩa tương tự với n bất kì ($n > 3$), chia ra hai trường hợp n chẵn hoặc lẻ.

Dựa vào bài toán 1 và định lý về điểm Euler-Poncelet (sẽ giới thiệu sau), tác giả tìm ra một bài toán mở rộng khác, xin nêu ra và không chứng minh.

Bài toán 3. *Trong mặt phẳng cho 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 sao cho bất kì 3 điểm nào trong số đó đều không thẳng hàng và không có điểm nào là trực tâm của tam giác tạo bởi ba điểm còn lại. Ta định nghĩa điểm A_n là trực tâm của tam giác $A_iA_jA_k (1 \le i < j < k \le n-1, n > 4)$. Từ đó tạo thành tập hợp điểm $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$. Khi đó tất cả đường tròn pedal của bất kì điểm A_i ứng với tam giác tạo bởi 3 trong số $n-1$ điểm còn lại và tất cả đường tròn Euler của các tam giác tao bởi 3 trong số n điểm đồng quy. Như vậy chúng ta có $nC_{n-1}^3 + C_n^3$ đường tròn đồng quy tại một điểm.*

Năm 1877, G. de Longchamps đưa ra bài toán như sau.

Trong mặt phẳng cho n đường thẳng. Với $n = 4$, 4 đường thẳng cắt nhau tạo thành 4 tam giác. Khi đó tâm của các đường tròn ngoại tiếp 4 tam giác này cùng thuộc một đường tròn, gọi là đường tròn Morley của 4 đường thẳng. Đường tròn Morley cũng đồng thời đi qua điểm Miquel của 4 đường thẳng đó. Với $n = 5$, 5 đường tròn Morley của mỗi bộ 4 trong 5 đường thẳng đó đồng quy tại một điểm gọi là điểm de Longchamps của 5 đường thẳng, đồng thời tâm của 5 đường tròn Morley cùng thuộc một đường tròn, gọi là đường tròn Morley của 5 đường thẳng. Tổng quát với n bất kì ($n \ge 4$), n đường tròn Morley của mỗi bộ $n-1$ trong n đường thẳng đó đồng quy tại một điểm gọi là điểm de Longchamps của n đường thẳng, đồng thời tâm của n đường tròn Morley cùng thuộc một đường tròn, gọi là đường tròn Morley của n đường thẳng (xem [3]). Lời giải sau đây dựa theo [5] hoặc [6].



Lời giải. Trước tiên cho n đường thẳng $l_i (i = \overline{1,n})$. Kí hiệu C_i là đường tròn Morley của tập hợp $n-1$ đường thẳng ngoại trừ l_i; O_i là tâm của C_i; C_{ij} là đường tròn Morley của tập hợp $n-2$ đường thẳng ngoại trừ l_i, l_j; O_{ij} là tâm của C_{ij}; P_{ij} là giao điểm của l_i và l_j.

Trường hợp $n = 4$. Ta có C_1, C_2, C_3, C_4 đồng quy tại M là điểm Miquel của 4 đường thẳng.

Do $O_2O_3 \perp P_{14}M$, $O_1O_3 \perp P_{24}M$ nên

$$(O_3O_2, O_3O_1) \equiv (MP_{14}, MP_{24}) \equiv (P_{12}P_{14}, P_{12}P_{24}) \equiv (l_1, l_2) \pmod{\pi}.$$

Tương tự $(O_4O_2, O_4O_1) \equiv (l_1, l_2) \pmod{\pi}$. Từ đó suy ra O_1, O_2, O_3, O_4 cùng thuộc một đường tròn C. Kết quả C đi qua M thu được từ một số biến đổi góc đơn giản, xin không trình bày ở đây.

Như trên ta đã chứng minh $(O_4O_2, O_4O_1) \equiv (l_1, l_2) \pmod{\pi}$ hay tổng quát $(O_kO_i, O_kO_j) \equiv (l_i, l_j) \pmod{\pi} (2.1)$ đúng với $n = 4$.

Giả sử (2.1) đúng với $n-1$ đường thẳng $(n \geq 5)$, ta chứng minh nó cũng đúng với n đường thẳng.

Thật vậy, xét trường hợp có n đường thẳng. Hai đường tròn C_1 và C_2 giao nhau tại O_{12} và một điểm L. Ta có

$$(LO_{23}, LO_{13}) \equiv (LO_{23}, LO_{12}) + (LO_{12}, LO_{13}) \pmod{\pi}.$$

Do $L, O_{12}, O_{23} \in C_2$ và theo điều giả sử (4.1) đúng với $n-1$ đường thẳng nên $(LO_{23}, LO_{12}) \equiv (l_3, l_1) \pmod{\pi}$. Tương tự $(LO_{12}, LO_{13}) \equiv (l_2, l_3) \pmod{\pi}$. Suy ra

$$(LO_{23}, LO_{13}) \equiv (l_2, l_3) + (l_3, l_1) \equiv (l_2, l_1) \pmod{\pi}.$$

Từ đó $L \in C_3$, tương tự suy ra n đường tròn $C_i (i = \overline{1,n})$ đồng quy tại L.

Mặt khác do C_1 và C_2 giao nhau tại O_{12} và L nên $O_1O_2 \perp LO_{12}$. Tương tự, $O_1O_3 \perp LO_{13}$. Từ đó

$$(O_1O_2, O_1O_3) \equiv (LO_{12}, LO_{13}) \equiv (l_2, l_3) \pmod{\pi}$$

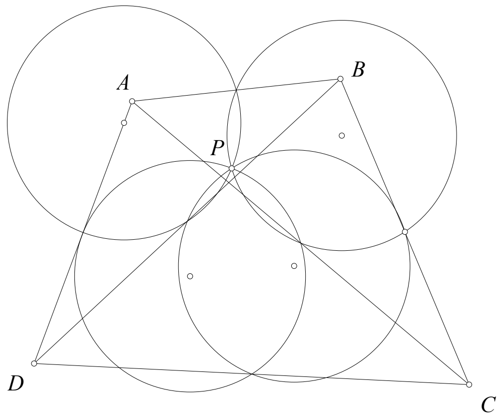
Tương tự $(O_iO_2, O_iO_3) \equiv (l_2, l_3) \pmod{\pi}$. Ta thu được n điểm $O_i (i = \overline{1,n})$ cùng thuộc một đường tròn.

Đồng thời cũng suy ra (2.1) đúng với n đường thẳng. Theo nguyên lý quy nạp bài toán được chứng minh. □

Tiếp theo chúng ta định nghĩa lại đường tròn Euler như sau: đường tròn Euler của dây A_1A_2 của (O, R) là đường tròn đi qua trung điểm A_1A_2 có bán kính $\dfrac{R}{2}$.

Đường tròn Euler của tam giác $A_1A_2A_3$ nội tiếp (O) là đường tròn có tâm là giao điểm của ba đường tròn Euler của ba dây A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3, bán kính $\dfrac{R}{2}$. Câu hỏi đặt ra là có thể tổng quát theo cách tương tự như vậy không? Chúng ta có định lý sau về điểm Euler-Poncelet của tứ điểm.

Bài toán 4. *Cho 4 điểm A, B, C, D bất kì sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Khi đó đường tròn Euler của 4 tam giác ABC, BCD, CDA, DAB đồng quy tại một điểm gọi là điểm Euler-Poncelet của 4 điểm A, B, C, D.*



Phép chứng minh định lý này khá đơn giản, sử dụng góc định hướng, vì vậy xin dành lại cho bạn đọc.

Bây giờ chúng ta cho 4 điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn có bán kính bằng R. Khi đó hiển nhiên đường tròn Euler của 4 tam giác

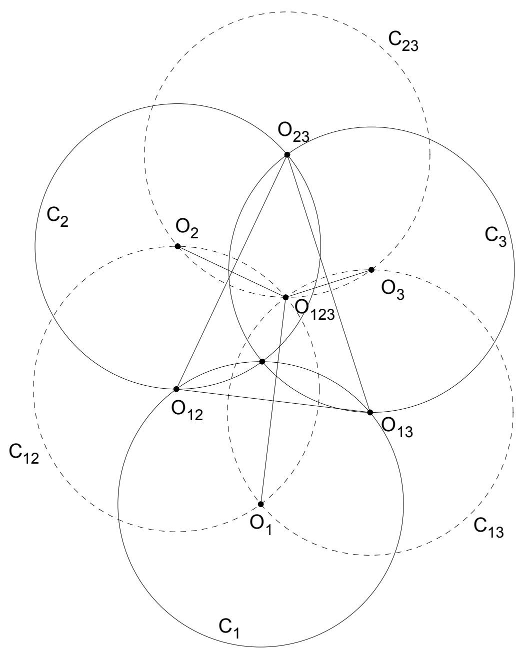
$$ABC, BCD, CDA, DAB$$

cùng có bán kính bằng $\frac{R}{2}$, đồng thời chúng đồng quy tại điểm Euler-Poncelet P của 4 điểm A, B, C, D.

Do đó, tâm đường tròn Euler của 4 tam giác đều nằm trên đường tròn $(P, \frac{R}{2})$. Ta gọi $(P, \frac{R}{2})$ là đường tròn Euler của tứ giác nội tiếp $ABCD$.

Từ đó dẫn đến bài toán tổng quát.

Bài toán 5. *Đường tròn Euler của $n-$giác $A_1A_2\dots A_n$ nội tiếp (O) là đường tròn có tâm là giao điểm của n đường tròn Euler của $(n-1)-$giác có đỉnh là $n-1$ trong n đỉnh $A_i(i=\overline{1,n})$, bán kính bằng $\frac{R}{2}$. Đồng thời đường tròn Euler của $n-$giác nội tiếp đi qua tâm của n đường tròn Euler của $(n-1)-$giác có đỉnh là $(n-1)$ trong n đỉnh trên.*



Lời giải. Giả sử bài toán đúng với $(n-1)-$giác. Ta chứng minh bài toán đúng với $n-$giác.

Trước tiên cho $n-$giác $A_1A_2\dots A_n$ nội tiếp (O). Ta kí hiệu $C_{i_1i_2\dots i_k}$ là đường tròn Euler của $(n-k)-$giác có đỉnh thuộc tập hợp

$$\{A_1, A_2, \dots, A_n/A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}\}(i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\});\ O_{i_1i_2\dots i_k}$$

là tâm của $C_{i_1i_2\dots i_k}$.

Như vậy ta chỉ cần chứng minh n đường tròn $C_i(i = \overline{1,n})$ đồng quy.

Từ giả thiết quy nạp suy ra ba đường tròn C_{23}, C_{13}, C_{12} đồng quy tại O_{123} và O_1, O_2, O_3 lần lượt là giao điểm của C_{12} và C_{13}, C_{12} và C_{23}, C_{13} và C_{23}.

Do C_{12}, C_{13}, C_{23} có bán kính đều bằng $\frac{R}{2}$ nên $(O_{123}, \frac{R}{2})$ là đường tròn ngoại tiếp của tam giác $O_{23}O_{13}O_{12}$.

C_{23} và C_{12} giao nhau tại O_{123} và O_2 nên O_2 là điểm đối xứng với O_{123} qua $O_{12}O_{23}$. Tương tự O_1, O_3 lần lượt là điểm đối xứng với O_{123} qua $O_{13}O_{12}$, $O_{13}O_{23}$. Theo một kết quả quen thuộc C_1, C_2, C_3 đồng quy tại trực tâm của tam giác $O_{23}O_{13}O_{12}$.

Chứng minh tương tự suy ra n đường tròn $C_i(i = \overline{1,n})$ đồng quy. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

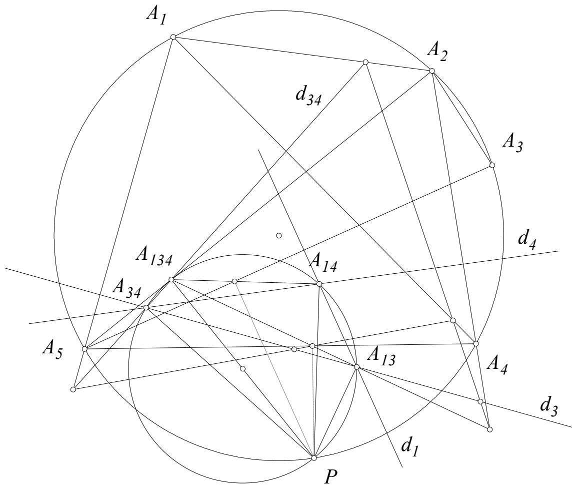
Trên Group **BÀI TOÁN HAY- LỜI GIẢI ĐẸP- ĐAM MÊ TOÁN HỌC,** tác giả **Trần Việt Hùng** đã đưa ra một mở rộng cho đường thẳng Simson mà bắt nguồn từ bài toán T7/351 năm 2006 trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Bài toán này cũng từng xuất hiện trong [6], tuy nhiên tác giả cuốn sách không đưa ra chứng minh mà chỉ dẫn lời giải trong một cuốn sách khác về số phức trong hình học (xem [9]).

Bài toán 6. *Cho tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi P là điểm bất kì trên (O).*
a) *Chứng minh hình chiếu của P trên các đường thẳng Simson của P ứng với tam giác $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$ thẳng hàng, gọi là đường thẳng Simson của P ứng với tứ giác $A_1A_2A_3A_4$.*

b) *Chứng minh rằng tồn tại đường thẳng Simson của P ứng với $n-$giác nội tiếp $A_1A_2A_3\dots A_n$, nghĩa là hình chiếu của P trên đường thẳng Simson của P ứng với các $n-1$ giác có đỉnh là $n-1$ trong n đỉnh trên thẳng hàng.*

Lời giải. a) Dễ thấy 4 đường thẳng Simson của P tạo thành một tứ giác toàn phần nhận P làm điểm Miquel nên hình chiếu của P trên các đường thẳng này nằm trên đường thẳng Simson của P ứng với tứ giác toàn phần đó.

b) Như vậy bài toán đúng với $n = 3, 4$. Giả sử bài toán đúng với $n-1$, ta chứng minh bài toán đúng với n.



Gọi d_i là đường thẳng Simson của P ứng với $n-1$ giác không chứa đỉnh A_i. d_{ij} là đường thẳng Simson của P ứng với $n-2$ giác không chứa đỉnh A_i, A_j. Gọi A_{ij} là hình chiếu của P trên d_{ij}. Dễ thấy A_{ij} là giao của d_i và d_j.

Xét 3 đường thẳng d_i, d_j, d_k $(i, j, k = \overline{1, n}, i \neq j \neq k)$. 3 đường thẳng này giao nhau tạo thành tam giác $A_{ij}A_{ik}A_{jk}$.

Do d_{ij}, d_{ik}, d_{jk} đồng quy tại A_{ijk}- hình chiếu của P trên d_{ijk} là đường thẳng Simson của P ứng với $n-3$ giác nên A_{ij}, A_{ik}, A_{jk} cùng nằm trên đường tròn đường kính PA_{ijk}.

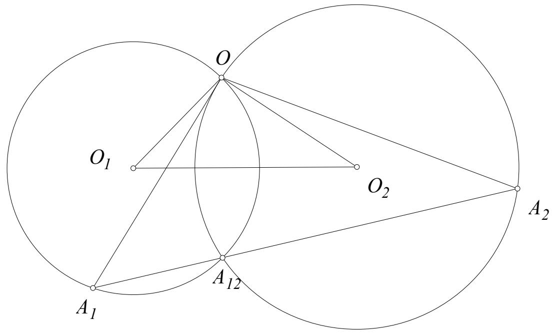
Chứng minh tương tự suy ra n đường thẳng $d_1, d_2, \ldots, d_n$ có chung điểm Miquel P. Vậy hình chiếu của P trên $d_1, d_2, \ldots, d_n$ cùng nằm trên đường thẳng Simson của P ứng với $n-$giác $A_1A_2\ldots A_n$. Theo nguyên lý quy nạp ta có đpcm. □

Nhận xét. Từ bài toán này, chúng ta đã xây dựng được một tập hợp n đường thẳng sao cho đường tròn ngoại tiếp mọi tam giác tạo bởi 3 trong n đường thẳng đều đồng quy tại một điểm. Chúng ta biết rằng đường thẳng Steiner là ảnh của đường thẳng Simson qua phép vị tự tâm P tỉ số 2, do đó trực tâm của mọi tam giác tạo bởi 3 trong n đường thẳng đều thẳng hàng.

Tiếp theo chúng ta đến với một định lý quen thuộc về điểm Miquel của tam giác như sau: *Cho tam giác ABC. X, Y, Z là 3 điểm bất kì lần lượt nằm trên BC, CA, AB. Khi đó đường tròn ngoại tiếp các tam giác AYZ, BXZ, CXY đồng quy tại một điểm gọi là điểm Miquel của tam giác ABC ứng với bộ điểm X, Y, Z.*

Bằng cách phát biểu ngược bài toán và tăng số đường tròn đồng quy, ta thu được bài toán tổng quát như sau.

Bài toán 7. *Cho n đường tròn $C_1, C_2, \ldots, C_n$ cùng đi qua điểm O. Gọi A_{ij} là giao điểm của C_i và C_j. B_1 là điểm bất kì trên C_1. B_1A_{12} cắt C_2 lần thứ hai tại B_2. Tương tự ta thu được $B_3, B_4, \ldots, B_n, B_{n+1}$. Chứng minh rằng $B_{n+1} \equiv B_1$.*



Lời giải. Gọi $O_1, O_2, \ldots, O_n$ lần lượt là tâm của $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Dễ chứng minh hai tam giác O_1OO_2 và A_1OA_2 đồng dạng cùng hướng. Do đó

$$(OA_1, OA_2) \equiv (OO_1, OO_2) \pmod{\pi}.$$

Chứng minh tương tự suy ra

$$\begin{aligned}(OA_1, OA_{n+1}) &\equiv (OA_1, OA_2) + (OA_2, OA_3) + \ldots + (OA_n, OA_{n+1}) \\ &\equiv (OO_1, OO_2) + (OO_2, OO_3) + \ldots + (OO_n, OO_1) \equiv 0 \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Vậy $A_{n+1} \equiv A_1$. □

Mở rộng bài toán hơn nữa khi n đường tròn đều không đồng quy tại một điểm, ta thu được bài toán mới.

Bài toán 8. *Cho n đường tròn $C_1, C_2, \ldots, C_n$ thỏa mãn các cặp đường tròn C_i và C_{i+1} đều cắt nhau tại hai điểm $A_{i(i+1)}$ và $B_{i(i+1)}$. Gọi P_1 là điểm bất kì trên C_1. P_1A_{12} cắt C_2 lần thứ hai tại P_2, P_2A_{23} cắt C_3 tại P_3, tương tự ta có $P_4, P_5, \ldots, P_n, P_{n+1}$. $P_{n+1}B_{12}$ cắt C_2 lần thứ hai tại P_{n+2}, tương tự ta có $P_{n+3}, \ldots, P_{2n+1}$. Chứng minh rằng $P_{2n+1} \equiv P_1$.*

Lời giải. Ta có $P_1, P_{n+1}, A_{12}, B_{12}$ đồng viên, $P_2, P_{n+2}, A_{12}, B_{12}$ đồng viên nên theo định lý Reim, $P_1P_{n+1} \parallel P_2P_{n+2}$.

Chứng minh tương tự suy ra

$$P_1P_{n+1} \parallel P_2P_{n+2} \parallel P_3P_{n+3} \parallel \ldots \parallel P_{n+1}P_{2n+1}.$$

Do đó $P_{2n+1} \equiv P_1$. □

Trong đợt tập huấn đội tuyển chuẩn bị cho kì thi toán quốc tế năm 2014, bạn **Nguyễn Huy Tùng**, HS THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng, đã phát hiện ra một bổ đề khá thú vị.

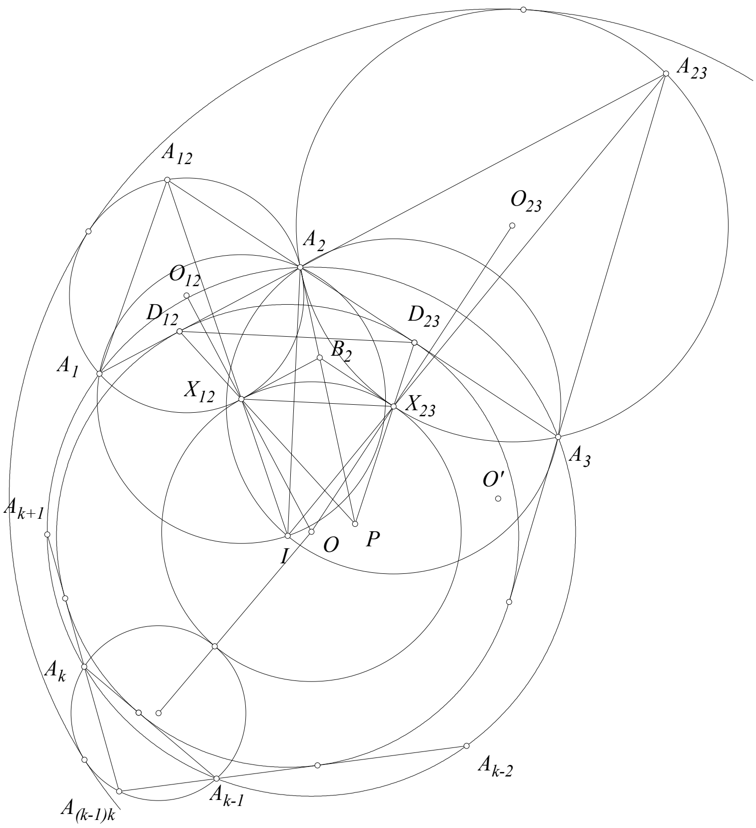
Bài toán 9. *Cho tứ giác ngoại tiếp $ABCD$. Gọi E là giao điểm của AB và CD, F là giao điểm của AD và BC. Khi đó tồn tại một đường tròn tiếp xúc với 4 đường tròn ngoại tiếp các tam giác EAD, EBC, FAB, FCD.*

Tác giả đã thử bổ sung thêm điều kiện tứ giác $ABCD$ vừa ngoại tiếp vừa nội tiếp, kết quả thu được khá thú vị.

Bài toán 10. *Cho tứ giác lưỡng tâm $ABCD$ có tâm đường tròn ngoại tiếp là O. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AB và CD, AD và BC. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn tâm O tiếp xúc với bốn đường tròn ngoại tiếp các tam giác EAD, EBC, FAB, FCD.*

Bài toán này đã được **Trần Minh Ngọc**, SV Đại học Sư phạm TP HCM, mở rộng cho $n-$giác lưỡng tâm như sau.

Bài toán 11. *Cho $n-$giác lưỡng tâm $A_1A_2A_3...A_n$. Gọi $A_{i(i+1)}$ là giao của $A_{i-1}A_i$ và $A_{i+1}A_{i+2}(i = 1, n)$. Chứng minh rằng tồn tại hai đường tròn tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A_iA_{i(i+1)}A_{i+1}$.*



Lời giải. Ta chứng minh kết quả mạnh hơn:
Nếu $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_kA_{k+1}$ lần lượt là các tiếp tuyến kẻ từ $A_1, A_2, \dots, A_k$ nằm trên (O) tới đường tròn (I) bất kì chứa trong (O) thì tồn tại hai đường tròn tiếp xúc với

$$(A_1A_{12}A_2), (A_2A_{23}A_3), \dots, (A_{k-1}A_{(k-1)k}A_k).$$

Thật vậy,

Gọi $D_{i(i+1)}$ là tiếp điểm của (I) với A_iA_{i+1}, $X_{i(i+1)}$ là giao điểm thứ hai của $A_{i(i+1)}I$ với $(A_iA_{i(i+1)}A_{i+1})$, $O_{i(i+1)}$ là tâm của $(A_iA_{i(i+1)}A_{i+1})$.

Do $X_{i(i+1)}$ là điểm chính giữa cung A_iA_{i+1} của $(O_{i(i+1)})$ nên $O_{i(i+1)}X_{i(i+1)}$ đồng quy tại O.

Gọi B_i là giao của tiếp tuyến tại $X_{(i-1)i}$ của $(O_{(i-1)i})$ và tiếp tuyến tại $X_{(i(i+1)}$ của $(O_{(i(i+1)})$.

Do I là tâm đường tròn bàng tiếp của các tam giác $A_iA_{i(i+1)}A_{i+1}$ nên $X_{i(i+1)}$ là tâm ngoại tiếp tam giác $A_iA_{i+1}I$. Điều này nghĩa là $X_{(i-1)i}X_{i(i+1)}$ vuông góc với A_iI hay $X_{(i-1)i}X_{i(i+1)}$ song song với $D_{(i-1)i}D_{i(i+1)}$.

Từ đó, hai tam giác $B_iX_{(i-1)i}X_{i(i+1)}$ và $A_iD_{(i-1)i}D_{i(i+1)}$ có cạnh tương ứng song song hay đồng dạng với nhau. Suy ra $B_iX_{(i-1)i} = B_iX_{i(i+1)}$.

Từ đó, hai tam giác vuông $OB_iX_{(i-1)i}$ và $OB_iX_{i(i+1)}$ bằng nhau, suy ra $OX_{(i-1)i} = OX_{i(i+1)}$. Như vậy tồn tại một đường tròn tâm O tiếp xúc với tất cả các đường tròn $(O_{i(i+1)})$ $(i = \overline{1, k-1})$.

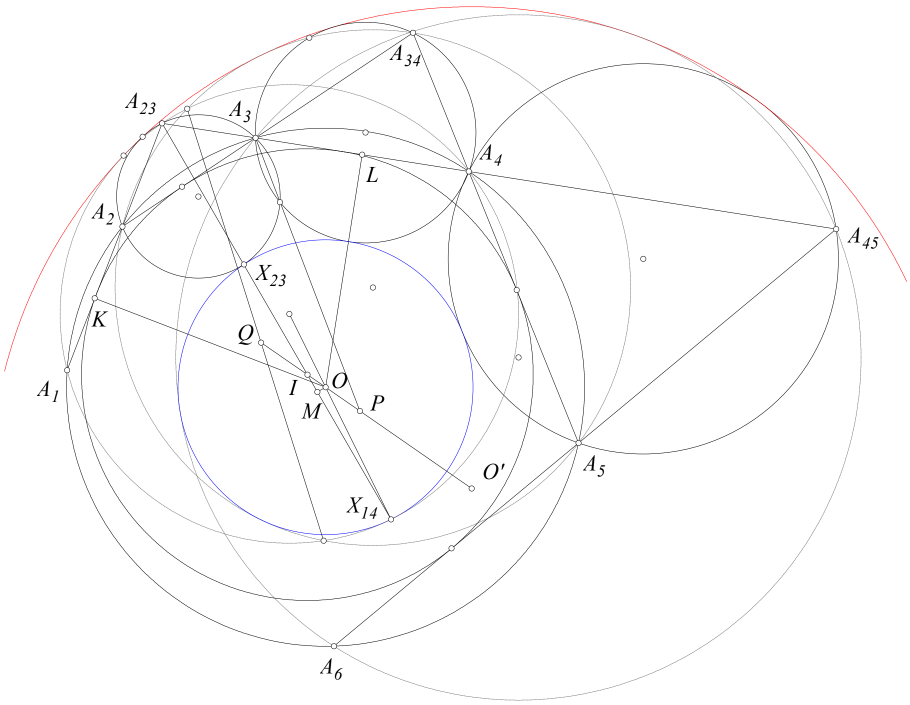
Dễ thấy hai đường gấp khúc $A_1A_2 \ldots A_{k-1}$ và $B_1B_2 \ldots B_{k-1}$ đều có đường tròn tiếp xúc với các cạnh và có cạnh tương ứng song song nên chúng vị tự nhau theo tâm P.

Do $B_iX_{(i-1)i} = B_iX_{i(i+1)}$ nên B_i nằm trên trục đẳng phương của $(O_{(i-1)i})$ và $(O_{i(i+1)})$. Từ đó, P là tâm đẳng phương của các đường tròn $(O_{i(i+1)})$.
Xét phép nghịch đảo

$$\mathcal{I}_P^{\mathcal{P}_P/(O_{i(i+1)})} : (O_{i(i+1)}) \mapsto (O_{i(i+1)}), (O, OX_{i(i+1)}) \mapsto (O').$$

Như vậy (O') là đường tròn thứ hai tiếp xúc với các đường tròn $(O_{i(i+1)})$. □

Nhận xét. Chúng ta có thể chứng minh đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A_1A_{23}A_4$, $A_2A_{34}A_5$, $\ldots$, $A_{k-2}A_{(k-1)k}A_{k+1}$ cũng tiếp xúc với hai đường tròn $(O, OX_{i(i+1)})$ và (O').



Trong bài viết tác giả chỉ chứng minh các đường tròn ngoại tiếp này tiếp xúc với $(O, OX_{i(i+1)})$, phần chứng minh (O') có thể đi theo hướng sau: Chứng minh các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A_1A_{23}A_4$, $A_2A_{34}A_5, \ldots, A_{k-2}A_{(k-1)k}A_{k+1}$ có chung tâm đẳng phương là Q và $(QPOO') = -1$.

Từ đó, tồn tại phép nghịch đảo tâm Q giữ nguyên $k-2$ đường tròn và biến (O) thành (O').

Gọi X_{14} là giao điểm thứ hai của $A_{23}X_{23}$ với $(A_1A_{23}A_4)$. Gọi K, L, M lần lượt là trung điểm của A_1A_2, A_3A_4, $X_{23}X_{14}$. Sử dụng tỉ số phương tích của hai đường tròn ta có

$$\frac{\mathcal{P}_K/(A_2A_{23}A_3)}{\mathcal{P}_K/(A_1A_{23}A_4)} = \frac{\overline{KA_2} \cdot \overline{KA_{23}}}{\overline{KA_1} \cdot \overline{KA_{23}}} = -1.$$

Chứng minh tương tự suy ra

$$\frac{\mathcal{P}_K/(A_2A_{23}A_3)}{\mathcal{P}_K/(A_1A_{23}A_4)} = \frac{\mathcal{P}_L/(A_2A_{23}A_3)}{\mathcal{P}_L/(A_1A_{23}A_4)} = \frac{\mathcal{P}_M/(A_2A_{23}A_3)}{\mathcal{P}_M/(A_1A_{23}A_4)}.$$

Suy ra K, L, M nằm trên đường tròn đồng trục với hai đường tròn $(A_2A_{23}A_3)$ và $(A_1A_{23}A_4)$. Hiển nhiên K, L nằm trên đường tròn đường kính OA_{23} nên M cũng nằm trên (OA_{23}), suy ra $OM \perp A_{23}M$ hay $OX_{23} = OX_{14}$.

Suy ra $X_{14} \in (O, OX_{23})$.

Do O và X_{14} đều nằm trên trung trực của A_1A_4 nên (O, OX_{23}) tiếp xúc với $(A_1A_{23}A_4)$.

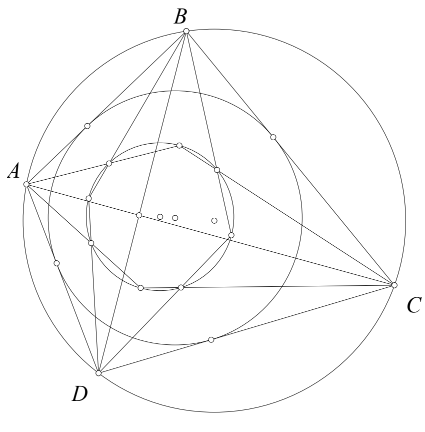
Chúng ta tiếp tục xem xét hai bài toán khá quen thuộc sau.

Bài toán 12. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi I_1, I_2, I_3, I_4 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB. Chứng minh rằng $I_1I_2I_3I_4$ là hình chữ nhật.*

Bài toán 13. *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi P là giao điểm của AC và BD; I_1, I_2, I_3, I_4 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác APB, BPC, CPD, DPA. Chứng minh rằng các điểm I_1, I_2, I_3, I_4 cùng thuộc một đường tròn.*

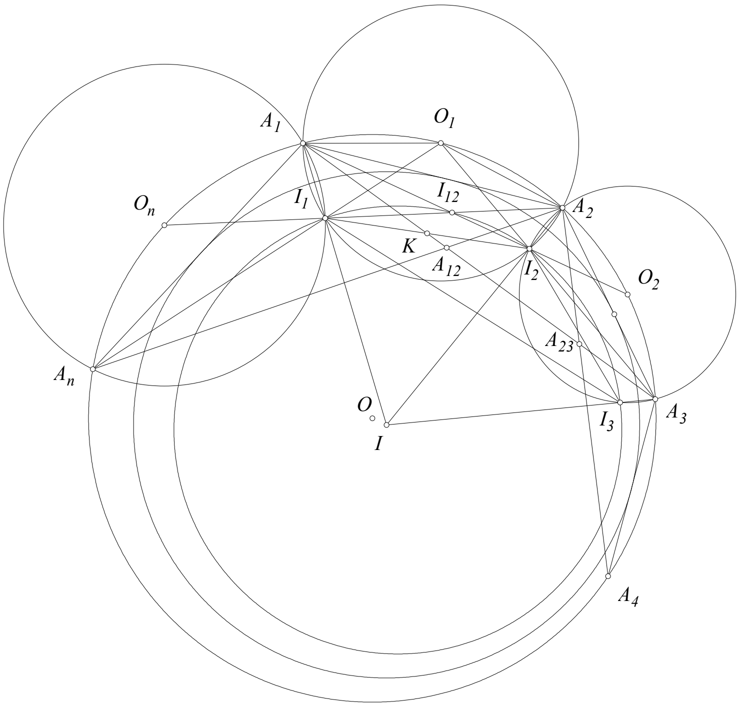
Hai bài toán trên khá giống nhau, kết hợp chúng lại ta thu được bài toán mới.

Bài toán 14. *Cho tứ giác lưỡng tâm $ABCD$. Gọi P là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng tâm nội tiếp của 8 tam giác ABC, BCD, CDA, DAB, APB, BPC, CPD, DPA cùng thuộc một đường tròn.*



Một câu hỏi đặt ra là liệu có thể tổng quát cho những đa giác lưỡng tâm có nhiều hơn 4 cạnh không? Sau một số biến đổi tác giả đã chứng minh được bài toán đúng với ngũ giác lưỡng tâm và nhận ra rằng lời giải cho trường hợp ngũ giác hoàn toàn áp dụng được cho trường hợp đa giác n cạnh bất kì.

Bài toán 15. *(Mathley round 10) Cho $n-$giác lưỡng tâm $A_1A_2A_3\ldots A_n (n \geq 3)$. Kí hiệu I_i là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $A_{i-1}A_iA_{i+1}$; $A_{i(i+1)}$ là giao điểm của A_iA_{i+2} và $A_{i-1}A_{i+1}$; $I_{i(i+1)}$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $A_iA_{i(i+1)}A_{i+1} (i = \overline{1, n})$. Chứng minh rằng $2n$ điểm $I_1, I_2, ..., I_n, I_{12}, I_{23}, \ldots, I_{n1}$ cùng thuộc một đường tròn.*



Lời giải. Gọi O_i là điểm chính giữa của cung A_iA_{i+1}. Do I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $A_nA_1A_2, A_1A_2A_3$ nên $O_1A_1 = O_1A_2 = O_1I_1 = O_1I_2$ hay A_1, A_2, I_1, I_2 cùng thuộc (O_1, O_1A_1). Tương tự với các đường tròn $(O_2), (O_3), \ldots, (O_n)$.

Lại có $A_1I_1, A_2I_2, \ldots, A_nI_n$ đồng quy tại tâm đường tròn nội tiếp I của n-giác $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ nên phép nghịch đảo tâm I, phương tích $\overline{IA_1}.\overline{II_1}$ biến đường tròn ngoại tiếp n-giác $A_1A_2 \ldots A_n$ thành đường tròn đi qua $I_1, I_2, \ldots, I_n$ hay $I_1, I_2, \ldots, I_n$ cùng thuộc một đường tròn.

Mặt khác, gọi K là giao của I_1I_2 và A_1A_3. Ta có

$$\angle KI_1I_{12} = \angle I_2A_1A_2 = \angle KA_1I_{12}$$

nên tứ giác $I_1A_1I_{12}K$ nội tiếp. Từ đó

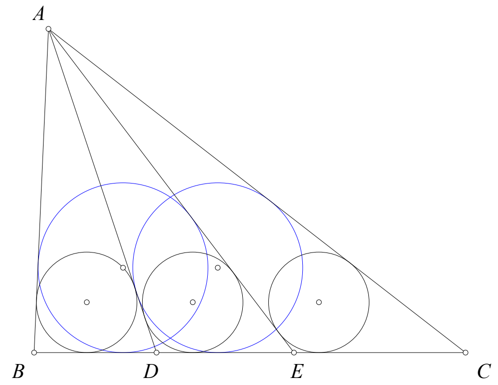
$$\angle I_1I_{12}A_1 = \angle I_1KA_1 = \angle I_2I_1I - \angle I_1A_1A_3.$$

Mà $\angle II_1I_2 = \angle A_1A_2I_2 = \angle I_2A_2A_3 = \angle I_2I_3I, \angle I_1A_1A_3 = \angle I_1I_3I$, ta thu được $\angle I_1I_{12}A_1 = \angle I_2I_3I - \angle I_1I_3I = \angle I_1I_3I_2$.

Vậy I_{12} nằm trên $(I_1I_2I_3)$. Chứng minh tương tự suy ra đpcm. □

Để kết thúc bài viết, xin giới thiệu một bài toán khá thú vị về các đường tròn nội tiếp tam giác có bán kính bằng nhau.

Bài toán 16. *Cho tam giác ABC và hai điểm D, E nằm trên cạnh BC sao cho D nằm giữa B và E. Giả sử đường tròn nội tiếp của 3 tam giác ABD, ADE, AEC có bán kính bằng nhau. Chứng minh rằng bán kính của đường tròn nội tiếp hai tam giác ABE, ACF có bán kính bằng nhau.*



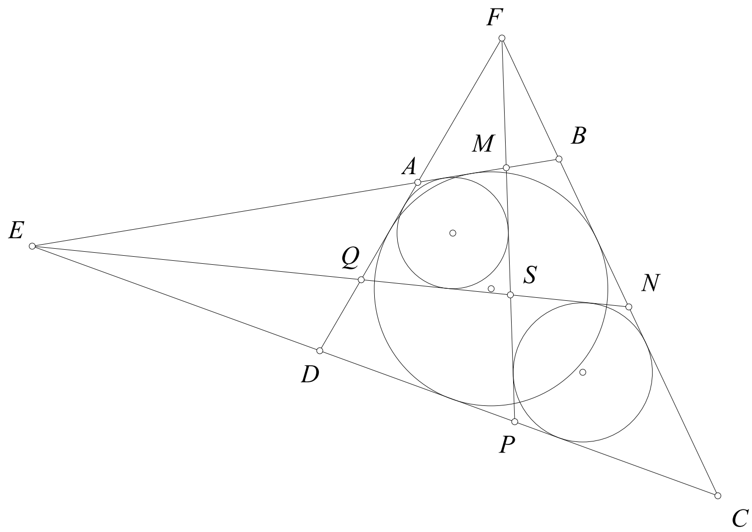
Không khó để nhận ra bài toán này có thể mở rộng cho trường hợp n đường tròn nội tiếp như sau.

Bài toán 17. *Cho một điểm P trong mặt phẳng và n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ liên tiếp trên một đường thẳng không đi qua P. Giả sử đường tròn nội tiếp của $n-1$ tam giác PA_1A_2, $PA_2A_3, ...,$ $PA_{n-1}A_n$ có bán kính bằng nhau. Chứng minh rằng đường tròn nội tiếp của hai tam giác PA_iA_{i+k} và PA_jA_{j+k} $(i, j = \overline{1, n-1}, i \neq j, k = \overline{1, n-2})$ có bán kính bằng nhau.*

Lời giải. (Dựa theo *Jean-louis Ayme*)

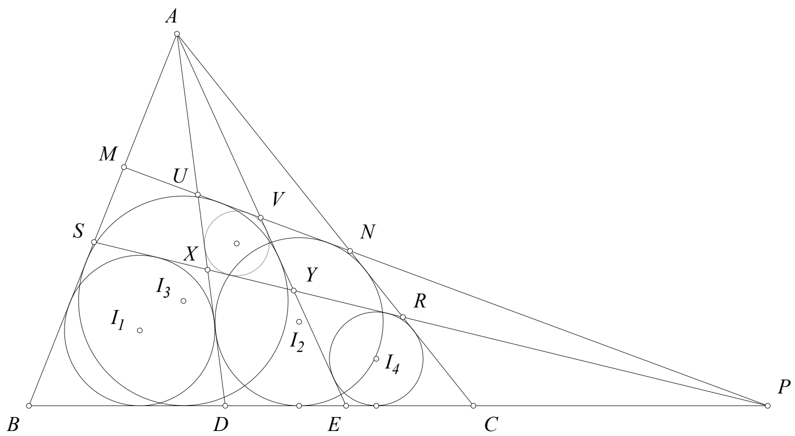
Trước hết, ta sẽ chứng minh các bổ đề sau:

Bổ đề 1. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). AB giao CD tại E, AD giao BC tại F. Các điểm M, N, P, Q lần lượt nằm trên AB, BC, CD, DA sao cho MP đi qua F, NQ đi qua E. MP giao NQ tại S. Khi đó tứ giác $AMSQ$ ngoại tiếp khi và chỉ khi tứ giác $CNSP$ ngoại tiếp.



Chứng minh.
Tứ giác $AMSQ$ ngoại tiếp khi và chỉ khi tứ giác lõm $EAFS$ ngoại tiếp. Theo định lý Pythot suy ra điều này tương đương $EA - FA = ES - FS$. (1)
Do tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp nên $EA - FA = EC - FC$. Suy ra (1) tương đương $ES - FS = EC - FS$, khi và chỉ khi tứ giác lõm $FCES$ ngoại tiếp hay tứ giác $CNSP$ ngoại tiếp.

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC và D, E nằm trên BC. Gọi $(I_1), (I_2), (I_3), (I_4)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ACD, ABE, ACE. Khi đó hai cặp $((I_1), (I_4))$ và $((I_2), (I_3))$ có chung tâm vị tự ngoài.



Chứng minh.
Gọi P là tâm vị tự ngoài của (I_2) và (I_3). Tiếp tuyến chung ngoài khác BC của (I_2) và (I_3) cắt AB, AC, AD, AE lần lượt tại M, N, U, V. Tiếp tuyến thứ hai kẻ từ P đến (I_1) cắt AB, AC, AD, AE lần lượt tại S, R, X, Y.

Áp dụng bổ đề 1 cho tứ giác ngoại tiếp $BMVE$ ta có tứ giác $BSXD$ ngoại tiếp nên tứ giác $UVYX$ ngoại tiếp. Lại áp dụng bổ đề 1 cho tứ giác ngoại tiếp $DUVC$ suy ra tứ giác $EYRC$ ngoại tiếp. Từ đó PS cũng là tiếp tuyến của (I_4) hay P là tâm vị tự ngoài của (I_1) và (I_4).
Trở lại bài toán.
Gọi đường tròn nội tiếp của tam giác PA_iA_{i+k} là $\omega_{i(i+k)}$. Xét 4 đường tròn $\omega_{12}, \omega_{34}, \omega_{13}, \omega_{24}$. Áp dụng bổ đề 2 suy ra 2 cặp đường tròn $(\omega_{12}, \omega_{34})$ và $(\omega_{13}, \omega_{24})$ có chung tâm vị tự. Do $\omega_{12} = \omega_{34}$ nên tâm vị tự của chúng ở vô cùng. Suy ra $\omega_{13} = \omega_{24}$. Chứng minh tương tự suy ra $\omega_{i(i+2)} = \omega_{j(j+2)}$.

Tiếp tục chứng minh bằng phép quy nạp ta có đpcm. □

Nhận xét. Theo cách giải trên chúng ta có thể tổng quát bài toán hơn nữa với giả thiết các đường tròn $\omega_{i(i+1)}$ đều có chung tâm vị tự ngoài P, khi đó các bộ đường tròn $\omega_{i(i+k)}$ cũng có chung tâm vị tự ngoài P.

Qua một số ví dụ trên có lẽ bạn đọc đã có cái nhìn tường tận hơn về các bài toán hình học sử dụng phép quy nạp. Đây là một dạng toán khá phức tạp vì rõ ràng nhiều bài toán không thể vẽ hình trong trường hợp tổng quát. Tuy nhiên điều này khá thú vị khi rèn luyện được cho chúng ta tư duy không phụ thuộc vào hình vẽ và giúp sáng tạo ra những bài toán mới.

Tài liệu tham khảo

[0] *Clifford's Circle Theorem*, from Wolfram Mathworld
`http://mathworld.wolfram.com/CliffordsCircleTheorem.html`

[0] *Miquel's Pentagram Theorem*, from Wolfram Mathworld
`http://mathworld.wolfram.com/MiquelsPentagramTheorem.html`

[0] J.W.Clawson, *A chain of circles associated with the 5-line*, The American Mathematical Monthly, Vol. 61, No. 3, Mar., 1954.

[0] W.K.Schief, *On generalized Clifford configuration: geometry and integrability*, Technische Universität Berlin. ARC Centre of Excellence for Mathematics and Statistics of Complex Systems, Australia.

[0] billzhao, *Weird Geometry Theorem [Miquel's theorems chain]*, Artofproblemsolving topic 14525.
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=50t=14525

[0] L.I.Golovina, I.M.Yaglom, *Phép quy nạp trong hình học*, NXB Giáo dục, 1997.

[0] Lhakpa Tsering (Labaciren), *Chain theorems of lines circles and planes*, Master thesis in Mathematics, Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Oslo, May 2008.

[0] *Đề ra kì này*, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, số 404, tháng 2/2011, NXB Giáo dục.

[0] Y.M. Yaglom, *Complex number in Geometry*, Academic Press, Newyork, 1968.

[0] *Tổng tập Mathley 2011-2012*, Trung tâm Toán và Khoa học Hexagon.
http://www.hexagon.edu.vn/mathley/tong-tap-mathley-17.html

[0] J-L. Ayme, *Equal incircles theorem or More incircles, a new adventure*, Ayme's Geometry blog.
http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

LỜI GIẢI VÀ BÌNH LUẬN ĐỀ THI IMO 2015

Ban biên tập)

Đánh giá một cách tổng quan thì đề thi năm nay là một đề thi khó. Ngay cả bài 1 và bài 4, các bài truyền thống là "*cho điểm*" thì năm nay cũng không đơn giản chút nào, đặc biệt là ý $1-(b)$, tức là chứng minh không tồn tại hệ điểm cân bằng không tâm có số điểm chẵn. Các bài 2 và 4 không khó về ý tưởng nhưng đòi hỏi có kỹ thuật xử lý điêu luyện. Bài hình số 3 không quá khó nhưng cũng là một cửa ải khó nhằn. Bài 6 được đánh giá là khó nhất kỳ thi, là một bài nằm giữa đại số và tổ hợp, phải có thời gian để ngấm tình huống mới có thể xử lý nổi.

Đi chi tiết vào từng bài. Bài 1 là một bài toán hình tổ hợp. Đây là một bài toán hay, dù ý (a) có thể là đã được biết trước. Ý (b) là ý mới và lời giải thông qua phép đếm rất thú vị. Phải nói đây là một bài toán đẹp, đơn giản nhưng không hiển nhiên. Rất IMO. Chỉ tiếc là như một số bạn đã nhận xét, ý (a) đã từng xuất hiện trong các cuốn sách olympic.

Bài 2 là một bài toán số học. Bài này được chọn có lẽ do cách phát biểu đẹp và đối xứng của nó. Đi sâu vào lời giải của nó thì không còn đẹp lắm, chủ yếu là vẫn dùng các xử lý kỹ thuật phức tạp nhưng không mới, không có ý nào hay. Những đề toán thế này sẽ thuận lợi cho các đội được ôn luyện nhiều, quen tay. Tuy nhiên, bài toán cũng có một ưu điểm là bài thuần túy số học, vì nhiều năm qua thì bài số học thuần túy bị "*xâm lấn*" bởi các bài toán "*số học tổ hợp*". Ví dụ bài các đồng xu năm ngoái ở Nam Phi được tính là bài số học nhưng bản chất là tổ hợp.

Bài số 3 là một bài toán hình học. Bài này không quá khó như những bài số 3 trước đó. Bài này có thể giải khá dễ dàng nếu dùng phép nghịch đảo. Nếu dùng số phức thì dù tính toán phức tạp hơn một chút nhưng hướng đi khá rõ ràng. Đây có lẽ là xu thế ra đề của ban giám khảo IMO những năm gần đây, họ chọn các bài đều hơn thay vì rất chênh lệch như trước, bài 1 nâng độ khó lên và bài 3 giảm độ khó xuống, không còn "*killing*" như trước.

Bài số 4 là một bài toán hình học dễ. Dù phát biểu khá dài dòng với nhiều yếu tố nhưng chỉ cần chú ý một chút là tìm được ý giải. Lời giải chỉ dùng biến đổi góc. Có thể coi bài này là bài dễ nhất kỳ thi.

Bài số 5 là một bài phương trình hàm, thuộc phân môn đại số. Bài này cũng thuần túy kỹ thuật, giải bằng các phép thế liên tiếp. Bài này cũng không có ý gì mới. Bài này có thể đánh giá ngang với bài 2 về mọi mặt.

Bài số 6 là bài khó nhất của kỳ thi, bất đẳng thức rời rạc. Ý cơ bản cần khai thác là nếu đặt $c_i = a_i + i - 1$ thì $i \leqslant a_i \leqslant i + 2014$ và các c_i đôi một khác nhau và c_i chứa mọi số nguyên dương ngoại trừ b số. Để hình dung được lời giải, ta cứ thay 2015 bằng 1 số lẻ bất kỳ và xét các số nhỏ trước, sẽ thấy được hướng đi rõ ràng hơn.

Bài toán này có lẽ được xuất phát từ khái niệm tung hứng lượng tử (Quantum juggling, hay Siteswap) `en.wikipedia.org/wiki/Siteswap` trong kỹ thuật, liên quan đến nhóm Weyl a-phin trong toán học hiện đại: hãy tưởng tượng là chúng ta tung các quả bóng vào thời gian i lên độ cao $a_i - 1$ và rơi xuống vào thời gian $a_i - 1 + i$. Chúng ta hãy cùng đi vào những lời giải chi tiết để hiểu rõ hơn các vấn đề.

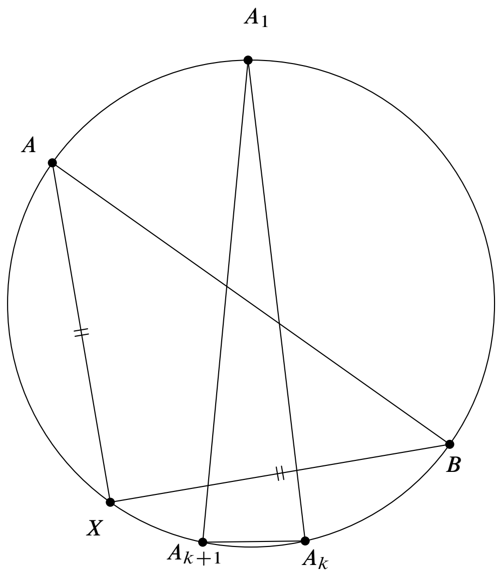
Bài toán 1. *Một tập hợp hữu hạn S các điểm nằm trên mặt phẳng là "cân bằng" nếu như với hai điểm A, B phân biệt thuộc S, luôn tồn tại một điểm C thuộc S mà $AC = BC$. Ta gọi tập hợp S là "không tâm" nếu như với mọi bộ ba điểm A, B và C thuộc S, không tồn tại điểm P thuộc S sao cho $PA = PB = PC$.*

(a) *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$, tồn tại một tập hợp cân bằng có n điểm.*

(b) *Tìm tất cả các số tự nhiên $n \geq 3$ sao cho tồn tại một tập vừa cân bằng, vừa không tâm và có n điểm.*

Lời giải. (a) Ta xét 2 trường hợp:

- Nếu n là số lẻ, đặt $n = 2k + 1$ với $k \geq 1$.

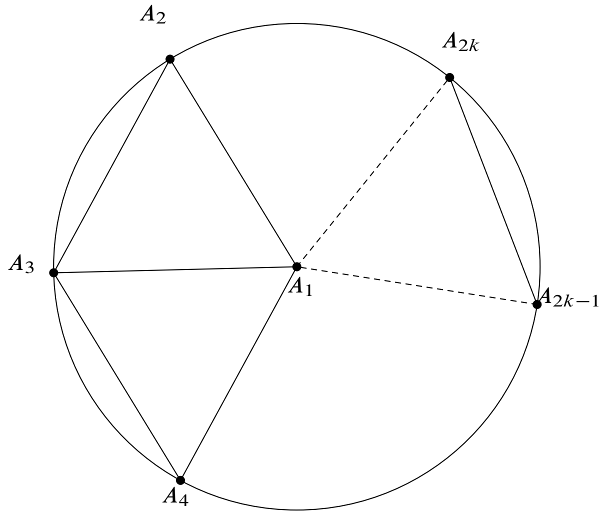


Xét đa giác đều có số lẻ cạnh là $2k + 1$. Ta sẽ chứng minh rằng tập hợp S gồm các đỉnh của đa giác này cân bằng.

Với 2 đỉnh tùy ý nào đó trong số $2k + 1$ đỉnh của đa giác trên, giả sử là A và B. Ta thấy các điểm đã cho sẽ bị đường thẳng nối A, B chia thành 2 phần có số lượng là x và y với $x + y = 2k - 1$. Do $2k - 1$ là số lẻ nên trong hai số x, y phải có một số là lẻ. Khi đó, điểm chính giữa trong phần có số lẻ điểm sẽ cách đều A, B.

- Với n là số chẵn, đặt $n = 2k$ với $k \geq 2$.

Xét đường tròn có tâm A_1 và các điểm $A_2, A_3, \ldots, A_{2k}$ nằm trên đường tròn, trong đó A_2, A_3, A_4 được chọn để thỏa mãn $A_1A_2A_3$ và $A_1A_3A_4$ là các tam giác đều.



Các cặp điểm $A_5 - A_6,\ A_7 - A_8,\ \ldots,\ A_{2k-1} - A_{2k}$ được chọn tùy ý và phân biệt nhau trên đường tròn sao cho 2 điểm trong một cặp cùng tạo với A_1 một tam giác đều. Tập hợp điểm này cũng cân bằng.

Thật vậy, ta thấy rằng nếu chọn 2 điểm tùy ý khác A_1, giả sử là $A_i,\ A_j$ thì có $A_1A_i = A_1A_j$. Nếu chọn 2 điểm mà trong đó, có 1 điểm là A_1, điểm còn lại là A_i, ta chỉ cần chọn thêm điểm thứ 3 mà $A_1,\ A_i$ và điểm đó tạo thành tam giác đều thì rõ ràng điểm đó cách đều $A_1,\ A_i$.

Vậy trong cả 2 trường hợp n chẵn và lẻ, luôn tồn tại tập hợp S thỏa mãn.

(b) Ta sẽ chứng minh rằng chỉ có các giá trị $n \geq 3$ lẻ thỏa mãn đề bài.

Thật vậy, với n lẻ, ta chỉ cần chọn một đa giác có lẻ đỉnh như phần (a). Dễ thấy rằng với 3 điểm tùy ý, không có điểm nào cách đều chúng (do tâm của đa giác không được chọn) nên tập hợp đó là không tâm. Rõ ràng nó cũng đã cân bằng nên chính là một tập hợp cần tìm.

Với n chẵn, giả sử rằng có một tập hợp S thỏa mãn đề bài.

Ta thấy rằng có tất cả $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ cặp điểm $(A,\ B)$ trong S nên tương ứng, cũng phải có $\frac{n(n-1)}{2}$ điểm C, tạm gọi là "*cầu nối*", mà $CA = CB$ (nếu có nhiều điểm như thế thì chỉ cần chọn một trong số chúng). Gọi k là số lần nhiều nhất mà một điểm được chọn làm cầu nối, suy ra

$$nk \geq \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow k \geq \frac{n-1}{2}.$$

Do n chẵn nên $\frac{n-1}{2} \notin \mathbb{Z}$, suy ra $k \geq \frac{n}{2}$. Gọi P là một điểm nào đó trong S có số lần được chọn làm cầu nối là k.

Ngoài điểm P ra, còn $n-1$ điểm nên nếu chúng được chia thành các cặp rời nhau thì phải có ít nhất $2k \geq 2 \cdot \frac{n}{2} = n$ điểm phân biệt, mâu thuẫn. Suy ra, phải có 2 cặp nào đó có điểm chung, giả sử là $(A,\ B)$ và $(A,\ C)$. Khi đó, $PA = PB = PC$ nên tập hợp này không thỏa mãn tính chất không tâm.

Vậy điều giả sử là sai và không có tập hợp S nào có số chẵn phần tử thỏa mãn. Do đó câu trả lời là $n \geq 3$ và n là số lẻ. $\square$

Bình luận.

Đây là một bài hình học tổ hợp và cả 2 yêu cầu của đề đều đòi hỏi phải xây dựng các mô hình thỏa mãn. Ta có thể thấy rằng việc chọn được ví dụ là một tập hợp có số lẻ điểm không quá khó vì chỉ cần xét đa giác đều một cách rất tự nhiên và kiểm tra cũng sẽ tương đối nhẹ nhàng. Hơn thế nữa, chính mô hình đó đã giải quyết được một phần cho cả 2 ý a và b của bài toán.

Có thể thấy bài toán này ở mức độ trung bình, không phải quá khó để giải quyết tình huống n lẻ, nhưng cũng không phải quá dễ để nghĩ ra việc phân chia chẵn – lẻ cũng như chứng minh không tồn tại một tập cân bằng, không tâm có số chẵn điểm.

Các mô hình đưa ra ở đây cũng không thực sự phong phú, cụ thể là không dễ dàng để tìm được các mô hình có tính chất tương tự như đã nêu ở trên.

Ý tưởng đếm bằng 2 cách dùng ở ý (b) cũng đã một lần xuất hiện trong đề IMO 1989 :

(IMO 1989) *Cho n, k là các số nguyên dương và S là một tập hợp có n phần tử thỏa mãn các điều kiện sau:*

(a) *Không có 3 điểm nào trong S thẳng hàng.*

(b) *Với mỗi điểm P thuộc S, tồn tại ít nhất k điểm nữa thuộc S mà cách đều P.*

Chứng minh rằng $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Ngoài ra, dưới đây cũng là một số bài toán tương tự:

(IMO 1999) *Một tập hợp S trong không gian được gọi là "đối xứng đầy đủ" nếu với 2 điểm A, B tùy ý nào đó trong S thì mặt phẳng trung trực của AB cũng là mặt phẳng đối xứng của toàn bộ các điểm của S. Chứng minh rằng nếu S hữu hạn thì tồn tại các điểm là đỉnh của một đa giác đều, hoặc là các đỉnh của một tứ diện đều, hoặc là các đỉnh của một bát diện đều.*

(Việt Nam TST 1992) *Trong mặt phẳng, xét tập hợp S gồm n điểm phân biệt ($n \geq 3$) thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:*

1. *Khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ thuộc S đều không vượt quá 1 đơn vị dài.*
2. *Mỗi điểm A thuộc S có đúng hai điểm "kề với nó", nghĩa là hai điểm thuộc S có cùng khoảng cách bằng 1 đến điểm A.*
3. *Với hai điểm tuỳ ý A, B thuộc S gọi A', A'' là hai điểm kề với A. Gọi B', B'' là hai điểm kề với B thì $\angle A'AA'' = \angle B'BB''$.*

Hỏi có tồn tại tập hợp S không trong trường hợp $n = 1991$ và $n = 2000$? Hãy giải thích câu trả lời.

Bài toán 2. *Xác định tất cả bộ ba (a, b, c) các số nguyên dương sao cho các số sau*

$$ab - c,\ bc - a,\ ca - b,$$

đều là các lũy thừa của 2.

Lời giải. Trước hết ta xét $a = b$, khi đó $a^2 - c$ và $a(c-1)$ là lũy thừa của 2. Suy ra

$$a = 2^k,\ c - 1 = 2^m \ \text{ và } \ 2^{2k} - 2^m - 1 = 2^n.$$

Từ đây, ta suy ra $m = 0,\ n = k = 1$ hoặc $n = 0,\ m = k = 1$. Do đó, trường hợp này ta có $(a,\ b,\ c) = \{(2,\ 2,\ 2),\ (2,\ 2,\ 3)\}$ và hoán vị.

Giả sử $a < b < c$. Đặt $bc - a = 2^x$ và $ca - b = 2^y$ khi đó

$$2^x - 2^y = (b-a)(c+1) > 0.$$

Suy ra $x > y$ và $(b-a)(c+1)$ chia hết cho 2^y. Lại có

$$2^x + 2^y = (c-1)(a+b),$$

nên $(c-1)(a+b)$ chia hết cho 2^y. Vì trong hai số $c-1$ và $c+1$ có một số không chia hết cho 4 nên $2(a+b)$ hoặc $2(b-a)$ chia hết cho 2^y. Suy ra

$$a + b \geqslant 2^{y-1}.$$

Mà ta có

$$a(b+1) \le ac = b + 2^y \le 2(a+b) + b.$$

hay $ab \le a + 3b < 4b$ suy ra $a < 4$.

- Nếu $a = 3$ thì
$$2^z = 3b - c,\ 2^y = 3c - b \ge 2c + 1 > 4,$$
suy ra $y \ge 3$. Ta có
$$b = \frac{2^y + 3 \cdot 2^z}{8},\ c = \frac{3 \cdot 2^y + 2^z}{8}.$$
Do $b < c$ và $y \ge 3$ nên $y > z \geqslant 3$. Lại có
$$2^x = bc - 3 = \left(3 \cdot 2^{z-3} + 2^{y-3}\right)\left(3 \cdot 2^{y-3} + 2^{z-3}\right) - 3.$$
Nếu $z > 3$ thì $bc - 3$ là số lẻ nên ta có $z = 3$. Khi đó
$$2^x = 2^{y-3}\left(10 + 3 \cdot 2^{y-3}\right).$$
Từ đây, suy ra $y - 3 = 1$ hay $y = 4$. Suy ra $b = 5,\ c = 7$.

- Nếu $a = 2$ thì $2^z = 2b - c$ và $2^y = 2c - b > 1$ nên $y > 0$. Ta có
$$b = \frac{2^y + 2^{z+1}}{3},\ c = \frac{2^{y+1} + 2^z}{3}.$$
Nếu $z > 0$ thì $b,\ c$ là các số chẵn nên $bc - 2$ không chia hết cho 4. Mà $bc - 2 > 2 \cdot 3 - 2 = 4$ nên $bc - 2$ không thể là lũy thừa của 2. Suy ra $z = 0$, khi đó
$$bc - 2 = \frac{2^{2y+1} + 5 \cdot 2^y - 16}{9}.$$
Vì $bc - 2$ là số nguyên nên y là số chẵn. Hơn nữa nếu $y \geqslant 6$ thì 32 không là ước của
$$2^{2y+1} + 5 \cdot 2^y - 16 > 16 \cdot 9,$$
nên $bc - 2$ không thể là lũy thừa của 2.

- Nếu $y = 2$ ta có $b = 2$, $c = 3$.
- Nếu $y = 4$ ta có $b = 6$, $c = 11$.

Vậy $(a, b, c) = \{(2, 2, 2), (2, 2, 3), (3, 5, 7), (2, 6, 11)\}$ cùng các hoán vị là tất cả những giá trị cần tìm. □

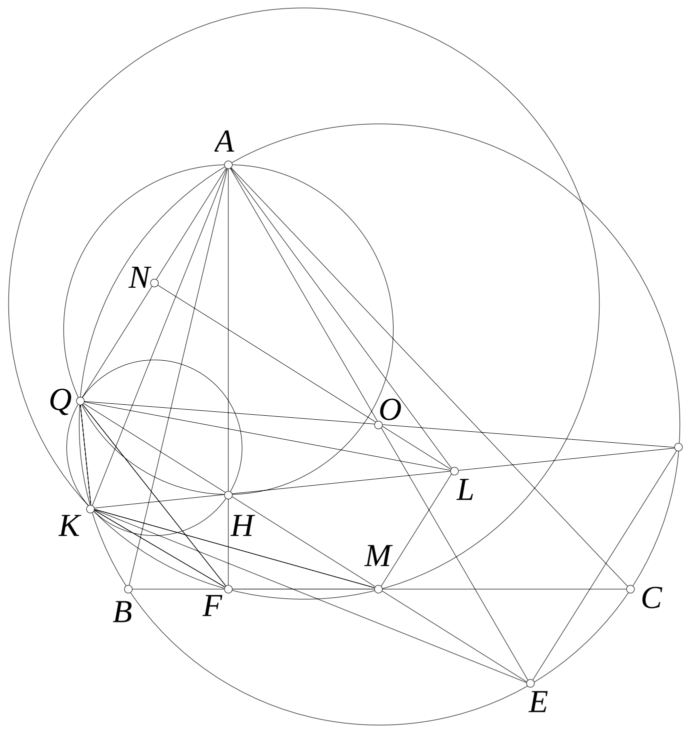
Bình luận

1. Đây là một bài toán được phát biểu khá đẹp. Tuy nhiên lời giải thì khá kỹ thuật, phải xét nhiều trường hợp, đánh giá phân tích lũy thừa. Có lẽ vì lý do đó mà bài toán này là một bài toán gây khá nhiều khó khăn cho các học sinh, trong đó có các học sinh đoàn Việt Nam.

2. Tuy vậy, đây là một bài toàn số học thuần túy nhất trong các bài toán số học những năm gần đây. Xu thế các đề số học của đề thi IMO và cả các đề thi VMO, Vietnam TST những năm gần đây thường liên quan đến tư duy tổ hợp. Chẳng hạn bài toán số học của IMO 2014 có thể coi là tổ hợp nhiều hơn số học.

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H, đường cao AF và M là trung điểm BC. Đường tròn đường kính HA cắt (O) tại Q khác A. Đường tròn đường kính HQ cắt (O) tại K khác Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KHQ và KFM tiếp xúc nhau.*

Lời giải thứ nhất. Vẽ đường kính AE và QR của (O). L, N lần lượt là trung điểm HR, QA.



Ta có kết quả quen thuộc Q, H, M, E thẳng hàng. Từ đó suy ra $ML \parallel ER \parallel QA$ và

$$ML = \frac{1}{2}ER = \frac{1}{2}QA = NQ,$$

nên $NQML$ là hình bình hành. Do đó, $LN \perp QA$. Từ đó ta được $LA = LQ$. Mặt khác, $ML \parallel QA$ nên ML tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp $\triangle LAQ$ tại điểm L (1).

Mà dễ thấy

$$HA \cdot HF = HK \cdot HL = HQ \cdot HM,$$

nên phép nghịch đảo tâm H phương tích $\overline{HA} \cdot \overline{HF}$ biến

$$M \to Q,\ L \mapsto K,\ A \mapsto F, Q \mapsto M.$$

Do đó từ (1) kết hợp với phép nghịch đảo tâm H suy ra đường tròn ngoại tiếp $\triangle KHQ$, $\triangle KFM$ tiếp xúc nhau. □

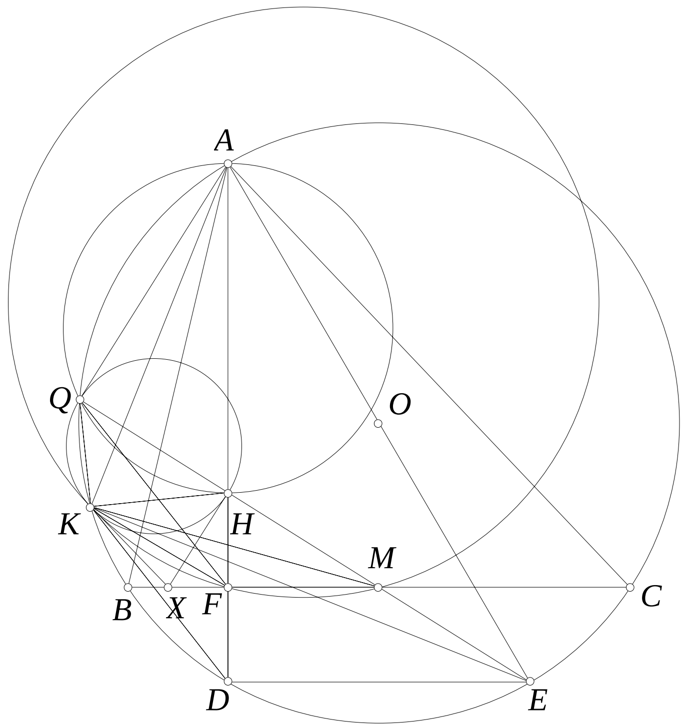
Lời giải thứ hai. Gọi AE là đường kính của (O) và D đối xứng H qua BC thì D nằm trên (O). Dễ thấy Q, H, M, E thẳng hàng. Gọi tiếp tuyến tại K, H của đường tròn ngoại tiếp tam giác KHQ cắt nhau tại X.

Ta có

$$\begin{aligned}\angle KXH &= 180^\circ - 2\angle KHX = 180^\circ - 2\angle KQH\\ &= 2(90^\circ - \angle KQH) = 2(90^\circ - \angle KAE)\\ &= 2\angle AEK = 2\angle KDH.\end{aligned}$$

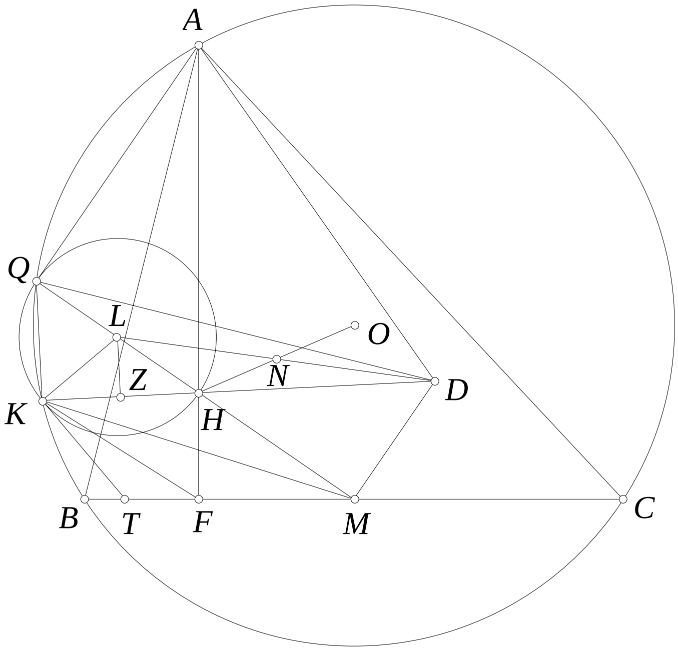
Lại có $XK = XH$, từ đó X là tâm ngoại tiếp tam giác KDH. Do BC là trung trực HD nên X nằm trên BC. Từ đó theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có

$$XK^2 = XH^2 = XF \cdot XM.$$



Hay XK là tiếp tuyến chung của đường tròn ngoại tiếp tam giác KQH và KFM hay hai đường tròn này tiếp xúc nhau tại K. □

Lời giải thứ ba. Gọi đường thẳng qua M vuông góc với QM cắt KH tại D.



Gọi L, Z là trung điểm của HQ, HK thì L, Z nằm trên đường tròn Euler (N) mà M cũng thuộc (N) nên N là trung điểm LD. N cũng là trung điểm OH nên $OD \parallel LH \perp QA$.

Từ đó có $DQ = DA$ và

$$HA \cdot HF = HQ \cdot HM = HK \cdot HD.$$

Kẻ tiếp tuyến KT của đường tròn ngoại tiếp tam giác KQH ta có

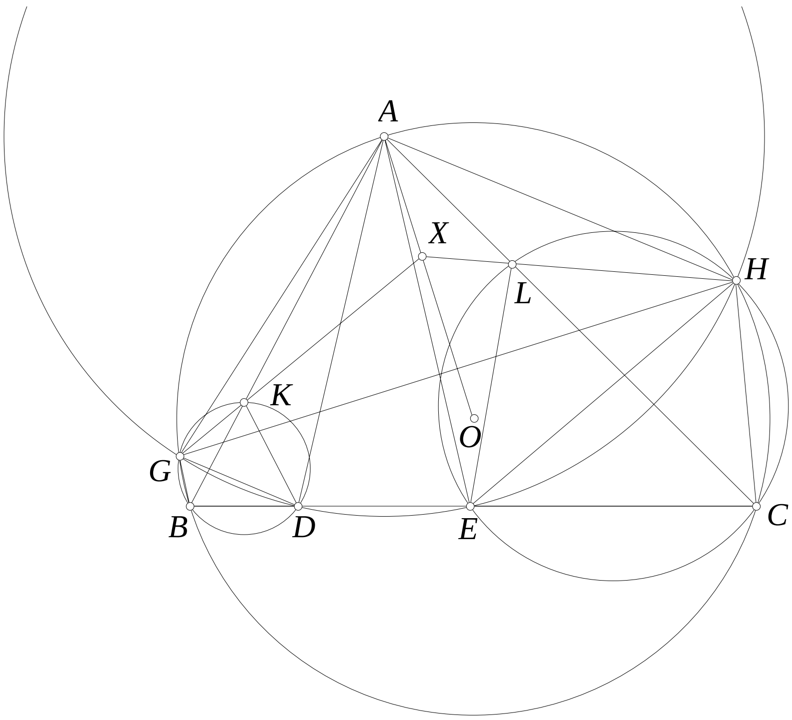
$$\begin{aligned}
\angle TKF &= \angle TKH - \angle HKF = \angle KQH - \angle HAD \\
&= \angle HDM - (\angle QAD - \angle QAH) \\
&= \angle HDM - \angle QDM + \angle HMF \\
&= \angle HMF - \angle QDH = \angle HMF - \angle HMK \\
&= \angle KMF.
\end{aligned}$$

Do đó KT cũng là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KFM. Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán này là bài toán thứ 3 của ngày thứ nhất, được đánh giá là một bài khó. Tuy vậy một bài toán chứng minh hai đường tròn tiếp xúc mà đã có sẵn tiếp điểm thì mức độ khó chưa cao vì vậy xếp là bài số 3 là hợp lý. Lời giải thứ nhất là một ý tưởng khá tự nhiên khi có hai đường tròn tiếp xúc ta nghĩ tới việc nghịch đảo để đi chứng minh đường thẳng tiếp xúc đường tròn để giảm số lượng đường tròn đi. Lời giải này cùng được nghĩ ra bởi **Telv Cohl** và **Trịnh Huy Vũ** học sinh lớp $12A1$ Toán THPT chuyên KHTN, bạn **Vũ** đã giúp tác giả trình bày lại lời giải của mình như trên. Cũng có rất nhiều lời giải khác nhau đã được đề xuất. Lời giải thứ hai trên có ý tưởng thuần túy hình học rất thông minh là của **Jeck Lim**, nick name **oneplusone** trong [1], tác giả đã chỉnh sửa một chút cách dựng điểm X và biến đổi góc gọn hơn. Lời giải thứ ba thực chất xuất phát từ một ý tưởng nghịch đảo trong khi tác giả trao đổi của **Hồ Quốc Đăng Hưng** đã được tác giả chỉnh sửa lại gọn hơn, bỏ đi cách trình bày nghịch đảo và làm lại thuần túy hình học. Trong lời giải này thì điểm T không cần thiết nhưng ta dựng như vậy cho đẹp. Bài toán có nhiều ứng dụng và mở rộng, phần sau chúng tôi xin giới thiệu một số ứng dụng và mở rộng.

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (A) tâm A cắt BC tại D, E và cắt (O) tại G, H sao cho D nằm giữa B, E và tia AB nằm giữa tia AC, AG. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDG và CEH lần lượt cắt AB, AC tại K, L khác B, C. Chứng minh rằng GK và HL cắt nhau trên AO.*

Lời giải. Gọi GK cắt LH tại X ta dễ thấy AO là trung trực GH. Ta chỉ cần chứng minh X thuộc trung trực GH là bài toán hoàn tất, thật vậy.



Ta thấy

$$\angle EHC = \angle GHC - \angle GHE = 180^\circ - \angle GBD - \angle GDB = \angle BGD.$$

Từ đó

$$\begin{aligned}\angle XGH &= \angle XGD - \angle HGD = \angle KBD - \angle HEC \\ &= 180^\circ - (\angle GBA + \angle BGD + \angle BDG) - \angle HEC \\ &= 180^\circ - (\angle HCA + \angle EHC + \angle EHG) - \angle HEC \\ &= \angle ACB - \angle GHE = \angle XHE - \angle GHE \\ &= \angle XHG.\end{aligned}$$

Từ đó tam giác XGH cân ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Đây là bài toán thứ 4 của ngày thứ hai được đánh giá là bài ở mức độ dễ. Lời giải dùng các kỹ thuật cộng góc rất cơ bản. Đây là bài toán đẹp, cấu hình không phức tạp mà đơn giản, có rất nhiều ý nghĩa trong kiểm tra đánh giá cũng như phát triển tư duy. Bài toán có một số mở rộng và ứng dụng.

Bài toán 5. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\big(x+f(x+y)\big)+f(xy)=x+f(x+y)+y\cdot f(x),\quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải 1. Thay $x=0$ vào (1), ta được

$$f\big(f(y)\big)+f(0)=f(y)+y\cdot f(0),\quad \forall y\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Nếu $f(0)\neq 0$ thì từ (2) ta dễ dàng suy ra f đơn ánh. Từ đó, bằng cách cho $y=1$, ta thu được $f\big(f(1)\big)=f(1)$ và như thế $f(1)=1$. Tiếp tục, bằng cách thay $y=1$ vào (1), ta có

$$f\big(x+f(x+1)\big)=x+f(x+1),\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Trong (2), ta thay y bởi $x+f(x+1)$ và sử dụng (3) thì có $x+f(x+1)=1$, từ đó suy ra $f(x)=2-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy đây là một nghiệm của phương trình đã cho.

Tiếp theo, ta xét trường hợp $f(0)=0$. Trong (1), thay y bởi $y-x$ thì thu được

$$f\big(x+f(y)\big)+f(xy-x^2)=x+f(y)+(y-x)\cdot f(x),\quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Thay $y=x$ vào (4), ta được

$$f\big(x+f(x)\big)=x+f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Thay $y=0$ vào (4), ta có

$$f(x)+f(-x^2)=x-x\cdot f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Trong (6), ta cho $x=-1$ thì tính được $f(-1)=-1$. Tiếp tục, cho $x=1$ vào (6), ta tính được $f(1)=1$. Thay $x=1$ vào (6), ta có

$$f\big(1+f(y)\big)+f(y-1)=f(y)+y,\quad \forall y\in\mathbb{R}. \tag{7}$$

Trong (7), ta thay y bởi $y+f(y)$ và sử dụng các kết quả (5), (3) (chú ý rằng (3) cũng đúng trong trường hợp $f(0)=0$), ta thu được

$$\begin{aligned} f\big(y+1+f(y)\big)&=2y+2\cdot f(y)-f\big(y-1+f(y)\big)\\ &=2y+2\cdot f(y)-\big(y-1+f(y)\big)\\ &=y+1+f(y),\quad \forall y\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{8}$$

Bây giờ, trong (4), ta thay x bởi $x+1$ và thay $y=x$ thì có

$$f\big(x+1+f(x)\big)+f(-x-1)=x+1+f(x)-f(x+1),\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

Kết hợp (8) và (9), ta suy ra f là hàm lẻ. Từ đó, đẳng thức (6) có thể được viết lại thành

$$f(x)-f(x^2)=x-x\cdot f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{10}$$

Trong (10), ta thay x bởi $-x$ và sử dụng tính lẻ của f thì cũng có

$$-f(x)-f(x^2)=-x-x\cdot f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{11}$$

Trừ từng vế hai đẳng thức (1) và (2), ta thu được ngay $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại ta thấy thỏa.

Vậy bài toán có hai đáp số là $f(x)=x$ và $f(x)=2-x$. $\square$

Nhận xét 1. Từ (1) và (2), ta có thể chỉ ra cụ thể các giá trị có thể của $f(0)$ luôn mà không cần phải chia trường hợp kiểu như trên. Thật vậy, nếu đặt $a = f(0)$ thì từ (2) ta có

$$f\big(f(y)\big) = f(y) + ay - a$$

và $f(a) = 0$. Tiếp tục, nếu thay $y = a$ thì ta sẽ có

$$a = f(0) = f\big(f(a)\big) = f(a) + a^2 - a = a^2 - a.$$

Từ đó, ta dễ dàng tính được $a = 0$ hoặc $a = 2$.

Từ (6), ta nghĩ đến một ý tưởng là chứng minh $f(x)$ là hàm lẻ (trong trường hợp $f(0) = 0$). Vì khi đó, bằng cách thay x bởi $-x$ để giữa nguyên giá trị của $f(-x^2)$ và sử dụng tính lẻ, ta sẽ dàng tìm được công thức cụ thể cho hàm f.

Chính từ ý tưởng này đã gợi cho ta nghĩ đến phép thay $y = -1$ vào (1) để có $f(-x)$ và $f(x)$ cùng xuất hiện trong một đẳng thức:

$$f\big(x + f(x-1)\big) + f(-x) = x + f(x-1) - f(x).$$

Như vậy, để chứng minh f lẻ, ta chỉ cần chứng minh

$$f\big(x + f(x-1)\big) = x + f(x-1),$$

là được. Tuy nhiên, nếu để đẳng thức ở dạng như thế này thì sẽ khó liên kết với đẳng thức (3) ở trên. Do đó, ta sẽ tịnh tiến x lên 1 đơn vị để viết đẳng thức lại thành

$$f\big(x + 1 + f(x)\big) = x + 1 + f(x).$$

Đây chính là nguồn gốc ý tưởng cho việc thiết lập đẳng thức (8) trong lời giải trên, và nó cũng chính là chìa khóa cho lời giải. Ngoài cách giải đã trình bày ở trên, ta cũng có thể sử dụng phương pháp thiết lập những đẳng thức kiểu truy hồi để giải như sau:

Lời giải 2. Trong trường hợp $f(0) \neq 0$, ta có thể xét tương tự như lời giải 1. Ở đây, ta chỉ xét trường hợp $f(0) = 0$. Lúc này, ta có thể tìm được kết quả (6):

$$f(x) + f(-x^2) = x - x \cdot f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

và $f(-1) = -1,\ f(1) = 1$. Bây giờ, thay x bởi $-x$ vào (6), ta cũng có

$$f(-x) + f(-x^2) = -x + x \cdot f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Trừ tương ứng vế với vế hai đẳng thức (6) và (12), ta thu được

$$(1 + x) \cdot f(x) - (1 - x) \cdot f(-x) = 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Trong (1), thay $y = 1 - x$, ta thu được

$$f(x + 1) + f(x - x^2) = x + 1 + (1 - x) \cdot f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Trong (1), thay x bởi $-x$ và thay y bởi $-1 + x$ rồi sử dụng (13), ta được

$$f(-x-1) + f(x-x^2) = -x-1+(x-1)\cdot f(-x) = x-1-(1+x)\cdot f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Trừ tương ứng vế với vế hai đẳng thức (14) và (15), ta thu được

$$f(x+1) - f(-x-1) = 2 + 2 \cdot f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Tuy nhiên, do (13) nên ta có

$$f(-x) = \frac{2x - (1+x) \cdot f(x)}{x-1}, \quad \forall x \neq 1.$$

Do đó,

$$f(-x-1) = \frac{2x + 2 - (x+2) \cdot f(x+1)}{x}, \quad \forall x \neq 0.$$

Thay vào (16), ta thu được

$$f(x+1) - \frac{2x + 2 - (x+2) \cdot f(x+1)}{x} = 2 + 2 \cdot f(x),$$

từ đó suy ra

$$(x+1) \cdot f(x+1) = 2x + 1 + x \cdot f(x), \quad \forall x \neq 0.$$

Do $f(1) = 1$ nên ta dễ thấy đẳng thức trên cũng đúng khi $x = 0$, do đó ta có

$$(x+1) \cdot f(x+1) = 2x + 1 + x \cdot f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Thay x bởi $x - 1$ và thay y bởi $-x$ vào (1), ta có

$$f(x-2) + f(x - x^2) = x - 2 - x \cdot f(x-1), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Trừ hai đẳng thức (14) và (18) theo vế, ta được

$$f(x+1) - f(x-2) = 3 + (1-x) \cdot f(x) + x \cdot f(x-1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trong đẳng thức trên, ta thay x bởi $x + 2$ thì thu được

$$f(x+3) - f(x) = 3 + (x+2) \cdot f(x+1) - (x+1) \cdot f(x+2), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Từ (17), ta suy ra

$$(x+2) \cdot f(x+2) = (x+1) \cdot f(x+1) + 2x + 3 = x \cdot f(x) + 4x + 4 \tag{20}$$

và

$$(x+3) \cdot f(x+3) = (x+1) \cdot f(x+1) + 4x + 8 = x \cdot f(x) + 6x + 9 \tag{21}$$

Nhân hai vế của (19) với $(x+1)(x+2)(x+3)$ và sử dụng các kết quả (17), (20), (21), ta được

$$\begin{aligned}(x+1)(x+2)\big[x \cdot f(x) + 6x + 9\big] - (x+1)(x+2)(x+3) \cdot f(x) &= \\ = 3(x+1)(x+2)(x+3) + (x+2)^2(x+3)\big[x \cdot f(x) + 2x + 1\big] \\ - (x+1)^2(x+3)\big[x \cdot f(x) + 4x + 4\big].\end{aligned}$$

Sau khi khai triển và rút gọn, ta viết được đẳng thức trên dưới dạng

$$2(x^3 + 6x^2 + 9x + 3)\big[f(x) - x\big] = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Như vậy, trong các trường hợp mà $x^3 + 6x^2 + 9x + 3 \neq 0$ thì $f(x) = x$. Nói riêng, ta có $f(x) = x$, $\forall x > 0$. Sử dụng kết quả này cho (6) (xét $x > 0$), ta được $f(-x^2) = -x^2$. Do đó, ta cũng có $f(x)$, $\forall x < 0$. Lại có $f(0) = 0$ nên ta có $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. □

Nhận xét 2. Lời giải này bề ngoài phức tạp hơn lời giải 1, tuy nhiên xét về mặt ý tưởng thì lại khá tự nhiên và đơn giản. Sau khi đã tính được $f(1) = 1$ và $f(-1) = -1$, lẽ dĩ nhiên ta sẽ muốn tận dụng chúng, do đó việc thay các giá trị $y = 1 - x$ và $y = -1 - x$ là điều hoàn toàn có thể nghĩ đến. Khi đó, ta thu được các đẳng thức

$$f(x+1) + f(x - x^2) = x + 1 + (1 - x) \cdot f(x)$$

và

$$f(x-1) + f(-x - x^2) = x - 1 - (1 + x) \cdot f(x).$$

Tuy nhiên, các đại lượng $f(x - x^2)$ và $f(-x - x^2)$ khá phức tạp và gây cản trở cho các biến đổi của ta. Do đó, ý tưởng ở đây là tìm các số y sao cho $-y - y^2 = x - x^2$ để ta có thể chuyển đổi hai biểu thức khó ở hai đẳng thức về dạng giống nhau và triệt tiêu chúng bằng phép trừ tương ứng. Các số y đó là $y = -x$ và $y = x - 1$.

Đây chính là cách để tìm ra các đẳng thức (14), (15), (16), (18) và (19). Từ (19), ta nảy ra một ý tưởng là tìm cách biểu diễn các biểu thức $f(x+3),\ f(x+2),\ f(x+1)$ về dạng theo $f(x)$ để đưa về một phương trình của $f(x)$. Bằng việc giải phương trình đó, ta sẽ tìm được công thức cụ thể của $f(x)$. Có thể thấy, tất cả biểu thức trên đều có thể tính được nếu ta tìm được sự liên hệ của $f(x+1)$ và $f(x)$. Điều đó được thể hiện rõ ở đẳng thức (16).

Chú ý rằng $-x - 1 = -(x+1)$ nên để đưa về một đẳng thức chỉ chứa $f(x+1)$ và $f(x)$, ta có thể nghĩ đến việc sử dụng (13). Và đó chính là cách để tìm ra (17), đẳng thức chìa khóa để tính $f(x+3),\ f(x+2),\ f(x+1)$ và giúp ta hoàn tất lời giải như ở trên.

Phương pháp thiết lập những đẳng thức thể hiện các giá trị f liên tiếp như trên, ta tạm gọi là phương pháp dùng đẳng thức kiểu truy hồi. Đây là một phương pháp hiệu quả có thể giúp chúng ta giải được nhiều bài toán khó. Sau đây là một vài ví dụ (bạn đọc có thể thử sức).

Bài tập 1. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y) - f(x+y) + 1, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 2 (Bulgaria, 2005)**.** Ký hiệu $\mathbb{R}^*$ là tập các số thực khác 0. Tìm tất cả các hàm số f xác định trên $\mathbb{R}^*$ và nhận giá trị trong $\mathbb{R}^*$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x^2 + y) = f^2(x) + \frac{f(xy)}{f(x)}, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}^*,\ y \neq -x^2.$$

Bài tập 3 (IMO, 2012)**.** Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện: Nếu $a,\ b,\ c$ là các số nguyên thỏa mãn $a + b + c = 0$, thì

$$f^2(a) + f^2(b) + f^2(c) = 2\big[f(a) \cdot f(b) + f(b) \cdot f(c) + f(c) \cdot f(a)\big].$$

Bài tập 4 (Balkan, 2009)**.** Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$f\big(f^2(m) + 2 \cdot f^2(n)\big) = m^2 + 2n^2, \quad \forall m,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Ngoài hai cách giải nêu trên, bài này còn có một cách tiếp cận khác cũng rất thú vị là sử dụng điểm bất động (các điểm x mà $f(x) = x$) như sau:

Lời giải 3. Cũng giống như lời giải 2, ta chỉ xét từ trường hợp $f(0) = 0$. Lúc này, ta đã có $f(-1) = -1,\ f(1) = 1$ và thiết lập được

$$(1 + x) \cdot f(x) - (1 - x) \cdot f(-x) = 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Gọi $\mathcal{F}$ là tập hợp các điểm bất động của f. Dễ thấy $0 \in \mathcal{F}$ nên $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Từ (13), ta thấy rằng nếu $x \in \mathcal{F},\ x \neq 1$ thì $(1 - x) \cdot f(-x) = (1 + x) \cdot f(x) - 2x = -x(1 - x)$, suy ra $f(-x) = -x$. Điều này có nghĩa là $-x \in \mathcal{F}$. Ngoài ra, do $1,\ -1 \in \mathcal{F}$ nên với mọi $x \in \mathcal{F}$ thì $-x \in \mathcal{F}$.

Thay $y = 0$ vào (1), ta có $f\big(x + f(x)\big) = x + f(x)$ nên $x + f(x) \in \mathcal{F}$.

Thay $x = 0$ vào (1), ta cũng có $f\big(f(x)\big) = f(x)$ nên $f(x) \in \mathcal{F}$.

Theo lý luận ở trên, ta cũng có $-f(x) \in \mathcal{F}$ và $-x - f(x) \in \mathcal{F}$.

Bây giờ, giả sử có số a mà $a \neq f(a)$, ta thay $x = a$ và $y = f(a) - a$ vào (1) thì được

$$f\Big(a\big[f(a) - a\big]\Big) = \big[f(a) - a\big] \cdot f(a).$$

Thay $x = -a$ và $y = a - f(a)$ vào (1), ta cũng có

$$f\Big(a\big[f(a) - a\big]\Big) = \big[a - f(a)\big] \cdot f(-a).$$

Kết hợp hai kết quả trên với chú ý $a \neq f(a)$, ta suy ra $f(-a) = -f(a)$. Thay $x = a$ vào (13) và sử dụng kết quả này, ta lại thu được $f(a) = a$, mâu thuẫn. Do đó, số a nói trên không tồn tại. Nói cách khác, ta có $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. $\square$

Nhận xét 3. Đây có lẽ là lời giải ngắn gọn và đẹp nhất cho bài toán này. Phương pháp sử dụng lý luận dựa trên tập hợp như trên là một trong những phương pháp quan trọng rất hay được sử dụng của phương trình hàm. Bạn đọc có thể cùng thử sức với các bài toán sau để thấy khả năng ứng dụng của phương pháp.

Bài tập 5 (IMO, 1994)**.** Gọi $\mathcal{S}$ là tập hợp các số thực lớn hơn -1. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

(a) $f\big(x + f(y) + x \cdot f(y)\big) = y + f(x) + y \cdot f(x)$ với mọi $x,\ y \in \mathcal{S}$;

(b) $\frac{f(x)}{x}$ tăng ngặt trên hai khoảng $(-1,\ 0)$ và $(0,\ +\infty)$.

Bài tập 6 (Trung Quốc, 1996)**.** Xét hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x^3 + y^3) = (x + y)\big[f^2(x) - f(x) \cdot f(y) + f^2(y)\big], \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $f(1996x) = 1996 \cdot f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài tập 7 (IMO Shortlist, 2013)**.** Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn

$$f\Big(f\big(f(n)\big)\Big) = f(n + 1) + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Và một bài toán khác, cũng rất thú vị, là ứng dụng của phương pháp điểm bất động là:

Bài tập 8. Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\big(f(x)\big) + f(x) = 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nếu chỉ nhìn từ lời giải 1 và 2, có thể thấy bài số 5 trong đề IMO chỉ là một bài thuần túy kỹ thuật tính toán, không có gì đặc sắc. Nhưng lời giải 3 lại cho thấy một nét đẹp quyến rũ từ bài toán, có lẽ đây cũng chính là đáp án chính thức của bài toán và rất có thể nó cũng là lí do mà bài toán này được chọn làm bài số 5 của đề thi.

Và thực sự đây cũng không phải là một bài toán dễ, kết quả của kỳ thi đã chứng tỏ điều đó. Số thí sinh làm được bài số 5 khá ít, chỉ có 37 em trong 577 thí sinh đạt số điểm từ 5 trở lên. Tuy nhiên, đội Việt Nam của chúng ta có 4 bạn nằm trong số này, một kết quả rất đáng khen.

Bài toán 6. *Cho dãy $a_1, a_2, \ldots$ các số nguyên thoả mãn các điều kiện:*

(i) $1 \le a_j \le 2015$ *với mọi* $j \geqslant 1$.

(ii) $k + a_k \neq l + a_l$ *với mọi* $1 \le k < l$.

Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên dương b và N sao cho

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \le 1007^2,$$

với mọi số nguyên m, n thoả mãn $n > m \ge N$.

Lời giải. Lời giải bài toán dựa vào hai nhận xét quan trọng sau:

Nhận xét 4. Đặt $c_k = a_k + k$ thì ta có $\{ck\}$ là dãy vô hạn các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $1 \leqslant k \leqslant 2015$. Ta nói số nguyên dương I là "*tự do*" nếu $I \neq c_i$ với mọi i. Giả sử rằng tồn tại 2016 số tự do khác nhau và gọi X là số lớn hơn tất cả các số đó. Xét $c_1, c_2, \ldots, c_X$ là các số nguyên dương phân biệt nằm trong đoạn $[1, X + 2015]$, và 2016 số trong các số này là tự do, mâu thuẫn. Ngoài ra thì số 1 cũng tự do, do đó số b các số tự do thỏa mãn điều kiện $1 \leqslant b \leqslant 2015$. Ta khẳng định rằng số b này thỏa mãn điều kiện đề bài khi N lớn hơn tất cả các số tự do.

Nhận xét 5. Lấy $x > b$ và xét $m > N$ và lấy hai dãy

$$c_1, c_2, \ldots, c_m \text{ (dãy 1)},$$
$$c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots, c_{m+x} \text{ (dãy 2)}.$$

Các số này nằm trong đoạn $[1, m + x + 2015]$. Ta tách đoạn này thành 2 đoạn

$$[1, m + 1] \cup [m + 2, m + x + 2015] := I_1 \cup I_2.$$

Dãy 2 chiếm x số trong I_2, còn dãy 1 chiếm $b - 1$ số trong I_2, và tất cả các số mà dãy 1 chiếm $\leqslant m + 2015$. Hơn nữa, dãy 2 chiếm tất cả các số thuộc $[m + 2016, m + x + 1]$, vì các số này không thể được chiếm bởi bất cứ một c_k nào khác không nằm trong dãy 2.

Để tổng các số trong dãy 2 là lớn nhất, ta phải bỏ qua $b - 1$ giá trị nhỏ nhất trong $[m + 2, m + 2015]$, lấy mọi giá trị trong $[m + 2016, m + x + 1]$ và bỏ qua $2015 - b$ giá trị nhỏ nhất trong $[m + x + 2, m + x + 2015]$. Đặt

$$\begin{aligned}
A &= (m + 2 + b - 1) + \cdots + (m + x + 1),\\
B &= (m + x + 2 + 2015 - b) + \cdots + (m + x + 2015),\\
C &= (m + 1 + b) + \cdots + [(m + x + 1 - b) + b],\\
D &= [(m + x + 2 - b) + 2015] + \cdots + (m + x + 2105),\\
E &= (m + 1 + b) + \cdots + [(m + x + 1 - b) + b],\\
F &= [(m + x + 2 - b) + b] + \cdots + (m + x + b).
\end{aligned}$$

Như vậy tổng của chúng ta lớn nhất bằng $A + B = C + D$, lệch so với giá trị kỳ vọng $E + F$ là

$$(2015 - b)(b - 1) \leqslant 1007^2.$$

Để tổng các số trong dãy 2 là nhỏ nhất, ta phải bỏ qua $b - 1$ giá trị lớn nhất trong $[m + 2, m + 2015]$, lấy mọi giá trị trong $[m + 2016, m + x + 1]$ và bỏ qua $2015 - b$ giá trị lớn nhất $[m + x + 2, m + x + 2015]$. Lại đặt

$$\begin{aligned}
A^{'} &= (m + 2) + \cdots + [m + 2015 - (b - 1)],\\
B^{'} &= (m + 2016) + \cdots + [m + x + 2015 - (2015 - b)],\\
C^{'} &= (m + 1 + 1) + \cdots + [(m + 2015 - b) + 1],\\
D^{'} &= [(m + 2015 - b + 1) + b] + \cdots + (m + x + b),\\
E^{'} &= (m + 1 + b) + \cdots + [(m + 2015 - b) + b],\\
F^{'} &= [(m + 2015 - b + 1) + b] + \cdots + (m + x + b).
\end{aligned}$$

Như vậy tổng của chúng ta nhỏ nhất nhất bằng $A^{'} + B^{'} = C^{'} + D^{'}$, lệch so với giá trị kỳ vọng $E^{'} + F^{'}$ là

$$(2015 - b)(b - 1) \leqslant 1007^2.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Bình luận.

1. Ta có $a_k - b = c_k - (k + b)$. Ta cần đo tổng độ lệch của dãy c_k so với dãy "*trung bình*" $k + b$ mà ta gọi là tổng kỳ vọng. Từ đó chuyển sang bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tổng các c_k trên một đoạn đã cho.

2. Lời giải được trình bày ở trên được tham khảo từ lời giải của **Juan Ortiz** trên diễn đàn **Artofproblemsolving** với những điều chỉnh không đáng kể cho dễ hiểu. Đây là cũng là ý tưởng của **oneplusone** nhưng trình bày chi tiết hơn.

3. Cũng trên diễn đàn này, người dùng có tên **fph** đã có nhận xét thú vị sau: Bài toán này hình như là có liên quan đến khái niệm tung hứng có tên là **siteswap** `https://en.wikipedia.org/wiki/Siteswap`. Ý tưởng là $a_t - 1$ biểu thị độ cao mà ta tung quả bóng lên tại thời điểm t : Người diễn viên tung hứng tung quả bóng ở thời điểm t và quả bóng sẽ rơi xuống vào thời điểm $t + a_t - 1$. Ví dụ quy tắc tung hứng thường gặp nhất tương ứng với $a_t = 4$ với mọi t, nghĩa là trong ký hiệu của chúng ta $3, 3, 3, 3, \ldots$, cũng có nghĩa là với mỗi t, quả bóng được tung ở thời điểm t sẽ rơi xuống ở thời điểm $t + 3$ (sau đó nó lại được ném lên). Trong bài toán của chúng ta, người diễn viên tung hứng trong thời gian vô hạn, và các quả bóng được tung lên ở độ cao $0 \leqslant a_t - 1 \leqslant 2014$, trong đó 0 nghĩa là không có quả bóng nào được tung. Sau đó **fhp** đã đề xuất hướng giải quyết bài toán như sau:

   Để đơn giản, ta giả sử rằng các quả bóng không bay theo hình parabol, mà thời điểm t, người tung hứng "*đặt*" nó lên độ cao $a_t - 1$. Tất cả các quả bóng khác giảm độ cao xuống 1. Gọi b là số các quả bóng (một cách chọn phù hợp!).

   Bây giờ, đại lượng kỳ bí mà ta sẽ xem xét là tổng các độ cao của tất cả b quả bóng ở thời điểm t, S_t. Đại lượng mà ta cần đánh giá là $|S_m - S_n|$. Ở đề bài **Now, the magic**

quantity to consider is the sum of the heights of all b balls at each time t, S_t. The quantity that we have to bound is $|S_m - S_n|$. Thật vậy, tại mỗi thời điểm, tất cả b quả bóng sẽ giảm độ cao xuống 1 đơn vị, và quả bóng nào xuống tới 0 sẽ được "*đặt*" lên độ cao a_t.

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của S_t bằng bao nhiêu? Giá trị nhỏ nhất là $1+2+\cdots+b$, vì nếu khác đi thì sẽ có hai quả bóng rơi xuống cùng một lúc. Giá trị lớn nhất đạt được khi tung tất cả các quả bóng lên độ cao 2014 ở các thời điểm liên tiếp, tức là

$$2014 + 2013 + \cdots + (2014 - b + 1).$$

Hiệu giữa hai giá trị này là

$$(2014 - 1) + (2013 - 2) + \cdots + (2014 - 2b + 1).$$

Đây là tổng của các số lẻ liên tiếp. Để đạt giá trị lớn nhất, ta dừng lại ở chỗ các số này bắt đầu âm, vậy $b = 1007$ và tổng này chính là

$$1 + 3 + \cdots + 2013 = 1007^2.$$

4. **Ivan Guo,** một trong hai tác giả của bài toán này (tác giả thứ hai là **Ross Atkins, Úc**) đã có bình luận như sau:

   Lời giải chính thức cũng tương tự như lời giải của **fph,** nhưng không dùng ngôn ngữ tung hứng. Cụ thể, bạn chia các số hạng của dãy số thành các lớp tương đương (hay tô màu chúng, nếu bạn muốn) theo quy tắc $a_i \sim a_j$ nếu $a_i + I = j$ (như thế mỗi lớp/màu sẽ tương ứng với quả bóng nào đó). Bây giờ gọi b là số các lớp/màu và tính toán tường minh/đánh giá tổng đã cho, đầu tiên trong từng lớp/màu, sau đó là tất cả. Chặn trên sẽ là $(2015 - b)(b - 1)$ và cách minh họa "*tổng chiều cao của các quả bóng*" của **fhp** thật là đẹp.

   Có một cách tiếp cận khác thế này. Xét dãy số $d_i = a_i + i$ và sắp xếp các d_i theo thứ tự tăng dần bằng cách đổi chỗ $\min(d_i, d_{i+1})$ với d_i sau khi sắp xếp dãy số mới $a_i = d_i - i$ vẫn thỏa mãn điều kiện $1 \leqslant a_i \leqslant 2015$ và sẽ chắc chắn là dãy hằng kể từ một số hạng nào đó. Chọn hằng số này là b. Tổng đã cho là hiệu giữa dãy ban đầu và dãy mới, có thể được đánh giá bằng cách theo dõi các thay đổi ở mỗi lần đổi chỗ. Các thay đổi bị chặn bởi $2015 - b$ và có nhiều nhất $b - 1$ thay đổi như vậy.

Tài liệu tham khảo

[1] Topic Problem 3.

`http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1112748_problem3`

[2] Topic Problem 4 :

`http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1113163_problem_4`

BÀI TOÁN HAY – LỜI GIẢI ĐẸP: VỀ BÀI TOÁN IMO 1988

Alon Amit

(*Trần Nam Dũng dịch*)

Chuyên mục này được lấy cảm hứng từ bài viết của thầy Nguyễn Duy Liên ở số báo trước về bài toán số 6 trong kỳ thi IMO 2001 với 5 cách giải khác nhau. Mục này sẽ để dành viết về những bài toán hay, lời giải đẹp và những câu chuyện thú vị xung quan những bài toán và lời giải đó.

Tên của chuyên mục được mượn từ tên của một nhóm những người yêu toán trên Facebook do anh Nguyễn Văn Lợi sáng lập **"Bài toán hay – Lời giải đẹp – Đam mê Toán học".** Chuyên mục ghi nhận các đề cử của bạn đọc và sẽ chọn đăng mỗi kỳ 1, 2 bài toán.

Kỳ này BBT giới thiệu với bạn đọc phần trả lời của TS. Alon Amit trên `quora.com` về một bài toán số học thú vị.
Câu hỏi trên `quora.com`:

Cho a, b là các số nguyên dương sao cho $ab + 1$ chia hết $a^2 + b^2$. Tại sao $\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ phải là số chính phương?
Câu trả lời của Alon Amit, TS Toán, người dẫn CLB Toán.

Đây có lẽ bài toán lý thuyết số sơ cấp nổi tiếng nhất trong những năm gần đây, được thảo luận ở rất nhiều các diễn đàn như:

`artofproblemsolving.com` hay `math.stackexchange.com/`

và đâu đó nữa. Đây là bài toán số 6 của IMO 1988. Khi tôi nói "sơ cấp" tôi có ý nói rằng nó có thể giải mà không cần dùng đến các kỹ thuật cao cấp thường thấy trong lý thuyết số hiện đại. Tôi không có ý nói rằng nó dễ. Các lời giải cho bàn toán này đều có thể hiểu được nếu có hiểu biển về các khái niệm cơ bản của lý thuyết số, nhưng tìm ra lời giải thực sự là rất, rất khó.

Tại sao tôi biết?

Đây, minh chứng đây. Bài toán này đã được Tây Đức gửi đến cho Ban chọn đề của IMO bởi (Tôi đoán là Don Zagier có thể có đôi chút liên quan). Tất cả 6 thành viên ban chọn đề chính xác là không ai giải được. Bài toán sau đó được gửi cho bốn nhà lý thuyết số hàng đầu của Úc, và không ai trong số họ giải được trong vòng 6 giờ. Bài toán này được phân loại là “cực khó” nhưng cuối cùng vẫn được chọn làm một bài toán của kỳ thi (về điều này có thể xem chi tiết trong cuốn sách **"Problem-Solving Strategies"** của Arthur Engel).

Trong kỳ thi, bài toán được giải quyết trọn vẹn bởi 11 thí sinh. Một trong số đó là Ngô Bảo Châu, người sau đó đã giành giải thưởng Fields vào năm 2010. Hai người khác là Ravi Vakil, nay nhà toán học của Stanford với nhiều giải thưởng, và cô gái độc đáo Zvezdelina Stankova, nay là nhà nghiên cứu nổi tiếng và chủ nhân của CLB toán Berkeley hùng mạnh (Tôi cũng không thể cưỡng lại ý muốn nhắc ở đây là Ravi là thành viên hội đồng quản trị của Proof School và Zvezda nằm trong hội đồng tư vấn).

Một trong những người không giải được bài này, tin hay không tùy bạn, đó là Terence Tao (chúng ta có thể tha thứ cho anh ấy - lúc đấy anh ấy mới 13 tuổi).

Còn bây giờ ta sẽ dành thời gian cho lời giải của bài toán Ta phát biểu lại bài toán. Ta cần chứng minh rằng nếu a, b là các số nguyên dương sao cho ab+1 chia hết $a^2 + b^2$, thì tỷ số

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

không chỉ đơn giản là số nguyên - nó là số chính phương.

Ta sẽ sử dụng phương pháp xuống thang.

Phương pháp này, thường được gắn với tên của Fermat, như sau: để chứng minh không tồn tại một số nguyên dương n thỏa mãn một tính chất nào đó, ta giả sử rằng có một số như thế, và sử dụng các thông tin mà ta có để tạo ra một số nguyên dương mới mà A) cũng có tính chất đó và B) nhỏ hơn n. Vì ta có thể làm được một lần nhưu thế nên ta có thể làm được tiếp và ta sẽ có một dãy giảm nghiêm ngặt các số nguyên dương. Nhưng không tồn tại dãy giảm nghiêm ngặt các số nguyên dương. Do đó, điều giả sử ban đầu của chúng ta là sai.

Một cách khác để phát biểu ý tưởng tương tự như sau: nếu tồn tại một số nguyên dương có tính chất đã cho, thì sẽ có số nhỏ nhất có tính chất như vậy. Ta chọn số này, giả sử là n, và sử dụng nó để tạo ra một số nhỏ hơn cũng có tính chất như vậy. Nhưng điều này mâu thuẫn với tính nhỏ nhất. Do đó không tồn tại số nguyên dương thỏa mãn tính chất của chúng ta.

Quay trở lại bài toán:

Trong cặp số nguyên dương a, b thỏa mãn điều kiện bài toán và tỷ số $k = \dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ không chính phương, ta chọn cặp số có $a + b$ nhỏ nhất. Nếu có những cặp như vậy, chúng sẽ có các tổng $a + b$ khác nhau và trong tất cả các tổng này ta chọn tổng nhỏ nhất và cố định cặp số a, b với tổng nhỏ nhất.

Vì vai trò của a và b là đối xứng nên ta có thể giả sử $a \geq b$. Trong trường hợp ngược lại ta chỉ cần đổi chỗ chúng.

Ta viết lại đẳng thức:

$$k = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

dưới dạng:

$$a^2 - kab + (b^2 - k) = 0.$$

Nói cách khác, a là nghiệm của phương trình bậc hai:

$$X^2 - kbX + (b^2 - k) = 0.$$

Nếu ta đã có một nghiệm của phương trình bậc hai, ta sẽ có nghiệm thứ hai. Ta gọn nghiệm này là a'. Từ các tính chất cơ bản của phương trình bậc hai (định lý Vi-ét cho phương trình bậc hai), ta có thể xác định tổng $a + a'$ và tích aa' một cách dễ dàng:

$$a + a' = kb.$$
$$aa' = b^2 - k.$$

Từ phương trình đầu ta có a' là số nguyên (Điều này không ngạc nhiên, phương trình bậc hai đơn khởi với hệ số nguyên hoặc có hai nghiệm nguyên, hoặc hai nghiệm vô tỷ, nó không thể có 1 nghiệm nguyên và một nghiệm khác hữu tỷ nhưng không nguyên).

Từ phương trình thứ hai suy ra a' khác 0. Vì sao? Vì ta hãy nhớ lại, k không là số chính phương nên không thể bằng b^2.

Ta cũng chú ý rằng a' cũng không thể là số âm. Vì nếu $a' < 0$ thì $0 = a'^2 - kba' + (b^2 - k)$ sẽ lớn hơn $a'^2 + k + (b^2 - k)$ (ta thấy $-kba'$ là số lớn hơn k nếu $a' < 0$), hay đơn giản là $a'^2 + b^2 < 0$, mâu thuẫn.

Do đó a' là số nguyên dương. Hơn nữa, chú ý rằng

$$a' = \frac{b^2 - k}{a} < a$$

vì ta đã giả sử là $a \geq b$. Cuối cùng, do a' cũng là nghiệm của phương trình bậc hai ở trên, ta thấy rằng a', b cũng tạo ra tỷ số giống như a, b là:

$$k = \frac{a'^2 + b^2}{a'b + 1}$$

và điều này là mâu thuẫn vì cặp a', b có tổng nhỏ hơn cặp a, b đã được chọn có tổng nhỏ nhất (đpcm).

ĐÔI NÉT VỀ KỲ THI APMOPS

Phạm Văn Thuận, Nguyễn Tiến Lâm

(*Hà Nội*)

1. Giới thiệu APMOPS

Kỳ thi Olympic Toán châu Á Thái Bình Dương APMOPS là kỳ thi được tổ chức hàng năm, thu hút gần 8000 thí sinh dự thi tại nhiều nước (Singapore, Ấn Độ, Brunei, Đài Loan, , Hong Kong, Indonesia, Malaysia, Phillipine, Trung Quốc, Thái Lan, Việt Nam) nhằm tạo cơ hội cho học sinh giỏi toán được thử sức và tranh tài. Lứa tuổi hợp lệ để tham gia APMOPS là các cháu 12, 13 tuổi (đang học lớp 6, 7). Đơn vị đăng cai tổ chức chính, chịu trách nhiệm chuyên môn, hậu cần cho kỳ thi là Học viện Hwa Chong Institution, Singapore.
Tiền thân của APMOPS là kỳ thi học sinh giỏi toán tiểu học SPMOPS của Singapore, SPMOPS được tổ chức lần đầu năm 1990. Cơ cấu giải thưởng của APMOPS là: 2% thí sinh đạt điểm cao nhất sẽ nhận giải Bạch Kim, 5% tiếp theo nhận HCV, 5% tiếp theo đạt HCB, và 10% tiếp đạt HCĐ.
Từ năm 2001, SPMOPS được đồng nhất và chuyển thành APMOPS, mở rộng phạm vi đối tượng cho cả các thí sinh cùng độ tuổi ở các nước trong khu vực cùng tham gia. Ban tổ chức gửi đề thi niêm phong cho các đơn vị đồng tổ chức tại các nước, đảm bảo tất cả các thí sinh cùng thi và kết thúc ở khoảng thời gian tương đương. Năm 2011, APMOPS có 8000 thí sinh tham gia.

1.1. Tại sao APMOPS lại thành công đến vậy?

Ở châu Á, Singapore chắc chắn là một cường quốc về giáo dục: thành tích xếp hạng theo các đơn vị khảo thí độc lập, uy tín các trường trung học, đại học trong xã hội cao. Riêng kỳ thi tuyển vào các trường công lập, Singapore thu hút hàng ngàn ứng viên từ các nước láng giềng tham gia. Với giáo dục toán học, Singapore cũng có nhiều thành tích rất đáng nể. Các bộ sách giáo khoa ở Singapore thậm chí còn được nhiều nước tham khảo, sử dụng. Bộ giáo dục Singapore rất coi trọng việc giáo dục toán học và phong trào học sinh giỏi. Cấp tiểu học, các em có sân chơi là APMOPS, lên trung học cơ sở và phổ thông, Hội Toán học Singapore (SMS) tổ chức Kỳ thi Olympic Toán Quốc Gia với hai nhóm tuổi (15-16 và 17-18). Năm 2012, SMO có 9742 thí sinh tham gia, từ 148 trường trung học của Singapore. Sau mỗi kỳ thi SMS đều có xuất bản đề thi, lời giải, cùng các thống kê về kỳ thi. Các kỳ thi học sinh giỏi của Singapore thực sự là sân chơi tự do: ai đúng độ tuổi đều có thể dự thi, lệ phí thi là 5 đô la (nhà trường sẽ trả cho), cái này thì Singapore chọn cách làm của Mỹ, chứ không lập đội tuyển các cấp trường, quận, tỉnh như ở ta.
Phong cách các bài toán Olympic của Singapore pha trộn hai kiểu: kiểu Mỹ ở tính đa dạng và dài, kiểu Trung Quốc ở độ khó. Nhiều bài toán (dù đơn giản) cũng có ý tưởng tốt và được phát biểu dưới hình thức hấp dẫn. Ở cả hai kỳ thi trọng yếu là APMOPS và SMO, các đề thi đều là sản phẩm trí tuệ tập thể. Các yếu tố khác góp vào thành công của APMOPS như sau

- một nền giáo dục tốt (gian lận trong học tập là điều rất hiếm gặp ở các trường Singapore) với phong trào học tập rộng khắp,

- công tác tổ chức phong trào thi có tính kế cận liên tục, rộng khắp,
- nội dung các bài toán có chất lượng tốt, có sức cuốn hút và gây hứng thú, tò mò ở học sinh.

1.2. Tự do và đánh giá

Những người làm đề thi học sinh giỏi tại Singapore được hưởng tự do học thuật tuyệt đối. Họ thường đến từ hai nơi là Khoa Toán tại Đại học Quốc Gia Singapore, Viện Toán học, và Viện Giáo dục Quốc gia Singapore (đặt tại NTU). Nội dung đề thi được khuyến khích đổi mới, và gần như không có quy định giới hạn nội dung, hay mức độ khó.

2. Giới thiệu một số bài toán APMOPS

2.1. Tổng quan về đề thi

Đề thi APMOPS gồm 30 câu hỏi được viết bằng tiếng Anh. Học sinh làm bài thi dưới hình thức viết đáp số (short answer). Một cách tương đối, đề thi được chia làm ba phần từ dễ đến khó, cụ thể

- Dễ: Từ câu 1 đến câu 10. Biểu điểm cho mỗi câu là 4.
- Trung bình: Từ câu 11 đến câu 20. Biểu điểm cho mỗi câu là 5.
- Khó: Từ câu 21 đến câu 30. Biểu điểm cho mỗi câu là 6.

Như vậy, điểm tối đa cho toàn bài thi là 150 điểm với thời gian làm bài là 2 tiếng. Đề thi APMOPS khá phong phú về nội dung, bao gồm các bài toán về số học, hình học, tổ hợp và lôgic (đặc biệt chú trọng các bài toán đếm). Ở mức độ nào đó, nội dung đề thi về cơ bản là phù hợp với chương trình các lớp 6, 7 ở nước ta; bên cạnh đó cũng có những nội dung không có trong chương trình sách giáo khoa các lớp 6,7 như các bài toán đếm, tô màu hay các bài toán suy luận lôgic. Các bài toán trong đề thi APMOPS thường có phát biểu ở dạng đơn giản, nhiều bài toán gắn với các nội dung thực tế và thường đòi hỏi học sinh phải suy luận tốt, sáng tạo cao trong cách giải.
Qua theo dõi trong nhiều năm, chúng tôi nhận thấy đề thi thường bao gồm các nội dung

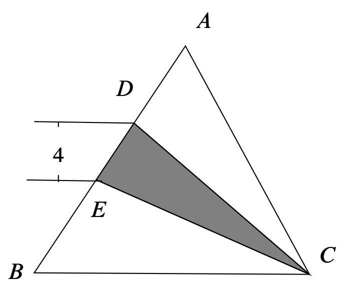
- Số học: các bài toán về ước, bội, dấu hiệu chia hết, số chính phương, sô nguyên tố, cấu tạo số, tổng các chữ số...
- Đại số: các bài toán có nội dung thực tế, đưa về lập các phương trình bậc nhất nhiều ẩn ở mức độ đơn giản...
- Hình học: các bài toán về tính góc, diện tích, chu vi, độ dài...
- Tổ hợp: các bài toán đếm, tô màu...
- Lôgic: các bài toán liên quan đến tính đúng, sai của mệnh đề...

  Như vậy, ngoài phần lớn nội dung thi là phù hợp với chương trình sách giáo khoa các lớp 6,7 của Việt Nam (Số học, Hình học, Đại số) thì có hai nội dung là Tổ hợp và Lôgic là chưa được đề cập trong sách giáo khoa các lớp 6,7 ở nước ta (thậm chí là sách giáo khoa bậc Trung học cơ sở). Cần nhấn mạnh là các bài toán Tổ hợp, đặc biệt là các bài toán đếm và bài toán Tô màu hầu như năm nào cũng xuất hiện trong đề thi.

2.2. Giới thiệu một số bài toán APMOPS

Trong mục này, chúng tôi xin giới thiệu tới độc giải một số bài toán APMOPS mà theo chúng tôi thì đây là những bài toán hay và thú vị. Lời giải các bài toán này có khi rất đơn giản và trực quan, cũng có khi đòi hỏi sự sáng tạo cao. Do phạm vi đề thi chỉ dành cho các em lớp 6, 7 nên trong các bài toán dưới đây chúng tôi đưa ra những lời giải phù hợp nhất cho lứa tuổi học sinh các lớp 6,7.

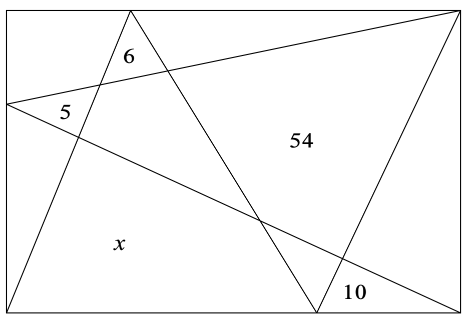
Bài toán 1 (**APMOPS 2011-P14**). *Trong hình vẽ dưới đây, xét tam giác ABC với $BC = 8$ cm. D và E là hai điểm nằm trên cạnh AB sao cho khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa D và E là 4 cm. Tính diện tích tam giác tô đậm CDE theo đơn vị là cm^2.*



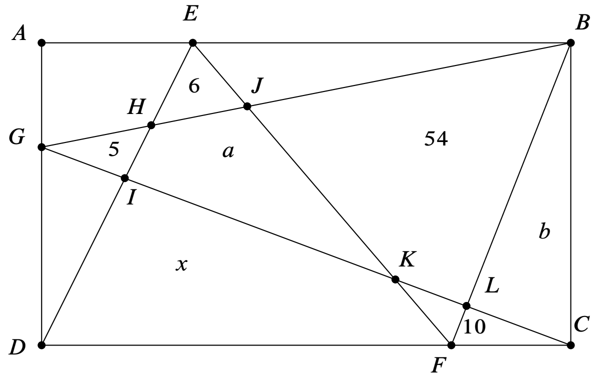
Lời giải. Gọi h_1, h_2 lần lượt là chiều cao kẻ từ đỉnh D và E xuống đáy BC của tam giác DBC và EBC. Lúc đó diện tích phần tô được tính là hiệu diện tích của hai tam giác vừa nêu. Tức là bằng $8 \times h_1/2 - 8 \times h_2/2 = 4(h_1 - h_2) = 4 \times 4 = 16$ (cm^2). □

Nhận xét. Giải bài này chỉ cần công thức diện tích tam giác, dùng ở lớp 4, 5, nhưng học sinh thường thấy khó nhất ở chi tiết là không biết khai thác dữ kiện 4 cm đã cho trong đầu bài.

Bài toán 2 (**APMOPS 2011-P19**). *Xét hình chữ nhật ở hình vẽ dưới đây với diện tích các phần lần lượt là 5 cm^2, 6 cm^2, 10 cm^2, 54 cm^2 và x cm^2. Tìm giá trị của x.*



Lời giải.. Đặt tên các điểm như hình vẽ. Chú ý rằng theo giả thiết thì $(EHJ) = 6$, $(GHI) = 5$, $(FLC) = 10$, đặt $(BLC) = b$, $(HJKI) = a$, $(IKFD) = x$, và $(JBLK) = 54$. Nhận thấy tổng diện tích của tam giác (DEF) và tam giác (BFC) bằng diện tích của tam giác (GBC) vì cùng bằng một nửa diện tích của hình chữ nhật $ABCD$.



Từ đó, ta có liên hệ

$$6 + a + x + 10 + b = 5 + a + 54 + b,$$

hay là

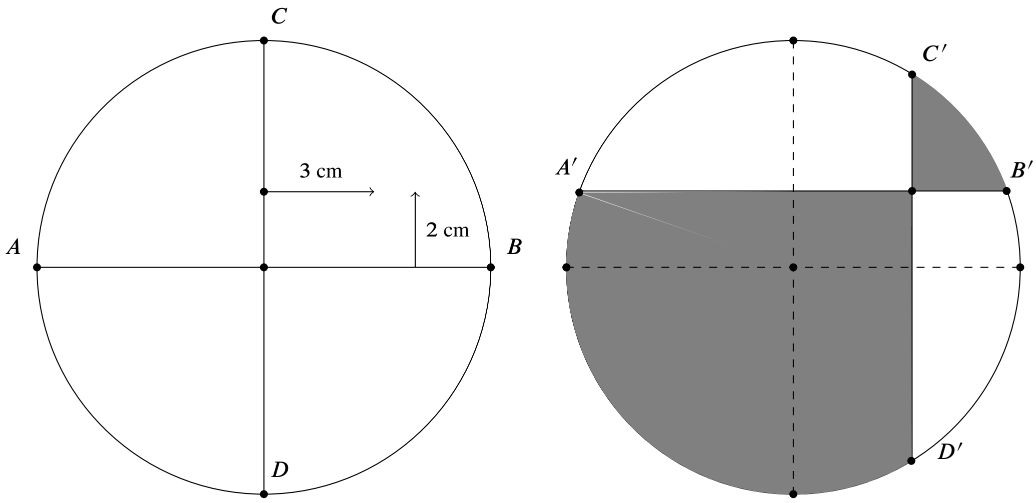
$$5 + 54 = 6 + x + 10.$$

Suy ra $x = 59 - 16 = 43$.

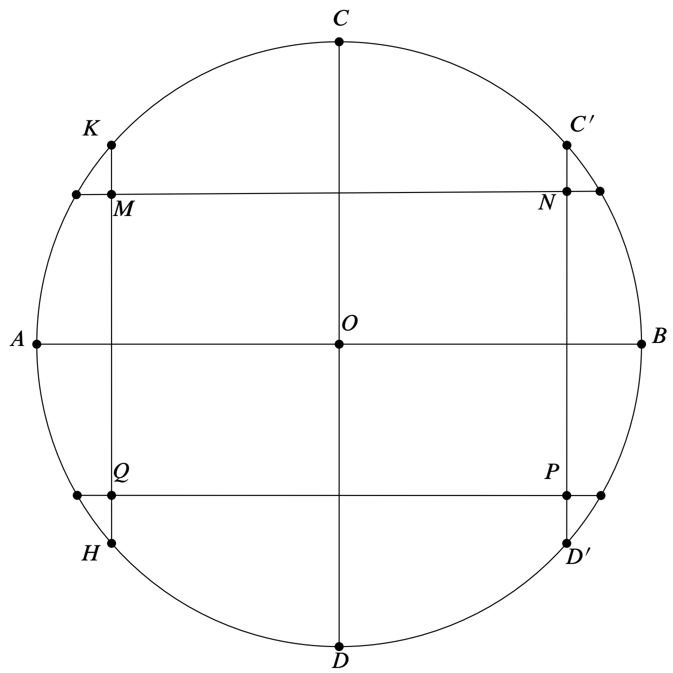
□

Nhận xét. Bài này chỉ cần sử dụng mối liên hệ giữa diện tích của tam giác với hình chữ nhật ngoại tiếp nó là sẽ ra được đáp số. Đây có lẽ là bài toán hay và thú vị, đòi hỏi học sinh phải tinh ý trong quan sát hình vẽ, nếu không lời giải sẽ rắc rối và phức tạp.
Dưới đây là một trong những bài toán đẹp, đặc sắc của APMOPS, khi nó khai thác tính đối xứng của đường tròn. Đối diện với bài toán này, ấn tượng ban đầu là người ta sẽ thấy bối rối, khó kiểm soát. Bằng các vẽ các hình phụ, đối xứng, ta có thể tính toán được bài này.

Bài toán 3 (APMOPS 2004-P28). *Xét một đường tròn có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau (xem hình vẽ dưới đây). Nếu dịch đường kính CD sang phải 3 cm và dịch đường kính AB lên trên 2 cm thì hiệu số diện tích phần tô đậm và phần không tô đậm là bao nhiêu?*



Gợi ý.. Ta sẽ sử dụng tính đối xứng để giải bài toán này bằng cách vẽ thêm hai dây cung đối xứng của $C'D'$ và $A'B'$ qua hai đường kính CD và AB tương ứng. Các dây cung mới này sẽ tạo với hai dây $C'D'$, $A'B'$ một hình chữ nhật $MNPQ$ kích thước 4×6 (xem hình vẽ dưới đây).



Từ đó so sánh các phần được tô và không tô, hiệu diện tích phần tô đậm với phần không tô sẽ bằng diện tích của hình chữ nhật $MNPQ$ và bằng 24 cm^2. □

Bài toán 4 (APMOPS 2010-P17). *Cho*

$$S = \frac{1}{\dfrac{1}{2001} + \dfrac{1}{2002} + \cdots + \dfrac{1}{2010}},$$

hãy tìm số nguyên lớn nhất không vượt quá S.

Lời giải. Ta có đánh giá

$$10.\frac{1}{2010} < \frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} + \cdots + \frac{1}{2010} < 10.\frac{1}{2000}$$

hay

$$\frac{1}{201} < \frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} + \cdots + \frac{1}{2010} < \frac{1}{200}.$$

Suy ra $200 < S < 201$, dẫn đến số nguyên lớn nhất không vượt quá S là 200. □

Nhận xét. Thực chất của bài toán này là tìm phần nguyên của S. Thường thì ta sẽ tìm cách chặn S giữa hai số nguyên liên tiếp. Ở bài toán này, ta đã sử dụng phương pháp làm trội và làm giảm để đánh giá chặn trên và chặn dưới cho S, một phương pháp khá quen thuộc với các em học sinh lớp 5,6.

Tiếp theo, ta xét một bài toán đếm kinh điển mà đối với học sinh cấp 3 chuyên Toán thì đây là bài toán quen thuộc và cơ bản.

Bài toán 5 (APMOPS 2013-P16). *Có bao nhiêu cách chia 8 thanh sô-cô-la (giống hệt nhau) cho 4 em bé sao cho mỗi em có ít nhất một thanh sô-cô-la.*

Lời giải. Cách 1. Một cách tự nhiên nhất, ta có thể nghĩ tới phương pháp liệt kê tất cả các khả năng. Ta có các cách phân tích số 8 thành tổng của các số nguyên dương như dưới đây

$$8 = 1 + 1 + 1 + 5 = 1 + 1 + 2 + 4 = 1 + 1 + 3 + 3 = 1 + 2 + 2 + 3 = 2 + 2 + 2 + 2.$$

- Ứng với bộ $(1; 1; 1; 5)$ có 4 cách chia sô-cô-la.
- Ứng với bộ $(1; 1; 2; 4)$ có 12 cách chia sô-cô-la.
- Ứng với bộ $(1; 1; 3; 3)$ có 6 cách chia sô-cô-la.
- Ứng với bộ $(1; 2; 2; 3)$ có 12 cách chia sô-cô-la.
- Ứng với bộ $(2; 2; 2; 2)$ có đúng 1 cách chia sô-cô-la.

Do đó, tổng số cách chia sô-cô-la là $4 + 12 + 6 + 12 + 1 = 35$ cách chia 8 thanh sô-cô-la cho 4 em bé sao cho mỗi em có ít nhất một thanh sô-cô-la.
Cách 2. Rõ ràng cách 1 sẽ tỏ ra không hiệu quả nếu số thanh sô-cô-la là lớn. Lời giải này sẽ khắc phục được điều đó. Trước hết ta đưa ra hai nhận xét đơn giản.
Nhận xét 1. Chia $n \geq 2$ thanh sô-cô-la (giống hệt nhau) cho 2 em bé sao cho mỗi em có ít nhất một thanh sô-cô-la thì số cách chia sẽ là $n - 1$.
Thật vậy, nếu gọi số thanh sô-cô-la nhận được của hai em lần lượt là $a; b$ thì cặp $(a; b)$ sẽ nhận một trong các giá trị $(1; n-1), (2; n-2), \cdots, (n-1; 1)$. Do đó, số cách chia sẽ là $n - 1$ cách.
Nhận xét 2. Chia $n \geq 3$ thanh sô-cô-la (giống hệt nhau) cho 3 em bé sao cho mỗi em có ít nhất một thanh sô-cô-la thì số cách chia sẽ là $\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$.
Thật vậy, số thanh sô-cô-la của em thứ nhất chỉ có thể là $1; 2; \cdots; n-2$. Nếu em thứ nhất được 1 thanh sô-cô-la thì theo nhận xét 1 sẽ có $n - 2$ cách chia $n - 1$ thanh sô-cô-la còn lại cho 2 em còn lại; nếu em thứ nhất được 2 thanh thì cũng theo nhận xét 1 sẽ có $n - 3$ cách chia $n - 2$ thanh còn lại cho 2 em còn lại; cứ thế... Do đó, tổng số cách chia sẽ là

$$n - 2 + n - 3 + \cdots + 1 = \frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

Trở lại bài toán, ta bắt đầu chia sô-cô-la cho em thứ nhất. Có các khả năng

- Em thứ nhất nhận được 1 thanh sô-cô-la; còn 7 thanh còn lại chia cho 3 em thì theo nhận xét 2 ta có $\dfrac{5.6}{2} = 15$ cách chia.
- Em thứ nhất nhận được 2 thanh sô-cô-la; còn 6 thanh còn lại chia cho 3 em thì theo nhận xét 2 ta có $\dfrac{4.5}{2} = 10$ cách chia.
- Em thứ nhất nhận được 3 thanh sô-cô-la; còn 5 thanh còn lại chia cho 3 em thì theo nhận xét 2 ta có $\dfrac{3.4}{2} = 6$ cách chia.
- Em thứ nhất nhận được 4 thanh sô-cô-la; còn 4 thanh còn lại chia cho 3 em thì theo nhận xét 2 ta có $\dfrac{2.3}{2} = 3$ cách chia.

- Em thứ nhất nhận được 5 thanh sô-cô-la; còn 3 thanh còn lại chia cho 3 em thì theo nhận xét 2 ta có $\frac{1.2}{2} = 1$ cách chia.

Do đó, tổng số cách chia thỏa mãn đề bài sẽ là

$$\frac{1}{2}(1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6) = 35.$$

□

Nhận xét. Đối với học sinh các lớp 6,7 thì bài toán trên không phải là bài toán dễ. Cách 1 là cách đơn giản nhưng học sinh sẽ dễ đếm sai. Cách 2 tuy dài hơn nhưng cách giải này có thể giải các bài toán trong trường hợp số thanh sô-cô-la hay số em bé tăng lên.
Thực ra, bài toán trên là một trường hợp cụ thể của bài toán chia kẹo của Euler: Có n cái kẹo chia cho k em bé sao cho mỗi em có ít nhất một cái kẹo thì số cách chia sẽ là C_{n-1}^{k-1}. Trong lời giải của bài toán trên, ta đã chứng minh được số cách chia n cái kẹo cho 3 em bé sao cho mỗi em có ít nhất một cái kẹo là $\frac{(n-2)(n-1)}{2} = C_{n-1}^2$. Hơn nữa, cũng trong lời giải trên xuất hiện một tổng khá quen thuộc

$$\frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \cdots + \frac{(n-1).n}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

nên nếu viết $\frac{(k-1).k}{2} = C_k^2$ còn $\frac{(n-1)n(n+1)}{6} = C_{n+1}^3$ thì đẳng thức trên được viết lại là

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_n^2 = C_{n+1}^3.$$

Bài toán 6 (APMOPS 2014-P29). *Từ 2014 đến 6999, có bao nhiêu số nguyên dương mà tổng các chữ số của mỗi số đó đều chia hết cho 5.*

Lời giải. Trước hết, ta có nhận xét sau đây
Nhận xét. Trong 10 số tự nhiên liên tiếp bắt đầu bởi số có dạng $\overline{A0}$ đến $\overline{A9}$ có đúng hai số có tổng các chữ số chia hết cho 5.
Thật vậy, gọi tổng các chữ số của 10 số nói trên lần lượt là $a, a+1, a+2, \cdots, a+9$. Chỉ cần xét các trường hợp $a \in \{5k; 5k+1; 5k+2; 5k+3; 5k+4\}$ với $k \in \mathbb{N}$, ta có ngay điều phải chứng minh.
Trở lại bài toán, từ 2020 đến 6999 ta chia thành các đoạn gồm 10 số tự nhiên liên tiếp như sau: $[2020; 2029], [2030; 2039], \cdots, [6990; 6999]$, có tất cả là 498 đoạn như thế, mỗi đoạn có đúng hai số có tổng các chữ số chia hết cho 5. Hơn nữa, từ 2014 đến 2019 có đúng 1 số có tổng các chữ số chia hết cho 5 (là số 2017). Do đó, từ 2014 đến 6999, có $498 \times 2 + 1 = 997$ số có tổng các chữ số chia hết cho 5. □

Nhận xét. Bài toán trên được xếp vào nhóm bài toán khó nhất của đề thi năm 2014 (bài số 29 trong đề thi). Nhận xét trong bài toán giúp ta đếm được khá nhanh chóng và nhận xét này có được nhờ việc quan sát các trường hợp cụ thể để từ đó đưa ra tính chất tổng quát. Đối với học sinh trung học phổ thông, ta có thể giải bài toán bằng phương pháp đếm truy hồi hoặc sử dụng hàm sinh. Lời giải trên phù hợp với học sinh cấp 2 hơn.

Bài toán 7 (APMOPS 2014-P23). *Xét ba loại nước mắm A, B, C với hàm lượng muối tương ứng là $5\%, 8\%$ và 9%. Giả sử ban đầu có 60 gam nước mắm loại A; 60 gam nước mắm loại B và 47 gam nước mắm loại C. Để thu được 100 gam nước mắm hàm lượng muối 7%, người ta trộn cả ba loại nước mắm lại với nhau, hỏi phải dùng nhiều nhất và ít nhất là bao nhiêu gam nước mắm loại A.*

Lời giải. Gọi x, y, z lần lượt là khối lượng nước mắm loại A, B, C cần dùng để trộn vào nhau. Trộn ba loại với nhau ta được 100 gam nước mắm có nồng độ muối là 7% nên $x + y + z = 100$ và $5x + 8y + 9z = 700$. Lấy đẳng thức thứ nhất nhân 8 rồi trừ đẳng thức thứ hai cho ta $3x - z = 100$, hay $3x = z + 100$. Chú ý là khối lượng nước mắm loại C thêm vào không vượt quá là 47 gam nên $z \leq 47$, kéo theo $x \leq 49$. Hơn nữa, thay $z = 3x - 100$ vào $x + y + z = 100$ ta được $4x = 200 - y$. Vì lượng nước mắm loại B thêm vào không vượt quá 60 gam nên $y \leq 60$, dẫn đến $x \geq 35$. Vì vậy, khối lượng nước mắm loại A thêm vào không nhỏ hơn 35 gam và không lớn hơn 49 gam.

Cách trộn 49 gam nước mắm loại A với hai loại B, C để được 100 gam nước mắm nồng độ 7% : Lần lượt lấy 49 gam nước mắm loại A, 4 gam nước mắm loại B, 47 gam nước mắm loại C.

Cách trộn 35 gam nước mắm loại A với hai loại B, C để được 100 gam nước mắm nồng độ 7% : Lần lượt lấy 35 gam nước mắm loại A, 60 gam nước mắm loại B, 5 gam nước mắm loại C. □

Nhận xét. Đây là một bài toán tối ưu, hay. Tuy nhiên việc tìm ra được một chặn trên và chặn dưới cho x không phải là quá quen thuộc đối với học sinh lớp 6,7 nên ở mức độ nào đó thì đây cũng là một bài toán khó trong đề thi. Bài toán này cũng khẳng định về mức độ phong phú dạng toán của kì thi APMOPS.

Bài toán 8 (APMOPS 2015-P28). *Xét 49 số nguyên dương đầu tiên $1, 2, \cdots, 49$, hỏi có thể chọn ra nhiều nhất là bao nhiêu số để xếp trên một vòng tròn sao cho tích của hai số kề nhau bất kỳ luôn nhỏ hơn 100.*

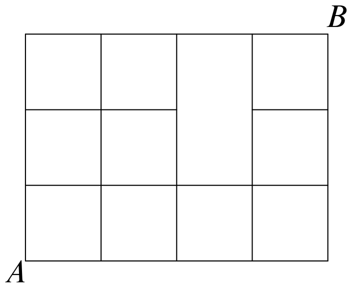
Lời giải. Ta chứng minh xếp được nhiều nhất là 18 số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Thật vậy, dễ dàng xếp được 18 số đầu tiên $1, 2, \cdots, 18$ trên vòng tròn thỏa mãn tích hai số kề nhau tùy ý nhỏ hơn 100: xếp các số theo chiều kim đồng hồ $1, 18, 2, 17, 3, 16, 4, \cdots, 8, 11, 9, 10$.

Bây giờ ta chứng minh số 18 là số lớn nhất có thể. Nếu có ít nhất 19 số thì trong đó sẽ có ít nhất 10 số có hai chữ số, nhiều nhất 9 số có một chữ số. Rõ ràng hai số có hai chữ số không thể đứng cạnh nhau nên mỗi số có hai chữ số phải xếp ở giữa hai số có một chữ số. Vì có nhiều nhất 9 số có một chữ số nên 9 số này sẽ tạo ra nhiều nhất 9 khoảng trống, trong khi đó lại có ít nhất 10 số có hai chữ số nên tồn tại ít nhất hai số có hai chữ số được xếp vào cùng một khoảng trống (vô lí). □

Nhận xét. Trong lời giải trên, ta đã sử dụng nguyên tắc Dirichlet để suy ra không thể chọn 19 số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Nguyên tắc Dirichlet được phát biểu khá đơn giản, dễ hiểu và quen thuộc với học sinh cấp 2.

Để kết thúc bài viết, chúng tôi xin giới thiệu với độc giả bài số 12 trong đề thi APMOPS 2013.

Bài toán 9 (APMOPS 2013-P12). *Trong hình vẽ dưới đây, một con kiến đi từ đỉnh A đến đỉnh B của lưới ô vuông. Nếu con kiến chỉ được phép đi sang phải hoặc lên trên dọc theo các đường lưới thì hỏi có bao nhiêu đường đi khác nhau để kiến đi được từ điểm A đến điểm B.*



Đây là bài toán đếm đường đi ngắn nhất, học sinh lớp 6, 7 có thể giải được bài này mà không cần dùng các kiến thức về tổ hợp hay chỉnh hợp (kể cả trong trường hợp lưới có kích thước lớn hơn).

3. Lời kết

Những bài toán trong kì thi APMOPS luôn là những bài toán có tính kích thích cao bởi nó đòi hỏi học sinh phải đưa ra những lời giải phù hợp với kiến thức của học sinh lứa tuổi 12-13, càng ít sử dụng các công cụ hay kiến thức các lớp trên càng tốt. Qua đó, học sinh ở lứa tuổi 12-13 được phát huy khả năng quan sát, tưởng tượng và thậm chí là khả năng tổng quát một vấn đề từ những trường hợp cụ thể. Xét ở khía cạnh giáo dục, kỳ thi APMOPS là kỳ thi có chất lượng, là một sân chơi lành mạnh cho học sinh lứa tuổi 12-13 ở Việt Nam cũng như ở các nước trong khu vực.

Vì khuôn khổ của bài bài báo nên chúng tôi chỉ chọn ra một số bài toán APMOPS để giới thiệu với độc giả. Các độc giả quan tâm có thể tham khảo đề thi APMOPS một số năm tại trang web http://www.hci.sg/aphelion/apmops/sample.htm.

Tài liệu tham khảo

[1] Các đề thi APMOPS từ năm 2001 đến năm 2015.

[2] http://www.hci.sg/aphelion/apmops/sample.htm.

NẺO VỀ CỦA TOÁN

Nguyễn Quốc Khánh
(*Hà Nội*)

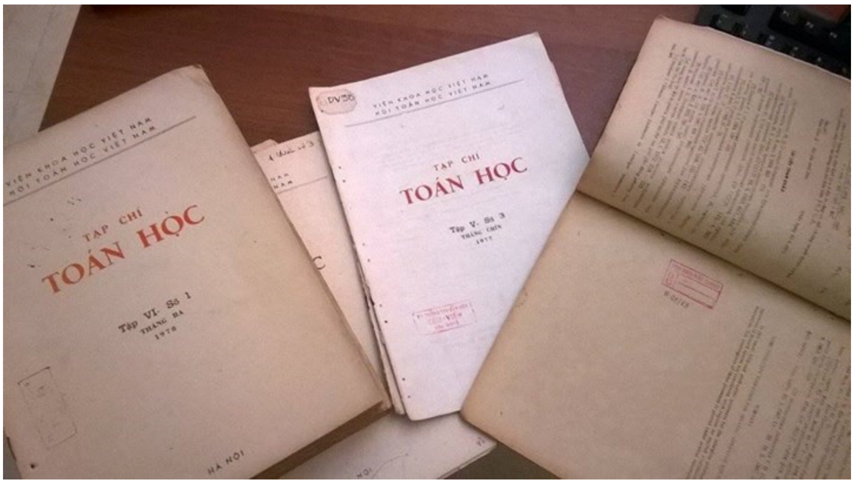
Chỉ mấy ngày trước, kì thi Toán mô hình Hà Nội 2015 đã chính thức kết thúc tương đối thành công. Đề thi năm nay là về chủ đề trồng cây phủ xanh đô thị. Đề thi tuy còn sơ sài, các đội thi cũng còn nhiều lúng túng, nhưng lần đầu tiên người ta thấy rằng có một cuộc thi toán mà người tham gia có thể tự chủ động làm việc trên các giả thiết mà mình đặt ra. Mục tiêu chung là để tìm kiếm những mô hình có tính thực tế và khả dụng trong đời sống. Trong số 18 đội tham dự, có những đội vẫn thuần túy chỉ là giải toán như thông thường, nhưng cũng có những đội đã thực sự nắm được tinh thần của toán mô hình, và đặc biệt có cả những đội chỉ tuyệt đối quan tâm tới vấn đề thực tế, mà bỏ quên luôn cả những giả thiết của đề bài mà bản thân các bạn đó cho rằng như thế là chưa hợp lý và không nên mất thời gian.

Cùng lúc với kì thi này diễn ra, Bộ Giáo dục Đào tạo cũng chính thức công bố đề cương hoạch định chương trình giáo dục phổ thông hướng tới 2018. Trong bản đề cương này, rất thú vị là chính môn toán mô hình cũng đã lần đầu tiên được đề cập tới một cách tương đối rõ ràng:

> Lĩnh vực giáo dục toán học có ưu thế hình thành và phát triển cho học sinh năng lực tính toán, năng lực tư duy toán học, năng lực giải quyết các vấn đề toán học, năng lực mô hình hoá toán học, năng lực giao tiếp toán học (nói, viết và biểu diễn toán học), năng lực sử dụng các công cụ, phương tiện học toán (đặc biệt là công cụ công nghệ thông tin và truyền thông); giúp học sinh nhận biết toán học như là một phương tiện mô tả và nghiên cứu thế giới hiện thực, là công cụ thực hành ứng dụng trong học tập các môn học khác. Giáo dục toán học được thực hiện ở nhiều môn học như Toán, Vật lý, Hoá học, Sinh học, Công nghệ, Tin học,... trong đó môn Toán là môn học cốt lõi.
> *(trích dự thảo Chương trình giáo dục phổ thông tổng thể - BGDĐT tháng 8 năm 2015)*

Nói là lần đầu tiên thì không thực đúng, nói là "lần đầu tiên trong nhiều chục năm trở lại đây" thì có phần chính xác hơn. Bởi vì trong lịch sử giáo dục toán phổ thông nói riêng và toán ứng dụng nói chung ở ta, thì đã có không dưới vài lần câu chuyện "toán mô hình" được nhắc tới.

Ở Việt Nam, người đầu tiên chính thức hóa ngành "toán ứng dụng" và khởi đầu bằng việc làm "toán mô hình" có lẽ là Giáo sư Lê Văn Thiêm, với các công trình về vấn đề nổ định hướng, và vấn đề thẩm thấu qua các tầng địa chất. Trước Giáo sư Thiêm, có lẽ cũng không ít người đã áp dụng toán mô hình trong ngành nhà băng (banking), nhớ lại từ đầu thế kỷ trước, trong các bài thi địa phương, đâu đó người ta đã thấy những việc mô hình hóa quá trình tính lãi đơn, lãi kép, một cách rất tự nhiên và hiệu quả. Nhưng ở một mức độ chuyên biệt, thì chuyện một nhà toán học lý thuyết như Giáo sư Thiêm về nước và khởi động những công việc liên quan tới toán mô hình và ứng dụng toán học có thể coi là sự khởi đầu của toàn bộ lĩnh vực rộng lớn này ở Việt Nam.
Sau GS Thiêm, thì người đã chính thức khởi động việc đưa những phiên ảnh đầu tiên của toán mô hình vào giáo dục phổ thông có lẽ là nhà giáo Lê Hải Châu. Tháng 3 năm 1962, thầy Lê



Tạp chí Toán học – nơi GS Thiêm đăng những bài phổ biến toán sơ cấp và nghiên cứu toán mô hình và ứng dụng toán đầu tiên ở Việt Nam.

Hải Châu soạn cuốn "Toán học gắn liền với đời sống và thực tiễn sản xuất". Thầy Lê Hải Châu là người trực tiếp dẫn dắt những đoàn Việt Nam thi toán quốc tế IMO đầu tiên, và sau đó mấy chục năm vẫn tiếp tục tham gia việc phát triển những chương trình thí điểm quan trọng của Bộ học ở cấp trung học phổ thông. Tất nhiên thứ toán mà thầy Lê Hải Châu mô tả trong cuốn sách nêu trên mới dừng lại ở mức vô cùng sơ khai của chuyện mô hình những kiến thức và khái niệm toán rất đơn giản ở khắp xung quanh, như là các dụng cụ lao động thời bấy giờ, như cờ lê, bàn tiện, vân vân. Nhưng có lẽ là một điểm may mắn của thế hệ trước, khi mà rất nhiều những sách vở rất hay về toán trong thực tế đã được biên dịch, biên soạn rất cẩn thận và tỉ mỉ, với một chất lượng rất cao. Thế nhưng, những cuốn sách ấy bây giờ ở đâu? Câu trả lời là, những cuốn sách ấy bây giờ vẫn ở đây, trên giá sách của những thầy giáo nhiều năm kinh nghiệm. Chỉ có một điều khác biệt là: không ai đọc cả.

Những cuốn sách toán “thực tế” đã từ lâu vắng bóng.

Thực ra, toán mô hình không phải một điều gì đó đã có từ quá xa xưa. Bởi lẽ chỉ mới trong khoảng vài chục năm gần đây, thứ toán này mới được MathScinet chính thức cấp mã 00A71 và gọi là “Theory of mathematical modeling” (lý thuyết các mô hình toán học hóa, hoặc có thể gọi ngắn gọn là toán mô hình). Nhìn sơ qua như vậy thì có thể hiểu rằng toán mô hình thực chất là một cách giáo dục toán học. Điều này rất có lý, bởi lẽ trong Đại hội toán học thế giới IMU, thì có một "tiểu ban" về giáo dục toán học, và từ đó ICTMA (the International Study Group for the Teaching of Mathematical Modelling and Applications) đã thực hiện các công việc nghiên cứu giảng dạy toán mô hình ở cả bậc phổ thông lẫn đại học từ tận những năm 1983. Tiểu ban giáo dục của IMU luôn hoạt động rất mạnh mẽ, với nhiều nghiên cứu giá trị được in thành sách giấy rất công phu. Đối với toán mô hình, ICTMA đã có một chuyên khảo gồm rất nhiều các công trình nghiên cứu về chuyện giảng dạy toán mô hình, trong đó, ICTMA cố gắng giải quyết những câu hỏi rất căn bản, bao gồm "có thể dạy toán mô hình được không", "dạy toán mô hình thực chất phải làm gì", "có những loại mô hình nào trong toán mô hình", vân vân.

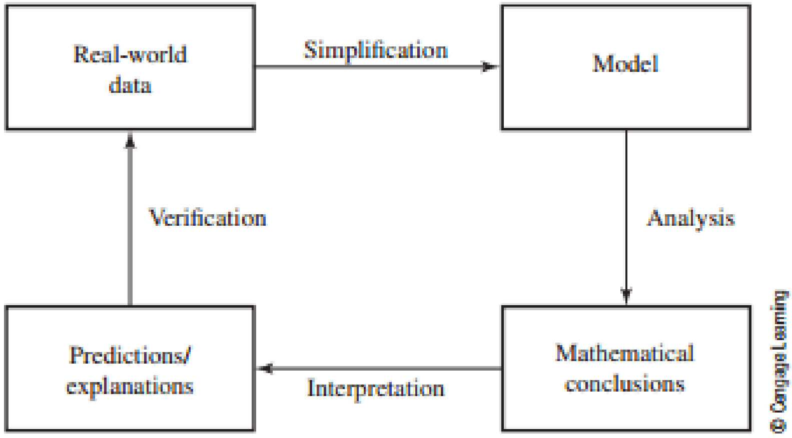
Những tài liệu tham khảo cơ bản về toán mô hình trên thế giới (cấp độ chuyên biệt).

Cho tới tận bây giờ, tôi vẫn chưa nói một chút gì về việc toán mô hình là gì. Nói một cách đơn giản, thì toán mô hình tức là, bắt đầu từ một tình huống thực tế trong cuộc sống, bạn cố gắng mô hình hóa nó thành những phương trình, những biểu thức, những công thức, những lý thuyết toán học, sau đó, bạn bắt đầu tính toán, nghiên cứu, thử nghiệm trên mô hình đó bằng các kiến thức toán học mà bạn đã được trang bị, hoặc bạn có thể trực tiếp xây dựng tiếp những công cụ mới, những lý thuyết mới lấy cảm hứng từ trực giác từ thực tế để giải quyết bài toán mới được tạo thành, sau đó, bạn đem những kết luận thu được áp dụng ngược lại tình huống thực tế ban đầu, nếu việc áp dụng đó đạt hiệu quả, thì nghĩa là mô hình của bạn hoạt động tốt và có giá trị, ngược lại, bạn phải điều chỉnh và tiếp tục cố gắng hướng tới một mô hình khác thực tế hơn, hiệu quả hơn. Đây chính là nguyên tắc chung, tinh thần chung, bốn bước đại thể của một quá trình làm toán mô hình (xem biểu đồ ở dưới).

Câu hỏi đặt ra là, như thế thì toán mô hình khác gì toán ứng dụng? Trả lời vấn đề này, GS Nguyễn Hữu Dư (Chủ tịch hội toán học Việt Nam, Giám đốc điều hành Viện nghiên cứu cao cấp về toán VIASM) đã nhận định một cách chính thức trong lễ khai mạc kì thi Toán mô hình Hà Nội 2015 rằng:

> "Ở Việt Nam, tiềm năng ứng dụng toán học vào đời sống là rất lớn, toán học thuần túy lý thuyết của chúng ta cũng tương đối tốt, nhưng giữa hai câu chuyện này vẫn là một khoảng cách khó lý giải, hi vọng toán mô hình sẽ là cây cầu nối chúng lại với nhau" – GS Nguyễn Hữu Dư.

Trước đó 3 năm, GS Neal Koblitz, một người bạn thân thiết của cộng đồng toán học Việt Nam – một nhà chép sử, đã có đề nghị VIASM nên để ý tới lĩnh vực toán mô hình này, GS Koblitz nói:



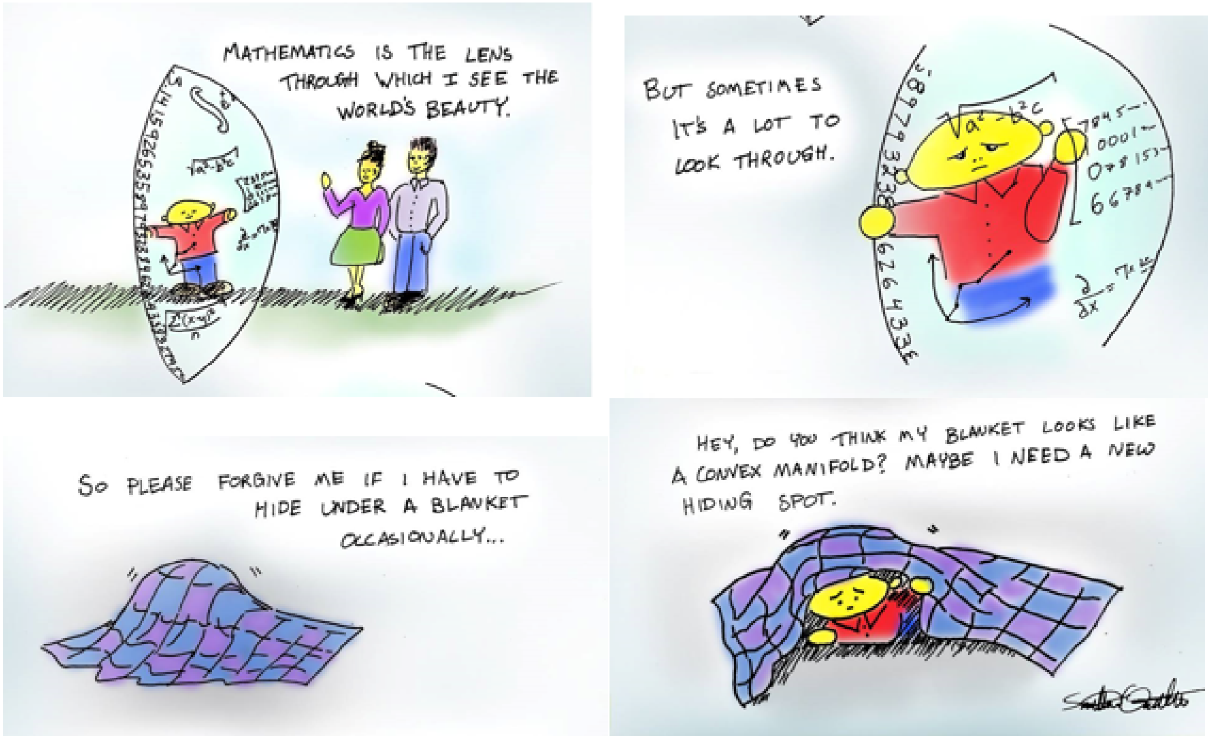
Trích từ sách "A first course in mathematics modeling".

> "Một số lớn học sinh Việt Nam rất giỏi môn toán, nhưng một sai lầm là trong hệ thống giáo dục Việt Nam hiện nay là không giúp được cho các em xác định được học toán để làm gì? Các em học toán chỉ để đỗ đại học, đỗ đại học rồi thì các em chẳng biết toán còn có tích sự gì! Vấn đề là phải làm sao để khi học toán, các em không chỉ học kiến thức, kỹ năng làm toán, mà còn phải hiểu giá trị, vẻ đẹp, khả năng ứng dụng thực tế cuộc sống của toán" – GS Neal Koblitz

Sau 3 năm, cuối cùng thì cái tâm ý mà GS Koblitz gửi gắm đã bước đầu được hiện thực hóa. Cùng lúc với sự cầu thị của Bộ Giáo dục đào tạo, chúng ta đã có một cơ hội tương đối rõ ràng để thực hiện một quá trình "toán hóa xã hội" thông qua câu chuyện "toán mô hình" một cách hiệu quả (mà vốn dĩ vẫn đang diễn ra với rất nhiều góc cạnh khác nhau). Tuy nhiên, mọi chuyện không dễ dàng như thế. Trước tiên, muốn bắt đầu với toán mô hình, chúng ta cần bắt đầu từ cấp phổ thông, mà ở bậc phổ thông, thì chưa bàn tới vấn đề xử lý dữ liệu (data analysis), cái mà học sinh cần có trước nhất, là làm sao có thể nhìn nhận các sự vật, hiện tượng xung quanh một cách toán học?

Để rèn luyện khả năng nhìn nhận các sự vật, hiện tượng một cách toán học, thì kì thực, cái mà học sinh cần học, ban đầu lại chưa phải "toán mô hình" với đúng nghĩa của môn học này, mà là những bài học toán học trong đời sống một cách đơn giản hơn, giống như những tác giả của những cuốn sách dưới đây đã dày công biên soạn:

Nói chung, dường như đối với xã hội hiện nay, thì cái câu hỏi "toán để làm gì", "toán học ích gì" vẫn lởn vởn trong tâm trí của một bộ phận không nhỏ kể cả các nhà lãnh đạo, các doanh nhân, lẫn người dân. Tất nhiên, với toán mô hình, mọi chuyện có thể trở nên thân thiện và gần gũi hơn, nhưng có lẽ công cuộc này cần rất nhiều thời gian. Ở đây, có lẽ, một lần nữa chúng ta sẽ lại phải học hỏi một vài điều từ nước Nhật. Ở đó, để trả lời câu hỏi "toán học ích gì", người ta lập tức mời lãnh đạo của các tập đoàn kinh tế lớn, và các nhà lãnh đạo đó đã không do dự trả lời rằng, bí quyết để xây dựng doanh nghiệp của họ, là mô hình toán học. Đó chính là những điểm chung nhất trong tất cả mười ba bài nói chuyện của các nhà lãnh đạo các tập đoàn Toyota, BNP Paribas Tokyo, Takeda Pharmaceutal, Nippon, Nomura Holdings, Horiba, Japan Oil, Gas and metals National corporation (Jogmec). Đây thực sự là điều không thể thực hiện nổi ở Việt



"Lăng kính toán học". Source: http://socialmathematics.net/

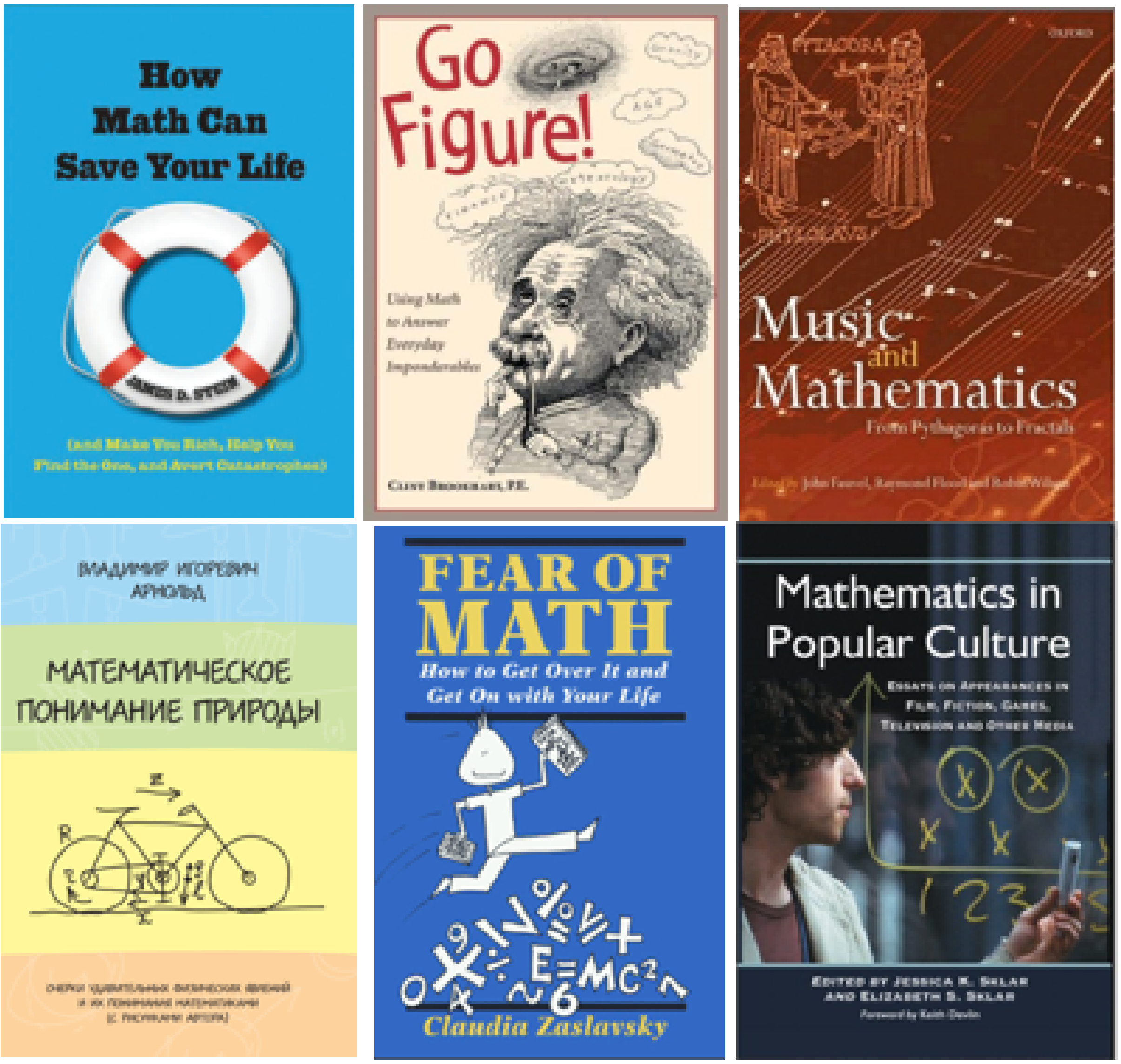
Nam tại thời điểm này, khi mà ngay tại các tập đoàn kinh tế lớn nhất, thì bộ phận R&D vẫn gần như là con số 0 tròn trĩnh. Đã có những nỗ lực nhất định, nhưng không hiểu vì lý do nào mà hiệu quả chưa bao giờ đáp ứng được sự kỳ vọng, dù là rất nhỏ nhoi. Đó thực sự là một sự tụt hậu khủng khiếp.

Có lẽ dần dần theo thời gian, khi đã nhận ra sự tụt hậu, chúng ta có thể kịp chuyển mình, kế thừa những tinh túy mà thế giới đã đạt được. Chỉ hi vọng rằng, khi đã hình thành được cách nhìn các sự vật, hiện tượng trong cuộc sống một cách toán học, tới một lúc, người ta sẽ bất chợt nhận ra những tính thẩm mĩ rất tế nhị trong toán, giống như các nhà toán học vẫn luôn thưởng thức cái vẻ đẹp nội tại đó, mà bất kể các sự liên đới với thực tại. Như Whitehead đã từng nói:

> "Không gì có thể cho tôi niềm vui lớn hơn là một buổi sang nào đó thức dậy được báo tin rằng một trong các định lý của tôi đã làm cho chiến tranh trở nên lỗi thời. Tuy vậy tôi vẫn phải thừa nhận rằng điều đó không có lien quan gì đến các lí do vì sao tôi đã cố gắng chứn gminh định lý đó" – GS Alfred N. Whitehead.

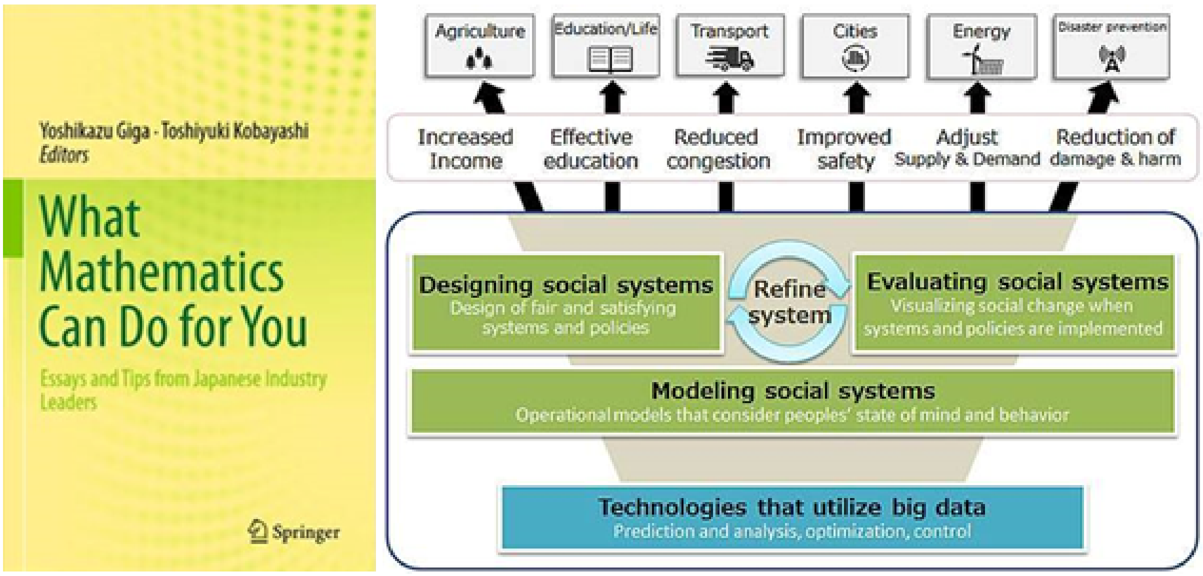
Tôi muốn mượn lời Whitehead để kết thúc câu chuyện có tính mở đầu về sức sống của một môn toán đặc thù, hay một dòng sách toán, giống như biểu hiện của một sự trở lại. Sự trở lại của một xu hướng mới trong giáo dục toán phổ thông, mà đã được khởi xướng bởi kì thi Toán mô hình Hà Nội 2015, xét cho cùng, sẽ thực hiện được trách nhiệm xã hội của nó, nhưng cũng hi vọng rằng, đi tới cuối, người ta sẽ trở lại với cái vẻ đẹp nội tại của toán học, thứ mà không có liên đới gì tới những mô hình phức tạp của xã hội. Hoặc theo lời của một ai đó, vẻ đẹp của toán học trước tiên phải bắt nguồn từ sự giản dị vậy.

Trí Ngủ
10/08/2015



Một bồ sách cũ: sách về toán trong thực tế đời sống hàng ngày.

Hà Nội



Mô hình "toán mô hình" trong xã hội ở Nhật, còn gọi là "Social Math".

ĐỀ THI TOÁN MÔ HÌNH HÀ NỘI 2015

Ban biên tập

Trong bối cảnh mật độ dân số cao, nhiều nhà cao tầng, ít cây xanh, môi trường sống ở các khu vực đô thị đang ngày càng đi xuống. Nhận thấy tầm quan trọng của việc bảo vệ môi trường sống, lãnh đạo thành phố Hà Nội quyết định chỉ đạo Công ty công viên cây xanh thực hiện chiến lược "Phủ xanh đô thị" với mục tiêu trồng cây trên nhiều tuyến phố Hà Nội.

1. Phần 1 (30 điểm)

Những khu phố ở Hà Nội được chia ra thành 2 loại: phố loại 1 và phố loại 2. Sau khi thảo luận, công ty cây xanh đã chọn ra 3 loại cây để trồng làm cây đường phố: xà cừ, sấu và hoa sữa. Ở mỗi phố loại 1, người ta sẽ trồng 40 cây xà cừ, 20 cây sấu, 20 cây hoa sữa. Ở mỗi phố loại 2, người ta sẽ trồng 40 cây xà cừ, 40 cây sấu.

Trong đợt 1 của chiến lược phủ xanh đô thị, số lượng mỗi cây có hạn, chỉ đủ trồng 2900 cây xà cừ, 2550 cây sấu và 1400 cây hoa sữa.

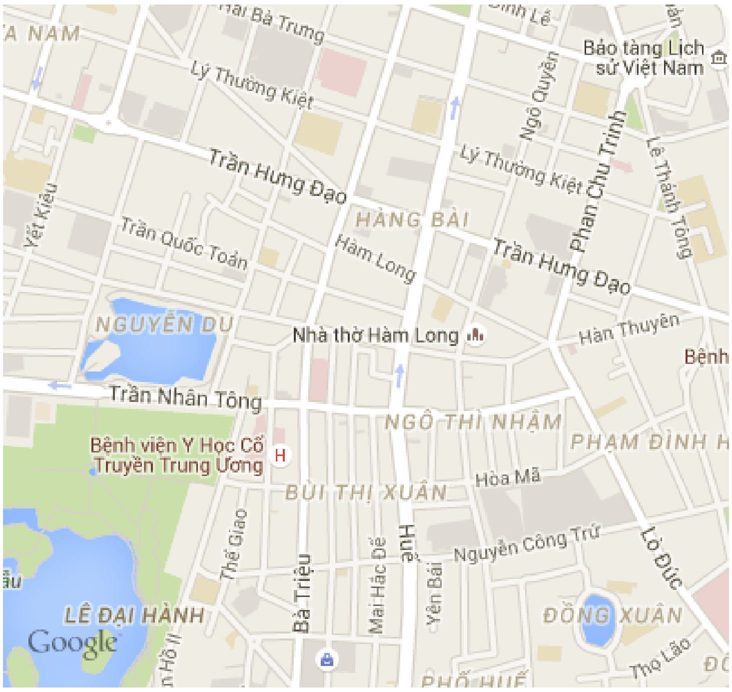
Hãy lập kế hoạch phân bố cây trồng để số tuyến phố được phủ xanh là nhiều nhất.

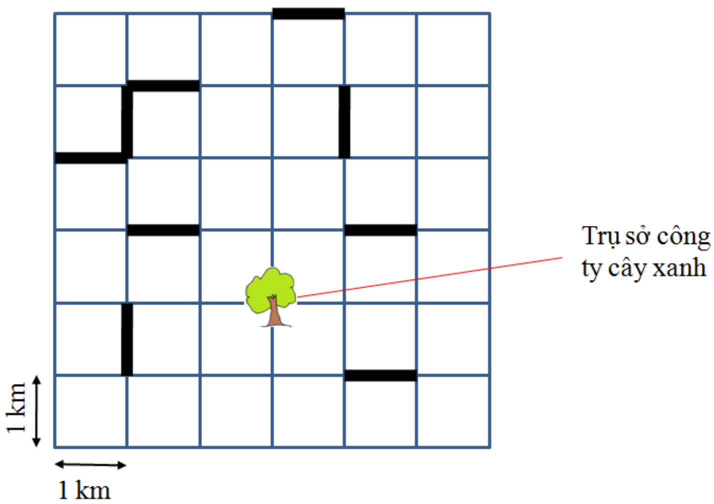
2. Phần 2 (30 điểm)

Sau khi trồng cây, công ty cây xanh sẽ phải thường xuyên tưới nước cho cây. Họ sẽ phải tìm tuyến đường đi ngắn nhất cho xe tưới nước nhằm giảm thiểu thời gian tưới nước, tiết kiệm chi phí nhiên liệu, giảm tác động đến môi trường.
Các tuyến phố ở Hà Nội được sắp xếp đan xen chằng chịt, lại có độ dài, hình dạng khác nhau, vì thế nên tìm tuyến đường ngắn nhất một cách trực tiếp là công việc rất phức tạp. Do đó, việc đặt thêm một số giả thiết nhằm thu được một bài toán đơn giản hơn sẽ rất hữu ích, bởi lời giải của bài toán đơn giản này rất có thể sẽ gợi ý cho ta một số cách tiếp cận bài toán thực tế phức tạp hơn.

Giả sử tấm bản đồ Hà Nội được đơn giản hóa thành mạng lưới ô vuông như hình bên dưới (Hình 15.1). Mọi đoạn đường trên mạng lưới này đều là đường 2 chiều. Những tuyến phố được tô đậm là những phố được phủ xanh.
(a) Biết rằng cả 9 con phố được phủ xanh đều là phố loại 1. Liệu ta cần bao nhiêu lít nước để tưới hết được cả 9 con phố trên? Hãy liệt kê 5 yếu tố quan trọng nhất cần xem xét để trả lời câu hỏi trên.

(b) Do xe của công ty môi trường phải làm rất nhiều công việc như bón phân, tưới nước, thu gom rác thải, … nên việc xây dựng mô hình toán để tìm ra đường đi ngắn nhất cho xe (nhằm mục đích giảm thiểu thời gian thực hiện công việc) là rất quan trọng. Ngoài ra, tìm đường đi





Hình 15.1: Bản đồ thành phố Hà Nội được mô hình thành mạng lưới ô vuông.

ngắn nhất còn giúp tiết kiệm chi phí nhiên liệu, giảm tác động đến môi trường. Hãy tìm ra quãng đường ngắn nhất cho chiếc xe tưới nước xuất phát từ trụ sở cây xanh sao cho nó đi qua tất cả các tuyến phố được trồng cây rồi trở về trụ sở. Hãy sử dụng lí luận toán học chặt chẽ giúp bạn khẳng định rằng quãng đường như vậy là ngắn nhất.

(c) Với quãng đường trên, hãy ước lượng thời gian mà xe tưới nước cần để tưới hết các khu phố được phủ xanh trên bản đồ.

3. Phần 3 (20 điểm)

Công ty cây xanh muốn tăng tốc việc tưới nước cho cây trồng, nên họ đã quyết định mua thêm một chiếc xe nữa. Sử dụng bản đồ như ở Hình 1, hãy lên kế hoạch về quãng đường cho hai xe để việc tưới nước cho các tuyến phố được phủ xanh được thực hiện nhanh nhất có thể. Biết rằng hai xe có thể đi trên những tuyến phố trùng nhau, nhưng không được tưới nước trên những tuyến phố trùng nhau. Hãy trình bày những lí luận toán học thật rõ ràng, mạch lạc.

4. Phần 4 (20 điểm)

Những phần trên chính là một mô hình toán học phục vụ mục đích tìm đường đi để việc tưới nước những tuyến phố phủ xanh được hoàn thành nhanh nhất có thể. Hãy nêu ra tất cả những giả thiết quan trọng đã được sử dụng để tạo nên mô hình nói trên. Từ đó, hãy thay đổi một (hoặc nhiều) trong số những giả thiết này để thu được một mô hình thiết thực hơn giúp giải quyết vấn đề trên. Hãy trình bày mô hình mới này thật chi tiết.

Nêu phương hướng giải quyết mô hình mới mà bạn vừa trình bày.

Mô hình của bạn sẽ được đánh giá dựa trên:

- Mức độ rõ ràng, chi tiết của mô hình.
- Lập luận tại sao mô hình của bạn lại sát thực hơn mô hình ban đầu.
- Hướng giải quyết mô hình mới.

BÀI TOÁN CHIA ĐOẠN THẲNG

Ban biên tập

Bài toán được đề xuất bởi A.K.Tolpygo, K.K.Kokhas và A.Mogileva cho Hội nghị mùa hè, cuộc thi giữa các thành phố năm 2014.

Phần 1

Dẫn nhập

Chọn số α, trên đoạn $[0,\ 1]$ ta đánh dấu các điểm $\alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha, \ldots,\ (n-1)\alpha$.

Trong suốt bài này, nếu như không nói điều ngược lại, ta sẽ giả sử rằng α vô tỷ. Nếu như $\alpha = \frac{p}{q}$, ta sẽ giả sử rằng $p < q$. Như vậy, cho dù α bằng bao nhiêu, không có hai điểm nào trùng nhau.

Như thế, đoạn $[0, 1]$ sẽ được chia thành n phần. Tiếp theo ta sẽ giả sử $n > 10$ và $0,3 < \alpha < 0,7$. Các hạn chế này thực ra không quan trọng, ta đưa ra các điều kiện này để loại bỏ các hiệu ứng hiển nhiên cho các số nhỏ. Nhưng từ điều kiện này có thể suy ra là mọi phần đều nhỏ hơn α.

Ta cũng chú ý rằng nếu như thay α bằng $n+\alpha$ hay $n-\alpha$ thì các phần vẫn như vậy. Vì vậy trong các bài toán, trong đó nói về tính duy nhất, ta có thêm điều kiện $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Nội dung của bài toán – nghiên cứu xem ta có những phần như thế nào và chúng sắp xếp ra sao.

Các bài toán

- Tỷ lệ giữa đoạn dài nhất và đoạn ngắn nhất ta ký hiệu là $L = L(\alpha, n)$.

A1. Giả sử $\alpha = \frac{p}{q}$ là số hữu tỷ. Chứng minh rằng tồn tại n sao cho $L(n) = 1$.

A2. Với những số nguyên hay hữu tỷ k nào, $k > 1$ ta có thể khẳng định rằng với mọi số hữu tỷ α, tồn tại n sao cho $L(n) = k$?

- Tiếp theo ta không giả sử α hữu tỷ nữa.

B1. Chứng minh rằng cho dù n bằng bao nhiêu, trong các phần có không quá 3 độ dài khác nhau (và cũng hiển nhiên là nếu α vô tỷ thì có ít nhất 2 độ dài khác nhau).

- Với số α đã cho ta sẽ nói số n là bậc hai nếu chỉ có 2 độ dài khác nhau và bậc ba nếu có 3 độ dài khác nhau.

B2. Cho α là số vô tỷ, chứng minh rằng khi đó tồn tại vô số n bậc hai và vô số n bậc ba.

B3. Cho số vô tỷ α, và n chạy qua các giá trị $n = 1, 2, \ldots, m$. Chứng minh rằng $m \to \infty$, thì tỷ lệ số bậc hai trong chúng dần đến 0.

Gọi $\phi(m)$ là số các số bậc 2 trong các số $n = 1, 2, \ldots, m$. Hãy đánh giá tốc độ dần đến 0 của tỷ số $\frac{\phi(m)}{m}$ khi $m \to \infty$.

B4. Số α phải bằng bao nhiêu để tỷ lệ này tiến đến 0 chậm nhất có thể? Nhanh nhất có thể ? (chỉ cần đưa ra một số ví dụ, nhưng phải thuyết phục).

B5. Hãy đánh giá chặn trên và chặn dưới số các số bậc hai trong 1 triệu số đầu tiên (càng đúng càng tốt, đánh giá "*lớn hơn* 3" không được chấp nhận).

C1. Tồn tại hay không số α, sao cho $L > 10$ với mọi n, bắt đầu từ $n = 10$?

C2. Với $n = 2000000$. Có thể xảy ra trường hợp trên đoạn $\left[a, a + \frac{1}{2}\right]$ nào đó có hơn 1100000 điểm ? (nhắc lại là theo giả thiết, ta có $0,3 < \alpha < 0,7$).

C3. Tồn tại hay không α, sao cho L nhận:

- Vô hạn.
- Hữu hạn các giá trị khác nhau khi n chạy qua các giá trị từ 10 đến ∞. Nếu tồn tại, hãy đưa ra các ví dụ.

C4. Hãy đưa ra các điều kiện đủ nào đó để L nhận hữu hạn (vô hạn) các giá trị (nếu có thể, hãy tìm điều kiện cần và đủ, nhưng có thể giới hạn các điều kiện nào đó).

D1. Chứng minh rằng với mọi số vô tỷ α cho trước tồn tại giá trị mà L nhận hơn 1000 lần (với những giá trị n khác nhau).

D2. Một cách logic, có thể xảy ra ba trường hợp:

(1) Dù α bằng bao nhiêu, tồn tại giá trị sao cho L nhận vô số lần.

(2) Dù α bằng bao nhiêu, L nhận mọi giá trị chỉ hữu hạn lần.

(3) Với một số α điều này đúng, còn với những α khác điều kia đúng.

Điều này trên đây đúng ? Nếu như điều thứ (3) đúng thì với α điều (1) đúng, với α điều (2) đúng?

D3. Giả sử rằng với α nào đó L nhận mỗi giá trị A và B ít nhất một lần (với $n > 10$). Liệu hai khẳng định sau có tương đương:

(a) L nhận giá trị A hữu hạn lần.

(b) L nhận giá trị B hữu hạn lần ?

Phần 2

Phần này, ta chủ yếu xét các bài toán liên quan đến các giá trị cụ thể của α.

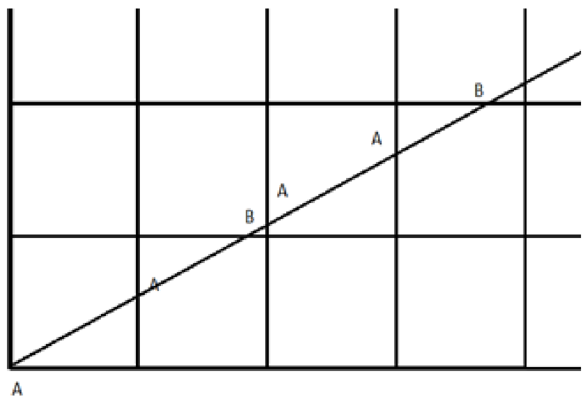
- Ký hiệu τ là tỷ số vàng: $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618\ldots$

E1. Ta đưa ra 3 phương pháp viết dãy các ký tự $AABAABABAAB\ldots$ Hãy chứng minh rằng cả ba phương pháp cho ra các kết quả giống nhau (một cách chính xác hơn mệnh đề sẽ được phát biểu bên dưới đây).

Các phương pháp như sau:

(1) Trên lưới ô vuông kẻ một tia, nó bắt đầu từ một nút lưới và tạo một góc bằng τ với đường nằm ngang của lưới.

Tại điểm nút đầu tiên ta viết ký tự A, sau đó viết các ký tự vào các điểm giao của tia với các đường thẳng của lưới: Ký tự A đánh dấu giao điểm với các đường thẳng đứng, ký tự B đánh dấu các giao điểm với đường nằm ngang (xem hình).



(2) Đầu tiên ta viết ký tự A, sau đó thực hiện một số bước, ở mỗi bước, ký tự A được thay bởi AAB, còn ký tự B được thay bởi AB. Ví dụ sau 3 bước ta thu được

- Đầu tiên là AAB,
- sau đó là $AABAABAB$,
- và ở bước thứ ba $AABAABABAABAABABAABAB$.

Chứng minh rằng mỗi một dãy số thu được bằng cách nói trên là đoạn đầu của dãy số được định nghĩa ở (1).

(3) Đoạn [0, 1] được chia bằng phương pháp đã mô tả ở phần dẫn nhận với, trong đó $\alpha = \tau$.

Dãy số được xác định như sau: Với mọi n là số bậc 2, ta viết theo thứ tự độ dài các đoạn thẳng bắt đầu từ cuối (tức là từ 1), đoạn dài ký hiệu là A, đoạn ngắn là B.

Chứng minh rằng trong số các dãy số hữu hạn, có vô số các dãy số là đoạn đầu của dãy số ở (1). Các dãy số này với $n_1 = 3 < n_2 = 8 < \cdots$ là những dãy số nào ?

E2. Dãy số được xác định theo quy tắc ở trên. Giả sử ta lấy hai khúc, mỗi khúc có n ký tự: Từ ký tự thứ $k + 1$ đến ký tự thứ $k + n$ và từ ký tự thứ $m + 1$ đến ký tự thứ $m + n$. Chứng minh rằng số các ký tự A ở trong các khúc này gần bằng nhau, cụ thể là: Số các ký tự A ở mỗi khúc cách nhau không quá 1.

E3. Hãy tìm thêm một dãy nào đó mà có thể được xây dựng bằng ba phương pháp tương tự (hay ít nhất là hai).

- Trong chuỗi bài toán sau ta lấy $\alpha = \tau$.

P1. Tìm tất cả các giá trị có thể của L (với các n khác nhau).

P2. L có thể nhận giá trị nào đều n là số bậc 2 ?

P3. Tìm tất cả các số bậc 2.

P4. Tìm số các số bậc 2 trong 1 triệu số đều tiên nếu $\alpha = \tau$. Chỉ cần đáp số chính xác đến $\frac{1}{10}$.

- Trong chuỗi bài toán sau ta lấy $\alpha = \sqrt{2} \approx 1,4142...$

T1. Tìm tất cả các giá trị có thể của L (với các n khác nhau).

T2. L có thể nhận giá trị nào đều n là số bậc 2 ?

T3. Tìm tất cả các giá trị có thể của L cho một số nào đó khác (ngoài $\alpha = \tau$ và $\alpha = \sqrt{2}$).

K1. Ta không biết số α. Nhưng ta biết rằng dù n bằng bao nhiêu, số L chỉ nhận một trong hai giá trị. Với những α nào điều này có thể ?

K2. Bài toán để nghiên cứu. Ta biết số α nhưng ta biết rằng với n lớn tùy ý, số điểm trên mọi đoạn có độ dài $\frac{1}{2}$ khác với $\frac{n}{2}$ không lớn hơn 10. Ta có thể nói gì về số α ? Cụ thể:

- Hãy nêu ví dụ một vài số như thế.
- Hãy đưa ra một dấu hiệu đủ nào đó để điều này không xảy ra: Nếu α có tính chất này và tính chất này thì khẳng định bài toán không đúng.
- Hãy đưa ra dấu hiệu nào đó để có thể khẳng định số điểm trên mọi đoạn độ dài $\frac{1}{2}$ nằm trong phạm vi từ a đến b với các số a, b nào đó ($a < \frac{1}{2} < b$ và ta muốn các số này càng gần $\frac{1}{2}$ càng tốt).

K3. Cho số hữu tỷ $\alpha = \frac{113}{248}$ và n nhận các giá trị $n = 1, 2, 3, \ldots, 246$. Trong các số này có bao nhiêu số bậc 2, bao nhiêu số bậc 3 ?

K4. Hãy nêu ra phương pháp cho phép với số hữu tỷ α cho trước

$$\alpha = \frac{p}{q},\ p < q < 1000000,$$

tìm được số số bậc 2 và số số bậc 3, khi n chạy qua các giá trị từ 1 đến $q-1$, trong thời gian cho phép (bằng tay).

K5. Cho số $L = L(100, \alpha)$.

Làm sao có thể xác định với mọi giá trị có thể của n và α cho trước tồn tại hữu hạn hay vô hạn các giá trị khác nhau của L ?

Nói riêng, nghiên cứu câu hỏi này ở các trường hợp sau:

(1) Nếu L là nghiệm của phương trình bậc 2 với hệ số nguyên

$$L^2 + nL + m = 0.$$

(2) Nếu L là nghiệm của phương trình bậc 3 với hệ số nguyên

$$L^3 + nL^2 + mL + q = 0.$$

K6. Biết rằng số α được viết thành liên phân số với các mẫu số đầu tiên là $3,\ 5,\ 12$ tức là

$$\alpha = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{12} + \cdots}}}.$$

Hãy tìm tất các các số bậc 2 nằm giữa 1 và 100.

LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN Ở SỐ 1

Ban biên tập

1. Phương trình Diophant 1

Đề toán đề nghị cho Hội nghị mùa hè của cuộc thi toán giữa các thành phố năm vào 2014, được đề xuất bởi S.Grigoriev, K.Kuyumzhiyan, A.Petukhov, A.Semchenkov.

Định lý 1.1. **(Gauss)** *Một số nguyên dương có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của 3 bình phương khi và chỉ khi nó có không có dạng* $4^n(8m-1)$.

2. Các bài toán mở đầu

Bài toán 1. *Chứng minh rằng các phương trình*

(a) $2x^2+2xy-y^2=1$

(b) $x^2-xy+y^2=2$.

không có nghiệm nguyên.

Chứng minh. (a) Viết phương trình lại dưới dạng

$$3x^2-(y-x)^2=1,$$

rồi xét số dư trong phép chia cho 3, ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

(b) Giả sử phương trình có nghiệm nguyên. Viết phương trình dưới dạng

$$\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}=2,$$

suy ra $|y|\leqslant 1$. Tương tự đối với x. Nhưng một trong 2 số phải chẵn, tức là phải bằng 0, giả sử $x=0$, khi đó $y^2=2$, mâu thuẫn. □

Bài toán 2. *Chứng minh rằng các phương trình*

(a) $x^2-2y^2=1$,

(b) $x^2-3y^2=1$,

(c) $x^2-6y^2=1$.

có vô số nghiệm nguyên.

Chứng minh. Ta có thể chứng minh bài toán này bằng một sơ đồ chung: Nếu phương trình $x^2 - dy^2 = 1$ có ít nhất 1 nghiệm nguyên dương thì nó có vô số nghiệm nguyên dương dựa vào hằng đẳng thức sau

$$(x^2 - dy^2)(a^2 - db^2) = (ax + dby)^2 - d(ay + bx)^2. \tag{1}$$

Do phương trình $x^2 - 2y^2 = 1$ có nghiệm $(3,\ 2)$, phương trình $x^2 - 3y^2 = 1$ có nghiệm $(2,\ 1)$ và phương trình $x^2 - 6y^2 = 1$ có nghiệm $(5,\ 2)$ nên chúng có vô số nghiệm. □

Bài toán 3. *Chứng minh rằng phương trình $x^2 + 1000xy + 1000y^2 = 2001$ có vô số nghiệm nguyên.*

Chứng minh. Viết phương trình dưới dạng

$$(x + 500y)^2 - 249000y^2 = 2001.$$

Ta cần chứng minh phương trình

$$z^2 - 249000y^2 = 2001, \tag{2}$$

có vô số nghiệm. Điều này có thể thực hiện dựa vào hằng đẳng thức (1) và các thông tin sau:

(i) Phương trình (2) có nghiệm $z = 501,\ y = 1$ (vì phương trình ban đầu có nghiệm $x = 1,\ y = 1$).

(ii) Phương trình $z^2 - 249000y^2 = 1$ có nghiệm nguyên dương (từ bài này về sau, ta thừa nhận định lý: *Nếu d là số nguyên dương không chính phương thì phương trình $x^2 - dy^2 = 1$ có nghiệm nguyên dương*).

Chứng minh hoàn tất. □

Bài toán 4. *Cố định số nguyên tố lẻ p. Chứng minh rằng phương trình*

$$x^2 - py^2 = -1,$$

có nghiệm nguyên khi và chỉ khi p có số dư là 1 khi chia cho 4.

Chứng minh. Giả sử phương trình $x^2 - py^2 = -1$ có nghiệm nguyên. Ta chứng minh rằng p chia 4 dư 1. Thật vậy, từ phương trình ta suy ra

$$x^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Nếu p có dạng $4k + 3$ thì $x^{p-1} = x^{2(2k+1)} \equiv -1 \pmod{p}$, trái với định lý nhỏ Fermat. Vậy p phải có dạng $4k + 1$.

Ngược lại, giả sử $p \equiv 1 \pmod{4}$. Ta biết rằng phương trình

$$x^2 - py^2 = 1, \tag{3}$$

có nghiệm không tầm thường.

Gọi S^+ là tập nghiệm nguyên dương của (3) và $(x_0,\ y_0)$ là nghiệm nguyên dương của (3) với y_0 nhỏ nhất. Khi đó

$$(x_0 - 1)(x_0 + 1) = p{y_0}^2. \tag{4}$$

Từ (4) suy ra rằng hoặc $2(x_0 + 1)$ hoặc $2(x_0 - 1)$ là bình phương đúng. Ta xét cả hai trường hợp.

- Giả sử $2(x_0+1)=d^2$ (với số nguyên dương d nào đó). Khi đó d là số chẵn và $d \mid y_0$. Đặt $d=2d_0$ và đặt $x_1=\frac{x_0+1}{d}=d_0,\ y_1=\frac{y_0}{d}$. Khi đó
$$x_1^2-py_1^2=\frac{1}{d^2}\left[(x_0+1)^2-py_0^2\right]=\frac{2(x_0+1)}{d^2}=1.$$
Như vậy, $(x_1,\ y_1)$ cũng thuộc S^+. Rõ ràng là $y_1<y_0$, điều này trái với tính nhỏ nhất của cặp $(x_0,\ y_0)$.

- Giả sử $2(x_0-1)=d^2$ (với số nguyên dương d nào đó). Khi đó d là số chẵn và $d \mid y_0$. Đặt $d=2d_0$ và đặt $x_1=\frac{x_0-1}{d}=d_0,\ y_1=\frac{y_0}{d}$. Khi đó
$$x_1^2-py_1^2=\frac{1}{d^2}\left[(x_0-1)^2-py_0^2\right]=\frac{2(1-x_0)}{d^2}=-1.$$

Vậy $(x_1,\ y_1)$ là nghiệm của $x^2-py^2=-1$, là điều ta cần tìm. □

Bài toán 5. *Chứng minh rằng với mọi m số nghiệm nguyên của các phương trình $x^2-xy+y^2=m$ và $3x^2+9xy+7y^2=m$ như nhau.*

Chứng minh. Ta thấy bài toán sẽ chứng minh nếu ta chứng minh được mọi nghiệm nguyên của phương trình $x^2-xy+y^2=m$ sẽ tương ứng với một nghiệm nguyên của phương trình $3x^2+9xy+7y^2=m$. Và ngược lại điều này suy ra từ các hằng đẳng thức sau
$$\begin{aligned}3x^2+9xy+7y^2&=(x+2y)^2-(x+2y)[-(x+y)]+[-(x+y))^2,\\ x^2-xy+y^2&=3(x+2y)^2+9(x+2y)[-(x+y)]+7[-(x+y)]^2.\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh. □

Bài toán 6. *Với n là số nguyên bất kỳ. Chứng minh rằng phương trình $x^2+y^2=n$ có nghiệm nguyên khi và chỉ khi nó có nghiệm hữu tỷ.*

Chứng minh. Giả sử $x,\ y$ là các số hữu tỷ sao cho $x^2+y^2=n$. Mẫu số của x và y ở dạng tối giản bằng nhau. Ta gọi mẫu số đó là d và giả sử rằng ta chọn $x,\ y$ sao cho d nhỏ nhất có thể. Giả sử rằng $d>1$ (như thế $x,\ y$ không nguyên và phương trình $x^2+y^2=n$ không có nghiệm nguyên). Gọi $r_x,\ r_y$ là các số nguyên gần với $x,\ y$ nhất và $s_x=x-r_x,\ s_y=y-r_y$. Khi đó
$$\begin{aligned}\left\{|s_x|,\ |s_y|\right\}&\leqslant\frac{1}{2},\\ s_x^2+s_y^2&=n-(r_x^2+r_y^2)-2(s_xr_x+s_yr_y).\end{aligned}\tag{5}$$

Đặt
$$x^{'}=r_x-\frac{s_x(n-r_x^2-r_y^2)}{s_x^2+s_y^2},y'=r_y-\frac{s_y(n-r_x^2-r_y^2)}{s_x^2+s_y^2}.$$

Từ (5) suy ra $s_x^2+s_y^2=\frac{d^{'}}{d}$, trong đó $0<d^{'}<d$. Từ đây suy ra, ở dạng tối giản mẫu số $d^{'}$ của các phân số $x^{'},\ y^{'}$ chia hết d và như vậy nhỏ hơn d. Ta có $x^{'2}+y^{'2}=n$, mà mẫu số của các phân số $x^{'},\ y^{'}$ nhỏ hơn mẫu số của $x,\ y$., mâu thuẫn, do đó $d=1$.

Vậy phương trình $x^2+y^2=n$ có nghiệm nguyên. □

Bài toán 7. *Hãy nêu ví dụ một phương trình bậc hai với hệ số nguyên, có nghiệm hữu tỷ nhưng không có nghiệm nguyên.*

Gợi ý. Đó là phương trình $4x^2 = 1$.

Bài toán 8. *Với a và b là hai số nguyên dương bất kỳ. Chứng minh rằng tồn tại vô số các số tự nhiên m sao cho phương trình $ax^2 + by^2 = m$ không có nghiệm nguyên.*

Chứng minh. Giả sử N là một số nguyên dương nào đó. Nếu như với số nguyên dương $m \leqslant N$ nào đó phương $ax^2 + by^2 = m$ có nghiệm nguyên thì

$$|x| \leq \sqrt{\frac{N}{a}},\ |y| \leq \sqrt{\frac{N}{b}}.$$

Như vậy, nếu như với mọi $m \leqslant N$ phương trình $ax^2 + by^2 = m$ có nghiệm thì tồn tại N cặp số $(x,\ y)$ sao cho

$$0 \leq |x| \leq \sqrt{\frac{N}{a}}, 0 \leq |y| \leq \sqrt{\frac{N}{b}}.$$

Khi đó $N \leq \frac{N}{\sqrt{ab}}$.

Rõ ràng bất đẳng thức này không xảy ra nếu $ab > 1$. Như vậy ta chỉ cần xét trường hợp $a = b = 1$. Nhưng với trường hợp này ta thấy mọi số chia 4 dư 3 không thể là tổng của hai bình phương. Phép chứng minh hoàn tất. □

Bài toán 9. *Với mọi số nguyên m bất kỳ. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = m$ có nghiệm nguyên.*

Chứng minh. Thay $x = y = z = 1$, ta thấy không biểu diễn được.

Thay $x = u + 1,\ y = u,\ z = u$ vào $x^2 + 2y^2 - 3z^2$ ta được $2u + 1$. Suy ra $x^2 + 2y^2 - 3z^2$ biểu diễn mọi số lẻ.

Thay $x = u,\ y = u + 1,\ z = u$ vào $x^2 + 2y^2 - 3z^2$ ta được $4u + 2$. Suy ra $x^2 + 2y^2 - 3z^2$ biểu diễn mọi số có số dư là 2 khi chia cho 4.

Nếu m chia hết cho 4, ta chia tất cả các biến số cho 2 và đưa bài toán về một trong các trường hợp đã xét trước đó. □

3. Các dạng toàn phương

Một đa thức thuần nhất bậc hai của n biến số được gọi là một dạng toàn phương. Theo định nghĩa, dạng toàn phương f đại diện số m nếu phương trình $f = m$ có nghiệm nguyên khác 0 (tức là nghiệm mà trong đó không phải tất cả các biến đều bằng 0, lưu ý, không phải dạng toàn phương nào cũng đại diện 0). Hai dạng toàn phương được gọi là tương đương nếu chúng cùng đại diện một tập hợp số.

Bài toán 10. *Hãy mô tả tất cả các số nguyên, được đại diện bởi các dạng*

(a) $x^2 + y^2$.

(b) $x^2 - y^2$.

(c) $x^2 + xy + y^2$.

Chứng minh. (a) Ta có $n = x^2 + y^2$ khi và chỉ khi trong khai triển của n ra thừa số nguyên tố mọi ước số nguyên tố tham gia với số mũ lẻ có số dư là 1 khi chia cho 4.

Chứng minh sự kiện này được chia thành các bước cơ bản sau. Ta ký hiệu S là tập hợp các số nguyên dương biểu diễn được dưới dạng tổng của hai bình phương. Khi đó ta lần lượt chứng minh:

1. Nếu a, b thuộc S thì ab thuộc S.
2. Nếu p là số nguyên tố dạng $4k + 3$, $p \mid a^2 + b^2$ thì $p \mid a$, $p \mid b$.
3. Nếu p là số nguyên tố dạng $4k + 1$ thì tồn tại a, b sao cho $p = a^2 + b^2$.

(b) Ta có $(u + 1)^2 - u^2 = 2u + 1$, suy ra mọi số lẻ được đại diện bởi dạng $x^2 - y^2$, cũng có $(u + 1)^2 - (u - 1)^2 = 4u$.

Như vậy, mọi số có số dư là 0, 1, 3 khi chia cho 4 được dại diện bởi $x^2 - y^2$. Sử dụng số dư trong phép chia cho 4, ta thấy các số có số dư 2 khi chia cho 4 không biểu diễn được dưới dạng $x^2 - y^2$.

(c) Tương tự như bài 6, ta thấy phương trình $x^2 + xy + y^2 = n$ có nghiệm nguyên khi và chỉ khi nó có nghiệm hữu tỷ. Vì

$$x^2 + 3y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{2}\right)^2,$$

nên trên tập hợp các số hữu tỷ thì dạng $x^2 + xy + y^2$ tương đương với dạng $x^2 + 3y^2$. Ta chứng minh rằng dạng $x^2 + 3y^2$ đại diện số n trong tập hợp số hữu tỷ (xem phần về ký hiệu Hilbert) khi và chỉ khi trong khai triển của n ra thừa số nguyên tố, tất cả các số nguyên tố với số mũ lẻ phải có số dư là 1 hoặc 0 khi chia cho 3.

Thật vậy, $x^2 + 3y^2 = n$ có nghiệm trong $\mathbb{Q}$ khi và chỉ khi phương trình $x_1^2 + 3y_1^2 - nz^2 = 0$ có nghiệm trong $\mathbb{Z}$ với $z \neq 0$. Phương trình này (theo định lý Minkowsky-Hasse) có nghiệm khi và chỉ khi ký hiệu Hilbert $(n, -3)_p$ bằng 1 với mọi số nguyên tố p. Ta tính ký hiệu này trực tiếp

Giả sử $p > 3$. Ta viết $n = p^\alpha u$, $3 = p^0(-3)$. Sử dụng dạng tường minh của ký hiệu Hilbert và luật tương hỗ bình phương Gauss, ta có

$$(n, -3)_p = \left(\frac{-3}{p}\right)^\alpha = \left(\frac{-1}{p}\right)^\alpha \left(\frac{3}{p}\right)^\alpha = \left(\frac{-1}{p}\right)^\alpha \left[(-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p}{3}\right)\right]^\alpha,$$

như vậy biểu thức đã cho luôn bằng 1 nếu α chẵn, còn với α lẻ thì nó bằng $\left(\frac{p}{3}\right)$, tức là bằng 1 khi và chỉ khi p chia 3 dư 1. Ta suy ra rằng nếu phương trình $x_1^2 + 3y_1^2 - nz^2 = 0$, có nghiệm theo modulo, trong đó p có dạng $3k + 2$, thì trong khai triển của n, thừa số p có số mũ chẵn.

Trường hợp $p = 2$ coi là một bài tập dành cho bạn đọc.

Trường hợp $p = 3$. Giả sử $p = 3^\alpha u$ ở đây $\beta = 1, v = -1$. Ta có

$$(n, -3)_p = (-1)^\alpha \cdot \left(\frac{u}{3}\right) \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^\alpha = \left(\frac{u}{3}\right).$$

Biểu thức này sẽ bằng 1 khi và chỉ khi u có số dư là 1 khi chia cho 3. Nhưng nếu như ta đã biết là mọi số nguyên tố có dạng $3k + 2$ sẽ có trong khai triển của n với số mũ chẵn, thì điều kiện này không cho gì thêm. □

Bài toán 11. *Chứng minh rằng các dạng toàn phương*

$$f(x,\ y),\ f(x-y,\ y),\ f(x,\ y-x),\ f(-x,\ y),\ f(x,\ -y), \tag{6}$$

đôi một tương đương nhau.

Chứng minh. Nếu số m được đại diện bởi dạng $f(x,\ y)$ với $x = x_0,\ y = y_0$, thì m đại diện bởi $f(x-y,\ y)$ với $x = x_0 + y_0,\ y = y_0$, dạng $f(x,\ y-x)$ với $x = x_0,\ y = x_0 + y_0$, dạng $f(-x,\ y)$ với $x = -x_0,\ y = y_0$, dạng $f(x,\ -y)$ với $x = x_0, y = y_0$.

Như vậy, tất cả các số đại diện bởi $f(x,\ y)$ cũng đại diện bởi các dạng khác trong danh sách (6). Chứng minh hoàn toàn tương tự, ta có mọi số đại diện bởi một dạng nào khác trong danh sách (6), cũng đại diện bởi các dạng còn lại. Suy ra tất cả các dạng trong danh sách (6) tương đương nhau. □

Bài toán 12. (a) *Chứng minh rằng các dạng toàn phương $x^2 + y^2$ và $x^2 + xy + y^2$ không tương đương nhau.*

(b) *Chứng minh rằng dạng toàn phương $4x^2 - 6xy + 5y^2$ không tương đương với dạng có dạng $ax^2 + by^2$ với mọi số nguyên a và b.*

Chứng minh. (a) Dạng $x^2 + y^2$ đại diện 2 nhưng $x^2 + xy + y^2$ không đại diện 2. Suy ra chúng không tương đương.

(b) Dễ thấy 3, 4, 5 là 3 giá trị nhỏ nhất của dạng $4x^2 - 6xy + 5y^2$.

Nếu $a,\ b \geqslant 0$ thì ba giá trị nhỏ nhất của dạng $ax^2 + by^2$ có thể là các bộ

$$\{a,\ b,\ a+b\},\ \{a,\ 4a,\ b\},\ \{a,\ b,\ 4b\},\ \{a,\ 4a,\ 9a\},\ \{b,\ 4b,\ 9b\}. \tag{7}$$

Rõ ràng bộ 3, 4, 5 không thể có dạng (7) với mọi $a,\ b$. Vậy $4x^2 - 6xy + 5y^2$ không tương đương với dạng $ax^2 + by^2$ với mọi $a,\ b$ không âm. □

Định nghĩa 1. Dạng toàn phương được gọi là:

1. Xác định dương nếu nó chỉ đại diện cho các số dương.
2. Xác định không âm nếu nó chỉ đại diện cho các số không âm.
3. Xác định âm nếu nó chỉ đại diện cho các số âm.
4. Không xác định nếu nó đại diện cả số dương lẫn số âm.

Bài toán 13. *Hãy nêu ví dụ một dạng xác định không âm mà không phải xác định dương.*

Gợi ý. Ví dụ dạng $f(x,\ y) = x^2$.

4. Số học mở rộng: Số p-adic

Định lý 4.1. **(Legendre)** *Mọi số nguyên dương đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng bình phương của 4 số nguyên.*

Bài toán 14. *Cho m và n là các số nguyên không chính phương. Nếu phương trình*

$$z^2 - mx^2 - ny^2 = 0, \tag{8}$$

có nghiệm hữu tỷ khác 0 thì các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

(a) *Ít nhất một trong hai số m, n dương.*

(b) *m là thặng dư bình phương theo mô-đun n.*

(c) *n là thặng dư bình phương theo mô-đun m.*

Chứng minh. Ta cố định một nghiệu hữu tỷ khác 0 của phương trình (8). Ta có thể giả sử rằng $(x_0, y_0, z_0) = 1$.

(a) Nếu $m, n \leqslant 0$ thì $z_0^2 - mx_0^2 - ny_0^2 \geqslant 0$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ (mâu thuẫn).

(b) Ta chỉ cần chứng minh n là thặng dư bình phương mô-đun p với mọi p là ước nguyên tố của m.

Giả sử p là ước nguyên tố của m. Nếu $p \mid n$ thì điều đó là đúng. Giả sử n không chia hết cho p. Ta xét hai trường hợp: y_0 chia hết cho p và y_0 không chia hết cho p. Giả sử rằng y_0 chia hết cho p. Khi đó x_0, z_0 cũng chia hết cho p, mâu thuẫn với điều kiện $(x_0, y_0, z_0) = 1$.

Suy ra y_0 không chia hết cho p. Khi đó trong mô-đun p ta có

$$n \equiv \left(\frac{z}{y}\right)^2 \pmod{p},$$

và như vậy n là thặng dư bình phương mô-đun p.

(c) Chứng minh hoàn toàn tương tự. □

Bài toán 15. *Hãy đưa định lý tổng quát về dạng toàn phương hai biến về lời giải của phương trình dạng* (8).

Chứng minh. Mọi phương trình bậc hai có dạng

$$f(X_1, X_2) = f_2(X_1, X_2) + f_1(X_1, X_2) + f_0 = 0,$$

trong đó f_2 là đa thức thuần nhất bậc 2, f_1- bậc 1, f_0- bậc 0 (tức là hằng số). Ta bắt đầu từ một mệnh đề tổng quát:

Các phương trình $f(x_1, x_2) = 0$, và

$$f(x_1, cX_2, +t, X_2) = 0, \tag{9}$$

hoặc cùng có nghiệm hữu tỷ, hoặc cùng không có nghiệm hữu tỷ với mọi số hữu tỷ $c,\ t$. Chúng tôi dành mệnh đề này cho độc giả như một bài tập.

Hiển nhiên là các phép đổi biến dạng $f(X_1,\ X_2) \to f(X_1 + cX_2,\ X_2)$ sẽ tác động một cách độc lập trên các thành phần $f_1,\ f_2$ và giữ nguyên f_0.

Ta viết f_2 dưới dạng

$$c_1X_1^2 + c_{12}X_1X_2 + c_2X_2^2.$$

Nếu $f_2 \neq 0$ thì, thực hiện một vài phép đổi biến dạng (9), ta có thể giả sử $c_1 \neq 0$. Ta xét hàm số

$$f_2\left(X_1 - \frac{c_{12}}{c_1}X_2, X_2\right). \tag{10}$$

Dễ thấy rằng (10) có dạng $c_1X_1^2 + c_2{}'X_2^2$ với số hữu tỷ c_2' nào đó. Như vậy ta có thể giả sử rằng

$$f_2(X_1, X_2) = c_1X_1^2 + c_2X_2^2,$$

với các số hữu tỷ $c_1,\ c_2$ nào đó. Nếu như $c_2 = 0$ còn $c_1 \neq 0$ thì phương trình $f = 0$ có dạng

$$c_1X_1^2 = -rX_2 - f_0,$$

có thể giải được dễ dàng. Như vậy, tiếp theo ta sẽ giả sử $c_2 \neq 0$. Tương tự ta giả sử $c_1 \neq 0$. Thành phần tuyến tính $f_1(X_1,\ X_2)$ có dạng $r_1X_1 + r_2X_2$. Ta xét phép đổi biến

$$f(X_1, X_2) \to f\left(X_1 - \frac{r_1}{2c_1}, X_2 - \frac{r_2}{2c_2}\right).$$

Trong hàm số thành phần f_1 sẽ bằng 0. Trong trường hợp đó, phương trình $f = 0$ sẽ có dạng

$$c_1X_1^2 + c_2X_2^2 + f_0 = 0.$$

Phương trình này tương đương với phương trình thuần nhất

$$z^2 + \frac{c_2}{c_1}x^2 + \frac{f_0}{c_1}y^2 = 0,$$

là điều phải chứng minh. □

Định nghĩa 2. Biểu thức dạng

$$a_{-k}p^{-k} + a_{-k+1}p^{-k+1} + \cdots + a_np^n + \cdots \tag{11}$$

($k-$ là số nguyên bất kỳ, $a_i \in \mathbb{Z}$ được gọi là số p-adic. Nếu $k \leqslant 0$, thì ta gọi (11) là số nguyên p-adic.

Bài toán 16. *Phương trình với hệ số nguyên $f = 0$ có nghiệm trong $\mathbb{Z}_p$ nếu và chỉ nếu nó có nghiệm trong hệ thặng dư mô-đun p^n với mọi $\in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.*

Chứng minh. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các nghiệm trong $\mathbb{Z}_p$ của phương trình $f = 0$. Khi đó các lớp thặng dư $x_1, x_2, \ldots, x_n$ trong modulo p^m là nghiệm trong modulo p^m. Nói riêng, phương trình $f \equiv 0$ có nghiệm trong modulo p^m với mọi số nguyên dương m. Ngược lại, giả sử phương trình $f \equiv 0$ có nghiệm trong modulo p^m với mọi số nguyên dương m. Với mọi m nguyên dương, gọi S_m là tập hợp các nghiệm trong modulo p^m của phương trình $f \equiv 0$. Theo giả thiết tập hợp này khác rỗng với mọi $m > 0$. Vì mỗi số dư trong phép chia cho p^{m+1} có thể xét theo modulo p^m, ta có ánh xạ $S_{m+1} \to S_m$. Ta ký hiệu S_m^∞ là hợp của tất cả các ảnh S_{m+k} với mọi $k > 0$. Vì $S_{m+k} \neq$, nên $S_m^\infty \neq$. Với mọi $s_m \in S_m^\infty$ tồn tại $s_{m+1} \in S_{m+1}^\infty$ sao cho s_m là ảnh của s_{m+1}. Như vậy ta có thể xây dựng xích vô hạn

$$s_1, \ldots, s_m, \ldots \qquad (*)$$

trong đó s_m là bộ n số dư trong phép chia cho p^m và s_m là hình chiếu của s_{m+1} trong phép chia cho p^m. Dãy $(*)$ cho ta một bộ duy nhất n số nguyên p-adic $x_1, x_2, \ldots, x_n$ có bộ số dư $s_1, \ldots, s_n, \ldots$ khi chia cho $p, \ldots, p^m, \ldots$ Các $x_1, x_2, \ldots, x_n$ chính là nghiệm của phương trình $f = 0$. □

Bài toán 17. *Khi nào số p-adic dạng* (11) *bằng* 0?

Chứng minh. Câu trả lời suy ra từ định nghĩa:

Khi

$$a_{-k} + \cdots + a_{-k+i}p^i \equiv 0 \pmod{p^{i+1}},$$

với mọi i. □

Bài toán 18. *Chứng minh rằng tích của hai số p-adic khác* 0 *khác* 0.

Chứng minh. Xét hai số p-adic khác 0 là a và b. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a, b \in \mathbb{Z}_p$ và $a, b \neq 0 \pmod p$. Khi đó $ab \neq 0 \pmod p$ và do đó $ab \neq 0$. Bài toán được chứng minh. □

Bài toán 19. *Chứng minh rằng* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ *với mọi số nguyên tố* p *(chứng minh rằng với mọi cặp số nguyên* m, n *khác* 0 *tồn tại số p-adic* x *sao cho* $nx = m$*).*

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng m, n nguyên tố cùng nhau với p. Với giả thiết này, bài toán 19 suy ra từ bài toán 16. □

Bài toán 20. *Chứng minh rằng* -1 *là số chính phương trong tập hợp các số p-adic khi và chỉ khi* p *đồng dư* 1 *theo mô-đun* 4.

Chứng minh. Suy ra từ bài toán 21. □

Bài toán 21. *Hãy tìm cách mô tả các số p-adic là số chính phương.*

Chứng minh. Ta xét hai trường hợp: $p = 2$ và $p \neq 2$. Giả sử $p = 2$. Mọi số $2-$ adic đều biểu diễn dưới dạng $2n(2m+1)$, trong đó n là số nguyên và m là số nguyên $2-$ adic. Ta có

$$x^2 = 2^{2n}\left[1 + 8\frac{m(m+1)}{2}\right].$$

Đặt

$$m' = \frac{m(m+1)}{2},$$

khi đó

$$x^2 = 2^{2n}(1 + 8m'), \tag{12}$$

trong đó m' là số nguyên 2− adic.

Ta chứng minh rằng mọi số nguyên 2− adic dạng (12) đều là số chính phương trong tập hợp các số 2− adic. Để thực hiện điều này, ta chỉ cần chứng minh mọi số nguyên 2− adic m' đều có thể biểu diễn dưới dạng $\frac{m(m+1)}{2}$.

Nhờ vào bài toán 16, ta chỉ cần chứng minh phương trình đồng dư

$$x(x+1) \equiv 2m' \pmod{2^i},$$

có nghiệm trong $\mathbb{Z}$ với mọi i nguyên dương.

Cơ sở quy nạp $i = 1$ là hiển nhiên.

Bước chuyển: $i \to i + 1$. Giả sử $m_i \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình

$$x(x+1) \equiv 2m' \pmod{2^i}.$$

Khi đó xảy ra một trong hai điều kiện sau

(1) $m_i(m_i + 1) \equiv 2m' \pmod{2^{i+1}}$.

(2) $m_i(m_i + 1) \equiv 2m' + 2^i \pmod{2^{i+1}}$.

Trong trường hợp (1) m_i là nghiệm của phương trình đồng dư

$$m_i(m_i + 1) \equiv 2m' \pmod{2^{i+1}}.$$

Trong trường hợp hai $m_i + 2^i$ là nghiệm của phương trình

$$m_i(m_i + 1) \equiv 2m' \pmod{2^{i+1}}.$$

Bây giờ giả sử $p \neq 2$, tức là p là số nguyên tố lẻ. Mọi số p-adic đều có thể biểu diễn dưới dạng $p^n m$, trong đó n là số nguyên, còn m là số nguyên p-adic, không chia hết cho p. Ta có $x^2 = p^{2n}m^2$.

Đặt $m' = m^2$ khi đó

$$x^2 = p^{2n}m', \tag{13}$$

trong đó m' là số nguyên p-adic, có phần dư khi chia cho p là thặng dư bình phương và không bằng 0. Để chứng minh điều này, ta cần chứng minh rằng với mọi số nguyên p-adic m' sao cho

(3) m' không chia hết cho p,

(4) số dư trong phép chia m' cho p là thặng dư bình phương và khác 0. đều biểu diễn được dưới dạng m^2.

Để chứng minh điều này, theo bài toán 16, ta chỉ cần chứng minh rằng phương trình $x^2 \equiv m' \pmod{p^i}$ có nghiệm trong $\mathbb{Z}$ với mọi i nguyên dương. Ta chứng minh điều này bằng quy nạp.

Cơ sở $i = 1$ thỏa mãn, vì số dư trong phép chia $m^{'}$ cho p là thặng dư bình phương. Phép chuyển: $i \to i + 1$. Giả sử $m_i \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình $x^2 \equiv \pmod{p^i}$. Khi đó

$$m_i^2 \equiv m^{'} + rp^i \pmod{p^{i+1}},$$

trong đó $i \in \mathbb{Z}$ là một số nguyên nào đó. Vì $m^{'}$ không chia hết cho p và $p \neq 2$ nên tồn tại số nguyên $r^{'} \in \mathbb{Z}$ sao cho $2m_i r^{'} \equiv r \pmod{p^{i+1}}$. Đặt $m_{i+1} : m_i - r^{'} p^i$. Khi đó

$$m_{i+1}^2 \equiv m^{'} \pmod{p^{i+1}}.$$

Bước chứng minh quy nạp hoàn tất. □

Bài toán 22. *Chứng minh rằng mọi số* $3-$ *adic khác* 0 *có dạng* x^2, *hay* $2x^2$, *hay* $3x^2$, *hay* $6x^2$ *với số* $3-$ *adic* x *nào đó.*

Chứng minh. Để ý rằng với mọi số nguyên tố p một số p-adic bất kỳ biểu diễn được dưới dạng $p^i \cdot a \cdot y$ trong đó a là số nguyên từ 1 đến $p-1$, p^i là lũy thừa của p còn y là số nguyên p-adic, đồng dư với 1 theo mô-đun p (theo bài toán 21 thì y là số chính phương). Khi đó, thay $p = 3$, ta có tùy thuộc vào tính chẵn lẻ của số i, số p^i sẽ là số chính phương hay 3 lần số chính phương, $a \in \{1, 2\}$, y là số chính phương. Vì vậy tích của chúng sẽ tương ứng với 1 trong 4 trường hợp đã nêu. □

Bài toán 23. *Cho* p *là số nguyên tố lẻ, còn* $x_1, x_2, \ldots, x_5$ *là các số p-adic khác* 0. *Chứng minh rằng* $\frac{x_i}{x_j}$ *là số chính phương trong tập các số p-adic với* i, j *nào đó* $(1 \leqslant i < j \leqslant 5)$.

Chứng minh. Tương tự với lời giải của bài toán trước, mọi số nguyên đều biểu diễn dưới dạng $p^i \cdot a \cdot y$.

Ta chia các số thành 2 nhóm. Trong nhóm 1 có i lẻ, nhóm 2 có i chẵn. Sau đó mỗi nhóm lại được chia làm 2 : Trong nhóm thứ nhất có a là thặng dư bình phương, nhóm thứ hai – không là thặng dư bình phương.

Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất một trong hai số trong các số đã cho nằm trong cùng một nhóm. Thương của chúng sẽ có dạng $p^j \cdot a_{\text{new}} \cdot \frac{y_1}{y_2}$, trong đó j chia hết cho 2, a_{new} là số chính phương (vì là thương của hai thặng dư bình phương hoặc hai không thặng dư bình phương), còn $\frac{y_1}{y_2}$ là số p-adic bắt đầu bằng 1.

Do đó số này hiển nhiên là số chính phương, vì là tích của ba số chính phương. Bài toán được chứng minh. □

Bài toán 24. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố lẻ* p *tồn tại các số p-adic khác* 0 : $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ *sao cho* $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{p-1}^2 + 1 = 0$.

Chứng minh. Chú ý rằng theo bài toán 21 thì số $1 - p$ là số chính phương trong tập hợp các số p-adic. Suy ra

$$-1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{p-2 \text{ số } 1} + 1 - p,$$

là tổng của $p-1$ số chính phương trong tập hợp các số p-adic. Suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán 25. *Chứng minh rằng phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ có đúng 2 nghiệm trong tập các số nguyên 7− adic.*

Chứng minh. Nghiệm của phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ được viết dưới dạng

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Vì $\sqrt{-3} \in \mathbb{Z}_7$ (xem bài toán 21), phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trong $\mathbb{Z}_7$. □

Bài toán 26. *Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^2 = -1$ có nghiệm trong các số p-adic với mọi số nguyên tố lẻ p.*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh rằng phương trình này có nghiệm theo mô-đun p. Ta kiểm tra điều này. Biểu thức x^2 có thể nhận $\frac{p+1}{2}$ giá trị khác nhau: 0 và tất cả các thặng dư bình phương. Ta xét tất cả các giá trị của biểu thức $-x^2 - 1$. Nếu như có ít nhất một trong chúng có thể biểu diễn dưới dạng y^2 thì bài toán được giải quyết. Nếu như không có số nào có dạng y^2, thì các giá trị có thể của y^2 chỉ có tối đa là $\frac{p-1}{2}$ mâu thuẫn. □

Định lý 4.2. **(Nguyên lý Minkowsky-Hasse)** *Phương trình bậc hai $f = 0$ của một số biến có nghiệm hữu tỷ khi và chỉ khi nó đồng thời có nghiệm trong*

- *Tập hợp các số thực.*
- *Tập hợp các số p-adic ($:= Q_p$) với mọi số nguyên tố p.*

Bài toán 27. *Chứng minh nguyên lý Minkowsky-Hasse cho phương trình 1 hoặc 2 ẩn số.*

Chứng minh. (a) Phương trình có một ẩn số:

Phương trình có dạng $ax^2 = b$. Ta chỉ cần chứng minh rằng nếu phương trình không có nghiệm trong $\mathbb{Q}$, thì nó sẽ không có nghiệm hoặc trong $\mathbb{R}$, hoặc trong $\mathbb{Q}_p$ với p nào đó. Nếu $ax^2 = b$ không có nghiệm trong $\mathbb{Q}$, thì $\frac{b}{a}$ không là số chính phương trong q, tức là hoặc $\frac{b}{a} < 0$, hoặc sẽ có một số nguyên tố p nào đó có trong $\frac{b}{a}$ số lẻ lần. Trong trường hợp thứ nhất $ax^2 = b$ không có nghiệm trong $\mathbb{R}$, trong trường hợp thứ hai, không có nghiệm trong $\mathbb{Q}$.

(b) Phương trình có hai ẩn số.

Theo bài toán 15, mọi phương trình bậc hai trên tập các số hữu tỷ của hai biến tương đương với phương trình $ax^2 + by^2 = 1$. Hơn nữa ta có thể giả sử rằng

(1) a, b nguyên và phi chính phương (không có ước chính phương > 1),

(2) $|a| \leqslant |b|$.

Ta chỉ cần chứng minh rằng nếu phương trình $ax^2 + by^2 = 1$ có nghiệm trong $\mathbb{Q}_p$ với mọi p và có nghiệm trong $\mathbb{R}$ thì nó có nghiệm trong $\mathbb{Q}$. Đặt $m(a, b) = |a| + |b|$. Ta sẽ chứng minh mệnh đề bằng quy nạp theo $m(a, b)$.

Cơ sở: $m(a, b) = 2$ có thể kiểm tra trực tiếp.

Bước chuyển: $m \to m + 1$. Ta giả sử a, b là các số thỏa mãn điều kiện (1) và (2), với

(3) $m(a, b) = m + 1$.

(4) Phương trình $ax^2 + by^2 = 1$ có nghiệm trong tập hợp các số p-adic với mọi p và có nghiệm trong $\mathbb{R}$.

Ta xét hai trường hợp: $|a| = |b|$ và $|a| < |b|$.

Nếu như $|a| = |b|$ thì phương trình $ax^2 + by^2 = 1$ tương đương

$$-\frac{b}{a} \cdot y^2 + az^2 = 1. \tag{14}$$

Hơn nữa, phương trình (14) có nghiệm thuộc $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_p$ khi và chỉ khi phương trình $ax^2+by^2 = 1$ có nghiệm trong tập tương ứng. Vì

$$m\left(-\frac{b}{a}, a\right) < m(a, b) = m + 1,$$

nên phương trình $-\frac{b}{a} \cdot y^2 + az^2 = 1$ có nghiệm trong $\mathbb{Q}$ theo giả thiết quy nạp. Suy ra phương trình ban đầu có nghiệm trong $\mathbb{Q}$.

Bây giờ giả sử $|a| < |b|$. Từ điều kiện (3), (4) suy ra a là số chính phương trong mô-đun b, tức là $a + BB' = t^2$ trong đó b', t là những số nguyên và $b' \geqslant 0$. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $|t| \leq \frac{|b|}{2}$.

Phương trình $ax^2 + by^2 = 1$ có nghiệm trong $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_p$, nếu và chỉ nếu cũng trong các tập hợp đó phương trình sau có nghiệm

$$ax^2 + b'y^2 = 1, \quad b' = \frac{t^2 - a}{b}.$$

Ta có $|b'| \leq \frac{|b|}{4}$ và do đó $m(a, b') < m(a, b) = m + 1$. Từ đó theo giả thiết quy nạp, phương trình $ax^2 + b'y^2 = 1$ có nghiệm trong $\mathbb{Q}$. Suy ra phương trình ban đầu có nghiệm trong $\mathbb{Q}$. Phép chứng minh hoàn tất. □