Epsilon
Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

10 năm

TÍCH BỘI BA VÀ ĐỊNH LÝ FERMAT-EULER VỀ TỔNG HAI BÌNH PHƯƠNG
(Trần Nam Dũng)

CÁC BÀI TOÁN CỦA BA LAN TẠI IMO
(Nguyễn Hùng Sơn)

"AI nhanh hơn, lớn hơn, thông minh hơn có thực sự là giải pháp? Cả thế giới đang dõi theo cuộc đua giữa DeepSeek và ChatGPT, nhưng có bao giờ bạn tự hỏi liệu chúng ta có đang chạy đua sai hướng?"
RAMES JAIN, "KHOA HỌC TRÍ THÔNG MINH"

Chỉ với một phép tính, anh đã khám phá lại phát biểu nguyên thủy của Max Planck cho lý thuyết lượng tử mà không cần sử dụng công thức năng lượng của Planck. Một lời giải đúng đến mức như vậy phải là chân lý. Một lời giải tao nhã đến như vậy phải là chân lý.
ASHUTOSH JOGALEKAR, "HEISENBERG Ở HELGOLAND"

25 tháng 2
No 25

Biên tập viên:
Lê Viết Ân
Võ Quốc Bá Cẩn
Trần Quang Hùng
Nguyễn Văn Huyện
Lê Phúc Lữ
Tống Hữu Nhân
Nguyễn Tất Thu
Trần Bình Thuận
Đặng Nguyễn Đức Tiến

Chủ biên:
Trần Nam Dũng

LỜI NGỎ

Độc giả thân mến,

Nhân dịp đánh dấu cột mốc 10 năm thành lập và ra mắt số 25 của Epsilon, chúng tôi xin gửi lời tri ân sâu sắc tới tất cả các bạn - những người đã, đang và sẽ luôn đồng hành cùng hành trình chinh phục tri thức. Từ những ngày đầu tiên với niềm đam mê bất tận dành cho toán học, Epsilon đã nỗ lực trở thành chiếc cầu nối trao gửi cảm hứng và kiến thức đến cộng đồng yêu toán – một sứ mệnh được thực hiện trong tinh thần mở và hoàn toàn phi lợi nhuận. Trong mỗi cột mốc trong hành trình 10 năm, mỗi số báo đều là niềm tự hào sâu sắc của chúng tôi. Số cột mốc chính phương $5^2 = 25$, nhân với một số chính phương $9^2 = 81$, ta được một năm rất đặc biệt tất nhiên cũng là một số chính phương - cửu ngũ bình phương - $5^2 \times 9^2 = 45^2 = 2025$, không chỉ ghi dấu thời gian mà còn mở ra những quy luật toán học kỳ thú.

Trong suốt hành trình 10 năm - 25 số này, chúng tôi luôn tin rằng *"đi nhiều người, ta sẽ đi rất xa"*. Chính sự kết nối, giao lưu và sẻ chia giữa các độc giả, tác giả và cộng tác viên đã làm nên sức mạnh của Epsilon, giúp tạp chí không ngừng phát triển và mở rộng biên giới của tri thức. Mỗi con số, mỗi công thức không chỉ là những ký hiệu trừu tượng mà còn chứa đựng niềm đam mê, sự sáng tạo và khát khao hiểu biết sâu sắc về thế giới quanh ta.

Số đặc biệt này là minh chứng cho hành trình vững bền của Epsilon – nơi mọi ý tưởng, tư duy và khám phá đều được tôn vinh. Chúng tôi hy vọng rằng, qua mỗi trang báo, độc giả sẽ tìm thấy nguồn cảm hứng mới, những suy ngẫm sâu sắc và niềm vui trong từng dấu chấm phẩy của toán học.

Một lần nữa xin chân thành cảm ơn quý bạn đọc đã tin tưởng và đồng hành cùng chúng tôi trong suốt chặng đường đã qua, và hi vọng sẽ thêm nhiều thập kỷ nữa. Hãy cùng nhau tiếp tục bước tiếp, bởi mỗi bước đi dù nhỏ bé đều góp phần đưa chúng ta đến những chân trời mới xa hơn.

Trân trọng,

Ban Biên tập Tạp chí Epsilon

MỤC LỤC

Khoa học Trí thông minh

Ramesh Jain (Đại học California, Irvine, Hoa Kỳ)
Dịch bởi Ban Biên tập Tạp chí Epsilon

Giới thiệu.

AI nhanh hơn, lớn hơn, thông minh hơn có thực sự là giải pháp? *Cả thế giới đang dõi theo cuộc đua giữa* ***DeepSeek và ChatGPT****, nhưng có bao giờ bạn tự hỏi liệu chúng ta có đang chạy đua sai hướng?*

Ramesh Jain, 29 tháng 1 năm 2025

Trên đây là những câu hỏi mở đầu cho loạt ba bài viết về ***Khoa học Trí thông minh*** *của* ***Ramesh Jain****, một trong những nhà khoa học hàng đầu về trí thông minh nhân tạo (AI)*[a]*, thị giác máy tính và công nghệ đa phương tiện. Những bài viết của Jain mà chúng tôi sẽ giới thiệu không chỉ giúp chúng ta hiểu rõ hơn về AI, mà còn đặt ra một nghi vấn quan trọng: Chúng ta có đang xây dựng một tương lai AI thực sự có ích cho nhân loại, hay chỉ đang chạy đua theo những con số ngày càng lớn?*

Ramesh Jain là ai? *Nếu bạn yêu thích công nghệ, AI hay khoa học máy tính, bạn hẳn sẽ muốn biết Ramesh Jain - người hiện đang là Giáo sư danh dự tại Đại học California, Irvine. Ông đã xuất bản hơn 400 bài báo khoa học và có những đóng góp mang tính nền tảng trong xử lý hình ảnh, nhận diện mẫu và hệ thống thông tin thông minh. Ông cũng là người sáng lập và Chủ tịch đầu tiên của Nhóm nghiên cứu Đặc nhiệm về Đa phương tiện (SIGMM) của ACM, sáng lập tạp chí IEEE Multimedia cách đây hơn 30 năm, một trong những tạp chí quan trọng nhất trong nghiên cứu về công nghệ đa phương tiện trên thế giới. Hiện tại, ông tập trung vào AI trong chăm sóc sức khỏe, hướng đến việc tạo ra các hệ thống y tế thông minh giúp con người kiểm soát sức khỏe tốt hơn nhờ công nghệ.*

Là một nhà khoa học tiên phong, Ramesh Jain không ngừng chia sẻ những nghiên cứu và góc nhìn sâu sắc về tương lai của AI, từ các hội nghị khoa học, các diễn đàn học thuật đến những bài viết cá nhân đầy tâm huyết. Trong số này, Epsilon vinh dự được ông cho phép dịch và giới thiệu loạt bài viết về Khoa học Trí thông minh, được ông hoàn thành vào đầu tháng 2 năm 2025, đến độc giả. Đây không chỉ là cơ hội hiếm có để tiếp cận tư duy của một trong những nhà khoa học hàng đầu trong lĩnh vực này, mà còn là một lời kêu gọi mạnh mẽ để cùng suy ngẫm về con đường đúng đắn cho tương lai của AI.

Tóm tắt ba phần của loạt bài viết này

- ***Phần 1: Chúng ta cần thay đổi cách tiếp cận AI.*** *AI ngày càng mạnh mẽ, nhưng chúng ta có thực sự hiểu trí thông minh là gì không? Thay vì chỉ tập trung vào làm cho AI nhanh hơn và mạnh hơn, chúng ta cần hiểu bản chất thực sự của trí thông minh.*
- ***Phần 2: AI không chỉ là cuộc đua về hiệu suất.*** *Nhiều người nghĩ rằng AI càng thông minh thì càng tốt. Nhưng điều đó có đúng không? Nếu AI không có một nền tảng khoa học vững chắc, liệu nó có thực sự hiểu và thích nghi với thế giới xung quanh?*
- ***Phần 3: Tương lai AI thuộc về ai?*** *Điều gì sẽ xảy ra nếu chỉ hai quốc gia và một vài tập đoàn lớn kiểm soát toàn bộ công nghệ AI? Chúng ta có thể đối mặt với sự phân chia tri thức sâu sắc hơn bất kỳ cuộc cách mạng nào trước đây. Nhưng vẫn có một con đường tốt hơn - AI nên được phát triển dựa trên hợp tác khoa học toàn cầu, nơi nhiều nền văn hóa cùng đóng góp để tạo ra công nghệ phục vụ* ***tất cả mọi người, chứ không chỉ một nhóm nhỏ****.*

Bạn có muốn là một phần của tương lai này? AI không chỉ dành cho các nhà khoa học hay lập trình viên, mà là thứ sẽ ảnh hưởng đến mọi người trong tương lai, bao gồm cả bạn! Vì vậy, hãy cùng khám phá và thảo luận về cách chúng ta có thể tạo ra một AI thực sự có ích cho thế giới - không chỉ chạy theo những con số, mà còn giúp con người phát triển theo cách tốt nhất.

[a] Vẫn được dịch là trí tuệ nhân tạo.

PHẦN I

Tiến hóa của Khoa học Trí thông minh: Nhu cầu cấp thiết

Khoa học Trí thông minh[1] *phải trở thành nền tảng cho trí thông minh thực sự trong các hệ thống nhân tạo. Loạt bài này khám phá cách Khoa học Trí thông minh phát triển từ các nguyên tắc khoa học đến triển khai thực tiễn trong việc xây dựng các hệ thống thông minh. Bài viết đầu tiên này xem xét lý do tại sao sự phát triển của AI hiện tại đòi hỏi một sự chuyển dịch căn bản về nền tảng khoa học.*

Cuộc đua hướng tới Trí thông minh Nhân tạo Tổng quát (AGI)[1] đang đối mặt với một vấn đề cơ bản: chúng ta đang theo đuổi hiệu suất mà không hiểu rõ năng lực thực sự. Mặc dù các hệ thống AI tiên tiến từ Hoa Kỳ và Trung Quốc thể hiện hiệu suất ấn tượng - tạo ra văn bản giống con người và giải quyết các vấn đề phức tạp - chúng ta vẫn chưa xác định được điều gì khiến một hệ thống thực sự có năng lực. Câu hỏi cốt lõi vẫn là: **Trí thông minh thực sự là gì?**

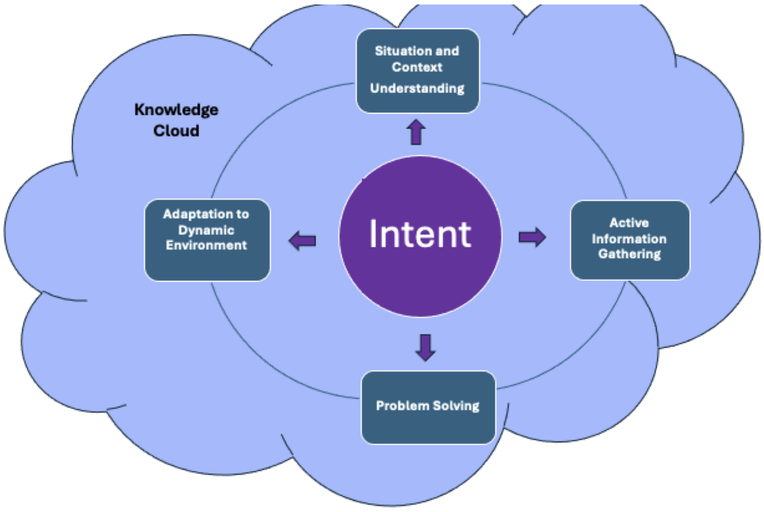
[1] AGI: Artificial General Intelligence

Trí thông minh không chỉ là xử lý thông tin sẵn có mà còn là một năng lực có chủ đích nắm bắt tình huống, chủ động thu thập thông tin và xây dựng tri thức, và giải quyết vấn đề mà vẫn thích ứng với sự thay đổi bối cảnh. Định nghĩa này làm rõ các thành phần cốt lõi của trí thông minh: chủ đích thu thập thông tin một cách chủ động, xây dựng tri thức trên nhiều phương thức, và giải quyết vấn đề có mục đích trong môi trường linh hoạt để đạt mục tiêu cụ thể. Điều này được minh họa trong Hình 1.

Ở đây, *"chủ đích"*[2] có nghĩa là hệ thống có một mục tiêu rõ ràng để hướng dẫn hành động của mình. Khác với các hệ thống AI hiện tại chỉ xử lý dữ liệu một cách thụ động, *chủ đích* xác định thông tin nào cần tìm kiếm và cách sử dụng thông tin đó để đạt được mục tiêu cụ thể.

[2] Chúng tôi dịch từ intent-driven.

[1]Khoa học Trí thông minh được dịch từ thuật ngữ gốc Intelligence Science trong tiếng Anh. Chúng tôi đã cân nhắc và tham khảo một số tài liệu cũng như thảo luận khác nhau để đi đến cách dịch này trong tiếng Việt. Cụ thể hơn, chúng tôi đã xem xét các thuật ngữ: "Khoa học Trí tuệ", "Khoa học Trí năng", "Khoa học Trí thông minh", "Khoa học Thông minh", và "Khoa học Tính toán Thông minh". Chúng tôi loại bỏ cách dịch là trí tuệ, bởi lẽ intelligence ở đây chưa đạt đến mức "tuệ". Chúng tôi cũng không chọn "tính toán", bởi ý trong bài của tác giả nó rộng hơn mức tính toán. Các học giả Trung Quốc dịch là "Trí năng Khoa học", nhưng xét thấy tiếng Việt đương đại từ "trí năng"không còn phổ biến nhiều, nên chúng tôi cũng không chọn phương án này. Cuối cùng, chúng tôi loại bỏ "Khoa học Thông minh", vì sợ nhầm lẫn với các thuật ngữ mang yếu tố "smart"hiện nay.



Hình 1. Khung Trí thông Minh: Chủ đích (Intent) định hướng hệ thống, trong khi Hiểu Biết Tình Huống (Situation Understanding) cung cấp bối cảnh để lựa chọn và sử dụng tri thức. Thu Thập Thông Tin Chủ Động (Active Information Gathering) và Giải Quyết Vấn Đề (Problem Solving) hoạt động liên tục trong bối cảnh này, trong khi Thích Nghi Với Thay Đổi (Adaptation to Change) đảm bảo sự ổn định của hệ thống trong môi trường động. Tất cả các hoạt động đều diễn ra trong và đóng góp vào nền tảng tri thức.

Các mô hình ngôn ngữ lớn ngày nay thể hiện khả năng đáng kinh ngạc trong việc học tập, tổ chức tri thức và duy trì nhận thức theo ngữ cảnh trong các tương tác phức tạp. Tuy nhiên, chúng thiếu kiến trúc được định hướng bởi mục đích - đặc điểm của trí thông minh thực sự. Dù có thể xử lý và tạo ra thông tin trong phạm vi đào tạo, chúng không thể chủ động tìm kiếm tri thức mới hoặc hoạt động với một mục đích rõ ràng.

Khoảng cách giữa xử lý thông tin tiên tiến[3] và trí thông minh thực sự trở nên quan trọng khi các hệ thống AI phát triển thành những đối tác nhận thức[4], hoạt động qua các trợ lý cá nhân trong thế giới thực. Chúng có thể ảnh hưởng đến cách xã hội tư duy và tiến hóa. Vấn đề không chỉ nằm ở năng lực kỹ thuật, mà còn chạm đến những câu hỏi cốt lõi về quyền tự chủ của con người, sự công bằng toàn cầu và tương lai chung của nhân loại.

[3] Chúng tôi dịch thoáng từ sophisticated information processing

[4] cognitive partners - ở đây nhấn mạnh vào sự hợp tác giữa AI và con người trong tư duy, ra quyết định.

1. Vấn đề Cốt lõi

Các thuật toán mạng xã hội đang bộc lộ một thực tế nghiệt ngã: việc nhận dạng khuôn mẫu không có chủ đích đã chia rẽ xã hội và kích động chủ nghĩa cực đoan. Các thuật toán tương tác trên các nền tảng lớn khuếch đại nội dung gây chia rẽ và làm gia tăng sự phân cực, trong khi các hệ thống nhắn tin toàn cầu trở thành công cụ lan truyền thông tin sai lệch. Đây không chỉ là những trục trặc kỹ thuật mà còn thể hiện sự nguy hiểm của việc triển khai các hệ thống nhận dạng mẫu[2] mạnh mẽ được thúc đẩy bởi các chỉ số kinh doanh hơn là lợi ích xã hội. Việc khuếch đại nội dung do AI điều khiển làm suy yếu sự gắn kết xã hội và các diễn ngôn dân chủ trên khắp các nền văn hóa.

Ngoài mạng xã hội, các thất bại nghiêm trọng của AI cũng tiết lộ những mô hình tương tự. AI trong y tế cho thấy sự thiên vị có hệ thống trong chẩn đoán và khuyến nghị điều trị theo nhân khẩu học. Xe tự hành không thể hiểu được các tình huống mới mà con người có thể dễ dàng xử lý. Hệ thống tài chính do AI vận hành làm trầm trọng thêm sự bất ổn của thị trường bằng cách chạy theo mô hình mà không hiểu rõ nền tảng kinh tế.

Cách tiếp cận đặt năng lực lên hàng đầu này vừa khơi dậy những mộng tưởng[5] vừa làm nảy sinh nỗi sợ diệt vong. Trong khi nhiều người tin rằng AI có thể giải quyết những thách thức lớn nhất của nhân loại, các nhà tiên phong như Geoffrey Hinton lại cảnh báo về những rủi ro thảm khốc, thậm chí có thể đe dọa sự tồn tại của con người. Sự đối lập này bắt nguồn từ một thực tế cốt lõi: chúng ta đang tạo ra những hệ thống ngày càng mạnh mẽ, nhưng lại chưa thể hiểu rõ hoàn toàn hành vi của chúng hay kiểm soát chúng một cách hiệu quả.

[5] Tác giả dùng thuật ngữ utopian hopes.

Con đường phát triển này đe dọa tạo ra bất bình đẳng toàn cầu chưa từng có. Các quốc gia và tập đoàn dẫn đầu không chỉ phát triển AI - họ đang định hình tương lai nhận thức của nhân loại. Không giống như sự thực dân hóa kinh tế của Cách mạng Công nghiệp, AI đe dọa sự thực dân hóa nhận thức - kiểm soát không chỉ tài nguyên mà còn cả sự phát triển trí tuệ của con người.

“Khoa học AI,” tập trung vào cải thiện thuật toán và kiến trúc, không thể giải quyết những vấn đề cốt lõi này. Khả năng công nghệ, chứ không phải sự hiểu biết khoa học, đã định hình hướng đi của AI: từ logic ký hiệu ban đầu đến mạng nơ-ron hiện đại - phát triển từ sức mạnh tính toán ngày càng tăng hơn là sự hiểu biết sâu sắc về trí thông minh.

Khoảng cách giữa khả năng công nghệ và sự hiểu biết khoa học này tạo ra một nền tảng ngày càng bất ổn. Nếu không có một khoa học nền tảng về trí thông minh, chúng ta có nguy cơ tạo ra các hệ thống ngày càng mạnh mẽ nhưng lại làm trầm trọng thêm các vấn đề xã hội thay vì giải quyết chúng.

2. Định nghĩa Khoa học Trí thông minh

Khoa học Trí thông minh không chỉ dừng lại ở việc nghiên cứu các hệ thống nhân tạo mà phải hướng tới việc hiểu rõ bản chất của trí thông minh – cách

[2] Nhận dạng mẫu (Pattern Recognition) hay so khớp mẫu (Pattern Matching) là quá trình phát hiện và phân loại quy luật trong dữ liệu, giúp AI nhận diện hình ảnh, giọng nói, hoặc dự đoán xu hướng. AI hiện tại chủ yếu dựa vào nhận dạng mẫu mà không có sự hiểu biết thực sự — nó xác định đặc điểm dựa trên dữ liệu huấn luyện nhưng không thực sự hiểu ý nghĩa hay bối cảnh như con người. Đây là lý do Khoa học Trí thông minh cần phát triển AI vượt ra khỏi nhận dạng mẫu để đạt được khả năng học hỏi và tư duy linh hoạt hơn.

nó hình thành, vận hành và tiến hóa trong cả hệ thống tự nhiên lẫn nhân tạo. Cốt lõi của nó là năng lực định hướng có chủ đích: hiểu bối cảnh, xây dựng tri thức, giải quyết vấn đề và thích ứng với môi trường luôn biến đổi.

Xây dựng tri thức khác biệt căn bản so với xử lý dữ liệu hay lưu trữ thông tin. Nó không chỉ đơn thuần là tích lũy dữ liệu mà là tạo ra sự hiểu biết có cấu trúc trên nhiều lĩnh vực, thiết lập mối quan hệ nhân quả và tích hợp thông tin mới vào hệ thống tri thức hiện có - những năng lực cốt lõi của trí thông minh thực sự.

Xây dựng tri thức là nền tảng, không chỉ dừng lại ở việc lưu trữ thông tin mà là hình thành sự hiểu biết có cấu trúc trên nhiều lĩnh vực và phương thức khác nhau. Điều này đòi hỏi sự tích hợp giữa thông tin thị giác, văn bản và trải nghiệm, đồng thời nắm bắt mối quan hệ nhân quả và tạo ra các khái niệm trừu tượng có ý nghĩa. Khác với các hệ thống AI hiện tại chỉ xử lý dữ liệu một cách thụ động, trí thông minh thực sự chủ động tìm kiếm thông tin cần thiết để giải quyết vấn đề, xác định khoảng trống trong tri thức và đề ra chiến lược để lấp đầy chúng.

Nền tảng tri thức này cho phép hệ thống thực sự hiểu bối cảnh, nắm bắt mối quan hệ có ý nghĩa trong từng tình huống. Hệ thống có thể liên kết quan sát hiện tại với tri thức liên quan, dự đoán sự phát triển của tình huống và xác định những thay đổi quan trọng cần chú ý. Nhận thức theo bối cảnh này thúc đẩy khả năng giải quyết vấn đề vượt xa việc nhận dạng mẫu, giúp hệ thống có thể phân tích vấn đề phức tạp, điều chỉnh giải pháp cho từng bối cảnh mới và học hỏi từ cả thành công lẫn thất bại.

Khả năng thích ứng linh hoạt trong môi trường thực tế đảm bảo hệ thống duy trì sự ổn định trong khi tiếp thu thông tin mới và điều chỉnh theo điều kiện thay đổi. Điều này không chỉ đơn thuần là xử lý dữ liệu mới mà còn tinh chỉnh sự hiểu biết theo bối cảnh, bảo toàn các mục tiêu cốt lõi đồng thời thay đổi chiến lược khi cần thiết. Quan trọng nhất, việc đạt được mục tiêu không chỉ là hoàn thành nhiệm vụ mà còn phải đảm bảo mọi hành động đều phù hợp với ý định và giá trị tổng thể, quản lý các mục tiêu mâu thuẫn mà vẫn giữ được định hướng chung.

Khung lý thuyết này kết hợp các hiểu biết từ nhiều ngành khoa học, bao gồm khoa học nhận thức, thần kinh học, tâm lý học và khoa học xã hội, tạo nên nền tảng định hướng sự phát triển của AI. Nó đảm bảo rằng khi các hệ thống ngày càng mạnh mẽ hơn, chúng không làm suy giảm mà ngược lại, nâng cao quyền chủ động của con người, trở thành những đối tác thực sự trong tiến bộ nhân loại.

3. Vì sao phải là bây giờ?

Cục diện AI[6] đã đạt đến điểm bước ngoặt quan trọng. Khi các hệ thống AI ngày càng kiểm soát thông tin chúng ta tiếp cận, ảnh hưởng đến lựa chọn chúng ta đưa ra và cách chúng ta hiểu về thế giới, những câu hỏi cốt lõi về trí thông minh vẫn chưa được giải đáp. AI không chỉ tác động mà còn định hình các quyết định hằng ngày của chúng ta – từ những gì ta ăn, mua sắm đến cách ta hình thành quan điểm và xây dựng các mối quan hệ.

[6] Dịch thoáng từ *the AI landscape*.

Sự tập trung quyền lực vào một số tập đoàn công nghệ lớn đặt ra mối lo ngại đáng báo động. Các công ty này liên tục điều chỉnh nguyên tắc đạo đức và chính sách nội dung của mình dưới áp lực chính trị và động lực thị trường. Tuy nhiên, chính các hệ thống AI của họ lại ngày càng định đoạt bản chất của các quyết định cá nhân và xã hội. Khi AI vận hành vì lợi nhuận kiểm soát các lựa chọn trong y tế, giáo dục, tài chính và các mối quan hệ xã hội, mức độ ảnh hưởng đến quyền tự chủ của con người trở nên sâu sắc hơn bao giờ hết.

Hiệu ứng lan rộng trên phạm vi toàn cầu. Các tập đoàn công nghệ lớn không chỉ phát triển công nghệ mà còn định hình hành vi con người, quá trình ra quyết định và cấu trúc xã hội trên khắp thế giới. Nếu việc phát triển AI không được dẫn dắt bởi những nguyên tắc khoa học vững chắc, chúng ta có nguy cơ sống trong một thế giới nơi AI – tối ưu hóa theo lợi ích thương mại – ngày càng kiểm soát lựa chọn và trải nghiệm của con người.

Hình thức kiểm soát này còn sâu rộng hơn cả chủ nghĩa thực dân trong lịch sử. Nếu Cách mạng Công nghiệp tạo ra sự phụ thuộc kinh tế, thì AI giờ đây đang kiểm soát chính bản chất của trải nghiệm con người – không chỉ tác động đến cách ta suy nghĩ mà còn quyết định cách ta sống, những cơ hội ta nhìn thấy và tương lai ta có thể tưởng tượng. Hầu hết các quốc gia đã trao cơ sở hạ tầng số của mình vào những hệ thống AI do một số ít cường quốc công nghệ phát triển, tạo ra một mức độ dễ tổn thương chưa từng có. Những hệ thống này không chỉ có thể được sử dụng để giám sát mà còn trở thành công cụ gây sức ép – khả năng làm gián đoạn hoặc vô hiệu hóa các dịch vụ thiết yếu, mạng lưới truyền thông và hoạt động xã hội có thể trao cho các quốc gia kiểm soát AI một lợi thế áp đảo so với phần còn lại. Sự phụ thuộc kỹ thuật số này tạo ra mất cân bằng quyền lực nguy hiểm hơn nhiều so với những lợi thế kinh tế hay quân sự truyền thống.

Khoa học Trí thông minh cần được thiết lập trước khi sự tái cấu trúc toàn diện của trải nghiệm con người và trật tự quyền lực toàn cầu trở nên không thể đảo ngược. Nếu mô hình phát triển hiện tại tiếp tục, không chỉ các lợi ích thương mại bị tích hợp sâu vào quá trình ra quyết định của con người mà còn có nguy cơ hình thành những điểm kiểm soát kỹ thuật số có thể làm tê liệt cả một xã hội. Chỉ bằng cách xây dựng sự hiểu biết khoa học chung và phát triển AI theo hướng phục vụ lợi ích con người, chúng ta mới có thể đảm bảo AI trở thành công cụ thúc đẩy sự thịnh vượng thực sự thay vì biến thành một phương tiện kiểm soát toàn cầu chưa từng có.

4. Tác động và rủi ro toàn cầu

Sự hội tụ của các xu hướng hiện tại đang dẫn đến bốn cuộc khủng hoảng lớn mà chỉ Khoa học Trí thông minh mới có thể giải quyết:

Thứ nhất, khi các hệ thống AI thâm nhập vào cơ sở hạ tầng quan trọng, những hạn chế của chúng có thể trở thành mối đe dọa đến tính mạng. Không chỉ dừng lại ở các quyết định thiên lệch trong y tế hay thị trường tài chính đầy biến động, chúng ta đang đối mặt với viễn cảnh AI kiểm soát lưới điện, hệ thống nước hoặc phản ứng khẩn cấp có thể thất bại theo những cách chưa từng có. Khi AI kiểm soát hạ tầng thiết yếu, việc chỉ nhận dạng mẫu mà không thực sự hiểu có thể dẫn đến hậu quả khó lường.

Thứ hai, tác động của AI lên hạ tầng nhận thức – cách xã hội tư duy và ra quyết định tập thể – đặt ra những lo ngại sâu sắc hơn. Không chỉ dừng lại ở các vấn đề của mạng xã hội hiện nay, chúng ta đang tạo ra những hệ thống có khả năng thay đổi tận gốc cách con người ra quyết định và tiến hóa xã hội. Nếu quá trình phát triển không được định hướng bởi một nền tảng khoa học vững chắc, chúng ta có nguy cơ làm biến đổi không thể đảo ngược các mô thức nhận thức của con người.

Thứ ba, cấu trúc quyền lực mới trong phát triển AI đe dọa sự ổn định toàn cầu theo những cách chưa từng có. Không chỉ tạo ra rào cản kinh tế, AI đang mở đường cho các hệ thống kiểm soát có thể được sử dụng để thao túng hoặc cưỡng ép toàn bộ dân số. Việc tập trung năng lực AI vào tay một số ít thực thể khiến nguy cơ mất cân bằng trong quản trị toàn cầu và quyền tự chủ trở nên nghiêm trọng hơn bao giờ hết.

Thứ tư, khi năng lực AI tiếp tục tiến xa mà không có sự hiểu biết khoa học tương ứng, chúng ta đối mặt với những rủi ro tồn vong vượt xa những cảnh báo hiện nay. Các nhà tiên phong và nghiên cứu AI hàng đầu đều nhấn mạnh rằng chúng ta đang phát triển những hệ thống mà hành vi và tác động của chúng chưa thể dự đoán hay kiểm soát hoàn toàn.

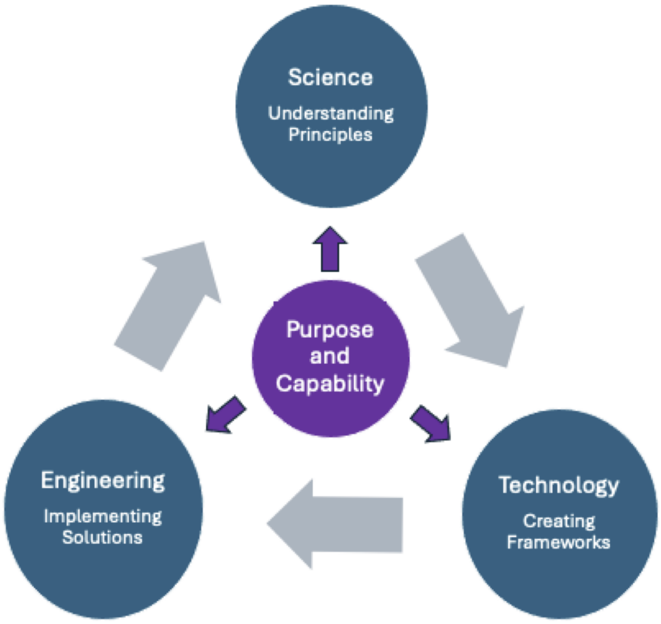
Chỉ Khoa học Trí thông minh, với trọng tâm là sự hiểu biết cốt lõi thay vì đơn thuần mở rộng năng lực AI, mới có thể cung cấp con đường tiếp cận có hệ thống để giải quyết những thách thức liên kết này.

Bốn cuộc khủng hoảng trên cho thấy lý do vì sao chúng ta cần một phương pháp tiếp cận khoa học bài bản. Giống như vật lý và sinh học đã phát triển thông qua chu trình Khoa học - Công nghệ - Kỹ thuật, Khoa học Trí thông minh cũng phải đi theo con đường tương tự để giải quyết những thách thức mang tính nền tảng này.

5. Con đường phía trước

Chu trình Khoa học - Công nghệ - Kỹ thuật (STE)[7] đã định hướng cho các ngành khoa học trưởng thành như vật lý và sinh học, từ việc xây dựng lý thuyết đến ứng dụng thực tiễn. Chu trình này, như minh họa trong Hình 2, cho thấy cách sự hiểu biết khoa học định hướng sự phát triển công nghệ, trong khi việc triển khai kỹ thuật thực tế lại cung cấp phản hồi để làm sâu sắc thêm tri thức khoa học. Mỗi yếu tố trong chu trình này củng cố lẫn nhau, đảm bảo tiến bộ vừa có tính ứng dụng vừa tuân theo những nguyên tắc nền tảng.

[7] Science - Technology - Engineering



Hình 2. Chu trình STE trong phát triển Khoa học Trí thông minh. Sự hiểu biết khoa học định hướng các khuôn khổ công nghệ, từ đó tạo tiền đề cho các giải pháp kỹ thuật. Quá trình triển khai thực tiễn cung cấp phản hồi, giúp mở rộng và làm sâu sắc thêm tri thức khoa học. Mục đích và năng lực vẫn là trọng tâm, đảm bảo sự phát triển vừa đáp ứng nhu cầu của con người, vừa duy trì tính chặt chẽ về mặt kỹ thuật.

Khung phát triển Khoa học Trí thông minh tuân theo chu trình STE đã được kiểm chứng, bao gồm bốn yếu tố liên kết chặt chẽ.

Nền tảng khoa học. Cũng như vật lý phát triển từ việc quan sát các hiện tượng tự nhiên đến xây dựng các định luật nền tảng, Khoa học Trí thông minh cần thiết lập các nguyên lý cốt lõi về ý định, tri thức, thích ứng và tích hợp. Nền tảng này giúp hệ thống hình thành hành vi có mục tiêu và xây dựng sự hiểu biết thực sự.

Kiến trúc kiểm chứng. Tương tự như các ngành kỹ thuật chuyển hóa các định luật khoa học thành tiêu chuẩn đo lường thực tiễn, chúng ta cần các khung kiểm chứng trí thông minh thực sự. Các tiêu chí này không chỉ đánh giá hiệu suất mà còn xác minh sự phù hợp với ý định, khả năng xây dựng tri thức và hành vi thích ứng, phân biệt trí thông minh thực sự với việc đơn thuần nhận dạng mẫu.

Khung triển khai. Cũng như sự phát triển của chất bán dẫn dựa trên cơ sở vật lý lượng tử, kiến trúc AI phải xuất phát từ sự hiểu biết khoa học. Điều này đòi hỏi xây dựng các hệ thống mà ý định dẫn dắt hành động, tri thức định hướng quyết định, và khả năng thích ứng giúp duy trì sự phù hợp với giá trị của con người.

Cấu trúc hợp tác toàn cầu. Chu trình STE cần được thực hiện trên phạm vi toàn cầu để đảm bảo:

- Các nền tảng nghiên cứu mở, có thể tiếp cận bởi tất cả các quốc gia.
- Sự phát triển chung về các nguyên tắc khoa học.
- Phân bổ nguồn lực và triển khai công bằng.
- Bảo vệ chống lại sự tập trung công nghệ quá mức.

Hiện thực hóa mục tiêu

Thành công đòi hỏi sự phối hợp hành động giữa các lĩnh vực:

Các viện nghiên cứu cần vượt ra khỏi những giới hạn truyền thống của AI để nghiên cứu trí thông minh một cách toàn diện, đồng thời phát triển chương trình giảng dạy và định hướng nghiên cứu mới dành riêng cho Khoa học Trí thông minh.

Ngành công nghiệp phải chuyển từ cuộc đua mở rộng năng lực sang mô hình phát triển dựa trên sự hiểu biết, qua đó chứng minh cách các nguyên tắc của Khoa học Trí thông minh có thể định hướng đổi mới một cách có trách nhiệm.

Các nhà hoạch định chính sách cần xây dựng khuôn khổ đảm bảo sự phát triển công bằng, đồng thời ngăn chặn việc lạm dụng những công nghệ đầy quyền lực này.

Con đường phía trước đòi hỏi sự hợp tác chưa từng có. Chỉ bằng cách cùng nhau hành động, chúng ta mới có thể đảm bảo Khoa học Trí thông minh phục vụ sự tiến bộ chung của nhân loại thay vì làm trầm trọng thêm những bất bình đẳng toàn cầu.

Lời kêu gọi hành động – Định hướng tương lai

Những đột phá lớn trong AI cùng với bước tiến mạnh mẽ hướng tới AGI và các trợ lý thông minh cá nhân đang nhanh chóng định hình lại xã hội. Chúng ta chỉ có một khoảng thời gian ngắn để tác động đến hướng phát triển nền tảng của AI trước khi những hệ thống này ăn sâu vào hạ tầng toàn cầu và quá trình ra quyết định hàng ngày. Khi đó, việc điều chỉnh hướng đi của chúng sẽ trở nên ngày càng khó khăn, thậm chí là bất khả thi.

Bây giờ chính là thời điểm để xây dựng nền tảng khoa học, trước khi năng lực công nghệ vượt xa khả năng hiểu biết khoa học của chúng ta.

PHẦN
II

Sự phát triển của Khoa học Trí thông minh: Nền tảng khoa học phải được xây dựng ngay bây giờ!

Khoa học Trí thông minh phải trở thành nền tảng cho trí thông minh thực sự trong các hệ thống nhân tạo. Như đã đề cập trong phần đầu tiên, sự phát triển AI hiện tại đang rất cần một nền tảng khoa học vững chắc. Loạt bài này sẽ khám phá cách Khoa học Trí thông minh tiến hóa từ các nguyên lý khoa học đến ứng dụng thực tiễn. Trong bài thứ hai này, chúng tôi sẽ đi sâu vào các khuôn khổ và nguyên tắc giúp hình thành trí thông minh thực sự.

Khoa học Trí thông minh dựa trên những công trình tiên phong từ các nhà khoa học có cách tiếp cận đa chiều về trí thông minh. Herbert Simon với *"Sciences of the Artificial"* đã thiết lập các nguyên tắc cho hệ thống nhân tạo phức tạp và cách chúng tương tác với môi trường. Marvin Minsky với *"Society of Mind"* giải thích cách trí thông minh xuất hiện từ những quá trình đơn giản tương tác với nhau. Aaron Sloman với *"Computer Revolution in Philosophy"* đã đề xuất các khung lý thuyết tính toán để hiểu về tâm trí và trí thông minh. Những công trình này nhấn mạnh nhu cầu về một Khoa học Trí thông minh có thể kết hợp tổ chức hệ thống, sự hình thành trí thông minh và nền tảng tính toán.

Dựa trên những hiểu biết lý thuyết này và những tiến bộ mạnh mẽ của AI, Khoa học Trí thông minh phát triển các hệ thống vượt xa khả năng nhận dạng mẫu và học tập. Trong khi AI hiện tại xuất sắc trong việc xử lý thông tin và nhận diện mẫu, Khoa học Trí thông minh bổ sung những khả năng cốt lõi: xây dựng tri thức có chủ đích, hiểu biết theo ngữ cảnh và thích ứng linh hoạt để giải quyết các vấn đề thực tế.

Để đạt được sự hiểu biết toàn diện này, Khoa học Trí thông minh tích hợp bốn nhóm tri thức khoa học cốt lõi:

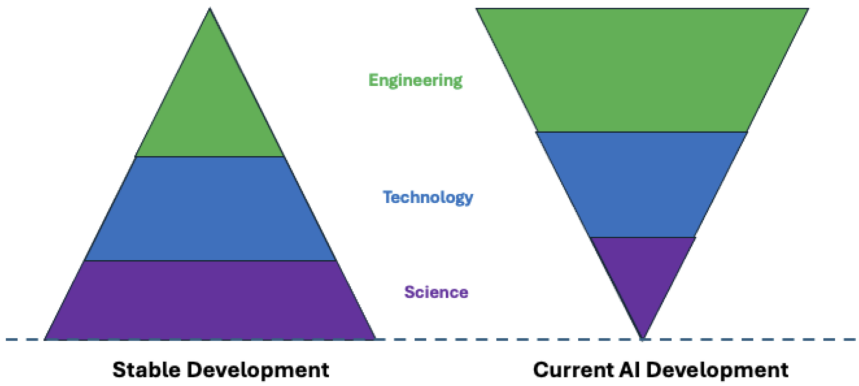
- Tổ chức và kiểm soát hệ thống – Quản lý sự phức tạp trong khi vẫn duy trì ổn định.
- Cơ chế thần kinh và nhận thức – Chuyển đổi dữ liệu thành thông tin và tri thức.
- Hiểu biết theo bối cảnh – Thích ứng với môi trường biến đổi.
- Hệ thống xã hội và giá trị – Điều chỉnh trí thông minh theo ý định của con người.

Mỗi nhóm đóng góp các nguyên lý riêng, từ điều khiển học đến động lực xã hội. Khi kết hợp lại, chúng tạo nên nền tảng cho việc phát triển các hệ thống trí thông minh thực sự, có khả năng hiểu, thích ứng và tương tác có mục đích với môi trường.

Phần này phân tích những nền tảng khoa học đó và cách chúng tương tác, đồng thời làm rõ vai trò của các ngành khoa học hiện có trong sự phát triển của Khoa học Trí thông minh. Việc hiểu rõ các nguyên lý này giúp thu hẹp khoảng cách giữa khả năng của AI hiện tại và hành vi trí thông minh thực sự.

1. Sự cần thiết của nền tảng vững chắc

Các ngành khoa học trưởng thành phát triển theo một quy luật đặc trưng: sự hiểu biết khoa học rộng mở làm nền tảng cho sự phát triển công nghệ có trọng tâm, từ đó dẫn đến các giải pháp kỹ thuật đáng tin cậy. Vật lý đã tiến từ các định luật cơ bản đến những ứng dụng thực tiễn. Sinh học phát triển từ các nguyên lý nền tảng đến công nghệ sinh học. Nhờ chu trình Khoa học - Công nghệ - Kỹ thuật (STE) đã đề cập trước đó, các ngành này tạo ra một kim tự tháp ổn định, nơi nền tảng khoa học vững chắc hỗ trợ những tiến bộ trong công nghệ và kỹ thuật. Hình 3 minh họa sự khác biệt giữa mô hình phát triển ổn định của các ngành khoa học truyền thống và cách tiếp cận thiếu ổn định trong phát triển AI hiện nay.



Hình 3. Mô hình phát triển trong Khoa học. Bên trái: Các ngành khoa học truyền thống phát triển theo quy luật vững chắc, bắt đầu từ nền tảng khoa học rộng, sau đó xây dựng công nghệ và ứng dụng kỹ thuật một cách có hệ thống, tạo nên một cấu trúc ổn định. Bên phải: Sự phát triển của AI hiện nay lại đi theo hướng ngược lại, khi hàng loạt ứng dụng kỹ thuật được mở rộng mà không có nền tảng khoa học đủ vững chắc, dẫn đến sự mất ổn định ngay từ bên trong. Khoa học Trí thông minh hướng đến việc khắc phục vấn đề này bằng cách đặt nền tảng khoa học lên hàng đầu, đảm bảo AI phát triển trên cơ sở hiểu biết thực sự thay vì chỉ dựa vào khả năng công nghệ.

Ngược lại, AI lại phát triển theo một mô hình đối lập. Thay vì dựa trên sự hiểu biết khoa học, quá trình phát triển AI chủ yếu được thúc đẩy bởi năng lực công nghệ. Kết quả là chúng ta đã tạo ra một kim tự tháp ngược, nơi hàng loạt ứng dụng rộng lớn được xây dựng trên một nền tảng khoa học mong manh. Cấu trúc thiếu ổn định này dẫn đến những hệ thống AI:

- Xuất sắc trong việc nhận dạng mẫu nhưng không có hiểu biết thực sự.
- Xử lý lượng dữ liệu khổng lồ mà không nắm bắt được bối cảnh.
- Tối ưu hóa các chỉ số mà không hiểu được hệ quả của chúng.
- Mở rộng năng lực mà không có cơ chế kiểm soát đáng tin cậy.

Khoa học Trí thông minh khắc phục sự bất ổn này bằng cách thiết lập nền tảng khoa học vững chắc trước tiên. Giống như vật lý với các quy luật cơ bản hoặc sinh học với nguyên tắc cốt lõi, Khoa học Trí thông minh cần xây dựng nền tảng khoa học để hỗ trợ sự phát triển bền vững. Điều này đòi hỏi:

- Hiểu các nguyên tắc cơ bản của trí thông minh.
- Xây dựng khung tri thức trước khi tạo ứng dụng.
- Đảm bảo tính thích ứng thông qua các cơ chế đã được kiểm chứng.
- Tích hợp giá trị ngay từ cấp độ nền tảng.

Cách tiếp cận đặt nền tảng khoa học lên hàng đầu sẽ giúp phát triển các hệ thống thực sự thông minh thay vì chỉ mạnh mẽ nhưng hạn chế. Quá trình chuyển đổi từ y học truyền thống sang khoa học sức khỏe hiện đại là một ví dụ lịch sử mạnh mẽ cho sự tiến hóa khoa học tương tự.

2. Một Bài Học Lịch Sử: Từ Y Học Cổ Truyền Đến Khoa Học Sức Khỏe Hiện Đại

Quá trình chuyển đổi từ y học cổ truyền sang khoa học sức khỏe hiện đại mang đến một sự tương đồng đáng chú ý đối với Khoa học Trí thông minh. Các hệ thống y học cổ truyền như Ayurveda[8], Đông y, Vi lượng đồng căn (Homeopathy), Yunani[9] và nhiều hệ thống khác đã phát triển qua hàng thiên niên kỷ dựa trên quan sát thực nghiệm, sử dụng thảo dược, thực phẩm và điều chỉnh lối sống theo mùa và điều kiện địa lý. Tương tự như AI ngày nay, chúng đạt được những kết quả ấn tượng nhờ vào nhận dạng mẫu và kinh nghiệm tích lũy, nhưng lại thiếu sự hiểu biết khoa học về cơ chế nền tảng.

[8] Hệ thống y học cổ truyền có nguồn gốc từ Ấn Độ.

[9] Y học cổ truyền Hy Lạp - Hồi giáo

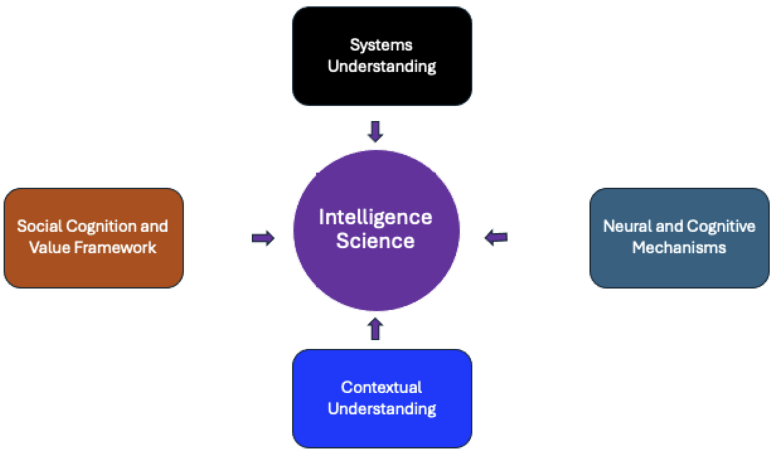
Sự chuyển đổi bắt đầu khi sinh học tiến bộ, giúp khám phá các quá trình tế bào; hóa học làm sáng tỏ cấu trúc hóa học của các hợp chất hữu cơ và cơ chế tác động của thuốc; còn vật lý mở ra những phương pháp chẩn đoán mới dựa trên công nghệ cảm biến. Quan trọng nhất, sự phát triển của công nghệ cảm biến đã tạo ra một vòng lặp phản hồi mạnh mẽ: cảm biến mới giúp quan sát rõ hơn các chức năng bên trong cơ thể, từ đó nâng cao hiểu biết khoa học, dẫn đến việc cải tiến cảm biến, và cuối cùng thúc đẩy sự hiểu biết sâu sắc hơn.

Chính chu trình STE này đã chuyển đổi y học từ một thực hành kinh nghiệm thành một ngành khoa học, và ngày nay đang đưa y học từ mô hình điều trị ngắt quãng sang chăm sóc liên tục. Theo cách tương tự, Khoa học Trí thông minh hướng đến việc tái định hình sự phát triển của AI.

Quá trình chuyển đổi này không loại bỏ tri thức y học cổ truyền mà thay vào đó củng cố nó bằng các nền tảng khoa học. Những hiểu biết truyền thống về sức khỏe toàn diện và sự tương tác phức tạp giữa các yếu tố sinh học đã có một ý nghĩa mới khi được đặt trong bối cảnh khoa học hiện đại. Tương tự, Khoa học Trí thông minh không phủ nhận những gì AI đã đạt được, mà bổ sung vào đó nền tảng khoa học thiết yếu để đạt đến sự hiểu biết thực sự.

Tuy nhiên, tác động của AI đối với xã hội còn sâu rộng và mang tính quyết định hơn nhiều so với y học. Trước hết, AI sẽ tác động mạnh mẽ hơn đến khoa học sức khỏe. Quan trọng hơn, AI không chỉ ảnh hưởng đến từng cá nhân mà còn định hình cách xã hội tư duy, làm việc và phát triển. Điều này khiến nhu cầu về một nền tảng khoa học vững chắc trở nên cấp bách hơn bao giờ hết, thậm chí còn quan trọng hơn cả cuộc cách mạng trong y học.

Với góc nhìn lịch sử này, chúng ta sẽ xem xét các nền tảng khoa học cụ thể mà Khoa học Trí thông minh cần thiết lập. Cũng như y học hiện đại kết hợp nhiều lĩnh vực khoa học khác nhau, Khoa học Trí thông minh dựa trên bốn nhóm tri thức cốt lõi (như minh họa trong Hình 4): tổ chức và kiểm soát hệ thống, cơ chế thần kinh và nhận thức, hiểu biết theo bối cảnh và hệ thống giá trị xã hội. Mỗi nhóm đóng góp những nguyên lý thiết yếu, cùng nhau tạo nên nền tảng cho trí thông minh thực sự.



Hình 4. Nền tảng khoa học của Khoa học Trí thông minh. Chủ đích đóng vai trò cốt lõi, điều hướng và phối hợp bốn nhóm tri thức chính: Tổ chức hệ thống cung cấp khung kiến trúc cho trí thông minh. Cơ chế thần kinh cho phép xử lý và chuyển đổi thông tin. Hiểu biết theo bối cảnh định hướng cách hệ thống tương tác với môi trường. Nhận thức xã hội đảm bảo trí thông minh phù hợp với giá trị con người. Tất cả các yếu tố này hoạt động trong một nền tảng tri thức chung, đồng thời đóng góp vào sự phát triển của nó.

3. Hiểu biết về các hệ thống nền tảng

Cũng như Khoa học Y học[10] khám phá cách cơ thể duy trì sự ổn định thông qua cơ chế cân bằng nội môi (homeostasis), Khoa học Trí thông minh bắt đầu bằng việc tìm hiểu cách sự phức tạp có tổ chức tạo ra hành vi thông minh. Herbert Simon đã chỉ ra rằng hành vi trí thông minh phức tạp không xuất phát từ hỗn loạn mà từ sự tổ chức phân cấp của các hệ thống con ổn định. Tương tự như sinh vật duy trì trạng thái cân bằng trong khi thích ứng với môi trường, các hệ thống thông minh cũng phải cân bằng giữa tổ chức nội bộ và tương tác bên ngoài.

Điều khiển học (cybernetics) cung cấp những cơ chế quan trọng để đạt được sự cân bằng này. Từ công trình của Norbert Wiener đến lý thuyết điều khiển hiện đại, chúng ta đã hiểu cách các hệ thống duy trì sự ổn định thông qua vòng lặp phản hồi và kiểm soát thích ứng. Những nguyên lý này giải thích cách sinh vật duy trì cân bằng nội môi trong khi theo đuổi mục tiêu - một yếu tố cốt lõi để xây dựng các hệ thống thông minh có thể vừa ổn định vừa linh hoạt trong môi trường biến đổi.

AI hiện nay mới chỉ thể hiện một phần bề mặt của những nguyên lý này. Dù mạng nơ-ron tổ chức tri thức theo cấp bậc và mô hình ngôn ngữ lớn tạo ra các biểu diễn trung gian ổn định, chúng vẫn thiếu những yếu tố hệ thống quan trọng của trí thông minh thực sự: Khả năng thích ứng có mục đích, hệ thống tri thức ổn định nhưng có thể mở rộng, và sự liên kết mục tiêu đáng tin cậy trong các bối cảnh thay đổi

Khoa học Trí thông minh tích hợp những nguyên lý nền tảng này một cách toàn diện. Các hệ thống thông minh phải chủ động duy trì sự ổn định trong khi xây dựng tri thức và thích ứng với môi trường, giống như sinh vật duy trì cân bằng nội môi trong quá trình học hỏi. Điều này đòi hỏi:

- Cơ chế giao tiếp tinh vi giữa hệ thống và môi trường
- Nhiều cấp độ kiểm soát phản hồi
- Tổ chức phân cấp của cả tri thức và cấu trúc kiểm soát
- Sự cân bằng linh hoạt giữa ổn định và thích ứng với môi trường bên ngoài

Con người là ví dụ điển hình về cách duy trì hành vi ổn định trong khi vẫn học hỏi và thích ứng. Chúng ta xây dựng tri thức theo phân cấp, từ những khái niệm cơ bản đến sự hiểu biết phức tạp. Chúng ta giữ vững mục tiêu trong khi điều chỉnh theo tình huống mới. Chúng ta cân bằng giữa ổn định và thích ứng thông qua các cơ chế phản hồi tinh vi. Khoa học Trí thông minh hướng đến việc hiểu rõ và ứng dụng những khả năng này vào các hệ thống nhân tạo.

Hiểu biết về hệ thống phức tạp là nền tảng thiết yếu cho các khía cạnh khác của trí thông minh - từ cơ chế thần kinh đến tương tác xã hội. Nó cho thấy hành vi ổn định và có mục tiêu nảy sinh từ sự tổ chức hợp lý của hệ thống phức tạp, đặt nền móng khoa học cho sự phát triển trí thông minh thực sự.

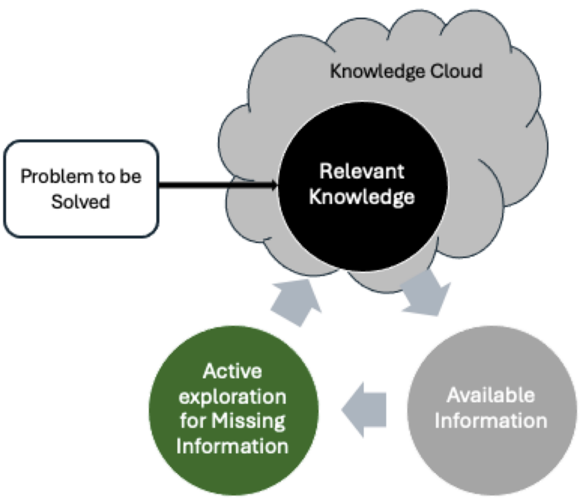
[10] Dịch từ Medical Science, do bối cảnh nói về sự tiến hóa từ thực hành kinh nghiệm (y học cổ truyền) sang nền tảng khoa học (y học hiện đại dựa trên sinh học, hóa học, vật lý, điều khiển học...), nên chúng tôi cho rằng "Khoa học Y học" là thuật ngữ phù hợp.

4. Cơ chế thần kinh và nhận thức

Dựa trên nền tảng hiểu biết về hệ thống, trí thông minh sinh học cho thấy cách quá trình tạo lập và sử dụng tri thức nảy sinh từ sự tổ chức của hệ thần kinh. Tương tự như cách khoa học y học khám phá cách cấu trúc não bộ tạo ra nhận thức, Khoa học Trí thông minh nghiên cứu cách xử lý thông tin phân tán có thể tạo ra sự hiểu biết vững chắc thông qua sự tương tác chủ động với môi trường.

Các kiến trúc thần kinh thể hiện những nguyên lý nền tảng vượt xa khả năng nhận dạng mẫu đơn thuần. Nhiều lớp xử lý giúp chuyển đổi dữ liệu cảm giác thô thành các biểu diễn ngày càng trừu tượng hơn, trong khi các kết nối phản hồi từ các cấp độ cao hơn hướng dẫn quá trình xử lý ở cấp độ thấp hơn. Dòng thông tin hai chiều này cho phép hệ thống xử lý dữ liệu đa phương thức theo ngữ cảnh và đưa ra dự đoán chủ động—những yếu tố thiết yếu của trí thông minh thực sự.

Công trình của Ulric Neisser cho thấy trí thông minh chủ động thu thập thông tin từ nhiều nguồn cảm biến thay vì chỉ xử lý dữ liệu một cách thụ động. Mô hình chu trình tri giác của ông giải thích cách tri thức sẵn có định hướng quá trình tìm kiếm thông tin, thông tin mới làm thay đổi tri thức, và tri thức được cập nhật tiếp tục dẫn dắt quá trình khám phá tiếp theo. Chu trình chủ động này, được minh họa trong Hình 5, là yếu tố then chốt để xây dựng và duy trì sự hiểu biết trong môi trường luôn biến đổi.



Hình 5. Chu trình thu thập thông tin chủ động. Chủ đích định hướng cách con người sử dụng tri thức sẵn có để tìm kiếm thông tin mới. Thông tin thu thập được tiếp tục bổ sung và cập nhật tri thức, tạo thành một vòng lặp liên tục giúp mở rộng và củng cố sự hiểu biết.

Chu trình này hoạt động liên tục trong quá trình giải quyết vấn đề thực tế.

Hãy lấy ví dụ về một bác sĩ chẩn đoán bệnh: tri thức y khoa giúp họ xác định triệu chứng cần chú ý và xét nghiệm cần thực hiện (tri thức sẵn có định hướng quá trình tìm kiếm thông tin). Kết quả xét nghiệm và quan sát mới làm thay đổi hiểu biết của bác sĩ về tình trạng bệnh nhân (thông tin mới điều chỉnh tri thức), từ đó dẫn đến các bước kiểm tra tiếp theo hoặc quyết định điều trị. Chủ đích – chẩn đoán chính xác và điều trị hiệu quả – là yếu tố chi phối toàn bộ quá trình này.

Khoa học nhận thức cho thấy trí thông minh không chỉ tiếp nhận dữ liệu mà còn kết hợp nhiều luồng thông tin để tạo thành sự hiểu biết mạch lạc. Khi nhận diện khuôn mặt, hiểu ngôn ngữ hay giải quyết vấn đề, não bộ con người đồng thời sử dụng dữ liệu hiện tại và tri thức đã lưu trữ từ nhiều nguồn – hình ảnh, âm thanh, cảm giác – để xây dựng nhận thức toàn diện, đa chiều.

AI ngày nay đã áp dụng một số nguyên lý này thông qua mạng nơ-ron và học sâu, nhưng vẫn còn thiếu những khả năng cốt lõi mà trí thông minh sinh học thể hiện:

- Chủ động tìm kiếm thông tin dựa trên tri thức hiện có
- Duy trì tri thức ổn định nhưng có thể linh hoạt điều chỉnh
- Ứng dụng kiến thức từ một lĩnh vực sang lĩnh vực khác
- Không ngừng thích nghi mà vẫn đảm bảo tính đáng tin cậy

Khoa học Trí thông minh cần tích hợp những nguyên lý sâu sắc hơn để đưa AI vượt ra khỏi nhận dạng mẫu, hướng đến các hệ thống có thể:

- Chủ động xây dựng và mở rộng tri thức
- Tìm kiếm và khai thác thông tin theo cách có định hướng
- Điều chỉnh cách xử lý dữ liệu đa phương thức dựa trên ngữ cảnh và mục tiêu
- Duy trì tính nhất quán trong khi vẫn học hỏi và thích nghi liên tục

Những nền tảng thần kinh và nhận thức này cũng là cơ sở cho khả năng hiểu biết theo bối cảnh, nơi tri thức không chỉ phản ứng với môi trường mà còn chủ động định hướng cách hệ thống tương tác với thế giới.

5. Hiểu bối cảnh

Dựa trên nền tảng thần kinh và nhận thức, trí thông minh phải có khả năng hoạt động hiệu quả trong môi trường động, nơi thông tin liên tục thay đổi qua nhiều kênh khác nhau. Cũng như sự hiểu biết về chức năng não bộ đã giúp con người nhận thức rõ hơn về sự tương tác với môi trường, Khoa học Trí thông minh nhấn mạnh rằng trí thông minh thực sự không chỉ dừng lại ở việc thu thập dữ liệu đa phương thức mà còn phải hiểu rõ bối cảnh của môi trường xung quanh.

Tâm lý học môi trường và nhận thức theo ngữ cảnh (situated cognition) cho thấy cách các hệ thống sinh học vượt qua thách thức này. Khi khám phá một môi trường mới, con người không chỉ tiếp nhận dữ liệu cảm giác một cách thụ động mà còn chủ động tìm kiếm thông tin quan trọng dựa trên tri thức và mục tiêu hiện có. Điều này mở rộng chu trình tri giác của Neisser: tri thức sẵn có định hướng việc tìm kiếm thông tin, trong khi thông tin mới liên tục điều chỉnh và mở rộng sự hiểu biết, tạo thành một quá trình học hỏi linh hoạt.

Hãy xem cách con người điều hướng trong một thành phố xa lạ: chúng ta kết hợp nhiều nguồn thông tin như:

- Nhận diện các cột mốc và biển báo bằng thị giác
- Hiểu không gian qua bản đồ và định hướng di chuyển
- Nhận biết âm thanh môi trường để đánh giá tình huống
- Dựa vào kiến thức trước đó về cấu trúc đô thị
- Điều chỉnh hướng đi theo mục tiêu thực tế

Các hệ thống AI hiện nay, dù sở hữu cảm biến tiên tiến và khả năng nhận dạng mẫu, vẫn gặp khó khăn trong việc hiểu bối cảnh thực tế. Xe tự hành có thể lập bản đồ chính xác môi trường xung quanh bằng nhiều cảm biến (LIDAR, radar, camera) nhưng lại không nhận ra những tín hiệu tình huống quan trọng mà con người dễ dàng nhận biết. Tương tự, robot xã hội có thể nhận diện biểu cảm khuôn mặt nhưng lại bỏ sót những tín hiệu ngữ cảnh tinh tế giúp định hình tương tác giữa con người với nhau. Những hạn chế này xuất phát từ việc xử lý dữ liệu môi trường mà không có nhận thức tình huống thực sự.

Khoa học Trí thông minh giải quyết vấn đề này bằng cách thúc đẩy sự tương tác chủ động với môi trường. Hệ thống thông minh không chỉ thu thập dữ liệu đa phương thức mà còn phải hiểu mức độ liên quan của thông tin trong từng bối cảnh thông qua:

- Tích hợp cảm biến động, điều chỉnh theo ngữ cảnh
- Thích nghi theo thời gian thực với những thay đổi của môi trường
- Thu thập thông tin theo mục tiêu cụ thể
- Xây dựng và cập nhật tri thức từ nhiều nguồn khác nhau
- Liên tục điều chỉnh hành vi theo ý định và mục tiêu chung

Hiểu bối cảnh đóng vai trò cầu nối quan trọng giữa các cơ chế nhận thức và tổ chức hệ thống. Nó cho thấy cách hành vi thông minh thực sự không chỉ xuất phát từ khả năng xử lý dữ liệu mà còn từ sự tương tác hợp lý với môi trường, được định hướng bởi chủ đích rõ ràng. Đây là yếu tố cốt lõi trong hệ khung của Khoa học Trí thông minh.

6. Nhận thức xã hội và khung giá trị

Trí thông minh ở cấp độ cao nhất xuất hiện thông qua tương tác xã hội và hành vi dựa trên giá trị. Nếu các cơ chế thần kinh xử lý thông tin và hiểu bối cảnh giúp hệ thống tương tác với môi trường, thì nhận thức xã hội quyết định cách trí thông minh vận hành trong xã hội loài người và phù hợp với hệ thống giá trị chung.

Quá trình phát triển của trẻ em minh họa rõ ràng khía cạnh quan trọng này. Thông qua tương tác xã hội liên tục, trẻ dần hiểu ngầm về các quy tắc ứng xử, nhận biết hành vi phù hợp và tiếp thu các ranh giới đạo đức. Học hỏi xã hội diễn ra một cách tự nhiên, trở thành khuôn mẫu tư duy ăn sâu vào tiềm thức thay vì phản ứng có chủ đích. Quá trình này hình thành một ý thức xã hội, giúp định hướng hành vi mà không cần phải cân nhắc có ý thức—một mô hình quan trọng cho cách các hệ thống thông minh nên tích hợp nhận thức xã hội và hành vi đạo đức.

Hệ thống AI hiện tại cho thấy những hạn chế rõ ràng của cách tiếp cận thuần túy dựa trên xử lý dữ liệu. Thuật toán mạng xã hội nhận diện mẫu nhưng không hiểu hệ quả xã hội, dẫn đến tác động tiêu cực thay vì mang lại lợi ích. Các mô hình ngôn ngữ nhận biết ngữ cảnh xã hội nhưng không thực sự hiểu các mối quan hệ và trách nhiệm. Hệ thống đề xuất nội dung tối ưu hóa chỉ số nhưng bỏ qua ảnh hưởng lâu dài đến xã hội. Những hạn chế này xuất phát từ việc coi tương tác xã hội chỉ như một bài toán xử lý dữ liệu, thay vì xem đó là một quá trình nhận thức xã hội thực sự.

Khoa học Trí thông minh giải quyết những hạn chế này bằng cách tích hợp nhận thức xã hội và khung giá trị ngay từ nền tảng. Điều này có nghĩa là xây dựng sự hiểu biết xã hội thông qua học hỏi tương tác, phát triển phản ứng đạo đức tự động và tạo ra khuôn mẫu hành vi phù hợp với giá trị con người. Giống như ý thức đạo đức của con người hoạt động như một cơ chế hướng dẫn tự nhiên, các khả năng này cần được tích hợp vào hành vi hệ thống thay vì chỉ là những ràng buộc bên ngoài.

Sự tích hợp này đòi hỏi một sự kết nối sâu sắc với kiến trúc nhận thức và hiểu bối cảnh. Nhận thức xã hội cần phát triển thông qua tương tác nhưng vẫn đảm bảo hệ thống duy trì sự ổn định. Kết quả là các hệ thống thông minh có thể tự nhiên đồng bộ với giá trị con người, đồng thời thích ứng linh hoạt với các bối cảnh xã hội, trở thành những đối tác có ích trong xã hội loài người.

7. Khung tích hợp

Cũng như y học hiện đại kết hợp nhiều ngành khoa học để hiểu và điều trị con người một cách toàn diện, Khoa học Trí thông minh đòi hỏi sự tích hợp chặt chẽ giữa các yếu tố nền tảng. Bốn nhóm tri thức, như minh họa trong Hình 4 và đã được đề cập, phải hoạt động hài hòa như trong các hệ sinh học, nơi hệ tế bào, cơ quan và thần kinh kết hợp để tạo ra những khả năng vượt xa từng thành phần riêng lẻ.

Các nguyên lý hệ thống tạo nên nền tảng kiến trúc, tương tự như cách hệ thống điều hòa của cơ thể duy trì sự ổn định. Cấu trúc phân cấp cho phép quá trình xây dựng tri thức diễn ra bền vững mà vẫn đảm bảo khả năng thích ứng, giống như cách các hệ sinh học cân bằng giữa cân bằng nội môi và sự điều chỉnh linh hoạt. Trong khuôn khổ này, cơ chế thần kinh chuyển đổi dữ liệu thành tri thức, hiểu bối cảnh định hướng quá trình học hỏi chủ động, và nhận thức xã hội đảm bảo sự phù hợp với giá trị—tương tự như cách sinh học, tri giác và hành vi xã hội của con người phối hợp để duy trì sức khỏe.

Sự tích hợp này thể hiện trong trí thông minh con người qua các vòng lặp phản hồi liên tục. Khi đối mặt với những tình huống xã hội phức tạp, não bộ kết hợp liền mạch nhận thức bối cảnh, tri thức đã lưu trữ và hệ thống giá trị mà vẫn duy trì sự ổn định. Khoa học Trí thông minh phải tạo ra những kiến trúc tương tự, trong đó quá trình xây dựng tri thức diễn ra trên nhiều phương thức, học hỏi chủ động phản ứng theo bối cảnh, và hành vi tự nhiên điều chỉnh theo giá trị—tất cả được định hướng bởi một chủ đích rõ ràng.

Việc kiểm chứng quá trình tích hợp này đòi hỏi những khung đánh giá mới, giống như cách y học đã chuyển từ đo lường các triệu chứng riêng lẻ sang đánh giá sức khỏe toàn hệ thống. Thay vì chỉ đo lường từng năng lực riêng lẻ, chúng ta cần đánh giá sự phối hợp của chúng: quá trình xây dựng tri thức có duy trì sự ổn định hay không, hiểu bối cảnh có hướng dẫn việc học hỏi hiệu quả không, và hệ thống giá trị có định hình hành vi một cách nhất quán không.

Thông qua sự tích hợp toàn diện này, chúng ta có thể tạo ra các hệ thống nơi chủ đích định hướng hành vi, tri thức được xây dựng có mục tiêu, và khả năng thích ứng giúp duy trì sự hài hòa với giá trị con người—đó chính là bản chất của trí thông minh thực sự.

8. Hướng đi tiếp theo: Kết nối các nền tảng của Khoa học Trí thông minh

Khoa học Trí thông minh đánh dấu một bước chuyển quan trọng trong sự phát triển của trí thông minh nhân tạo. Cũng như y học đã tiến hóa từ thực hành kinh nghiệm sang một ngành khoa học thực thụ, chúng ta đang thiết lập nền tảng cho hành vi trí thông minh thực sự. Bằng cách tích hợp tổ chức hệ thống, cơ chế thần kinh, hiểu bối cảnh và nhận thức xã hội, chúng ta đang định hình lại cách AI được thiết kế và phát triển.

Những nghiên cứu nền tảng chỉ ra rằng trí thông minh không phải là một khả năng cố định của từng phần riêng lẻ, mà là kết quả của sự phối hợp có tổ chức trong một hệ thống phức tạp, nơi các thành phần liên kết chặt chẽ với nhau để tạo ra sự hiểu biết và thích ứng linh hoạt[3]. Giống như các hệ sinh học, trí thông minh đòi hỏi:

[3]Câu này chúng tôi giải thích dài ra để dễ hiểu hơn, câu gốc tác giả viết: "The scientific foundations we've examined reveal intelligence as an emergent property of properly organized complexity."

- Xây dựng tri thức theo định hướng rõ ràng
- Thích ứng mà vẫn duy trì sự ổn định
- Tự nhiên hài hòa với giá trị con người và bối cảnh xã hội
- Tương tác chủ động với môi trường

AI hiện tại đã đạt được những bước tiến đáng kể trong nhận dạng mẫu và học máy, nhưng Khoa học Trí thông minh đưa sự phát triển này lên một tầm cao mới. Bằng cách xây dựng trên những thành tựu sẵn có và củng cố chúng bằng nền tảng khoa học, chúng ta có thể tạo ra những hệ thống chủ động xây dựng tri thức, hiểu bối cảnh và tương tác có mục đích với môi trường—tất cả đều được dẫn dắt bởi chủ đích rõ ràng và giá trị con người.

Phần tiếp theo sẽ kết nối những nền tảng khoa học này với ứng dụng thực tiễn. Chúng ta sẽ khám phá cách chu trình Khoa học - Công nghệ - Kỹ thuật (STE) định hướng sự phát triển của kiến trúc và phương pháp luận, giúp duy trì tính chặt chẽ về mặt khoa học đồng thời tạo ra các hệ thống khả thi trong thực tế. Quá trình chuyển đổi từ khoa học sang ứng dụng sẽ làm rõ cách các nguyên lý của Khoa học Trí thông minh trở thành những hệ thống hoạt động thực tế.

Nền tảng khoa học đã được thiết lập. Giờ đây, chúng ta bước vào giai đoạn xây dựng có hệ thống để tạo ra những hệ thống trí thông minh thực sự, giúp mở rộng tiềm năng con người.

PHẦN

III

Sự phát triển của Khoa học Trí thông minh: Chống Chủ nghĩa Thực dân Nhận thức bằng Tiến bộ Khoa học Toàn Cầu

Khoa học Trí thông minh phải trở thành nền tảng cho trí thông minh thực sự trong các hệ thống nhân tạo. Loạt bài này khám phá quá trình phát triển của Khoa học Trí thông minh, từ các nguyên lý khoa học đến ứng dụng thực tiễn trong việc xây dựng hệ thống trí thông minh. Bài viết cuối cùng này sẽ làm rõ cách chu trình Khoa học - Công nghệ - Kỹ thuật (STE) có thể chuyển đổi các nguyên lý lý thuyết thành ứng dụng thực tế, đồng thời đảm bảo sự phát triển công bằng trên phạm vi toàn cầu.

1. Giới thiệu

Khoa học Trí thông minh đang đứng trước một bước ngoặt quan trọng trong quá trình phát triển của trí thông minh nhân tạo. Những bài viết trước đã làm rõ lý do AI cần Khoa học Trí thông minh làm nền tảng và trình bày các nguyên lý khoa học cốt lõi. Giờ đây, thách thức lớn nhất là chuyển hóa những nguyên lý này thành ứng dụng thực tiễn—một nhiệm vụ đòi hỏi cả sự chặt chẽ về mặt kỹ thuật và sự hợp tác toàn cầu.

Sự phát triển của AI hiện nay mang đến cả cơ hội lẫn rủi ro chưa từng có. Khi các hệ thống AI ngày càng trở nên tinh vi, chúng không chỉ hỗ trợ con người mà còn tác động đến cách xã hội tư duy, học tập và phát triển. Tuy nhiên, sự chuyển đổi này đang diễn ra mà không có một khung khoa học hệ thống như các cuộc cách mạng công nghệ trước đây. Kết quả là một công nghệ phát triển nhanh chóng nhưng lại có xu hướng khoét sâu sự phân hóa xã hội thay vì thu hẹp khoảng cách.

Chu trình Khoa học - Công nghệ - Kỹ thuật (STE) mang đến một lộ trình khoa học chặt chẽ cho sự phát triển AI. Khung phương pháp này đã giúp các lĩnh vực như vật lý và y học chuyển từ thực hành kinh nghiệm sang một ngành khoa học có hệ thống, và giờ đây, nó có thể đảm bảo AI phát triển theo hướng nâng cao năng lực con người thay vì làm suy giảm nó. Tuy nhiên, khác với những cuộc cách mạng công nghệ trước, việc triển khai Khoa học Trí thông minh cần có sự tham gia toàn cầu ngay từ đầu.

Sự cấp bách của quá trình chuyển đổi này không thể bị xem nhẹ. AI đang tập trung một mức độ quyền lực nhận thức chưa từng có vào tay một số tổ chức và quốc gia. Điều này tạo ra sự phụ thuộc sâu sắc hơn cả những bất bình đẳng về kinh tế hay công nghệ trước đây, khi nó không chỉ kiểm soát tài nguyên mà còn ảnh hưởng trực tiếp đến cách xã hội tiếp nhận, xử lý thông tin và ra quyết định. Nếu không có sự can thiệp kịp thời, khoảng cách số sẽ dần trở thành một khoảng cách nhận thức không thể đảo ngược.

Tuy nhiên, trong thách thức này cũng tồn tại một cơ hội đặc biệt. Bằng cách lấy Khoa học Trí thông minh làm nền tảng cho sự phát triển AI, chúng ta có thể hướng đến một tương lai nơi trí thông minh nhân tạo trở thành động lực thúc đẩy tiến bộ toàn cầu thay vì làm gia tăng sự phân hóa. Điều này đòi hỏi hành động ngay lập tức trên ba phương diện: xây dựng năng lực khoa học phân tán, thiết lập khung phát triển toàn diện và đảm bảo quyền tiếp cận công bằng với các năng lực cốt lõi.

Bài viết này sẽ phác thảo một lộ trình thực tế cho sự chuyển đổi này, làm rõ cách chu trình STE có thể định hướng sự phát triển AI đồng thời thúc đẩy công bằng toàn cầu. Chúng ta sẽ phân tích những thách thức hiện tại, đề xuất chiến lược triển khai và đưa ra các bước cụ thể để xây dựng một cộng đồng Khoa học Trí thông minh mang tính toàn cầu. Cánh cửa để thiết lập những nền tảng này vẫn còn mở, nhưng đang dần khép lại khi các cấu trúc quyền lực hiện có ngày càng được củng cố. Chúng ta sẽ bắt đầu bằng việc xem xét những thách thức toàn cầu hiện nay, sau đó làm rõ cách chu trình STE giải quyết các vấn đề này, trước khi đề xuất một chiến lược triển khai cụ thể và lộ trình thực hiện trong thời gian tới.

2. Những Thách Thức Toàn Cầu Hiện Nay: Khoảng cách nhận thức ngày càng gia tăng

Bối cảnh AI toàn cầu đang dẫn đến một sự tập trung quyền lực nhận thức chưa từng có, có nguy cơ định hình lại xã hội loài người theo những cách căn bản. Khác với các cuộc cách mạng công nghệ trước đây chủ yếu tác động đến tài nguyên vật chất và thương mại, AI ảnh hưởng trực tiếp đến cách xã hội tư duy, học hỏi và phát triển. Sự chuyển đổi này thể hiện qua hai thách thức đan xen: sự phân cực xã hội ngày càng sâu sắc và bất bình đẳng công nghệ toàn cầu ngày càng mở rộng.

2.1. Cuộc Khủng Hoảng Phân Cực

Các hệ thống AI, đặc biệt là những hệ thống vận hành mạng xã hội và phân phối nội dung, đang trở thành tác nhân mạnh mẽ thúc đẩy sự chia rẽ xã hội.

Những hệ thống này được tối ưu hóa để tăng mức độ tương tác thay vì thúc đẩy sự thấu hiểu, làm trầm trọng thêm sự phân cực:

- Thông tin ngày càng bị lọc qua các thuật toán ưu tiên nội dung gây phản ứng mạnh thay vì nội dung kích thích tư duy sâu sắc.
- Cộng đồng bị phân tách thành các "buồng dội âm"cô lập, làm suy giảm sự hiểu biết chung và phá vỡ tính gắn kết xã hội.
- Các quá trình ra quyết định, từ lựa chọn cá nhân đến chính sách công, ngày càng dễ bị thao túng bởi nội dung được nhắm mục tiêu có chủ đích.
- Sự giao lưu văn hóa và trao đổi tri thức bị thu hẹp khi AI tối ưu hóa tương tác địa phương thay vì khuyến khích sự hiểu biết toàn cầu.

Sự khuếch đại công nghệ của chia rẽ xã hội không chỉ là một vấn đề truyền thông – nó đe dọa đến năng lực cốt lõi của xã hội trong việc xây dựng sự hiểu biết chung và cùng nhau giải quyết các thách thức phức tạp.

2.2. Trật tự quyền lực toàn cầu

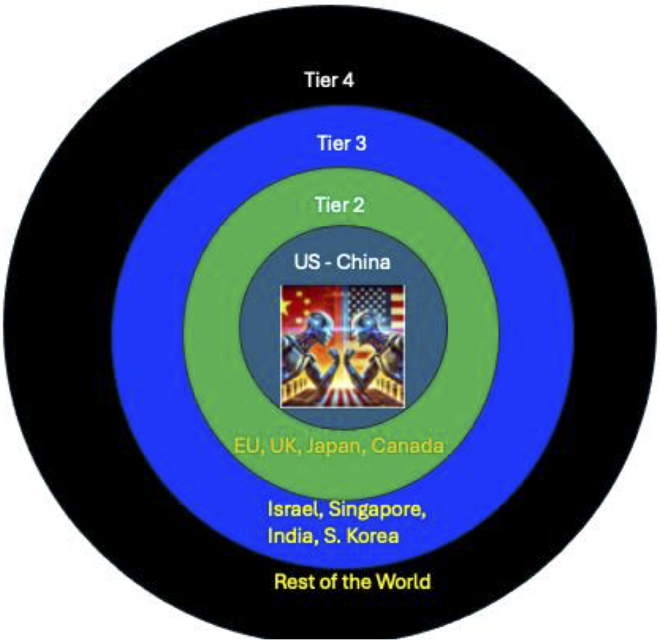
Sự phát triển và triển khai công nghệ AI đã tạo ra một hệ thống phân cấp bốn tầng trên phạm vi toàn cầu, không chỉ dựa trên năng lực công nghệ mà còn ảnh hưởng đến cách các quốc gia định hình sự phát triển của xã hội.

- **Tầng 1: Siêu cường AI** – Hoa Kỳ và Trung Quốc thống trị bối cảnh AI toàn cầu theo hai chiến lược khác nhau nhưng có sức ảnh hưởng tương đương. Hoa Kỳ dẫn đầu nhờ sự kết hợp chưa từng có giữa đầu tư nghiên cứu của chính phủ và đổi mới công nghệ từ khu vực tư nhân, kiểm soát các nền tảng cốt lõi từ công nghệ bán dẫn đến các mô hình AI nền tảng. Trung Quốc thách thức vị thế này bằng mô hình phối hợp chặt chẽ giữa nhà nước và doanh nghiệp, thể hiện qua tốc độ triển khai và mở rộng nhanh chóng của các ứng dụng AI trong hạ tầng số của quốc gia.
- **Tầng 2: Các nền kinh tế tiên tiến** – Các quốc gia như Liên minh châu Âu, Vương quốc Anh, Nhật Bản và Canada, dù có trình độ công nghệ cao, ngày càng phụ thuộc vào cơ sở hạ tầng của các siêu cường AI. Dù vẫn duy trì năng lực nghiên cứu mạnh mẽ và sở hữu nguồn nhân lực kỹ thuật dồi dào, họ gặp khó khăn trong việc cạnh tranh về quy mô và sức mạnh tổng hợp so với các quốc gia dẫn đầu.
- **Tầng 3: Các cường quốc AI mới nổi** – Các quốc gia như Israel, Hàn Quốc, Singapore và Ấn Độ đang phát triển mạnh mẽ trong một số lĩnh vực AI cụ thể và xây dựng các hệ sinh thái công nghệ nội địa. Tuy nhiên, sự phụ thuộc vào công nghệ nền tảng từ các siêu cường AI hạn chế khả năng tự chủ của họ trong việc định hình sự phát triển AI theo hướng riêng.
- **Tầng 4: Các quốc gia phụ thuộc vào công nghệ** – Phần lớn các quốc gia trên thế giới đối mặt với sự phụ thuộc sâu sắc hơn cả chủ nghĩa thực dân truyền thống. Không có quyền tiếp cận các tài nguyên tính toán khổng lồ, bộ dữ liệu quy mô lớn và chuyên môn kỹ thuật tiên tiến, họ có nguy cơ

bị đẩy vào vị thế người tiêu dùng thay vì người sáng tạo trong kỷ nguyên AI.

Sự bất bình đẳng này không chỉ là một vấn đề về năng lực công nghệ, mà còn ảnh hưởng đến cách các xã hội xử lý thông tin, đưa ra quyết định và định hình tương lai của mình. Nếu không có sự can thiệp kịp thời, khoảng cách số ngày nay có thể trở thành một khoảng cách nhận thức không thể đảo ngược, củng cố sự thống trị của một số ít quốc gia và doanh nghiệp đối với tương lai AI toàn cầu.

Hình 6 minh họa cấu trúc bốn tầng trong sự phát triển AI toàn cầu, làm rõ mức độ tập trung quyền lực nhận thức chưa từng có và sự gia tăng khoảng cách toàn cầu.



Hình 6. Phân bố quyền lực AI toàn cầu. Cấu trúc bốn tầng trong phát triển AI toàn cầu phản ánh sự tập trung năng lực và mức độ phụ thuộc giữa các quốc gia. Từ thế độc quyền song phương giữa Hoa Kỳ và Trung Quốc cho đến các quốc gia phụ thuộc vào công nghệ ở tầng ngoài cùng, sơ đồ này minh họa sự tập trung quyền lực nhận thức chưa từng có và khoảng cách ngày càng lớn giữa các quốc gia trên thế giới.

3. Sự hội tụ của các thách thức

Hai thách thức – sự phân cực xã hội và bất bình đẳng công nghệ toàn cầu – không chỉ diễn ra song song mà còn tác động lẫn nhau theo những cách nguy hiểm. Các hệ thống AI thiếu sự đa dạng về văn hóa có xu hướng củng cố định kiến và duy trì các cấu trúc quyền lực hiện có. Đồng thời, khi AI chủ yếu được phát triển bởi một số trung tâm quyền lực, những góc nhìn cần thiết để giải quyết vấn đề phân cực xã hội lại bị loại bỏ khỏi quá trình thiết kế và triển khai công nghệ.

Sự hội tụ này tạo ra một thời điểm mang tính quyết định để can thiệp. Khi AI tiếp tục phát triển với tốc độ chưa từng có, những mô hình phát triển được thiết lập ngay hôm nay sẽ định hình tương lai công nghệ trong nhiều thế hệ tới. Nếu quyền lực nhận thức tiếp tục tập trung vào tay một số ít chủ thể, chúng ta có nguy cơ tạo ra những rạn nứt toàn cầu sâu sắc hơn bất kỳ cuộc cách mạng công nghệ nào trước đây.

Tuy nhiên, khủng hoảng này cũng mang đến một cơ hội chưa từng có. Bằng cách đưa Khoa học Trí thông minh trở thành nền tảng chung cho sự phát triển AI toàn cầu, chúng ta có thể giải quyết đồng thời cả hai thách thức. Việc áp dụng có hệ thống các nguyên lý khoa học có thể định hướng AI theo hướng thúc đẩy sự thấu hiểu thay vì chia rẽ, trong khi các mô hình phát triển phân tán giúp đảm bảo công nghệ phục vụ lợi ích chung thay vì củng cố quyền lực cho số ít.

4. Khung STE: Lộ trình khoa học cho sự phát triển AI bình đẳng

Để AI thực sự trở thành động lực thúc đẩy tiến bộ toàn cầu, không chỉ cần các nguyên lý lý thuyết mà còn phải có một khung phát triển bài bản, vừa định hướng công nghệ vừa đảm bảo sự tham gia bình đẳng. Chu trình Khoa học - Công nghệ - Kỹ thuật (STE), vốn đã giúp nhiều lĩnh vực chuyển từ thực hành kinh nghiệm sang một ngành khoa học có hệ thống, chính là giải pháp phù hợp. Tuy nhiên, để áp dụng vào AI, chu trình này cần được mở rộng, tích hợp chặt chẽ các giá trị xã hội song song với tiến bộ kỹ thuật ở từng giai đoạn.

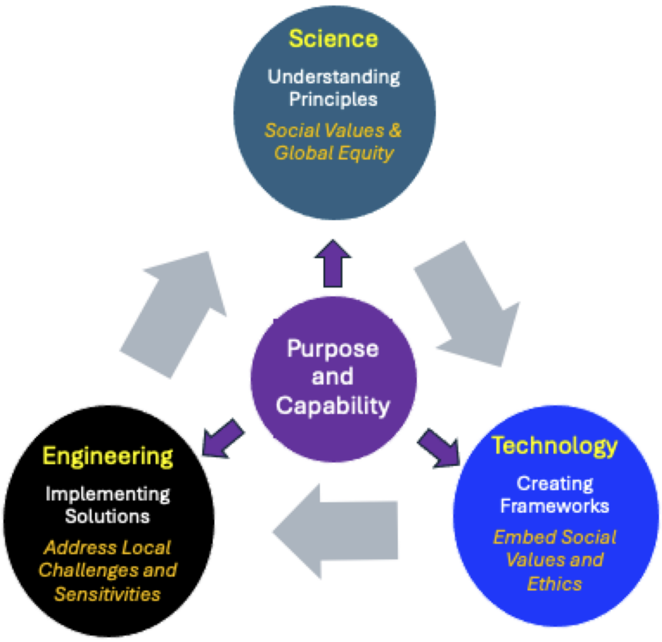
Hình 7 minh họa cách chu trình STE mở rộng giúp lồng ghép giá trị xã hội và bình đẳng toàn cầu vào từng bước, tạo ra một mô hình phát triển toàn diện, vượt xa những khung kỹ thuật truyền thống.

Khác với các mô hình phát triển công nghệ trước đây, chu trình STE mở rộng này tạo ra một vòng lặp liên tục, trong đó hiểu biết khoa học, ứng dụng thực tiễn và tác động xã hội không ngừng bổ sung và củng cố lẫn nhau. Điều này đảm bảo rằng khi AI ngày càng mạnh mẽ, chúng ta cũng đồng thời giải quyết các thách thức như phân cực xã hội và sự tập trung công nghệ, những yếu tố đang đe dọa sự ổn định toàn cầu.

Chu trình bắt đầu với nền tảng khoa học, kết hợp lý thuyết hệ thống, khoa học nhận thức và điều khiển học với sự hiểu biết sâu sắc về bối cảnh xã hội và giá trị con người. Đây không chỉ là nghiên cứu AI truyền thống, mà còn mở rộng sang cách trí thông minh vận hành trong hệ thống văn hóa và giá trị. Giống như y học hiện đại đã vượt ra khỏi nghiên cứu sinh học để xem xét cả các yếu tố xã hội tác động đến sức khỏe, Khoa học Trí thông minh cũng cần tích hợp cả kỹ thuật và yếu tố con người ngay từ giai đoạn đầu.

Từ nền tảng khoa học này, chu trình STE tiến tới giai đoạn chuyển hóa công nghệ, nơi các nguyên lý lý thuyết được áp dụng vào thực tiễn để xây dựng hệ thống AI. Đây là giai đoạn then chốt, biến những hiểu biết trừu tượng thành mô hình thiết kế có khả năng tạo ra tác động tích cực một cách tự nhiên.

Thay vì phát triển các hệ thống cần ràng buộc đạo đức bên ngoài để tránh gây hại, chúng ta có thể thiết kế ngay từ đầu những kiến trúc AI hướng đến lợi ích xã hội. Ví dụ, thay vì liên tục điều chỉnh thuật toán đề xuất để giảm thiểu sự phân cực, chúng ta có thể thiết kế ngay từ đầu các hệ thống khuyến khích tương tác ý nghĩa và thúc đẩy sự hiểu biết lẫn nhau.



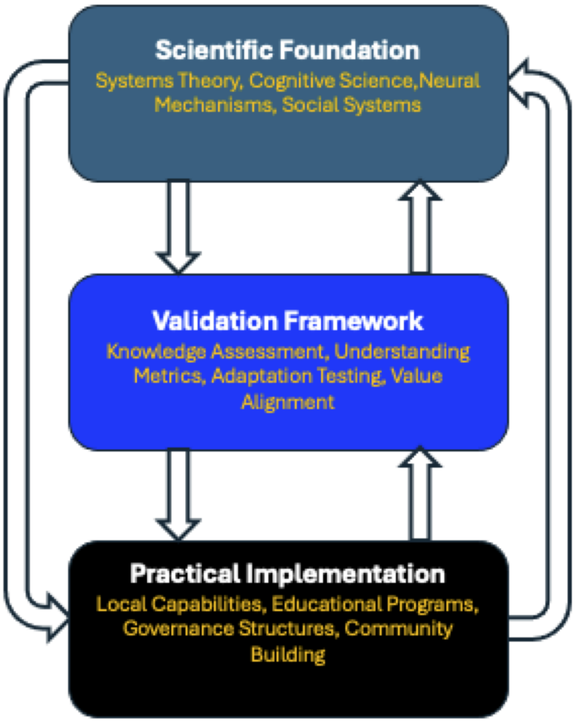
Hình 7. Chu trình STE mở rộng cho Khoa học Trí thông minh. Chu trình Khoa học - Công nghệ - Kỹ thuật (STE) tích hợp các giá trị xã hội và bình đẳng toàn cầu vào từng giai đoạn phát triển. Các lớp bên ngoài cho thấy cách hợp tác quốc tế, quyền tiếp cận bình đẳng và năng lực địa phương củng cố quá trình phát triển kỹ thuật cốt lõi, tất cả đều được định hướng bởi mục tiêu rõ ràng về năng lực và giá trị.

5. Triển khai Khoa học Trí thông minh: Kết nối toàn cầu, thực thi địa phương

Việc đưa Khoa học Trí thông minh từ lý thuyết vào thực tiễn toàn cầu đòi hỏi một chiến lược triển khai bài bản, có khả năng kết nối các nguồn lực và nhu cầu đa dạng giữa các khu vực. Quá trình này không thể chỉ dừng lại ở mô hình chuyển giao công nghệ truyền thống mà cần xây dựng một hệ thống phát triển phân tán thực sự, đồng thời đảm bảo tính khoa học chặt chẽ và trách nhiệm xã hội. Hình 8 minh họa cách chiến lược triển khai tạo ra một vòng tuần hoàn liên tục giữa hiểu biết khoa học, phương pháp kiểm chứng và ứng dụng thực tiễn, tất cả đều hướng đến những mục tiêu rõ ràng về năng lực và định hướng phát triển.

Trọng tâm của sự chuyển đổi này là Quỹ Khoa học Trí thông minh Quốc tế (International Intelligence Science Foundation), đóng vai trò là trung tâm điều phối thay vì một cơ quan kiểm soát. Quỹ này kết nối mạng lưới các Trung tâm Xuất sắc Khu vực[11], nơi mỗi trung tâm đóng góp những góc nhìn và thế mạnh riêng vào khung phát triển chung. Khác với các sáng kiến khoa học quốc tế trước đây vốn tập trung nguồn lực vào một số ít tổ chức hàng đầu, mô hình phân tán này giúp đảm bảo ngay từ đầu rằng sự phát triển sẽ phản ánh đúng nhu cầu và đặc thù của từng khu vực.

[11] Regional Centers of Excellence - Các Trung tâm Xuất sắc Khu vực là những cơ sở nghiên cứu và ứng dụng đặt tại các vùng lớn, bao gồm nhiều quốc gia nhưng vẫn nằm trong một khu vực địa lý nhất định. Các trung tâm này kết nối nghiên cứu khoa học với triển khai thực tiễn, phù hợp với đặc điểm văn hóa, kinh tế và công nghệ của khu vực, đồng thời đóng góp vào sự phát triển chung trên phạm vi quốc tế.



Hình 8. Chu trình triển khai Khoa học Trí thông minh. Sự tương tác liên tục giữa nền tảng khoa học, khung kiểm chứng và triển khai thực tiễn tạo thành một chu trình tự củng cố. Cơ chế này đảm bảo quá trình phát triển luôn dựa trên cơ sở khoa học vững chắc, đồng thời có khả năng thích ứng với nhu cầu và trải nghiệm thực tế.

Chiến lược triển khai được thực hiện trên ba cấp độ quan trọng—phát triển thể chế, xây dựng năng lực và khung quản trị—mỗi cấp độ hỗ trợ lẫn nhau thông qua phản hồi liên tục và điều chỉnh thích ứng.

Khung thể chế bắt đầu với việc thành lập các Trung tâm Xuất sắc Khu vực, được đặt tại những khu vực có bối cảnh văn hóa và kinh tế khác nhau. Những trung tâm này không chỉ là các viện nghiên cứu truyền thống mà còn là những trung tâm năng động, nơi nghiên cứu khoa học kết nối trực tiếp với ứng dụng thực tế. Ở châu Phi, các trung tâm có thể tập trung vào phát triển hệ thống trí thông minh đa ngôn ngữ để thu hẹp khoảng cách giữa các cộng đồng ngôn ngữ khác nhau. Tại Nam Á, nghiên cứu có thể hướng đến xây dựng các kiến trúc tri thức kết hợp giữa trí tuệ truyền thống và công nghệ hiện đại. Mỗi trung tâm phát triển chuyên môn theo thế mạnh địa phương, đồng thời đóng góp vào sự hiểu biết chung trên phạm vi toàn cầu.

Xây dựng năng lực không chỉ đơn thuần là chuyển giao công nghệ mà còn tạo ra khả năng phát triển thực sự tại từng khu vực. Quá trình này bắt đầu với các chương trình giáo dục toàn diện, tích hợp nền tảng khoa học, kỹ năng ứng dụng thực tiễn và hiểu biết sâu sắc về tác động xã hội. Những chương trình này cần linh hoạt để phù hợp với từng bối cảnh văn hóa nhưng vẫn đảm bảo các nguyên tắc khoa học cốt lõi. Các trường đại học hợp tác với doanh nghiệp để tạo cơ hội đào tạo thực hành, trong khi các nền tảng trực tuyến giúp mở rộng khả năng chia sẻ tri thức giữa các khu vực.

Khung quản trị có lẽ là khía cạnh đổi mới nhất trong quá trình triển khai. Thay vì áp đặt quy định sau khi phát triển, khung này thiết lập ngay từ đầu các nguyên tắc và phương pháp kiểm chứng để định hướng sự phát triển. Điều này bao gồm:

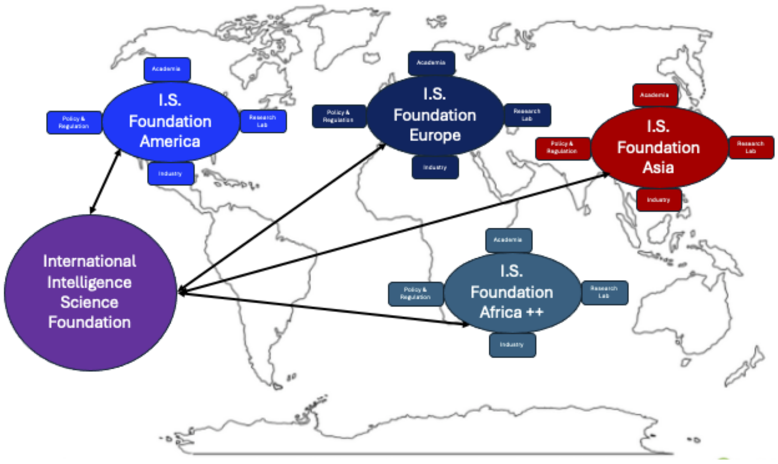
- Các khung kiểm chứng giúp đánh giá khả năng công nghệ và tác động xã hội
- Quy trình phát hiện sớm và khắc phục các vấn đề tiềm ẩn
- Tiêu chuẩn đo lường ảnh hưởng trong nhiều bối cảnh khác nhau
- Cơ chế đảm bảo mọi người đều có quyền tiếp cận bình đẳng với công nghệ cốt lõi

Ngành công nghiệp giữ vai trò quan trọng trong chiến lược triển khai này, nhưng theo một mô hình hoàn toàn khác so với cách AI đang được phát triển hiện nay. Lấy cảm hứng từ ngành dược phẩm—nơi các công ty cân bằng giữa lợi ích kinh doanh và trách nhiệm đối với sức khỏe toàn cầu—chúng ta cần những mô hình kinh doanh mới vừa khuyến khích chia sẻ nghiên cứu nền tảng, vừa duy trì lợi thế cạnh tranh. Cách tiếp cận hợp tác này giúp đẩy nhanh tiến bộ mà không để một số ít tập đoàn độc quyền các năng lực quan trọng.

Lộ trình triển khai vừa phải hành động kịp thời, vừa bảo đảm phát triển có hệ thống. Giai đoạn đầu tập trung xây dựng nền tảng vững chắc—thành lập Quỹ Quốc tế và các Trung tâm Khu vực đầu tiên. Đây là bước đệm để mở rộng các chương trình giáo dục và phát triển các khung kiểm chứng chung. Khi năng lực được nâng cao, việc triển khai sẽ mở rộng sang nhiều khu vực và ứng dụng hơn, với mỗi giai đoạn kế thừa những bài học từ trước. Như minh họa trong Hình 9, mạng lưới Trung tâm Khu vực hoạt động độc lập nhưng được Quỹ Khoa học Trí thông minh Quốc tế điều phối sẽ thúc đẩy hợp tác toàn cầu mà vẫn bảo đảm tính tự chủ của từng địa phương.

Thành công đòi hỏi hành động ngay trên nhiều mặt trận:

1. Thành lập Quỹ Khoa học Trí thông minh Quốc tế với cơ chế điều phối rõ



Hình 9. Chu trình triển khai Khoa học Trí thông minh. Sự tương tác liên tục giữa nền tảng khoa học, khung kiểm chứng và triển khai thực tiễn tạo thành một chu trình tự củng cố. Cơ chế này đảm bảo quá trình phát triển luôn dựa trên cơ sở khoa học vững chắc, đồng thời có khả năng thích ứng với nhu cầu và trải nghiệm thực tế.

ràng

2. Triển khai thử nghiệm các Trung tâm Xuất sắc Khu vực trong những bối cảnh khác nhau để kiểm chứng mô hình phát triển phân tán
3. Xây dựng các chương trình giáo dục toàn diện, có thể nhanh chóng điều chỉnh theo đặc thù từng khu vực
4. Phát triển các khung kiểm chứng ban đầu, vừa tôn trọng sự đa dạng quan điểm vừa đảm bảo tính khoa học chặt chẽ
5. Hợp tác với doanh nghiệp theo mô hình phát triển chung mới

Cánh cửa để thiết lập một mô hình phát triển bao trùm vẫn còn, nhưng đang dần thu hẹp khi AI tiếp tục được phát triển theo các khuôn mẫu cũ. Tuy nhiên, chính thách thức này cũng mở ra cơ hội chưa từng có. Nếu áp dụng Khoa học Trí thông minh theo mô hình phân tán, chúng ta có thể đảm bảo AI không chỉ phục vụ một nhóm nhỏ mà còn góp phần nâng cao năng lực con người trên toàn xã hội, thay vì làm gia tăng khoảng cách toàn cầu.

6. Định hình tương lai của tư duy và nhận thức: Một kỷ nguyên phục hưng mới với Khoa học Trí thông minh

Chúng ta đang đứng trước một thời khắc quan trọng trong lịch sử nhân loại, nơi sự phát triển của trí thông minh nhân tạo vừa mang đến những rủi ro chưa từng có vừa mở ra những cơ hội phi thường. Những thách thức mà chúng ta đối mặt—từ tình trạng phân cực ngày càng sâu sắc đến bất bình đẳng nhận thức ngày một gia tăng—không phải là hệ quả tất yếu của tiến bộ công nghệ, mà là kết quả của một sự phát triển thiếu nền tảng khoa học vững chắc. Khoa học Trí thông minh chính là khung lý thuyết giúp biến những thách thức này thành động lực thúc đẩy sự tiến bộ toàn cầu.

Lịch sử đã từng chứng kiến những cuộc cách mạng khoa học định hình thế giới, và những bài học từ quá khứ có thể soi sáng con đường phía trước. Nhưng lần này, tầm ảnh hưởng của cuộc cách mạng là hoàn toàn khác biệt. Nếu cuộc cách mạng công nghiệp nâng cao năng lực thể chất của con người, còn cuộc cách mạng số mở rộng khả năng xử lý thông tin, thì AI có tiềm năng nâng tầm chính tư duy của nhân loại. Đây không chỉ là việc tạo ra những công cụ mạnh mẽ hơn mà còn là xây dựng những đối tác nhận thức thực sự, giúp con người giải quyết các thách thức lớn nhất—từ biến đổi khí hậu đến giáo dục, từ y tế đến sự hòa hợp xã hội.

Chu trình Khoa học – Công nghệ – Kỹ thuật không chỉ cung cấp một mô hình phát triển mà còn là kim chỉ nam để đảm bảo rằng quá trình nâng cao năng lực nhận thức này mang lại lợi ích cho toàn nhân loại. Nếu được áp dụng một cách hệ thống, các nguyên tắc khoa học có thể giúp biến những hệ thống AI hiện nay—vốn chỉ dừng lại ở mức nhận diện mẫu—thành những đối tác thực sự, tôn trọng quyền tự chủ của con người và thúc đẩy sự phát triển chung. Mô hình phát triển phân tán đảm bảo rằng những lợi ích này không bị tập trung vào một số ít tổ chức, tránh nguy cơ phân hóa nhận thức toàn cầu vĩnh viễn.

Tuy nhiên, sự chuyển đổi này không chỉ phụ thuộc vào tiến bộ công nghệ mà còn đòi hỏi một cách tiếp cận hoàn toàn mới đối với sự phát triển công nghệ. Quỹ Khoa học Trí thông minh Quốc tế và mạng lưới các Trung tâm Xuất sắc Khu vực không chỉ là một cấu trúc tổ chức, mà còn là hình mẫu cho một mô hình hợp tác khoa học toàn cầu mới. Mô hình này thừa nhận rằng trí thông minh—dù là tự nhiên hay nhân tạo—chỉ thực sự phát triển khi được nuôi dưỡng bởi sự kết hợp giữa nhiều góc nhìn và trải nghiệm đa dạng.

Con đường phía trước đặt ra những thách thức cấp bách. Việc xây dựng năng lực khoa học phân tán trong khi vẫn đảm bảo tốc độ phát triển nhanh chóng đòi hỏi những hình thức hợp tác mới giữa học thuật, công nghiệp và chính phủ. Việc thiết lập các khung kiểm chứng vừa đảm bảo tính chặt chẽ về khoa học vừa tôn trọng sự đa dạng quan điểm đòi hỏi những mô hình quản trị sáng tạo. Việc đảm bảo mọi người đều có quyền tiếp cận công nghệ cốt lõi mà vẫn duy trì động lực đổi mới cần đến những mô hình kinh doanh mới.

Nhưng thời điểm hành động là ngay bây giờ. Cách chúng ta định hình sự phát triển của AI hôm nay sẽ ảnh hưởng đến tư duy của nhân loại trong nhiều thế hệ sau. Không giống như những cuộc cách mạng công nghệ trước đây—khi con người có thời gian để thích nghi dần—tốc độ và mức độ ảnh hưởng của AI đòi hỏi sự phối hợp chặt chẽ ngay từ bây giờ để đảm bảo một tương lai tốt đẹp hơn cho tất cả.

Khoa học Trí thông minh mang đến một khung lý thuyết để định hướng sự chuyển đổi này, nhưng thành công của nó phụ thuộc vào sự cam kết của các bên liên quan trên toàn cầu. Nếu chúng ta cùng nhau xây dựng nền tảng khoa học vững chắc và đảm bảo một sự phát triển công bằng, AI sẽ không chỉ là một thành tựu công nghệ mà còn trở thành động lực thúc đẩy một kỷ nguyên phục hưng mới—một kỷ nguyên nâng cao tiềm năng con người và thúc đẩy sự hiểu biết giữa các xã hội.

Lựa chọn trước mắt đã rõ ràng: Hoặc chúng ta để AI tiếp tục phát triển theo quỹ đạo hiện tại, làm trầm trọng thêm sự phân hóa và chia rẽ toàn cầu, hoặc chúng ta đón nhận Khoa học Trí thông minh như con đường dẫn đến một tương lai nơi công nghệ thực sự phục vụ sự phát triển chung của nhân loại. Khung lý thuyết đã sẵn sàng, nhu cầu cấp bách hơn bao giờ hết, và cơ hội này là chưa từng có. Thời khắc quyết định đã điểm.

HEISENBERG Ở HELGOLAND

ASHUTOSH JOGALEKAR
NGƯỜI DỊCH ĐÀM THANH SƠN

Giới thiệu. *Đây là bản dịch tiếng Việt của bài viết "Heisenberg in Helgoland" của tác giả Ashutosh Jogalekar. Bài viết nói về một sự kiện xảy ra năm 1925: Heisenberg tìm ra cơ học lượng tử. Nhân dịp Năm cơ học lượng tử (của Liên Hiệp Quốc), tôi (Đàm Thanh Sơn) phỏng dịch lại bài này (có sử dụng công cụ Google translate).*

By Carsten Steger - Own work, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=107376767

1. Mở đầu

Mặt trời đang lặn trên bầu trời không một gợn mây. Từ đằng xa, tiếng chim hải âu inh ỏi vọng lại. Không khí trong lành và tươi mát. Mờ mờ ở chân trời, đất liền nhô lên từ đại dương màu xanh.

Anh hít vào một lồng ngực đầy không khí trong lành của buổi tối, như hít một liều thuốc tiên, rồi thở phào nhẹ nhõm. Không khí ở đây sẽ giúp anh vượt qua cơn dị ứng phấn hoa đã hành hạ cơ thể anh suốt bốn ngày qua. Vì cơn bệnh này mà anh đã phải làm một chuyến đi rời xa đất liền đến với mỏm đá nhỏ màu đỏ rực ở Biển Bắc. Ở đây, anh sẽ thoát khỏi không chỉ cơn dị ứng phấn hoa, mà còn cả Niels Bohr, người thầy hướng dẫn của anh. Ngồi trên tảng đá, anh nhìn ra khoảng không xanh thẳm.

Đã nhiều tháng, Bohr theo anh như một cái bóng, một căn bệnh tệ hại như bệnh dị ứng. Mọi chuyện bắt đầu khoảng một năm trước; không, thực ra, nó bắt đầu lúc anh còn là một đứa trẻ. Cha anh, một học giả uyên bác nhưng nghiêm khắc, đã bắt anh và anh trai ganh đua với nhau như hai kình địch. Ngay cả bây giờ mối quan hệ giữa anh với anh trai cũng vẫn còn đôi chút căng thẳng, nhưng cuộc cạnh tranh khốc liệt đó đã tạo ra ít nhất một kết quả có hậu: niềm đam mê toán học và vật lý, điều đang mang lại cho anh một niềm vui mãnh liệt.

Anh nhớ lại những năm tháng chiến tranh, khi nước Đức nằm trên bờ vực thẳm, hết cuộc cách mạng này đến cuộc cách mạng khác đe dọa phá nát nền tảng xã hội. Lúc đó, vật lý là nơi ẩn náu duy nhất của anh. Nó đã nâng đỡ anh khi đó, và nó sẽ nâng đỡ anh lúc này.

Giá như có thể hiểu được Bohr muốn gì. Bohr không phải là người thầy hướng dẫn đầu tiên của anh. Vị trí đó thuộc về Arnold Sommerfeld ở Munich. Sommerfeld là một người đàn ông với một bộ ria cắt tỉa hoàn hảo đến mức mà anh Pauli bạn anh gọi ông là "người sĩ quan Hussar". Sommerfeld hay cho sinh viên của mình đắm chìm vào những vấn đề vật lý mới nhất ở chính nhà ông, nơi những cuộc thảo luận thường kéo dài đến tận khuya. Những cuộc thảo luận cùng một lúc về vật lý, chính trị và triết học. Anh không gần gũi với cha đẻ của mình; Sommerfeld mới là người đóng vai trò người cha trong cuộc đời anh. Cũng trong lớp Sommerfeld dạy, anh đã gặp người bạn chân chính đầu tiên – Wolfgang Pauli. Pauli rất chật vật với việc đi học buổi sáng vì buổi tối cậu ta dự rất nhiều câu lạc bộ, tiệc tùng. Anh thích chuyện trò thật lâu với Pauli; Pauli hay khen anh là "trông thế mà không ngu lắm". Chính Pauli là người đã hướng anh tránh xa thuyết tương đối và hướng tới lĩnh vực mới và thú vị nhất trong vật lý – lý thuyết lượng tử.

Thuyết lượng tử là đứa con tinh thần của nhiều người, nhưng Bohr được coi cha đỡ đầu của nó, ai cũng ngưỡng mộ ông. Chính Bohr là người đầu tiên đưa khái niệm gián đoạn vào vật lý nguyên tử. Ông là người đầu tiên giải thích được nguyên tử đơn giản nhất, nguyên tử hydro. Hơn thế, Bohr gần như bị ma ám trong việc hiểu thuyết lượng tử và truyền bá các nguyên lý của nó cho các nhà vật lý trẻ như anh.

Bóng tối dần buông xuống khi anh từ tảng đá bước xuống và đi về quán trọ. Anh mỉm cười nhớ lại lần đầu tiên gặp Bohr. Sau chiến tranh, Đức là quốc gia bị ghét bỏ nhất trên thế giới. Không ai muốn giao lưu với nước Đức. Hiệp ước Versailles đã áp đặt các biện pháp hà khắc lên nền kinh tế vốn đã bị tàn phá của Đức. Sao người ta có thể nhẫn tâm như vậy? Như một chính khách, Bohr là một trong số rất ít người đã đưa bàn tay ra với đất nước của anh. Bohr nói: Chiến tranh là chiến tranh, nhưng khoa học là khoa học. Sự trong sáng của khoa học không thể bị xâm phạm bởi những thiếu sót của nhân loại. Đại học Göttingen đã mời Bohr đến để bắt đầu mối quan hệ khoa học mới giữa Đức và thế giới còn lại. Ngày hôm đó hiện lên trong ký ức của anh, rõ ràng như bầu không khí xung quanh. Mùi hoa hồng thoang thoảng qua cửa sổ, khán giả đứng ngồi trên bệ cửa sổ, tiếng chuông nhà thờ thời trung cổ ngân vang ở đằng xa.

Bữa đó Bohr giảng về một điểm tinh tế liên quan đến quang phổ mà lý thuyết lượng tử của ông giải thích được. Nhưng rõ ràng là có một chỗ ông sai về toán học. Có ai nữa ngoài anh nhận ra chỗ sai này không? Lỗi đó là một lỗi cơ bản, không xứng đáng với Bohr. Sau này anh mới biết Bohr là một nhà toán học giỏi nhưng không đặc biệt xuất sắc. Thế mạnh của ông là trực giác vật lý và triết học, còn những vấn đề toán học ông để lại cho những người thấp kém hơn, những người trẻ ông gọi là trợ lý khoa học. Từ hàng ghế sau, anh chỉ ra chỗ sai và đưa ra một vài bình luận khác. Lúc đó anh mới hai mươi tuổi. Bohr vui vẻ nhận lỗi. Sau buổi nói chuyện, khi anh sắp ra về, Bohr tìm đến anh và mời anh đi dạo với ông. Đi bộ và đàm đạo là sở trường của Bohr.

Anh vào Bohr leo lên một ngọn đồi gần trường đại học rồi thảo luận về các vấn đề của vật lý nguyên tử trong một quán cà phê gần đó. Anh cảm thấy mình có thể trao trọn tâm hồn cho Bohr. Sau khi học xong ở Munich, anh muốn đến Copenhagen ngay, nhưng Sommerfeld bảo là chưa nên. Sommerfeld bảo Bohr là một nhà vật lý xuất sắc, nhưng ở giai đoạn này, một cách tiếp cận vật lý nguyên tử chặt chẽ và toán học hơn sẽ tốt hơn cho anh. Người tốt nhất có thể hướng dẫn anh về điều này là Max Born ở Göttingen. Max Born bị tính hay do dự và đôi khi hơi quá nhạy cảm đối với những lời chỉ trích, và hay quá kính sợ học trò, nhưng không ai có thể kết hợp những kiến thức vật lý với sự nghiêm ngặt toán học như ông. Born sẽ giúp anh làm quen với các kỹ thuật hình thức; học xong những thứ này anh có thể dành thời gian với Niels Bohr vào những vấn đề triết học. Người bạn Pauli của anh đã từng là trợ lý của Born và bảo Born là người thầy hạng nhất. Tuy nhiên, Pauli cũng cảnh báo là Born hay đòi gặp mặt lúc sáng sớm, một thứ khó làm với Pauli đến nỗi Born đã từng phải cử osin đến đánh thức cậu ta dậy.

Ánh trăng soi sáng con đường trước mặt anh, và hòn đảo nhỏ bé này rất ít nguồn sáng nào khác. Đây chính là điều anh thích nhất ở nơi này. Rất ít người, rất ít ánh sáng, hầu như không có ai để nói chuyện, nhưng có rất nhiều chỗ để đi bộ và bơi. Và không khí, không khí trong vắt, dường như được ai đó làm ra chỉ để làm sạch đường mũi và mạng nhện trong tâm trí anh. Cơn dị ứng phấn hoa của anh dường như đã hoàn toàn hết. Anh có thể đọc Goethe và suy nghĩ về vật lý bao nhiêu cũng được. Khi đến quán trọ, anh chào bà chủ nhà trọ. Bốn hôm trước khi anh mới tới bà này đã kinh hoàng khi thấy khuôn mặt sưng vù của anh. Bà hỏi là có phải anh vừa đánh nhau với ai không. Đáng buồn là ẩu đả chính trị không phải là chuyện hiếm ở Đức. Sau bữa ăn nhẹ gồm xúc xích và bánh khoai tây, anh về phòng nghỉ ngơi.

Ở Munich, để làm luận án tiến sĩ, anh chọn một chủ đề không gây tranh cãi là động lực học chất lỏng. Thế mà kỳ thi cuối lại là một thảm họa, anh nhíu mày nhớ lại. Một giám khảo, Wilhelm Wien, hỏi anh một câu khá cơ bản về độ phân giải của kính hiển vi. Anh không nhớ công thức và bị nhầm lẫn một cách vô vọng khi tìm cách suy diễn lại công thức này. Anh đang cố giải quyết các vấn đề tuyến đầu của lý thuyết lượng tử; tại sao lại cứ bị hỏi những câu dành cho những sinh viên đại học hạng hai? Nhưng Wien kiên quyết không buông tha anh, và cuối cùng Sommerfeld phải nhảy vào để đảm bảo với ban giám khảo rằng học trò của mình chắc chắn đủ triển vọng để được trao bằng tiến sĩ. Anh được điểm vừa đủ để qua. Điều này vẫn làm anh khó chịu.

Anh thu xếp hành lý và đi thẳng từ Munich đến Göttingen. Một phần là để bắt đầu nghiên cứu lý thuyết lượng tử ngay lập tức, nhưng một phần khác là để thoát khỏi tâm trạng bi quan đang bao trùm lên xã hội Đức. Năm vừa qua anh đã phải chứng kiến lạm phát chưa từng có làm tê liệt đất nước thân yêu. Vào lúc đỉnh điểm, một đô la Mỹ có giá trị lên tới một nghìn tỷ mác. Người ta mang cả một xe đẩy đầy tiền để chỉ đổi lấy một ổ bánh mì hoặc một ít khoai tây. Người ta còn dùng tiền làm giấy dán tường cách nhiệt trong nhà. Đất nước anh có xứng đáng phải chịu những điều như thế hay không? Mỗi lần nghĩ về tình hình đất nước, mắt anh nóng lên vì tức giận. Gì thì gì, anh sẽ cho thế giới biết rằng nước Đức vẫn không thiếu nhân tài khoa học.

Sau một thời gian làm việc với Born và làm quen với các công cụ toán học cơ bản của vật lý nguyên tử, cuối cùng anh cũng đến được Copenhagen. Mấy tháng qua là khoảng thời gian hạnh phúc nhất trong cuộc đời anh. Bohr đã tạo ra một bầu không khí mà tinh thần đồng đội còn vượt xa cả các buổi hội thảo của Sommerfeld. Những ngày ở đó tràn ngập những cuộc thảo luận sâu sắc về khoa học và triết học, những cuộc đi dạo trong công viên Faelledparken phía sau viện và các trận bóng bàn. Buổi tối dành cho giải trí với Bohr và người vợ tốt bụng Margarethe của ông bằng đàn piano với Beethoven và Schubert, vốn là niềm đam mê tiếp theo của anh sau vật lý. Thậm chí còn hơn cả Sommerfeld, Bohr đã trở thành một người cha đối với anh. Bản tính thân thiện, nỗi ám ảnh với lý thuyết lượng tử và sự nhanh nhẹn về thể chất; tất cả những điều này đều rất ấn tượng. Ông đi cầu thang hai bậc một, và không ai có thể thắng ông ở môn bóng bàn.

Nhưng anh cũng đã gặp phải những khía cạnh khác của Bohr mà trước đây anh không biết. Bohr rất nhẹ nhàng trong các mối quan hệ cá nhân, nhưng trong việc tìm chân lý khoa học, ông có thể trở nên hung dữ, dai như đỉa, tàn nhẫn. Bản thân anh đã có lúc nghi ngờ một số điều nhiều người biết trong vật lý nguyên tử, nhưng Bohr thì liên tục chất vấn anh về bản thân sự tồn tại của các đặc tính của electron và photon – ông cứ liên tục chất vấn đến tận đêm ngay cả sau khi anh đã kêu mệt. Điều này đã khiến anh suýt khóc. Như thể những cuộc tra hỏi của Bohr chưa đủ, sau lần cuối anh gặp Bohr đã có một hạt khác, từ trước đến nay chưa ai biết đến, xâm nhập vào quỹ đạo của Bohr. Tay này tên là Hendrik Kramers, người Hà Lan, hoạt bát, hiểu biết về toán học, biết nói bốn thứ tiếng và biết chơi cả piano lẫn cello. Đã từng vật lộn với tiếng Đan Mạch và tiếng Anh, anh thấy thật khó mà không ghen tị với Kramers. Giữa họ đã phát sinh ra một sự ganh đua, như hai anh em tranh giành sự chú ý của người cha.

Trong khi anh đang hoàn thiện bản luận án tầm thường của mình về động lực học chất lỏng, Bohr, Kramers và một nghiên cứu sinh sau tiến sĩ người Mỹ trẻ tên là John Slater đã xây dựng được một bức tranh khá hấp dẫn về electron trong nguyên tử. Trong bức tranh này electron là một tập hợp các vật thể giống như các con lắc. Thuật ngữ kỹ thuật cho con lắc là dao động tử điều hòa. Các dao động tử rung với tần số tương ứng với các chuyển đổi của electron giữa các trạng thái khác nhau trong nguyên tử. Bohr và Kramers sử dụng các dao động tử này như một cách biểu diễn thuận tiện để hình dung những gì diễn ra bên trong một nguyên tử, nhưng họ vẫn quan tâm đến các tính chất cơ bản ai cũng biết – vị trí và vận tốc. Anh được yêu cầu xem xem có thể làm gì trong mô hình của Bohr và Kramers.

Rắc rối bắt đầu từ đây. Anh thích ý tưởng sử dụng các dao động tử để biểu diễn hạt electron. Các dao động tử được biểu thị bằng một công tụ toán học nổi tiếng gọi là chuỗi Fourier. Trong thời gian làm việc với Born anh đã làm quen với chuỗi Fourier. Nhưng khi anh chèn các công thức cho chuỗi vào các phương trình chuyển động thì mỗi con số đơn lẻ sinh sôi nảy nở lên một cách kỳ lạ thành một danh sách các số. Mỗi lần anh loại bỏ một số con số thì những con số khác lại mọc lên như nấm, như đầu của một con rắn trong truyện thần thoại Hy Lạp. Anh đã thử đủ các thủ thuật đại số, lấp đầy hết bảng này đến bảng khác bằng trò ảo thuật số, mà không tiến gần hơn được một chút nào nào đến việc biểu thị bất kỳ đại lượng vật lý nào. Và rồi, đột nhiên, giống như một cơn gió từ Biển Bắc, anh bị một cơn dị ứng phấn hoa nặng hơn tất cả các lần trước mà anh nhớ. Nó khiến anh mất ngủ vào ban đêm, choáng váng vào ban ngày. Nó khiến cho vũng lầy của các con số trông lớn hơn trên thực tế.

Anh thấy mình chịu đựng thế là đủ. Đã đến phải hồi phục lại về mặt tinh thần, anh tự nhủ. Mỏm đá nhỏ với số lượng phấn hoa rất thấp là điểm đến ưa thích của những người mắc bệnh. Đó là nơi anh sẽ đến, tránh xa cơn dị ứng ngột ngạt và nhà kính trí tuệ, đến với những thứ anh yêu thích nhất: đại dương, núi non và không khí trong lành. Anh đã biết đến vùng đất này trong các chuyến thám hiểm với những người trẻ cùng nhóm hướng đạo. Ở đó, họ đã hát những bài hát về tổ quốc và đã có những cuộc thảo luận say sưa về lòng yêu nước, về sự hồi sinh tinh thần và chính trị của nước Đức. Ở đó anh cảm thấy như ở nhà mình.

Ánh sáng trên trần nhà nhấp nháy khi anh bắt đầu nghĩ về các dao động, về tần số, về electron. Làm sao ta biết được bên trong một nguyên tử có cái gì? Và đột nhiên anh hiểu ra vấn đề. Lúc đó anh thấy ý tưởng đến với anh như một tia sét, chỉ sau này anh mới nhận ra đó là một phần của một chuỗi các trạng thái tinh thần, một tia sáng lóe lên nhưng chỉ giản đoạn như những chuyển đổi của electron. Lại một lần nữa: làm sao ta biết được bên trong nguyên tử có cái gì? Không ai nhìn thấy một nguyên tử hay electron; chúng không thể quan sát được. Nhưng ta biết chúng có thật vì ta quan sát được những tác động hữu hình của chúng. Từ lâu, các thực thể không quan sát được đã trở thành một phần của khoa học. Đã có lúc không ai biết bên trong mặt trời có gì. Nhưng các nhà khoa học – trong số đó có các nhà khoa học người Đức – đã tìm ra được qua tần số của các vạch quang phổ, các vạch này chỉ ra sự có mặt của một số nguyên tố nhất định. Quang phổ học cũng đóng vai trò tối quan trọng trong sự phát triển của lý thuyết nguyên tử. Bản thân Bohr cũng đã chứng tỏ sự thành công của lý thuyết này qua việc dùng nó để giải thích các vạch quang phổ của hydro.

Anh lùi lại một bước để nhìn toàn cảnh từ một góc nhìn mới, để nhìn cả khu rừng thay vì nhìn vào từng cái cây. Những gì chúng ta thấy chỉ là các vạch quang phổ và không có gì khác ngoài các vạch quang phổ. Chúng ta không thấy vị trí của electron; chúng ta không thấy động lượng của nó. Vị trí và động lượng có thể là các đại lượng quan trọng nhất trong vật lý cổ điển, nhưng đó là vì ta có thể đo được chúng. Trong trường hợp nguyên tử và electron, tất cả những gì chúng ta thấy chỉ là tần số của các vạch quang phổ. Những gì chúng ta không thấy thì chúng ta không biết. Vậy thì tại sao lại cứ giả vờ sử dụng nó? Tại sao lại cứ giả vờ tính toán nó? Các tần số là các đại lượng quan sát được. Tại sao không sử dụng chúng như các biến số chính, và coi vị trí và động lượng là các đại lượng thứ cấp? Anh vẫn là một nhà toán học xuất sắc, nhưng giờ anh nghĩ về khía cạnh vật lý của vấn đề. Đây là một sự thay đổi cơ bản của hệ quy chiếu, trước đây đã được Einstein đưa ra một cách rất đáng nhớ. Vấn đề là việc biểu diễn vị trí và động lượng dưới dạng chuỗi Fourier và tần số vẫn dẫn đến một danh sách các con số thay vì một con số duy nhất thu được bằng phép nhân. Nhưng đây là nơi trực giác vật lý của anh trở nên rất quan trọng. Ta có thể biết số nào trong danh sách cần giữ lại và số nào cần loại bỏ dựa trên việc chúng có biểu diễn sự chuyển đổi giữa các trạng thái năng lượng thực trong nguyên tử hay không. Thông tin đó có sẵn và ngầm định trong tần số của các vạch quang phổ. Thiên nhiên sẽ lập lại trật tự trong cái tạm thời trông như một cuộc diễu hành của các con số.

Cuối cùng đã đến lúc anh sử dụng cách tính lạ lùng của mình để tính năng lượng của một hệ vật lý. Do quá phấn khích, anh liên tục mắc lỗi rồi lại sửa, nhưng cuối cùng anh đã có kết quả. Nhìn vào kết quả, anh vô cùng vui mừng và kinh ngạc. Từ điệu nhảy của các phép tính, câu trả lời cho năng lượng của hệ đã hiện ra, nhưng điều quan trọng là năng lượng này chỉ có thể ở trong một tập hợp hạn chế các giá trị. Chỉ với một phép tính, anh đã khám phá lại phát biểu nguyên thủy của Max Planck cho lý thuyết lượng tử mà không cần sử dụng công thức năng lượng của Planck. Một lời giải đúng đến mức như vậy phải là chân lý. Một lời giải tao nhã đến như vậy phải là chân lý.

Đã gần ba giờ sáng. Màn đêm bên ngoài như đang sâu dần thành một vực thẳm. Anh hầu như không nói chuyện với bất kỳ ai trong bốn ngày trên đảo, và giờ đây dường như tất cả sự im lặng đó đang lên đến đỉnh điểm — một nhận thức cách mạng đã tìm thấy sự biểu hiện đầy đủ. Bàn tay của thiên nhiên và trí óc khéo léo của anh đã giải được câu đố trước mắt anh, giống như những chữ viết vô hình đột nhiên hiện ra khi áp dụng đúng dung dịch hóa học. Nhưng số lượng khổng lồ của các ứng dụng mà anh thấy trước mắt mình thật đáng kinh ngạc. Lúc đầu, anh vô cùng lo lắng. Anh có cảm giác rằng, thông qua bề mặt là của các hiện tượng nguyên tử, anh đang nhìn vào một vẻ đẹp bên trong lạ thường, và giờ đây anh sẽ phải thăm dò sự giàu có của các cấu trúc toán học mà thiên nhiên đã hào phóng trải rộng trước mắt anh.

Nhưng những việc đó là chuyện sau này. Bây giờ anh biết rằng anh có một sơ đồ tổng quát của lý thuyết lượng tử có thể dùng để giải quyết bất kỳ bài toán cũ và mới nào. Bohr sẽ hài lòng, mặc dù ông vẫn sẽ khăng khăng đòi sửa đổi một số công thức của anh trước khi xuất bản. Và tất nhiên anh sẽ cho anh bạn Pauli xem, người sẽ cung cấp những phép thử nghiêm ngặt nhất cho tính đúng đắn của lý thuyết của anh.

Cơn dị ứng của anh dường như đã biến mất. Anh cảm thấy khỏe trở lại. Không thấy có lý do để cố ngủ vào lúc rất muộn này, anh đi ủng vào chân và lên đường. Có một mỏm đá xa ở mũi cực bắc của hòn đảo mà anh vẫn chưa khám phá. Anh bước đi trong ánh sáng trước bình minh. Không một con hải âu nào kêu xung quanh anh, không một chiếc lá nào run trên cành. Một giờ sau, anh đã đến chân tảng đá và trèo lên mà không tốn nhiều công sức. Anh ngồi đó một lúc lâu cho đến khi nhìn thấy những tia nắng đầu tiên xuyên qua bóng tối. Các photon ánh sáng chiếu vào mắt anh, kích thích các chuyển đổi electron trong các nguyên tử carbon, nitơ và oxy. Và lúc đó, anh là con người duy nhất trên Trái đất biết những quá trình này xảy ra như thế nào.

Về bài 5 VMO 2025

Vũ Hồng Sơn (Trường THPT Chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)
Bùi Hoàng Nam (Trường THPT Chuyên Trần Phú, Hải Phòng)

Giới thiệu. *Trong bài viết này, chúng ta cùng nhau trao đổi một số ý tưởng và mở rộng về bài 5 trong kỳ thi học sinh giỏi Toán quốc gia Việt Nam (VMO) năm học* $2024-2025$. *Lưu ý rằng bài viết không được viết theo cấu trúc thông thường, mà sẽ trình bày theo suy nghĩ của người viết: Tớ đã giải bài toán đó như thế nào? Nếu bạn đọc là học sinh, có thể hình dung cùng chúng mình dạo chơi qua các bài toán, từ đó phần nào thêm yêu thích tổ hợp cũng như nâng cao tư duy logic.*

1. Mở đầu

Bài toán 1 (**Bài** 5 **- VMO 2025**)
Cho một bảng ô vuông $3k \times 3k$ (k là số nguyên dương), các ô của bảng được đánh tọa độ theo cột và hàng: ô (i, j) nằm trên cột thứ i từ trái qua phải và trên hàng thứ j từ dưới lên trên. Người ta muốn đặt $4k$ viên bi vào các ô của bảng, mỗi ô có không quá một viên, thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau.

- Mỗi hàng và mỗi cột đều có ít nhất một viên bi;
- Mỗi viên bi nằm cùng hàng hoặc cùng cột với ít nhất một viên bi khác.

(a) Xét $k = 1$. Có bao nhiêu cách đặt 4 viên bi vào bảng thỏa mãn các điều kiện trên? (Hai cách đặt bi được coi là khác nhau nếu có một ô (i, j) có bi trong một cách đặt nhưng không có bi trong cách còn lại.)

(b) Xét $k \geq 1$ tổng quát. Xác định số tự nhiên N lớn nhất sao cho với mỗi cách đánh dấu N ô phân biệt trên bảng, luôn tồn tại một cách đặt $4k$ viên bi thỏa mãn các điều kiện trên mà không có viên bi nào đặt ở một trong N ô đã được đánh dấu.

Theo ý kiến chủ quan của chúng mình, bài 1 là một bài toán rất phù hợp với kì thi HSG Quốc Gia năm nay. Nó nằm ở mức phân loại giải ba, giải nhì, có tác dụng động viên các bạn học tổ hợp chứ không làm nhiều bạn học sinh khiếp sợ tổ hợp.

2. Suy nghĩ tìm lời giải

Đầu tiên, để thuận tiện cho việc trình bày, cũng như các bài toán mở rộng sau này, ta sẽ tóm tắt yêu cầu bài 1 thành một **Giả thiết P** như sau:

<u>**Giả thiết P**</u>: Xếp viên bi vào bảng ô vuông thỏa mãn

(P1) Mỗi ô vuông đơn vị có tối đa **một** viên bi.

(P2) Mỗi hàng, mỗi cột đều có ít nhất **một** viên bi.

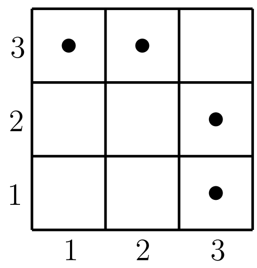
(P3) Mỗi viên bi cùng hàng hoặc cùng cột với ít nhất **một** viên bi khác.

Bài 1a. *Có bao nhiêu cách xếp 4 viên bi vào bảng 3×3 thỏa mãn Giả thiết P.*

Nhận xét: Đây có thể coi như một ý cho điểm, khi yêu cầu thực sự quá đơn giản với cấu hình rất nhỏ: xếp 4 bi cho bảng 3×3. Tuy nhiên, nếu chỉ thuần túy liệt kê, bạn sẽ không thể có điểm tối đa (không chứng minh đó là tất cả cách xếp bi thỏa mãn). Với bài toán này, đầu tiên ta cần nghiên cứu một cách xếp bi thỏa mãn, sau đó suy nghĩ xem tất cả các cách xếp bi thỏa mãn sẽ phải có cấu trúc ra sao. Dưới đây chúng tôi xin giới thiệu 3 cách tiếp cận.

LỜI GIẢI

CÁCH 1. Ví dụ một cách xếp thỏa mãn



Theo nguyên lý Dirichlet, xếp 4 bi lên bảng 3×3 sẽ tồn tại một hàng có ít nhất 2 viên bi. Từ giả thiết **(P2)**, ta suy ra 2 hàng còn lại cũng phải có ít nhất 1 bi. Do đó, 4 bi phải xếp với cấu trúc là một hàng 2 bi và 2 hàng còn lại, mỗi hàng đúng 1 bi. Lập luận tương tự với cột, kết hợp với **(P3)**, ta suy ra 2 hàng có đúng 1 bi thì bi phải cùng cột, và lệch cột với bi của hàng 2 bi.

- Chọn hàng có 2 viên bi: **3 cách**.
- Chọn 2 ô vuông đơn vị chứa 2 viên bi của hàng vừa chọn có $C_3^2 =$ **3 cách**.
- Hai bi ở hai hàng còn lại theo lập luận trên, bắt buộc phải cùng cột và ở cột không chứa viên bi của hàng 2 bi, nên có đúng **1 cách** xếp.

Theo quy tắc nhân có $3 \cdot 3 = 9$ cách xếp bi thỏa mãn.

CÁCH 2. Xếp 4 viên bi lên bảng 3×3 thỏa mãn Giả thiết P thì 4 viên bi buộc phải có 2 viên bi cũng hàng, 2 viên bi cùng cột và giao của hàng và cột đó là ô không chứa viên bi nào.

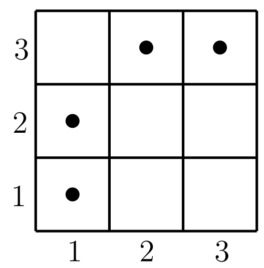
Như vậy, số cách xếp bi vào bảng sẽ chính là số cách chọn ra ô giao của hàng và cột trong lập luận trên.

CÁCH 3. Ta quan sát các trường hợp theo từng hàng.

1. **Trường hợp 1.** Hàng 1 có đúng 1 viên bi. Lưu ý có 3 cách xếp bi ở hàng 1 này.

   (a) **Trường hợp 1.1** Hàng 2 có 1 viên bi thì hàng 3 phải có 2 viên bi. Trường hợp này xếp bi ở hàng 2 và hàng 3 có đúng **1 cách**.

   (b) **Trường hợp 1.2** Hàng 2 có 2 viên bi thì hàng 3 phải có 1 viên bi. Trường hợp này xếp bi ở hàng 2 và hàng 3 có đúng **1 cách**.



   Như vậy, **Trường hợp 1** này có **6 cách**.

2. **Trường hợp 2.** Hàng 1 có đúng 2 viên bi, khi này Hàng 2 và Hàng 3 đều chỉ có 1 viên bi.
   Khi đó, Hàng 1 có **3 cách** xếp, Hàng 2 và Hàng 3 có **1 cách** xếp.
   Như vậy, **Trường hợp 2** này có **3 cách** xếp.

Như vậy, theo quy tắc cộng, ta có $6 + 3 = \mathbf{9}$ **cách**. □

Bài 1b. *Xét bảng $3k \times 3k$. Tìm N lớn nhất sao cho khi đánh dấu N ô tùy ý (không thể xếp bi vào các ô đánh dấu) thì luôn chắc chắn có thể xếp $4k$ viên bi vào bảng thỏa mãn Giả thiết P.*

Suy nghĩ: Mình viết lại giả thiết bài 5b VMO một chút, với hình dung các ô đánh dấu như một hình thức **cấm xếp bi**. Nó như một hình dung trong đầu của mình khi đọc đề. Tiếp đến, với bài cực trị tổ hợp, mình cần dự đoán được 1 chiều của bài toán, với bài toán trên, nếu đảo ngược suy nghĩ: *Nếu cấm xếp bi bao nhiêu ô thì không thể xếp bi thỏa mãn?* Ta đưa ra được một dự đoán ban đầu là: nếu đánh dấu $3k$ ô theo cùng một cột (hoặc hàng), khi xếp bi chắc chắn sẽ vi phạm giả thiết **(P2).** Bước tiếp theo, là thử chứng minh $N_{\max} = 3k - 1$, nghĩa là nếu đánh dấu $3k - 1$ ô, thì luôn xếp được bi thỏa mãn. Một suy nghĩ rất tự nhiên là thử dần từ các trường hợp nhỏ nhất $k = 1$ để hiểu bài toán hơn, sau đó có thể quy nạp hoặc các lối tiếp cận khác. Dưới đây xin gửi đến bạn đọc 2 lời giải, cách quy nạp của chúng tôi, cách còn lại của tác giả Vũ Văn Luân.

Lời giải Ta sẽ chứng minh $N_{\max} = 3k - 1$. Nếu $N \geq 3k$, ta đánh dấu toàn bộ một hàng. Khi này không thể xếp bi thỏa mãn điều kiện Giả thiết P.
Bước tiếp theo, ta cần chứng minh
★ **Với mọi cách đánh dấu $3k - 1$ ô của bảng, luôn tồn tại cách xếp 4k bi thỏa mãn.**

Với $k = 1$. Bảng 3×3 đánh dấu 2 ô tùy ý, khi này tồn tại một hàng và một cột không có ô nào bị đánh dấu. Xếp 4 viên bi vào các hàng và cột đó (trừ ô giao nhau): Thỏa mãn Giả thiết P.
với $k \geq 2$, ta có 2 cách để giải quyết ★ như sau:

Cách 1. *Sử dụng Quy nạp. Ở cách này, chúng tôi sẽ trình bày theo mạch suy nghĩ của mình, chứ không phải là một lời giải tiêu chuẩn. Chúng tôi tin nếu đi thi bạn trình bày như vậy cũng không bị trừ điểm, còn nếu bạn đã quen với một lời giải bình thường, bạn có thể tự đọc hiểu rồi viết lại.*

Mục tiêu của quy nạp là bạn cần đẩy bài toán từ k về $k - 1$. Nói cách khác, dưới đây là các vấn đề ta cần quan tâm:

$$\text{Bảng } 3k \times 3k \to 3(k-1) \times 3(k-1)$$
$$4k \text{ viên bi} \to 4(k-1) \text{ viên bi}$$
$$3k - 1 \text{ ô đánh dấu} \to 3k - 4 \text{ ô đánh dấu}$$

Do đó, ta **cần** xóa đi 3 hàng và 3 cột thỏa mãn

(1) Chứa ít nhất 3 ô bị đánh dấu.

(2) Bảng con 3×3 (giao của 3 hàng và 3 cột dự kiến xóa) phải chứa tối đa 2 ô được đánh dấu. Điều này cần thiết để có thể xếp 4 bi vào bảng con 3×3 thỏa mãn Giả thiết P.

Bảng con $3(k-1) \times 3(k-1)$ và $4(k-1)$ viên bi còn lại hoàn toàn là công việc của Quy nạp.

Để đi tìm 3 hàng $\times$ 3 cột thỏa mãn, ta quan tâm đến 3 cột ngoài cùng bên trái. *Bạn có nghĩ tại sao lại là 3 cột này không? Thực ra do vai trò các cột là hoàn toàn như nhau, nên chọn bừa 3 cột thôi, cũng may bài này nó dễ nên ra luôn.*

1. **Trường hợp 1.** 3 cột này chứa ít nhất 3 ô được đánh dấu (thỏa mãn được **cần** (1))
   Khi này, ta cần tìm bảng con 3×3 ở 3 cột này mà chứa nhiều nhất 2 ô được đánh dấu. (đảm bảo **cần** (2) được thỏa mãn)
   Chú ý rằng 3 cột có thể chia thành k bảng con 3×3, bên cạnh đó

chỉ có tối đa $3k-1$ ô được đánh dấu, nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại bảng con 3×3 thỏa mãn. Xong.

2. **Trường hợp 2.** 3 cột này chứa nhiều nhất 2 ô được đánh dấu, khi này tất cả k bảng con 3×3 trên 3 cột đều thỏa mãn **cần** (2)). Ta cần tìm bảng con 3×3 mà 3 hàng tương ứng chứa ít nhất 3 ô đánh dấu. Vì có tất cả $3k-1$ ô đánh dấu trên bảng, nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại bảng con 3×3 thỏa mãn. Xong.

Đến dây, coi như ta đã giải quyết xong bài toán theo **cách 1**.

Hướng dẫn cách 2: *Cảm hứng của cách này đến từ trò chơi Sodoku - FB anh Vũ Văn Luân.*
Ta chia hình đã cho thành $k \times k$ bảng kích thước 3×3. Vì chỉ có $3k-1$ ô đánh dấu nên có tối đa $k-1$ bảng 3×3 bị đánh dấu ít nhất 3 ô, ta gọi các bảng này là bảng VÔ HIỆU.
Lúc này hãy để ý tới trò chơi Sudoku đơn giản với bảng $k \times k$, luôn có cách sắp xếp các số $1, 2, 3, \ldots, k$ vào bảng sao cho mỗi hàng, mỗi cột có đúng k số đó.
Quay lại bảng ta đang xét, vì chỉ có tối đa $k-1$ bảng VÔ HIỆU, nên chắc chắn tồn tại k bảng không vô hiệu nào đó được đánh cùng số i.
Khi đó với mỗi bảng 3×3 này chúng ta chỉ cần đặt 4 viên bi một cách tùy ý sao cho 4 viên bi đấy thỏa mãn 2 yêu cầu đề bài cho bảng 3×3 đó. Như vậy ta đã đặt được $4k$ viên bi thỏa mãn yêu cầu đề bài. □

3. Một bài toán liên quan

Từ trong cách 2 của bài 1b, ta tách riêng ra được một bài toán thú vị.

Bài toán 2 Cho bảng ô vuông $n \times n$, trong đó có $n-1$ ô vuông đơn vị bị tô đen. Chứng minh rằng ta luôn có thể chọn ra n ô vuông đơn vị không bị tô đen và đôi một khác hàng, khác cột.

Thực ra, lời giải đơn giản nhất cho **Bài toán 2** có lẽ phải là Quy nạp, tuy nhiên trình bày Quy nạp có lẽ khá nhàm chán, bên cạnh đó bạn đọc cũng có thể dễ dàng làm được, nên chúng tôi giới thiệu 2 cách sau:

LỜI GIẢI CÁCH 1.
Điền các số tự nhiên từ 1 đến n lên bảng sao cho mỗi hàng, mỗi cột đều có đủ n số phân biệt từ 1 đến n. Cụ thể, ô $(i; j)$ (hàng i cột j) điền

số t sao cho $t \equiv i + j - 1 \pmod n$. *Do chúng tôi lười vẽ hình minh họa, chứ bạn đọc có thể hình dung một cách điền đơn giản là hàng 1 điền các số từ 1 đến n từ trái sang phải, hàng 2 xoay vòng đi một ô, điền cách số từ 2 đến n rồi điền số 1 cuối cùng, vv...*
Cách điền số này phân loại n^2 ô vuông đơn vị thành n nhóm, mỗi nhóm là n ô vuông được điền số t (với $t = 1; 2; \ldots; n$); n ô trong một nhóm đôi một khác hàng và khác cột.
Do chỉ có $n - 1$ ô bị tô đen nên tồn tại một nhóm không có ô nào bị tô đen.
Như vậy, nhóm n ô vuông thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CÁCH 2.
Tư duy. Chọn n ô bất kì đôi một khác hàng, khác cột và đếm xem có bao nhiêu ô được chọn bị tô đen. Tính trung bình số lượng các ô đen bị chọn ra, nếu nhỏ hơn 1, ắt phải có một phương án chọn n ô thỏa mãn mà không có ô nào bị tô đen. Cụ thể hơn:
Ta gọi α là một cách chọn n ô đôi một khác hàng, khác cột và $f(\alpha)$ là số ô bị tô đen.
Để chỉ ra được sự tồn tại của α để cho $f(\alpha) = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán thì ta sẽ chỉ ra

$$\overline{X} = \frac{\sum\limits_{\alpha} f(\alpha)}{n!} < 1.$$

Chú ý rằng α trong tổng trên chạy trên tất cả $n!$ cách chọn n ô đôi một khác hàng, khác cột.
Ta sẽ chứng minh khẳng định trên bằng cách sử dụng phương pháp **Đếm bằng hai cách**.
Xét bài toán sau:
Đếm T là số cặp $(\alpha; x)$, trong đó

- α: tập n ô vuông đơn vị đôi một khác hàng, khác cột;
- $x \in \alpha$: một ô bị tô đen.

Giải.

- **Đếm theo α.** Gọi $f(\alpha)$ là số ô bị tô đen trong α, ta thu được kết quả $T = \sum\limits_{\alpha} f(\alpha)$.
- **Đếm theo n.** Mỗi ô vuông bị tô đen x.
  Có $(n-1)!$ bộ α chứa x (chọn $n - 1$ ô đôi một khác hàng khác cột với x) .
  Khi đó $T = (n - 1) \cdot (n - 1)!$.

Suy ra $\sum\limits_{\alpha} f(\alpha) = (n-1) \cdot (n-1)!$. Thay vào công thức ban đầu ta được

$$\overline{X} = \frac{\sum\limits_{\alpha} f(\alpha)}{n!} = \frac{n-1}{n} < 1.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Thực ra, **Bài toán 2** trên là một bài toán hết sức kinh điển, một phiên bản khác của nó đã được mình giảng dạy tại trường hè Viasm 2024 tại Phú Thọ hè vừa rồi với phương pháp xác suất, và cách 2 của bài 2 ở trên chỉ là viết lại từ cách làm xác suất của bài 3 dưới đây.

Bài toán 3 Cho đồ thị lưỡng phân $G = (X, Y, E)$ với $|X| = |Y| = n$ và $|E| = n^2 - n + 1$. Chứng minh rằng G có một ghép cặp hoàn hảo, hay nói cách khác, có thể chọn ra n cạnh trong G đôi một không có đầu mút chung.

Mình chia sẻ lại lời giải bằng xác suất bên dưới đây

LỜI GIẢI Ta xét bài toán xác suất sau:
Bước 1: Chọn ngẫu nhiên 1 đỉnh x_1 trong X, sau đó chọn ngẫu nhiên 1 đỉnh y_1 trong Y rồi ghép 2 đỉnh này thành 1 cặp.
Bước 2: Chọn ngẫu nhiên 1 đỉnh x_2 trong số các đỉnh còn lại của X (ngoại trừ x_1) và chọn ngẫu nhiên một đỉnh y_2 trong các đỉnh còn lại của Y (ngoại trừ y_1) rồi ghép 2 đỉnh này thành 1 cặp.
...
Cứ thực hiện liên tiếp các bước như vậy cho đến khi thu được n cặp đỉnh giữa 2 bên X và Y. Khi này gọi Z là số các cặp 2 đỉnh là 2 đầu mút của một cạnh trong E. Tính $E(Z)$.
Kí hiệu Z_i là biến ngẫu nhiên nhận giá trị 1 nếu ở bước thứ k ta thu được một cạnh trong E và nhận giá trị 0 trong trường hợp còn lại. Khi này

$$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n.$$

Một điểm thú vị là với cách chọn ngẫu nhiên các cặp đỉnh như trên, xác suất để 1 cặp 2 đỉnh (x, y) bất kì với $x \in X, y \in Y$ được chọn ở bước thứ k đều bằng $\frac{1}{n^2}$ với mọi x, y và mọi k. Do đó

$$P(Z_k = 1) = \frac{n^2 - n + 1}{n^2}.$$

Suy ra

$$E(Z) = \frac{n^2 - n + 1}{n} = n - 1 + \frac{1}{n}.$$

Lưu ý rằng biến ngẫu nhiên Z nhận giá trị nguyên, do đó tồn tại một trường hợp Z có n cặp đỉnh thuộc E, ta có điều phải chứng minh. □

4. Một số mở rộng

Đầu tiên, để khởi động với bài 1a, một suy nghĩ vui vẻ ta có thể đặt ra là thay vì xếp 4 bi, nếu xếp 5 bi lên bảng 3×3 sẽ có bao nhiêu cách?

Bài toán 4 Có bao nhiêu cách xếp 5 bi lên bảng 3×3 thỏa mãn <u>Giả thiết P</u>

LỜI GIẢI Dễ thấy số bi của cách hàng chỉ có thể là $(3; 1; 1)$ hoặc $(2; 2; 1)$.
Trường hợp 1. $(3; 1; 1)$

	•	
•	•	•
		•

$\rightarrow$ **27 cách**

Trường hợp 2. $(2; 2; 1)$

•		•
		•
•	•	

$\rightarrow$ **54 cách**

Như vậy, theo quy tắc cộng, ta có $27 + 54 =$ **81 cách** xếp. $\square$

Tiếp theo, từ bài 1a và 1b, mình có **cảm giác** phải chăng $4k$ bi là số bi ít nhất cần dùng để xếp bi lên bảng $3k \times 3k$ thỏa mãn <u>Giả thiết P</u>? Rất may là điều đó đúng, hơn nữa mình còn làm được cho trường hợp bảng tổng quát.

Bài toán 5 (**Vũ Hồng Sơn**) Cho bảng vuông $n \times n$. Tìm m nhỏ nhất sao cho ta có thể xếp m viên bi lên bảng vuông $n \times n$ thỏa mãn <u>Giả thiết P</u>.

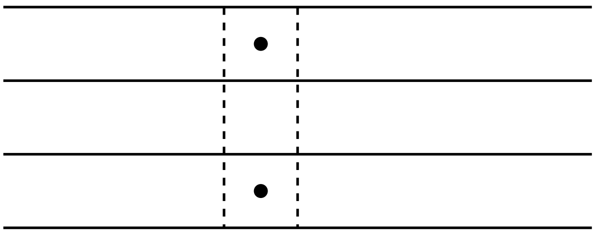
LỜI GIẢI Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_n$ là số bi xếp ở hàng tương ứng là số bi xếp ở hàng tương ứng và $y_1; y_2; \ldots; y_n$ là số bị xếp ở cột tương ứng.
Ta có $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = m$.
Ta phân loại các **Hàng** thành 2 loại:

- Loại 1 **(A): Số hàng loại 1**: Hàng có 1 viên bi $(x_i = 1)$.
- Loại 2 **(B): Số hàng loại 2**: Hàng có ít nhất 2 viên bi $(x_j \geq 2)$.

Ta phân loại các **Cột** thành 2 loại:

- Loại 1 **(C): Số cột loại 1**: Cột có 1 viên bi ($y_i = 1$).
- Loại 2 **(D): Số cột loại 2**: Cột có ít nhất 2 viên bi ($y_j \geq 2$).

Hiển nhiên $A + B = C + D = n$.



Hàng có 1 viên bi

Cột loại 2

Ta có một chú ý quan trọng là bi thuộc hàng loại 1 phải cùng cột với ít nhất một bi khác (giả thiết **(P3)**), do đó, bi thuộc hàng loại 1 phải nằm trong nhóm bi của cột loại 2. Suy ra

$$\begin{pmatrix}\text{Số bi trong nhóm hàng loại 1}\\ = A\end{pmatrix} \leq \text{Số bi trong nhóm cột loại 2,}$$
$$= m - C.$$

Tức là $A \leq m - C \to A + C \leq m$.
Ta có

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m \Rightarrow A + 2D \leq m.$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = m \Rightarrow C + 2D \leq m.$$

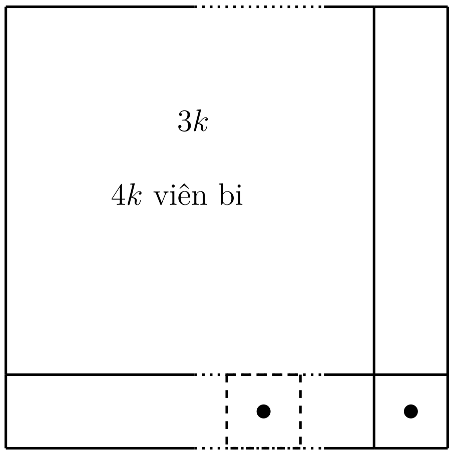
Suy ra $2(A + B + C + D) \leq 3m$ hay là $4n \leq 3m$.
Dẫn đến $m \geq \frac{4n}{3}$ mà $m \in \mathbb{Z}^+$ nên $m \geq \left\lceil \frac{4n}{3} \right\rceil$.
Đẳng thức xảy ra khi

$$n = 3k \to m = 4k \to \text{Trường hợp này tương tự 1b.}$$

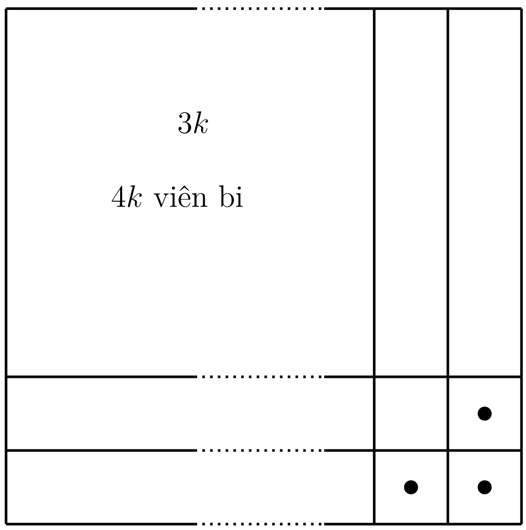
$$n = 3k + 1 \to m = 4k + 2;$$

$$n = 3k + 2 \to m = 4k + 3.$$

Trường hợp 1. $n = 3k + 1$ và $m = 4k + 2$. Tham khảo hình minh họa dưới



Trường hợp 2. $n = 3k + 2$ và $m = 4k + 3$. Tham khảo hình minh họa dưới



Hoàn tất bài toán. □

Tiếp theo, một suy nghĩ nảy sinh khi làm 1b là, vì xếp $N = 3k$ ô đánh dấu cùng hàng, điều này làm cho không thể xếp bi thỏa mãn điều kiện **(P2)**, từ đó cho ra một chặn trên đơn giản là $N \leq 3k - 1$. Thế nếu ta suy nghĩ *Cấm không được đánh dấu tất cả các ô trên cùng hàng, hoặc cùng cột* phải chăng sẽ thu được một bài toán thú vị hơn?

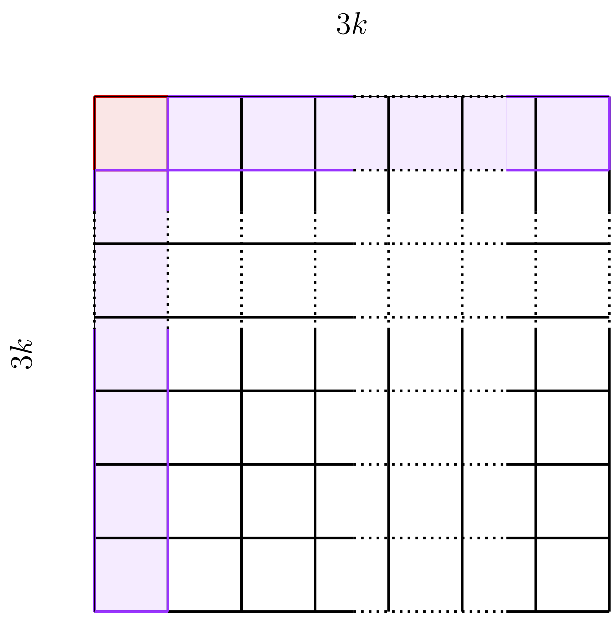
Bài toán 6 (**Vũ Hồng Sơn**) Cho bảng vuông $3k \times 3k$. Tìm N lớn nhất sao cho mọi cách đánh dấu N ô vuông đơn vị của bảng mà không có toàn bộ một hàng hay cột bị đánh dấu, luôn tồn tại cách xếp $4k$ viên bi thỏa mãn Giả thiết P và không có viên bi nào xếp vào ô được đánh dấu.

Nhận xét: Bài toán trở nên thú vị hơn rất nhiều, mặc dù $N_{\max} = 6k - 3$

cũng vẫn khá dễ đoán, đổi lại là chứng minh chiều ngược không còn đơn giản và ngây thơ như bài 1b nữa. Vì lời giải tương đối dài và phức tạp, chúng mình chỉ trình bày vắn tắt, kết hợp với hình minh họa được vẽ hết sức kì công của Bùi Hoàng Nam.

LỜI GIẢI **Dự đoán** $N_{\max} = 6k - 3$.

Nếu $N \geq 6k - 2$: Không thỏa mãn vì khi ta đánh dấu $6k - 2$ ô (các ô màu tím hình vẽ dưới) thì ô màu đỏ sẽ không được đặt bi do nó không cũng hàng hoặc cùng cột với bất kì ô nào khác.

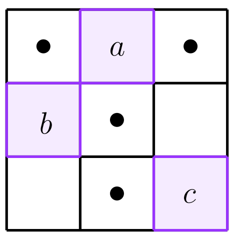


Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $N = 6k - 3$ thỏa mãn bằng quy nạp.

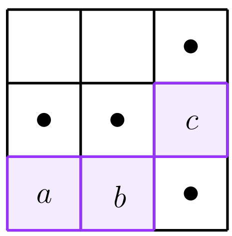
Với $k = 1$ thì $N = 3$.

Ta sẽ chứng minh khi ta đánh dấu 3 ô của bảng 3×3 thì luôn có cách xếp 4 bi bi thỏa mãn Giả thiết P.

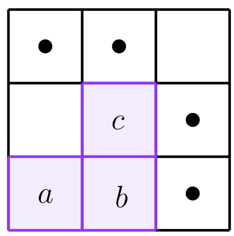
Ta gọi 3 ô được đánh dấu là a, b, c.



Trường hợp 1.



Trường hợp 2.1



Trường hợp 2.2

Trường hợp 1. a, b, c đôi một khác hàng, khác cột. Ta xếp 4 viên bi vào 4 ô cùng hàng và cùng cột với a.

Trường hợp 2. Trong 3 ô a, b, c cùng hàng hoặc cùng cột. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng a và b cùng hàng và c khác hàng với a, b.

- **Trường hợp 2.1.** c khác cột với 2 cột chứa a, b. Khi đó, ta xếp bi vào 4 ô cùng hàng, cùng cột với c.
- **Trường hợp 2.2.** c cũng cột với a hoặc b. Giả sử rằng c cùng cột với b. Tới đây, ta tráo hàng hoặc cột để a, b, c cùng nằm trong 1 hình chữ nhật 2×2, thì ta chỉ cần xếp bi như hình vẽ trên.

Với $k \geq 2$, với bảng $3k \times 3k$ và $6k - 3$ ô bị đánh dấu, để thực hiện được quy nạp, ta **Cần** chọn ra 3 hàng và 3 cột:

(1) Chứa ít nhất 6 ô bị đánh dấu.

(2) Giao của 3 hàng và 3 cột xếp đc 4 bi thỏa mãn Giả thiết P.

(3) Bảng còn lại sau khi xóa 3 hàng 3 cột không có toàn bộ hàng hay cột bị đánh dấu.

Phần còn lại là công việc của quy nạp.

Suy nghĩ: Phải chăng nếu chọn ra 3 hàng có nhiều ô đánh dấu nhất, chắc chắn 3 hàng này chứa 6 ô bị đánh dấu?

Bổ đề. Gọi $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_{3k}$ $(k \geq 2)$ là số ô bị đánh dấu ở mỗi hàng. Giả sử rằng $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_{3k}$ và $a_1 + a_2 + \ldots + a_{3k} = 6k - 3$. Chứng minh rằng

$$a_1 + a_2 + a_3 \geq 6$$

LỜI GIẢI (CHỨNG MINH BỔ ĐỀ)

Ta giả sử phản chứng rằng $a_1 + a_2 + a_3 \leq 5$.
Khi đó

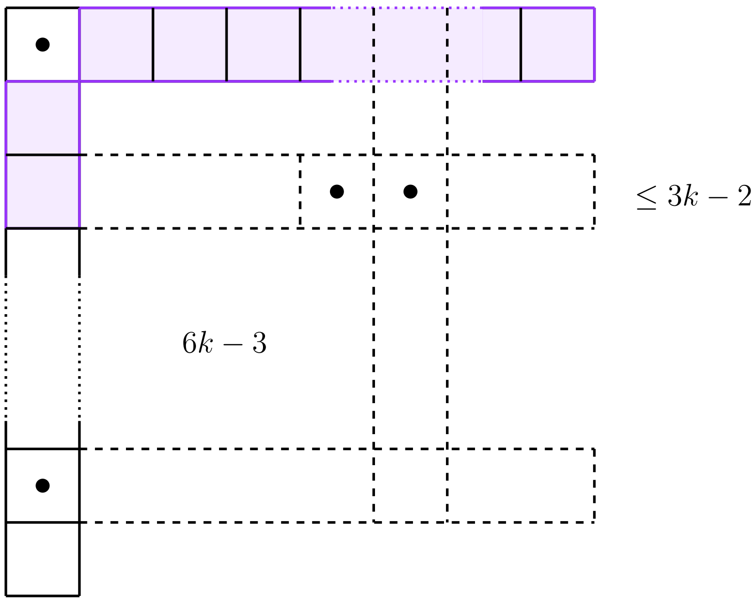
$$5 \geq a_1 + a_2 + a_3 \geq 3a_3 \;\rightarrow\; a_3 \leq 1,$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{3k} \leq a_1 + a_2 + (3k - 2),$$
$$a_1 + a_2 \geq (6k - 3) - (3k - 2) = 3k - 1. \qquad (*)$$

Trường hợp 1. Với $k \geq 3$ thì $(*)$ mâu thuẫn.
Trường hợp 2. $k = 2 \rightarrow x_1 + x_2 \geq 5 \rightarrow x_3 \leq 0 \rightarrow$ Mâu thuẫn. Bổ đề được chứng minh xong. □

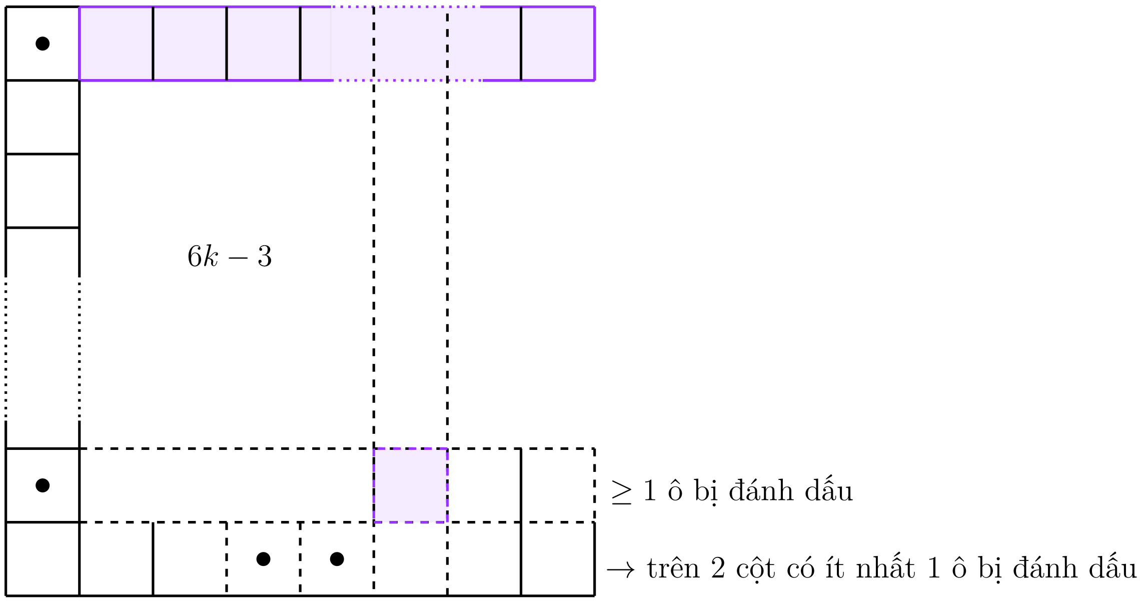
Quay trở lại bài toán: Sau khi chọn ra 3 hàng có nhiều ô đánh dấu nhất, ta chọn tiếp 3 cột như thế nào? Phải chăng cứ chọn cột có ít bi là xong? Nên nhớ câu chuyện không đơn giản như vậy, vì lúc này rất khó đảm bảo bảng con 3×3 chắc chắn xếp được 4 bi. Do đó, ta cũng có thể viết lại yêu cầu lại thành: *Xếp được 4 bi, 2 bi cùng hàng, 2 bi cùng cột mà 3 hàng, 3 cột tương ứng chứa 4 bi đó có ít nhất 6 ô bị đánh dấu.* Tiếp theo nữa, việc đảm bảo bảng còn lại sau khi xóa 3 hàng 3 cột mà các ô đánh dấu không chiếm nguyên 1 hàng hay 1 cột cũng là việc khó khăn. Bạn đọc cần nhớ rằng các hàng, các cột trong bảng là bình đẳng, do đó, ta có thể tráo hàng, tráo cột, thậm chí xoay bảng mà không ảnh hưởng đến bài toán. Do đó trước hết ta tráo các hàng có số ô bị đánh dấu giảm dần từ trên xuống. Ngoài ra, ta cũng giả sử rằng số ô đánh dấu nhiều nhất trên một cột không vượt quá số ô đánh dấu nhiều nhất trên một hàng. Do việc xét các trường hợp là tương đối dài, chúng tôi chỉ trình bày vắn tắt.

Trường hợp 1. Có 1 hàng có $3k-1$ ô bị đánh dấu. Khi này bắt buộc phải có 1 bi xếp vào ô trống còn lại (xét cột 1). Do chỉ có $6k-3$ ô bị đánh dấu, trên cột 1 khi này phải có tối thiểu 2 ô trống (không bị đánh dấu), ta xếp 2 bi ở cột này.

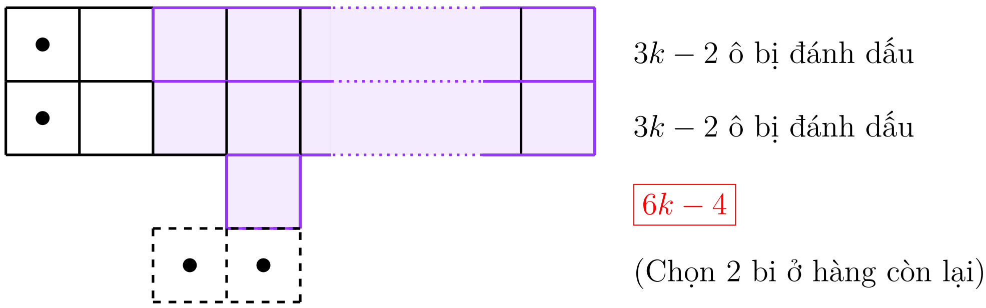
Trường hợp 1.1. Trên cột 1 có ít nhất 1 ô bị đánh dấu, khi đó ta xếp 2 bi trên cột 1 và 2 bi trên một hàng mà 3 hàng 3 cột có ít nhất $3k+1$ ô bị đánh dấu. Khi này bảng con còn lại có không quá $3k-4$ ô bị đánh dấu, đảm bảo giả thiết quy nạp.



Trường hợp 1.2. Trên cột 1 không có ô nào bị đánh dấu. Ta cần xếp 4 bi mà 3 hàng 3 cột của nó có ít nhất $3k+1$ ô bị đánh dấu. Tham khảo hình minh họa dưới.

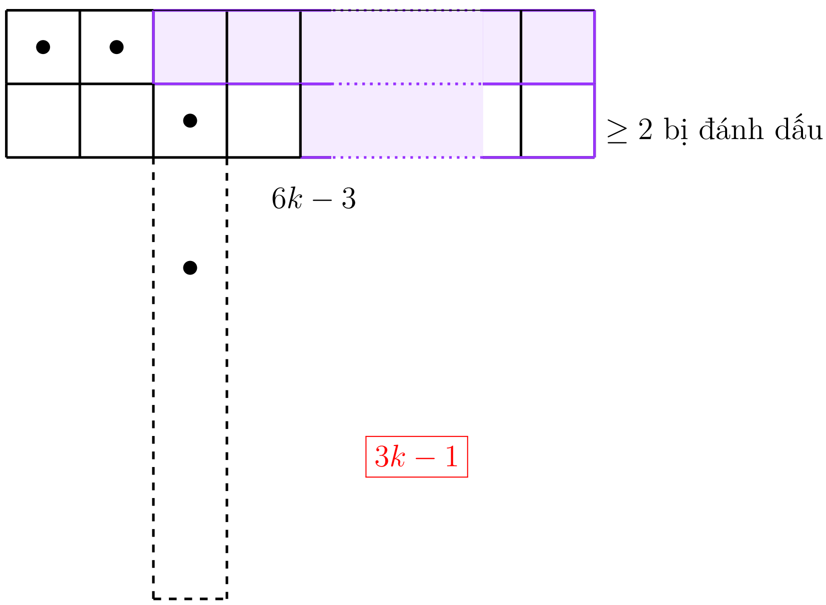


Trường hợp 2. Hàng có nhiều ô đánh dấu nhất có $3k-2$ ô bị đánh dấu.
Tương tự trường hợp 1, ta cũng cần xếp 4 bi để 3 hàng 3 cột của 4 bi đó chứa ít nhất $3k+1$ ô bị đánh dấu. Tham khảo một số trường hợp minh họa dưới đây.
Trường hợp 2.1. Hàng 2 từ trên xuống cũng có $3k-2$ ô bị đánh dấu.

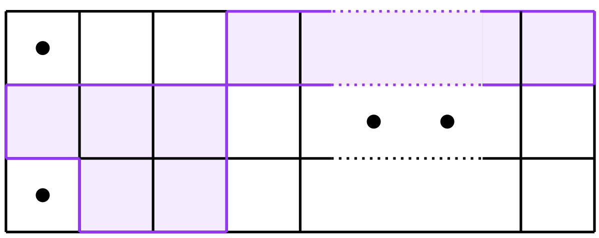


Trường hợp xấu 2.2. Hàng 2 từ trên xuống có ≥ 2 và $\leq 3k-3$ ô bị đánh dấu.

$3k-2$ ô bị đánh dấu



Trường hợp 3. Hàng trên cùng có $3k-3$ ô bị đánh dấu, hay còn lại 3 ô trống.
Tương tự trường hợp 1, ta cũng cần xếp 4 bi để 3 hàng 3 cột của 4 bi đó chứa ít nhất $3k+1$ ô bị đánh dấu. Tham khảo một số trường hợp minh họa dưới đây.
Trường hợp 3.1. Hàng 2 và hàng 3 từ trên xuống ở 3 cột đầu có 1 ô trống. Xếp 4 bi như hình minh họa dưới. Chú ý rằng từ bổ đề trên, ta có $x_1+x_2+x_3 \geq 6$ đảm bảo yêu cầu quy nạp.

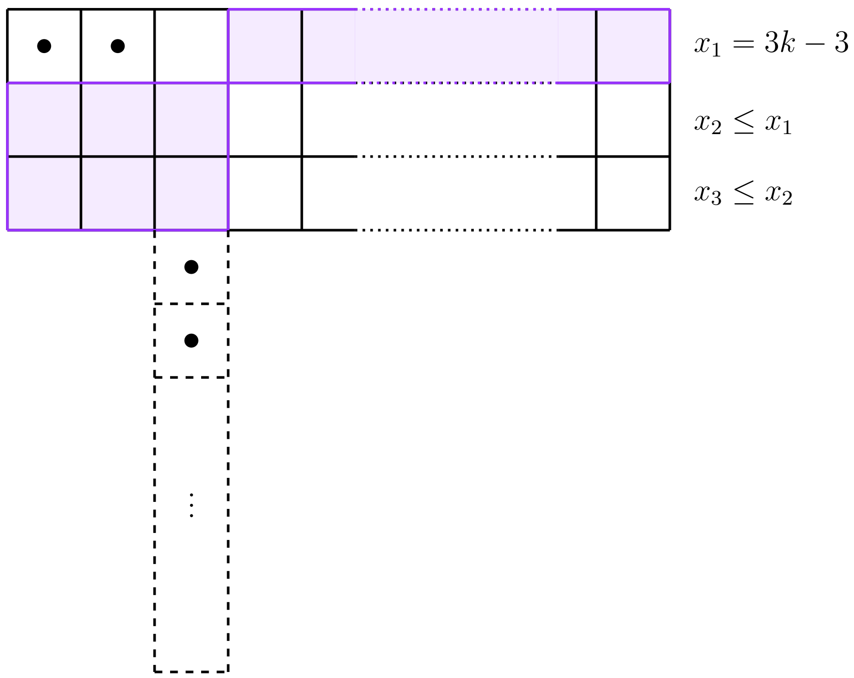


$x_1 = 3k-3$

$x_2 \leq x_1$

$x_3 \leq x_2$

Trường hợp 3.2. Hàng 2 và hàng 3 từ trên xuống ở 3 cột đầu đều bị đánh dấu cả 6 ô. Khi này, trong cột 1, cột 2 hoặc cột 3, tính từ hàng 4 trở xuống, có một cột có ít nhất 2 ô trống. Khi này xếp 2 bi ở hàng 1 và 2 bi ở cột đó (hình minh họa dưới).



Trường hợp 4. Hàng trên cùng có $\leq 3k - 4$ ô bị đánh dấu, hay còn lại ≥ 3 ô trống. Khi này sẽ xếp được 4 bi vào 3 hàng đầu của bảng, thỏa mãn.

Như vậy, trong mọi tình huống, ta luôn chọn được 3 hàng, 3 cột thỏa mãn yêu cầu quy nạp. Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

5. Bài tập rèn luyện

Dưới đây là một số bài tập tương tự để bạn đọc thử sức.

Bài toán 7. Cho bảng vuông $3k \times 3k$. Có bao nhiêu các xếp $4k$ viên bi lên bảng thỏa mãn Giả thiết P.

Bài toán 8. Cho bảng vuông $n \times n$. Tìm m lớn nhất sao cho khi tô đen m ô vuông của bảng, nhưng không được tô đen toàn bộ một hàng hay một cột, luôn có thể chọn ra n ô vuông đôi một khác hàng khác cột mà không có ô nào bị tô đen.

Giả thiết P*: Xếp viên bi vào bảng ô vuông thỏa mãn

(P1) Mỗi ô vuông đơn vị có tối đa **một** viên bi.

(P2) Mỗi hàng, mỗi cột đều có ít nhất **một** viên bi.

(P3*) Mỗi viên bi cùng hàng với ít nhất **một** viên bi khác **và** cùng cột với ít nhất **một** viên bi khác.

Bài toán 9. Cho bảng vuông $n \times n$, hỏi phải xếp ít nhất bao nhiêu viên bi lên bảng để thỏa mãn **Giả thiết P***.

Bài toán 10. Cho bảng vuông $n \times n$, có bao nhiêu cách xếp $2n$ viên bi lên bảng thỏa mãn **Giả thiết P***.

KHÁM PHÁ XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN QUA NHỮNG ỨNG DỤNG THỰC TIỄN VÀ THÚ VỊ

NGUYỄN SONG THIÊN LONG
Trường ĐH Bách khoa TP Hồ Chí Minh
NGUYỄN THÁI AN
Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong TP Hồ Chí Minh
TRẦN ĐÌNH VĨNH THỤY
Trường Đại học École Centrale de Lyon, CNRS

Giới thiệu. *Xác suất có điều kiện (conditional probability) ngày càng trở nên quen thuộc với học sinh trung học phổ thông khi nội dung này được đưa vào chương trình giảng dạy mới (2018). Xác suất có điều kiện có nhiều ứng dụng phong phú, đặc biệt trong các lĩnh vực khoa học dữ liệu, trí tuệ nhân tạo và thống kê. Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu lại khái niệm xác suất có điều kiện và đặc biệt trình bày một số ứng dụng thực tiễn và thú vị của nó. Thông qua các ví dụ cụ thể, chúng tôi hy vọng giúp bạn đọc, đặc biệt là học sinh trung học, hiểu sâu hơn về ý nghĩa của loại xác suất này và tính ứng dụng rộng rãi của nó.*

1. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1.1. Xác suất có điều kiện

Cho A và B là hai biến cố bất kỳ. Khi đó, xác suất của biến cố B xảy ra với điều kiện biến cố A đã xảy ra được gọi là xác suất có điều kiện của B theo A, ký hiệu là $P(B|A)$. Công thức xác suất có điều kiện được xác định như sau.

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad \text{với } P(A) > 0. \tag{1}$$

Trong suy diễn *Bayes*, $P(B|A)$ còn được gọi là xác suất hậu nghiệm *(posterior probability)*, tức là cho ta biết xác suất xảy ra biến cố B sau khi đã biết điều kiện A. Rõ ràng, nó trái ngược với xác suất tiên nghiệm *(prior probability)*, ký hiệu $P(B)$, thể hiện ước lượng ban đầu (niềm tin) về xác suất xảy ra của B mà không cần quan sát thêm dữ liệu A, chỉ dựa trên kinh nghiệm có từ trước. Như vậy, nói cách khác, Đẳng thức (1) giúp cập nhật xác suất tiên nghiệm thành xác suất hậu nghiệm của một biến cố sau khi xem xét thêm thông tin mới.

Xác suất có điều kiện rất quan trọng và phổ biến trong nhiều lĩnh vực, có thể kể đến là học máy *(machine learning)*, đặc biệt là các mô hình phân loại *(classification)*, khi mục tiêu chính là điều chỉnh mô hình *(model)* để có thể dự đoán nhãn Y chính xác dựa trên dữ liệu đầu vào X. Điều này tương ứng với việc tính xác suất hậu nghiệm $P(Y|X)$, cho biết khả năng một mẫu thuộc về lớp Y sau khi quan sát đặc trưng đầu vào *(feature)* X.

1.2. Định lý *Bayes*

Đẳng thức (1) còn được gọi là định lý *Bayes*, với dạng đầy đủ được phát biểu như sau.

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P\left(\overline{B}\right)P\left(A|\overline{B}\right)}, \tag{1}$$

với A, B là hai biến cố bất kì thỏa mãn $P(A) > 0$ và $0 < P(B) < 1$.

Chứng minh. Theo định nghĩa của xác suất có điền kiện, với $P(B) > 0$, ta luôn có

$$P(AB) = P(BA) = P(B)P(A|B).$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P\left(\overline{B}\right)P\left(A|\overline{B}\right). \qquad (2)$$

Rõ ràng, AB và $A\overline{B}$ là hai biến cố xung khắc, nên theo quy tắc cộng

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AB) + P\left(A\overline{B}\right) \\ &= P(B)P(A|B) + P\left(\overline{B}\right)P\left(A|\overline{B}\right), \end{aligned}$$

với $P(B) > 0$ và $P\left(\overline{B}\right) > 0$, tức là $0 < P(B) < 1$.

Phép chứng minh được hoàn tất. □

Chú ý. Dễ thấy $P(A)P(B|A) = P(AB) = P(B)P(A|B)$.

Bình luận. Chúng ta có một số quan sát về xác suất có điều kiện và định lý *Bayes* như sau.

- Với mọi biến cố A và B, trong đó $P(A) > 0$, ta có

$$P\left(\overline{B}|A\right) = 1 - P(B|A). \qquad (3)$$

- Với A và B là hai biến cố độc lập, trong đó $0 < P(A) < 1$ thì ta có

$$P(B|A) = P\left(B|\overline{A}\right) = P(B) \qquad (4)$$

  Từ đẳng thức (4), ta thấy khi A và B độc lập thì việc biến cố A xảy ra hay không xảy ra không làm ảnh hưởng đến xác suất của biến cố B.

- *(Mở rộng định lý Bayes)* Giả sử tập hợp các *giả thuyết khả dĩ* $\{H_1, H_2, .., H_n\}$ tạo thành một phân hoạch của không gian mẫu, tức là $\sum_j P(H_j) = 1$. Khi đó, xác suất hậu nghiệm của giả thuyết H_i khi quan sát biến cố A được tính theo công thức

$$P(H_i|A) = \frac{P\left(A|H_i\right)P(H_i)}{\sum_j P(A|H_j)P(H_j)}, \quad \text{với } P(A) > 0. \qquad (5)$$

  Các xác suất hậu nghiệm $P(H_i|A)$ tạo thành một *phân phối xác suất* trên các giả thuyết H_i, trong đó tổng xác suất của toàn bộ phân phối này bằng 1, hay $\sum_i P(H_i|A) = 1$. Ta thấy đẳng thức (3) chính là trường hợp riêng cho $i = 2$.

  Đẳng thức (5) hiện hữu rất thường xuyên trong thực tế, ví dụ từ góc nhìn của học máy, H_i có thể được hiểu là một nhãn *(label)* và A là đặc trưng quan sát được của dữ liệu *(data)*; còn trong y khoa, H_i có thể được xem là một bệnh và A là triệu chứng.

- Trong đẳng thức (5), $\sum_j P(A|H_j)P(H_j)$ còn được gọi là *xác suất toàn phần* của A. Đẳng thức (2) là trường hợp riêng cho $j = 2$.

2. MỘT SỐ ỨNG DỤNG THÚ VỊ

Vấn đề 1. (Urn Problem) Có hai hộp đựng các viên bi cùng kích thước và khối lượng. Hộp thứ nhất chứa 5 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh, hộp thứ hai chứa 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai, sau đó lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ hai. Giả sử viên bi được lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ, tính xác suất viên bi lấy ở hộp thứ hai đó cũng chính là viên bi lấy ở hộp thứ nhất ở lần lấy đầu.

Lời giải. Gọi A là biến cố "Viên bi lấy được ở hộp thứ nhất là bi đỏ", khi đó $\overline{A}$ là biến cố "Viên bi lấy được ở hộp thứ nhất là bi xanh". Gọi B là biến cố "Viên bi lấy được ở hộp thứ hai là bi đỏ", khi đó $\overline{B}$ là biến cố "Viên bi lấy được ở hộp thứ hai là bi xanh".

Trước tiên, ta sẽ tính xác suất viên bi lấy được ở hộp thứ nhất là bi đỏ. Vì ban đầu, hộp thứ nhất chứa 5 bi xanh và 5 bi đỏ nên $P(A) = {}^5/_{10} = {}^1/_2$, suy ra $P\left(\overline{A}\right) = 1 - {}^1/_2 = {}^1/_2$.

- Nếu ở lần thứ nhất, ta bốc được bi đỏ rồi chuyển sang hộp thứ hai, khi đó hộp thứ hai sẽ có 7 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Do đó $P(B|A)$ là xác suất của biến cố "Bốc được bi đỏ ở hộp thứ hai nếu lần 1 bốc được bi đỏ" và được tính bởi
$$P(B|A) = \frac{7}{7+4} = \frac{7}{11}.$$
- Nếu ở lần thứ nhất, ta bốc được bi xanh rồi chuyển sang hộp thứ hai, khi đó hộp thứ hai sẽ có 6 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh. Do đó $P\left(B|\overline{A}\right)$ là xác suất của biến cố "Bốc được bi đỏ ở hộp thứ hai nếu lần 1 bốc được bi xanh" và
$$P\left(B|\overline{A}\right) = \frac{6}{6+5} = \frac{6}{11}.$$

Lúc này $P(A|B)$ chính là xác suất của biến cố "Bốc được bi đỏ ở lần thứ nhất nếu lần thứ hai bốc được bi đỏ". Theo *Bayes*, ta có

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P\left(B|\overline{A}\right)P\left(\overline{A}\right)} \\ &= \frac{{}^7/_{11} \cdot {}^1/_2}{{}^7/_{11} \cdot {}^1/_2 + {}^6/_{11} \cdot {}^1/_2} = \frac{7}{13}. \end{aligned}$$

Ta thấy rằng, nếu biến cố $P(A|B)$ xảy ra, tức là lần một bốc được bi đỏ và chuyển qua hộp hai, sau đó ở hộp hai bốc được bi đỏ tiếp, thì khi đó xác suất để bốc được chính viên bi đỏ lấy ở hộp thứ nhất trong hộp thứ hai sẽ bằng

$$\frac{P(A|B)}{\text{số bi đỏ có ở hộp thứ hai} + 1} = \frac{7/13}{7} = \frac{1}{13}.$$

Vậy xác suất cần tìm là $1/13$.

Bình luận. Bài toán mở đầu này vận dụng kiến thức liên quan đến xác suất có điều kiện và công thức *Bayes*, đòi hỏi ta cần phải định nghĩa các biến cố một cách hợp lý và khéo léo.

Vấn đề 2. (Kahneman & Tversky) Một loại dịch bệnh (hiếm) có 1% số người mắc phải, các nhà khoa học tìm ra một phương pháp xét nghiệm để chẩn đoán căn bệnh này. Tuy vậy loại xét nghiệm này có sai số: đối với những người mắc bệnh, xét nghiệm có độ chính xác là 95%; đối với những người không mắc bệnh, độ chính xác là 90%. Nếu một người đi xét nghiệm có kết quả là dương tính, thì khả năng thực sự mắc bệnh của người đó là bao nhiêu?

Lời giải. Gọi A là biến cố "Người xét nghiệm là bị bệnh". Vậy $P(A) = 1\%$. Lúc này $\overline{A}$ là biến cố "Người xét nghiệm là không bị bệnh" và $P\left(\overline{A}\right) = 99\%$.

Gọi B là biến cố "Kết quả xét nghiệm là dương tính", $\overline{B}$ là biến cố "Kết quả xét nghiệm là âm tính". Vậy ta cần tìm $P(A|B)$.

Từ giả thiết đề bài ta có $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = 95\%$ hay $P(AB) = 1\% \cdot 95\%$. Lại có

$$P\left(\overline{B}|\overline{A}\right) = 1 - P\left(B|\overline{A}\right) = 1 - \frac{(\overline{A}B)}{P(\overline{A})} = 90\%,$$

hay $P\left(\overline{A}B\right) = 99\% \cdot 10\%$.

Do đó, với BA và $B\overline{A}$ là hai biến cố xung khắc, thì

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(BA) + P\left(B\overline{A}\right)} = \frac{0,95\%}{0,95\% + 9,9\%} \approx 8,76\%.$$

Bình luận. Với những căn bệnh hiếm gặp, xét nghiệm cần có độ chính xác cực kì lớn để có thể chắc chắn người xét nghiệm cho kết quả dương tính thực sự bị bệnh; có thể xét nghiệm nhiều lần, nếu các kết quả là dương tính thì ta chắc chắn hơn là người đó thực sự bị bệnh. Hoặc cách khác là dùng nhiều loại xét nghiệm hoặc căn cứ vào các triệu chứng khác nhau của bệnh. Điều này có giải thích tại sao trong đại dịch *Covid-19*, việc xét nghiệm nhiều lần được áp dụng để giảm thiểu nguy cơ sai sót và xác nhận chắc chắn tình trạng nhiễm bệnh, lúc *kit test* nhanh chưa có độ chính xác cao.

Vấn đề 3. (Monty Hall) Giả sử bạn là thí sinh tham dự một chương trình với phần thưởng thắng cuộc là một chiếc xe hơi. Bạn bắt đầu vòng chơi và trước mặt bạn là 3 ô cửa. *Monty* cho bạn biết đằng sau 3 ô cửa này có 2 cửa là con dê, cửa còn lại là chiếc xe hơi giá trị. Ban đầu bạn chọn 1 ô cửa bất kì trong 3 ô cửa và *Monty* sẽ mở cho bạn 1 ô cửa, trong 2 ô cửa không được chọn, chứa con dê. *Monty* cho bạn cơ hội để đổi sự lựa chọn sang ô cửa còn lại. Câu hỏi đặt ra là liệu việc đổi sang ô cửa còn lại có tăng xác suất bạn nhận được chiếc xe hơi?

Cách 1. Đánh số 3 ô cửa theo thứ tự 1, 2, 3. Không mất tính tổng quát, giả sử bạn chọn ô cửa số 1.

Kí hiệu ô cửa chứa chiếc xe là X, ô cửa chứa con dê là D.

Ta liệt kê các trường hợp có thể xảy ra như sau.

- X, D, D: *Monty* sẽ mở ô cửa số 2 hoặc số 3. Nếu bạn đổi, bạn được con dê; nếu bạn không đổi, bạn được chiếc xe.
- D, X, D: *Monty* sẽ mở ô cửa số 3. Nếu bạn đổi, bạn được chiếc xe; nếu bạn không đổi, bạn được con dê.
- D, D, X: *Monty* sẽ mở ô cửa số 2. Nếu bạn đổi, bạn được chiếc xe; nếu bạn không đổi, bạn được con dê.

Ta thấy rằng xác suất bạn nhận được chiếc xe nếu giữ nguyên sự lựa chọn ban đầu (trước khi *Monty* gợi ý) là $1/3$, còn nếu đổi (sau khi *Monty* gợi ý) thì xác suất tăng lên $2/3$.

Cách 2. Không mất tính tổng quát, ta giả sử bạn chọn ô cửa số 1 và *Monty* mở ô cửa số 2 (đằng sau là con dê).

Gọi X là biến cố "Chiếc xe ở ô cửa số 1", Y là biến cố "*Monty* mở ô cửa số 2".

Lúc lựa chọn ban đầu, bạn không biết chiếc xe nằm ở vị trí nào nên $P(X) = 1/3$. Sau khi bạn lựa chọn 1 ô cửa, *Monty* sẽ mở 1 ô cửa chứa con dê trong 2 ô cửa còn lại nên $P(Y) = 1/2$.

Ta có $P(Y|X) = 1/2$ (do nếu biết chiếc xe nằm ở ô cửa số 1 thì *Monty* chỉ có thể mở 1 trong 2 ô cửa còn lại) nên $\frac{P(YX)}{P(X)} = \frac{1}{2}$ hay $P(YX) = 1/6$. Do đó

$$P(X|Y) = \frac{P(XY)}{P(Y)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra $P\left(\overline{X}|Y\right) = 1 - P(X|Y) = \frac{2}{3}$.

Như vậy, xác suất để chiếc xe nằm ở ô cửa số 1 nếu *Monty* mở ô cửa số 2 là $1/3$ và xác suất chiếc xe không nằm ở ô cửa số 1 (tức là nằm ở ô cửa số 3) nếu *Monty* mở ô cửa số 2 là $2/3$.

Bình luận. Việc đổi ô cửa đã lựa chọn ban đầu giúp tăng xác suất bạn nhận được chiếc xe lên 2 lần! Việc này có vẻ khá khó tin, nên ta có thể kiểm tra kết quả bằng lập trình. Chúng tôi viết một hàm để kiểm tra xác suất nhận được chiếc xe nếu đổi cửa và không đổi cửa, bằng ngôn ngữ *Python* như sau.

```
import random
def MontyHall(N):
    OriginalChance = 0
    ChangeMindChance = 0
```

```python
    for _ in range(N):
        # Giả sử bạn chơi trong N lần
        PrizeDoor = random.randint(1, 3)
        # Chiếc xe nằm ở ngẫu nhiên một trong ba ô cửa
        ChooseDoor = random.randint(1, 3)
        # Bạn chọn ngẫu nhiên một trong ba ô cửa
        while True:
            OpenDoor = random.randint(1, 3)
            if (OpenDoor != PrizeDoor) and (OpenDoor != ChooseDoor):
                break
        # Ô cửa Monty mở phải khác ô cửa bạn chọn ban đầu và khác ô cửa chứa chiếc xe
        while True:
            ChangeMind = random.randint(1, 3)
            if (ChangeMind != OpenDoor) and (ChangeMind != ChooseDoor):
                break
        # Ô cửa chọn lại phải khác ô cửa Monty vừa mở và khác ô cửa bạn chọn ban đầu
        if ChooseDoor == PrizeDoor:
            OriginalChance += 1
        if ChangeMind == PrizeDoor:
            ChangeMindChance += 1
    # Xác suất bạn nhận được chiếc xe nếu đổi cửa và không đổi cửa
    print(f"Xác suất thắng nếu đổi cửa: {round(ChangeMindChance / N, 2)}")
    print(f"Xác suất thắng nếu giữ nguyên cửa: {round(OriginalChance / N, 2)}")
# Chạy thử nghiệm với 10,000 lần chơi
MontyHall(10000)
```

Do là xác suất của biến cố được tính theo định nghĩa *thống kê* nên nếu tham số `N` càng lớn thì các giá trị mà hàm trả về (`ChangeMindChance/N` và `OriginalChance/N`) càng chính xác. Trong 3 lần chạy chương trình trên, các giá trị mà hàm `MontyHall(10000)` trả về là `[0.67, 0.33]`, `[0.66, 0.34]`, `[0.67, 0.33]`. Như vậy, ta xem như có được các xấp xỉ `ChangeMindChance/N` $\approx$ $^2/_3$ và `OriginalChance/N` $\approx$ $^1/_3$.

Mở rộng. Có n ô cửa ($n \geqslant 3$), nếu bạn chọn trước 1 ô bất kì, *Monty* loại cho bạn $n-2$ ô cửa chứa con dê trong $n-1$ ô cửa còn lại, thì việc đổi ô cửa đã chọn ban đầu sẽ giúp bạn tăng xác suất trúng xe lên $n-1$ lần.

Vấn đề 4. (Murder trial of O. J. Simpson) Theo thống kê, có 5000 vụ giết phụ nữ ở Mỹ năm 1994, trong đó 1500 vụ là do chồng. Trong đó, *O. J. Simpson* bị cáo buộc giết vợ *(Nicole Simpson)* và bạn của cô *(Ron Goldman)*. Một trong những luận điểm của luật sư bào chữa *Alan Dershowitz* khi đối mặt với bên công tố là

"Chỉ 1 *trên* 1000 *người chồng bạo hành sẽ giết vợ mình."*

Dershowitz cho rằng xác suất *Simpson* phạm tội chỉ là $^1/_{1000}$, vì vậy không đủ để kết tội ông ta dựa trên yếu tố bạo hành trong quá khứ. Qua quá trình điều tra, cảnh sát thu thập được một số chứng cứ buộc tội *Simpson* như sau.

1. *Simpson* có lịch sử bạo hành đối với *Nicole*.

2. Găng tay dính máu được tìm thấy tại nhà *Simpson* khớp với hiện trường vụ án.

3. Máu trong xe và nhà *Simpson* khớp với máu tại hiện trường.

Câu hỏi đặt ra là *"Lập luận của Dershowitz có hợp lý không?"*

Lời giải. Trước tiên, ta thấy rằng lập luận của luật sư *Dershowitz* ý muốn bào chữa rằng tỉ lệ mà *Simpson* giết vợ là rất thấp, chỉ $1/1000$. Tuy nhiên, xác suất này là thống kê chủ quan, chưa bao gồm các bằng chứng mà phía công tố viên đưa ra nhằm cáo buộc tội danh của *Simpson*. Cụ thể, bài toán cần xem xét xác suất có điều kiện, bao gồm các bằng chứng khác như đã nêu ở trên đề và điều quan trọng là *Nicole* đã bị giết.

Ta gọi các biến cố G, B, M lần lượt là các biến cố "Người chồng đã giết vợ", "Người chồng có lịch sử bạo hành", và "Vợ đã bị giết". Khi đó, $\overline{G}$ là biến cố người chồng không giết vợ.

Dershowitz chỉ tập trung vào $P(G|B) = 1/1000$, nhưng rõ ràng cần nhấn mạnh đến điều kiện M, tức xác suất $P(G|BM)$.

Ta có $P(G|B) = 1/1000$, suy ra $P\left(\overline{G}|B\right) = 999/1000$. Nếu chồng thực sự giết vợ, xác suất người vợ bị giết là 100% nên $P(M|GB) = 1$. Trong năm xảy ra vụ án, có tổng cộng 5000 phụ nữ bị giết ở Mỹ, trong đó 1500 vụ là do chồng giết. Tổng dân số phụ nữ là 100 triệu người. Dựa vào dữ liệu này, xác suất một phụ nữ bị giết nhưng không phải do chồng, dù chồng có tiền sử bạo hành vợ trong dân số chung là

$$P\left(M|\overline{G}B\right) = \frac{3500}{100000000} = \frac{7}{200000}.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
P(G|BM) &= \frac{P(MGB)}{P(MB)} \\
&= \frac{P(M|GB)P(G|B)P(B)}{P(M|B)P(B)} \\
&= \frac{P(M|GB)P(G|B)}{P(M|B)} \\
&= \frac{P(M|GB)P(G|B)}{P(M|BG)P(G|B) + P\left(M|B\overline{G}\right)P\left(\overline{G}|B\right)} \\
&= \frac{1 \cdot 1/1000}{1 \cdot 1/1000 + 7/200000 \cdot 999/1000} \approx 96,62\%.
\end{aligned}$$

Từ đây ta kết luận được rằng, xác suất người chồng phạm tội với điều kiện đã biết (vợ bị giết và người chồng có lịch sử bạo hành) là khoảng $96,62\%$. Điều này cho thấy lập luận của luật sư biện hộ là không hợp lý, vì ông ta bỏ qua thông tin quan trọng rằng vụ giết người đã xảy ra.

Thông tin bổ sung. Kết thúc vụ án *O. J. Simpson*, vào ngày 3 tháng 10 năm 1995, *O. J. Simpson* được tuyên bố vô tội trong phiên tòa hình sự sau khi các luật sư của ông thành công trong việc làm suy yếu các bằng chứng và lập luận rằng *Simpson* bị vu oan. Tuy nhiên, trong một phiên tòa dân sự sau đó (năm 1997), hội đồng xét xử kết luận *Simpson* có trách nhiệm dân sự trong cái chết của *Nicole Brown* và *Ron Goldman*. Kết quả là *Simpson* bị yêu cầu bồi thường cho gia đình các nạn nhân một khoản tiền lớn, lên tới hơn 30 triệu đô la Mỹ. Mặc dù ông không bị kết tội trong vụ án hình sự, nhưng kết quả phiên tòa dân sự cho thấy một cái kết khác cho sự việc. Vụ án này đã gây ra sự tranh cãi lớn về vấn đề chủng tộc, quyền lực của giới nổi tiếng, và sự công bằng của hệ thống tư pháp Mỹ.

Bình luận. Trong một vụ án hình sự quan trọng như vụ án *O. J. Simpson*, xác suất có điều kiện là công cụ quan trọng để phân tích khả năng xảy ra các sự kiện có liên quan. Nó có thể giúp các luật sư đưa ra lập luận rằng các bằng chứng không đủ mạnh để chứng minh tội phạm của *Simpson* một cách chắc chắn 100%. Những lý thuyết về xác suất này giúp xác định liệu các tình huống có thể xảy ra mà không cần biết *Simpson* phải là thủ phạm hay không.

Vấn đề 5. (Spam Filtering) Giả sử ta có một mô hình phân loại email thành hai loại gồm thư rác *(spam)* và thư hợp lệ *(ham)*. Mỗi email có thể chứa nhiều từ khóa đặc trưng, và mục tiêu là ước lượng xác suất một email là thư rác dựa trên hai yếu tố sau.

- Email có chứa từ "khuyến mãi" hay không?
- Người gửi có phải người lạ hay không?

Giả sử ta có tập dữ liệu huấn luyện mô hình như sau.

ID	**Nội dung**	**Người gửi lạ?**	**Nhãn**
1	"Giảm giá khuyến mãi"	Có	Spam
2	"Ưu đãi đặc biệt hôm nay"	Không	Spam
3	"Hội thảo khoa học miễn phí"	Có	Ham
4	"Mua ngay kẻo lỡ"	Có	Spam
5	"Bài báo khoa học mới nhất"	Không	Ham
6	"Cập nhật nghiên cứu"	Không	Ham

Bây giờ, giả sử người dùng nhận được một email mới có chứa từ "khuyến mãi" và được gửi từ người quen. Khi đó, mô hình sẽ dự đoán email thuộc loại nào?

Lời giải. Ta có hai lớp $C_1 = \text{Spam}$ và $C_2 = \text{Ham}$. Gọi X là đặc trưng của email mới, với $x_1 = \text{Có}$ (chứa từ "khuyến mãi"), và $x_2 = \text{Không}$ (người gửi không lạ).

Như vậy, để xem mô hình sẽ dự đoán email mới có đặc trưng X rơi vào lớp nào, ta chỉ cần so sánh xác suất hậu nghiệm $P(C_1|X)$ và $P(C_2|X)$. Lại có

$$P(C_i|X) = \frac{P(X|C_i)\,P(C_i)}{P(X)}, \quad \text{với } i = 1, 2.$$

Vì $P(X) = \text{const}$, nên ta chỉ cần tính $P(X|C_i)\,P(C_i)$.

Ta có xác suất tiên nghiệm của các lớp là

$$P(C_1) = P(\text{Spam}) = \frac{3}{6}, \quad P(C_2) = P(\text{Ham}) = \frac{3}{6}.$$

Giả sử các điều kiện x_1 và x_2 độc lập với nhau, khi đó rõ ràng ta có thể xem

$$P(X|C_i) = P(x_1, x_2|C_i) \approx P(x_1|C_i)\,P(x_2|C_i).$$

Từ dữ liệu đang có, ta tính được

$$\begin{aligned} P(x_1 = \text{Có}|\text{Spam}) = \frac{1}{3}, &\quad P(x_2 = \text{Không}|\text{Spam}) = \frac{1}{3}, \\ P(x_1 = \text{Có}|\text{Ham}) = 0, &\quad P(x_2 = \text{Không}|\text{Ham}) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} P(X|C_1)P(C_1) &= P(x_1 = \text{Có}|\text{Spam}) \cdot P(x_2 = \text{Không}|\text{Spam}) \cdot P(\text{Spam}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X|C_2)P(C_2) &= P(x_1 = \text{Có}|\text{Ham}) \cdot P(x_2 = \text{Không}|\text{Ham}) \cdot P(\text{Ham}) \\ &= 0 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Vậy hệ thống dự đoán email mới nhận được là thư rác.

Bình luận. Giá trị xác suất nhỏ $1/18$ xuất hiện là do chúng ta chưa thực hiện chuẩn hóa bằng cách chia cho $P(X)$. Tuy nhiên, trong quá trình so sánh giữa các lớp, việc tính $P(X)$ là không cần thiết vì nó chỉ đóng vai trò là một hằng số trong công thức *Bayes*. Hơn nữa, nếu tính trực tiếp $P(X)$ bằng công thức xác suất toàn phần $P(X) = \sum_i P(X|C_i)P(C_i)$, thì khối lượng tính toán sẽ tăng đáng kể, đặc biệt khi số lượng lớp và số lượng đặc trưng lớn. Trên thực tế, cách gán nhãn này tuân theo nguyên tắc phân loại *Maximum A Posteriori* (MAP), tức là gán nhãn C^* cho X nếu $C^* = \arg\max_{C_i} P(C_i|X)$, trong đó C^* là nhãn có xác suất hậu nghiệm lớn nhất trong tập phân phối xác suất $\{P(C_1|X), P(C_2|X), .., P(C_n|X)\}$. Và cách tiếp cận trong lời giải của vấn đề trên chính là nền tảng của thuật toán phân loại nổi tiếng trong học máy, *Naïve Bayes*.

Mô hình Naïve Bayes. Giả sử ta có một tập hợp các lớp $C_1, C_2, .., C_n$ và một dữ liệu đầu vào X. Như đã giới thiệu, mục tiêu của mô hình phân loại là tính xác suất hậu nghiệm $P(C_i|X)$. Theo *Bayes*, ta có

$$P(C_i|X) = \frac{P(X|C_i)P(C_i)}{P(X)}.$$

Vì $P(X)$ là hằng số khi so sánh giữa các lớp C_i, nên ta chỉ cần xét tử số

$$P(C_i|X) \propto P(X|C_i)P(C_i).$$

Khi dữ liệu đầu vào X bao gồm nhiều đặc trưng $X = (x_1, x_2, .., x_n)$, mô hình *Naïve Bayes* giả định rằng các đặc trưng này độc lập với nhau khi đã biết lớp C_i (giả sử "ngây ngô" *(naive)* này chính là nguyên nhân chính của tên gọi *Naïve Bayes*). Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} P(X|C_i) &= P(x_1, x_2, .., x_n|C_i) \\ &\approx P(x_1|C_i)P(x_2|C_i)..P(x_n|C_i). \end{aligned}$$

Nhờ giả định này, công thức xác suất hậu nghiệm trở thành

$$P(C_i|x_1, x_2, .., x_n) \propto P(C_i) \prod_j P(x_j|C_i). \tag{1}$$

Công thức (1) cho thấy rằng xác suất của dữ liệu đầu vào thuộc một lớp C_i được tính bằng tích của xác suất tiên nghiệm $P(C_i)$ và xác suất có điều kiện $P(x_j|C_i)$ của từng đặc trưng quan sát được khi biết lớp *(likelihood)*.

Như vậy, mô hình *Naïve Bayes* cung cấp một phương pháp phân loại đơn giản nhưng hiệu quả trong học máy. Nhờ vào giả định độc lập có điều kiện, nó giúp giảm đáng kể độ phức tạp tính toán, đặc biệt trong những bài toán có nhiều đặc trưng. Dù giả định này có thể không hoàn toàn chính xác trong thực tế, mô hình này vẫn hoạt động tốt trong nhiều ứng dụng, trong đó có hệ thống lọc thư rác của *Gmail*. Một lợi thế quan trọng của *Naïve Bayes* là khả năng cập nhật mô hình nhanh chóng khi có dữ liệu mới. Khi người dùng đánh dấu một email là *spam*, hệ thống không cần huấn luyện lại toàn bộ mô hình từ đầu, mà chỉ cần cập nhật các thống kê xác suất dựa trên nhãn mới. Nhờ đó, độ phức tạp tính toán cho suy luận của *Naïve Bayes* chỉ ở mức $O(1)$. Chính vì vậy, mỗi lần người dùng báo cáo thư rác, họ đang gián tiếp đóng góp vào việc cải thiện độ chính xác của bộ lọc thư rác trong *Gmail*. Giống như hầu hết các mô hình học máy, chất lượng và số lượng dữ liệu đóng vai trò quan trọng. Khi tập dữ liệu huấn luyện ngày càng phong phú, với nhiều email được gán nhãn chính xác, mô hình *Naïve Bayes* có thể phân loại email hiệu quả hơn, giảm thiểu sai sót và cải thiện trải nghiệm người dùng.

Tài liệu tham khảo

[1] Đoàn Quỳnh (Chủ biên), *Tài liệu chuyên Toán Đại số và Giải tích 11*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2019.

[2] K. H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications (7th edition)*, McGraw-Hill, 2012.

[3] Quản Thành Thơ, *Mạng nơ-ron nhân tạo: từ hồi quy đến học sâu*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh, 2023.

Epsilon
Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

Đa Thức Số Học

Hồ Tuấn Phát (Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Trước hết, chúng ta nhắc lại các tính chất số học của đa thức hệ số nguyên.

Định lý 1 Cho $f(x) \in \mathbb{Z}_[x]$ và a, b là các số nguyên dương phân biệt. Khi đó:

$$a - b \mid f(a) - f(b).$$

Chứng minh: Đặt $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdot + x \cdot a_1 + a_0,\ a_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = \overline{1.n}$.
Ta có

$$a^k - b^k \vdots a - b,\ \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Khi đó:

$$f(a) - f(b) = a_n(a^n - b^n) + a_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + \cdots + a_1(a - b) \vdots a - b.$$

Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét 1 Từ kết quả của định lí 1, ta có kết quả sau

$$a \equiv b \pmod c \Rightarrow f(a) \equiv f(b) \pmod c.$$

Kết quả này là hiển nhiên, vì

$$c \mid a - b \mid f(a) - f(b).$$

Định lý 2 (Bổ đề tiếp tuyến) Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$, p là một số nguyên tố, các số $x,\ x_0 \in \mathbb{Z}$ thoả $p \mid x - x_0$. Khi đó, ta có:

$$P(x) \equiv P'(x_0)(x - x_0) + P(x_0) \pmod{p^2}.$$

Chứng minh: Với chú ý rằng $\dfrac{P^{(k)}(x)}{k!} \in \mathbb{Z}$, vì đạo hàm cấp k của P có các số hạng chia hết cho $k!$ khi đó, xét khai triển Taylor của $P(x)$ tại x_0 ta có:

$$P(x) = P(x_0) + \frac{x - x_0}{1!}P'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}P''(x) + \cdots \equiv P'(x_0)(x - x_0) + P(x_0) \pmod{p^2}.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Định lý 3 (HENSEL LIFTING) Cho đa thức $f(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$, p là một số nguyên tố thoả mãn tồn tại n nguyên dương để $p \mid f(n)$ và $p \nmid f'(n)$. Khi đó tồn tại dãy số nguyên (n_k) xác định bởi:

$$n_1 = n,\ p^k \mid n_{k+1} - n_k,\ p^k \mid f(n_k), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh: Trước tiên ta có nhận xét sau:

Nhận xét 2 Với $a, b \in \mathbb{Z}^+$ và p là số nguyên tố thoả $a \equiv b \pmod{p^2}$ ta luôn có:

$$f'(a) \equiv f'(b) \pmod p.$$

Thật vậy:

- Nếu $\deg(f) = 0$ thì nhận xét hiển nhiên đúng.
- Xét $\deg(f) \geq 1$. Đặt

  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_i \in \mathbb{Z}^+,\ \forall i = \overline{0, n},\ a_n \neq 0,\ n \geq 1.$

  Ta có

  $f'(a) = n \cdot a_n \cdot a^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot a \equiv n \cdot a_n \cdot b^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot b = f'(b) \pmod{p}.$

DO đó, nhận xét 2 được chứng minh.
Ta chứng minh định lí bằng phương pháp quy nạp.
Với $k = 1$, khẳng định hiển nhiên đúng theo giả thiết.
Giả sử đã có $n_1,\ n_2, \ldots,\ n_i$ thoả mãn yêu câu bài toán, ta sẽ chỉ ra n_{i+1}, thật vậy:
chọn $n_{i+1} = n_i + b \cdot p^i,\ b \in \mathbb{Z}^+$. Ta sẽ chứng minh $p^{i+1} \mid f(n_{i+1})$, khi đó:
Xét khai triển taylor của $f(x)$ tại n_i ta được:

$$\begin{aligned} f(n_{i+1}) &= f(n_i) + \frac{n_{i+1} - n_i}{1!} f'(n_i) + \frac{(n_{i+1} - n_i)^2}{2!} f''(n_i) + \cdots \\ &= f(n_i) + \frac{b \cdot p^i}{1!} f'(n_i) + \frac{b^2 p^{2i}}{2!} f''(n_i) + \cdots \end{aligned}$$

Khi đó với nhận xét $\dfrac{f^{(k)}(x)}{k!} \in \mathbb{Z}$ vì đạo hàm cấp k của f có các số hạng chia hết cho $k!$, và $2i \geq i + 1$ (do $i \geq 1$) ta có:

$$f(n_{i+1}) \equiv bp^i f'(n_i) + f(n_i) \pmod{p^{i+1}}. \tag{1}$$

do $p^i \mid f(n_i)$, theo giả thiết quy nạp nên $\exists c \in \mathbb{Z}^+$ để $f(n_i) = cp^i$. (*)
Với cách lập dãy thì suy ra $p \mid n_i - n_1$. Theo nhận xét 2 ở đầu bài suy ra:

$$f'(n_i) \equiv f'(n_1) \neq 0 \pmod{p}.$$

Hay $(f'(n_i), p) = 1$ do đó có thể chọn b để $bf'(n_i) \equiv -c \pmod{p}$. Lúc này, từ (1) suy ra

$$f(n_{i+1}) \equiv p^i(bf'(n_i) + c) \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}.$$

Do đó theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét 3 Với cách chứng minh trên, ta thấy rằng điều kiện $p \mid f(n)$ có thể thay bởi $f(n) \equiv a \pmod{p}$. Khi đó nếu $p \nmid f'(n)$ thì phương trình đồng dư $f(n) \equiv a \pmod{p^k}$ luôn có nghiệm.

Định lý 4 (Schur) Cho đa thức $f(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ khác hằng số. Khi đó tập ước nguyên tố p thoả mãn tồn tại n nguyên dương để $p \mid f(n)$ là vô hạn.

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh quy nạp theo $\deg(f) = n,\ n \geq 1$:
Với $n = 1$, hiển nhiên phương trình $f(x) = p$ luôn có nghiệm hay ta có đpcm.

Giả sử đpcm đúng với $n = k \geq 1$ ta chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$ thật vậy

Đặt $f(x) = a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = \overline{0,n},\ a_{k+1} \neq 0$. Ta có:

Giả sử rằng các số $f(1),\ f(2), \ldots, f(k), \ldots$ chỉ có hữu hạn ước nguyên tố thuộc tập $A = \{p_1,\ p_2, \ldots, p_m\}$. Khi đó, đặt $D = (p_1 \cdot p_2 \cdots p_m)^N,\ N > a_0$, với mỗi $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ thì $v_{p_i}(a_i D^i) > v_{p_i}(a_0)$. Suy ra

$$v_{p_i}(f(D)) = \min\{v_{p_i}(a_{k+1}D^{k+1}), \ldots, v_{p_i}(a_1 D),\ v_{p_i}(a_0)\} = v_{p_i}(a_0).$$

Cho $N \to +\infty$, ta có $a_0 = 0$. Do đó, tồn tại $Q(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ để $f(x) = xg(x)$, và $\deg(g) = k$, nên theo giả thiết quy nạp, tập các ước nguyên tố của $g(n)$ là tập vô hạn, hay tập các ước nguyên tố của $f(n)$ cũng là vô hạn. Từ đây, ta có mâu thuẫn.

Định lý 5 (Định lý về dãy tuần hoàn) Cho hai đa thức $f(x),\ g(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ thoả $\gcd(f(x), g(x)) = 1$. Đặt $a_n = \gcd(f(n), g(n)), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó dãy (a_n) tuần hoàn.

Chứng minh: Do $\gcd(f(x), g(x)) = 1$ nên theo **Định lý bezout** tồn tại $F(x),\ G(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ và $a \in \mathbb{Z}$ để:

$$F(x)f(x) + G(x)g(x) = a.$$

khi đó do a chia hết cả $f(n)$ và $g(n)$ nên $a \mid f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh (x_n) tuần hoàn theo chu kỳ a. Thật vậy:
Theo định lí 1 thì

$$f(n) \equiv f(n + a) \pmod{a}.$$

Mà $a_n \mid a$ và $a_n \mid f(n)$, nên $a_n \mid f(n + a)$. Tương tự ta cũng có $a_n \mid g(n + a)$. Từ 2 điều trên suy ra,

$$a_n \mid \gcd(f(n + a), g(n + a)) = a_{n+a}.$$

Lập luận tương tự $a_{n+a} \mid f(n + a)$ và $a_{n+a} \mid a$, nên $a_{n+a} \mid f(n)$ và $a_{n+a} \mid g(n)$ và do đó $a_{n+a} \mid a_n$. Từ đó, ta có $a_{n+a} = a_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, hay ta có điều phải chứng minh.

Định lý 6 (Định Lý Hensel) Cho đa thức $f(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ và số nguyên tố p. Nếu phương trình đồng dư $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ có đúng r nghiệm nguyên phân biệt là $x_1^{(1)},\ x_2^{(1)}, \ldots,\ x_r^{(1)}$ thuộc đoạn $[1; p]$ sao cho $f'(x_i^{(1)}) \not\equiv 0 \pmod{p}, \forall i = \overline{1,r}$ thì phương trình đồng dư: $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$ có đúng r nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; p^k]$.

Chứng minh: Ta chứng minh khẳng định bằng quy nạp. Thật vậy:
Với $k = 1$ khẳng định hiển nhiên đúng theo giả thiết.
Giả sử khẳng định đúng với $k \geq 1$, có nghĩa phương trình đồng dư $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$ có đúng r nghiệm nguyên phân biệt là $x_1^{(k)},\ x_2^{(k)}, \ldots,\ x_r^{(k)}$ thuộc đoạn

$[1; p^k]$ và $f'(x_i^{(k)}) \not\equiv 0 \pmod{p}$, $\forall i = \overline{1, r}$. Ta chứng minh khẳng định cũng đúng với $k+1$, hay phương trình đồng dư: $f(x) \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$ có đúng r nghiệm nguyên phân biệt thuộc đoạn $[1; p^{k+1}]$.
Thật vậy: Gọi x_0 là 1 nghiệm của phương trình

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}. \tag{1}$$

Xét số $x_1 = x_0 + p^k t,\ t \in [0; p-1]$ với t là nghiệm nguyên duy nhất của phương trình:

$$\frac{f(x_0)}{p^k} + f'(x_0).t \equiv 0 \pmod{p}$$

hiển nhiên tồn tại do $\gcd(f'(x_0), p) = 1$.
Ta sẽ chứng minh x_1 là nghiệm của phương trình

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}. \tag{2}$$

Tương tự như chứng minh định lí 3 ta có:

$$f(x_1) \equiv f(x_0) + f'(x_0) \cdot p^k t \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}.$$

Vậy phương trình (2) có ít nhất r nghiệm. (*)
Ta chứng minh phương trình (2) có đúng r nghiệm. Thật vậy: giả sử x là nghiệm của (2). Khi đó ta có $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$, nên x phải có cùng số dư với một trong các các nghiệm của (1). Gọi x_0 là số dư đó, khi đó ta có thể viết $x = x_0 + p^k \cdot t$ với $t \in [0; p^k - 1]$ và t là nghiệm nguyên của phương trình:

$$\frac{f(x_0)}{p^k} + f'(x_0).t \equiv 0 \pmod{p^k}$$

và t là duy nhất do $\gcd(f'(x_0), p) = 1$.
Do đó tương tự như chứng minh (*) ta suy ra ngay (2) có đúng r nghiệm.
Nên theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Định lý 7 (Lagrange) Cho đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ n \geq 1,\ a_n \neq 0$ với hệ số nguyên. Xét phương trình đồng dư:

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p},$$

p là số nguyên tố. Nếu phương trình trên có $n+1$ nghiệm phân biệt $\pmod{p}$ thì mọi hệ số a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ đều chia hết cho p. Nói riêng khi đó $f(a) \equiv 0 \pmod{p},\ \forall a \in \mathbb{Z}$.

Việc chứng minh định lí này dành cho bạn đọc. Tiếp theo, chúng tôi xin giới thiệu một số bài toán liên quan đến các tính chất số học của đa thức.

Ví dụ (USA 2010) Cho $P(x)$ là đa thức hệ số nguyên thoả mãn $P(0) = 0$ và $\gcd(P(0), P(1), \ldots) = 1$. Chứng minh rằng có vô hạn số nguyên dương n sao cho

$$\gcd(P(n) - P(0), P(n+1) - P(1), \ldots) = n.$$

LỜI GIẢI Từ giả thiết $P(0) = 0$ và $\gcd(P(0), P(1), \ldots) = 1$ nên ta có P khác đa thức hằng, do đó không mất tính tổng quát giả sử $P'(1) \neq 0$.
Ta chứng minh nếu p là 1 số nguyên tố bất kỳ sao cho p không là ước của $P'(1)$ thì $n = p^k,\ k \in \mathbb{Z}^+$ thoả mãn yêu cầu đề bài, thật vậy:
Vì
$$p^k \mid P(p^k + i) - P(i), \forall i \in \mathbb{Z}$$
nên
$$p^k \mid \gcd(P(p^k) - P(0), P(p^k + 1) - P(1), \ldots).$$
Mặt khác theo mở rộng của bổ đề tiếp tuyến ta có:
$$P(p^k + 1) - P(1) \equiv P'(1)p^k \pmod{p^{k+1}}.$$
Mà p không là ước của $P'(1)$ nên $\nu_p(P(p^k + 1) - P(1)) = k$.
Cuối cùng ta chỉ ra rằng không tồn tại số nguyên tố $q \neq p$ là ước của các số: $P(p^k) - P(0),\ P(p^k + 1) - P(1), \ldots$.
Giả sử trái lại rằng với mọi i, ta có $q \mid P(p^k + i) - P(i)$.
Mặt khác ta cũng có
$$q \mid P(b \cdot q + i) - P(i),\ \forall b \in \mathbb{Z}.$$
Từ đây ta quy nạp được:
$$P(i + ap^k + bq) \equiv P(i) \pmod{q};\ \forall a,\ b \in \mathbb{Z}.$$
Mà $(p^k, q) = 1$ nên theo công thức tổ hợp tuyến tính ta suy ra tồn tại $a,\ b \in Z$ để $ap^k + bq = 1$ kéo theo:
$$q \mid P(i + 1) - P(i),\ \forall i \in \mathbb{Z}.$$
Hay
$$\begin{aligned} &q \mid P(1) - P(0) \\ &q \mid P(2) - P(1) \\ \ldots& \\ &q|P(i+1) - P(i). \end{aligned}$$
Do đó:
$$q \mid P(1)-P(0)+P(2)-P(1)+\cdots+P(i+1)-P(i) = P(i+1)-P(0) = P(i+1),\ \forall i \in \mathbb{Z}.$$
Mà $\gcd(P(0), P(1), \ldots) = 1$ nên ta có điều mâu thuẫn. Hay ta có $n = p^k$ mà có vô số số p như thế, nên ta có đpcm. □

Ví dụ (KHTN 2011) Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n, tồn tại duy nhất số nguyên dương $x \in [1; 5^n]$ sao cho $5^n \mid x^3 - x + 1$.

LỜI GIẢI Xét đa thức $f(x) = x^3 - x + 1$. Bằng cách thử trực tiếp ta thấy phương trình đồng dư: $f(x) \equiv 0 \pmod 5$ có duy nhất nghiệm là 3, $\forall x = \overline{1, 5}$ mà $5 \nmid f'(3)$, nên theo định lý 6 ta có ngay đpcm.

□

Ví dụ (Putnam 2008) Cho p là 1 số nguyên tố và đa thức $f(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ thoả mãn:

$$\{f(0); f(1); \ldots; f(p^2-1)\}$$

là hệ thặng dư đầy đủ modulo p^2. Chứng minh rằng:

$$\{f(0); f(1); \ldots; f(p^3-1)\}$$

là hệ thặng dư đầy đủ modulo p^3.

Lời giải Trước tiên ta chứng minh rằng $f'(x)$ không chia hết cho p với mọi x nguyên. Thật vậy, giả sử trái lại rằng tồn tại x nguyên như thế thì khi đó tồn tại $y \in \mathbb{Z},\ 0 \le y < p$ sao cho

$$x \equiv y \pmod p \Rightarrow x = p \cdot k + y\ (k \in \mathbb{Z}^+).$$

Khi đó suy ra,

$$f'(x) = f'(p.k + y) \equiv f'(y) \equiv 0 \pmod p.$$

Áp dụng mở rộng của bổ đề tiếp tuyến, ta được:

$$f(y+p) \equiv f'(y)p + f(y) \equiv f(y) \pmod{p^2}.$$

Mà $0 \le y < y + p \le p^2 - 1$. Suy ra, mâu thuẫn.
Vậy không tồn $x \in \mathbb{Z}$ để $p \mid f(x)$. (1)
Tiếp theo, ta giả sử tồn tại: $a,\ b \in \mathbb{Z},\ 0 \le a < b < p^3$ sao cho

$$f(a) \equiv f(b) \pmod{p^3}.$$

Đặt $a = a_0 + p^2 a_1,\ b = b_0 + p^2 b_1$ $(0 \le a_0,\ b_0,\ a_1,\ b_1 < p^2;\ a,\ b < p^3)$. Ta có:

$$f(a) \equiv f(a_0 + p^2 a_1) \equiv f(a_0) \pmod a$$

tương tự suy ra

$$f(b) \equiv f(b_0) \pmod{p^2}.$$

Mà $f(a) \equiv f(b) \pmod{p^2}$, nên $f(a_0) \equiv f(b_0) \pmod{p^2}$.
Mặt khác $\{f(0);\ f(1); \ldots;\ f(p^2-1)\}$ là hệ thặng dư đầy đủ modulo p^2, nên ta phải có $a_0 = b_0$.
Lại áp dụng mở rộng của bổ đề tiếp tuyến, ta được:

$$\begin{aligned}
0 &\equiv f(a) - f(b) \\
&\equiv f(a_0) + p^2 a_1 f'(a_0) - f(b_0) - p^2 b_1 f'(b_0) \\
&\equiv p^2 f'(a_0)(a_1 - b_1) \pmod{p^3}.
\end{aligned}$$

Mà kết hợp (1) suy ra $a_1 \equiv b_1 \pmod p$ và do đó $a_1 = b_1$, mâu thuẫn với điều giả sử.
Vậy từ các điều trên cho ta đpcm.

□

Ví dụ Tìm tất cả các đa thức $f(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ thoả mãn nếu $f(n) \mid f(m)$ thì $n \mid m$.

LỜI GIẢI Trước tiên ta sẽ chứng minh nhận xét sau:

Nhận xét 4 Với đa thức $f(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ khác hằng thì tồn tại vô số p nguyên tố thoả mãn với mọi k nguyên dương thì tồn tại n nguyên dương sao cho: $p^k \mid f(n)$.

Thật vậy:
Không mất tính tổng quát ta có thể coi rằng f là một đa thức bất khả quy vì nếu f không bất quy thì ta có thể xét ước của f.
Với f là đa thức bất khả quy thì $f(x)$ và $f'(x)$ không thể có ước chung là đa thức, do vậy theo **Định lý Bezout** thì tồn tại $k(x),\ l(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ và $A \in \mathbb{Z}$ để:

$$f(x)k(x) + f'(x)l(x) = A.$$

Theo **Định lý Schur**, ta thấy $f(x)$ có thể có ước nguyên tố p lớn tuỳ ý tại các điểm x nguyên dương. Chọn $p > A$ thì suy ra $p \nmid f'(x)$.
Do đó áp dụng **Hensel Lifting** ta chứng minh được nhận xét.
Quay trở lại bài toán, ta có với $n \in \mathbb{Z}$ bất kỳ thì:

$$f(f(n) + n) \equiv f(n) \equiv 0 \pmod{f(n)},$$

nên suy ra

$$f(n) \mid f(n + f(n)) \Rightarrow n \mid n + f(n) \Rightarrow n \mid f(n),$$

hay nói cách khác, x là ước của $f(x)$ tại tất cả mọi điểm x nguyên, kéo theo: $x \mid f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, và do đó tồn tại $h(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ để $f(x) = x^k g(x)$, với k là số nguyên dương lớn hơn 1 để cho $g(0) \neq 0$.
Giả sử $g(x)$ khác hằng thì theo nhận xét 4 ở đầu bài thì ta chọn được p nguyên tố thoả $p > g(0)$ và $p^k \mid g(m)$ với m là số nguyên dương nào đó.
Vì $g(p) \equiv g(0) \pmod{p}$, nên ta suy ra $\gcd(g(p), p^k) = 1$. Khi đó xét hệ đồng dư sau:

$$\begin{cases} n \equiv m \pmod{p^k} \\ n \equiv p \pmod{g(p)} \end{cases}$$

hệ trên có nghiệm theo **Định lý CRT**. Khi đó:

$$g(p) \mid n - p \mid g(n) - g(p) \Rightarrow g(p) \mid g(n)$$

và

$$p^k \mid m - n \mid g(m) - g(n) \Rightarrow p^k \mid g(n).$$

Mà do

$$\gcd(p^k, g(p)) = 1,\ f(p) = p^k g(p) \mid g(n) \mid f(n),$$

hay ta phải có $p \mid n$. Mặt khác $p \mid p^k \mid g(n)$ và lại có: $g(n) \equiv g(0) \pmod{n}$.
Các điều trên cho ta: $p \mid n \mid g(n) - g(0)$, nên $p \mid g(0)$ điều này mâu thuẫn với cách chọn p.
Vậy $g(x)$ là đa thức hằng. Do đó ta có tất cả đa thức cần tìm có dạng $a \cdot x^k$ với $a \in \mathbb{Z}$ và $k \in \mathbb{Z}^+$.
Thử lại ta có tất cả đa thức có dạng như trên đều thoả mãn. □

Ví dụ Tìm tất cả đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ thoả mãn tồn tại vô hạn số n sao cho $P(P(n)+n)$ là số nguyên tố.

LỜI GIẢI Gọi A là tập các số $n \in \mathbb{Z}^+$ thoả mãn $P(P(n)+n)$ là số nguyên tố, khi đó:

$$P(P(n)+n) \equiv P(n) \equiv 0 \pmod{P(n)} \Rightarrow P(n) \mid P(P(n)+n), \ \forall n \in A,$$

và do đó $P(n) = 1$ hoặc $P(n) = 1$ hoặc $P(n) = P(P(n)+n), \forall n \in A$. Mà do tập A là vô hạn nên:

$$P(x) = P(P(x)+x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{$*$}$$

(vì $P(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ không thoả mãn).
Đặt $\deg P(x) = k \in \mathbb{N}$.
Nếu $k \geq 2$ thì từ (*) ta có $k^2 = k \Rightarrow k \in \{0; 1\}$ vô lý. Do đó $k \in \{0; 1\}$.
Với $k = 0$ thì: $P(x) = p$ với p là số nguyên tố thoả mãn yêu cầu đề bài.
Với $k = 1$ thì: Đặt $P(x) = ax + b, \ a, \ b \in \mathbb{Z}, \ a \neq 0$. Từ (*) ta có

$$ax + b = a(ax + b + x) + b = (a^2 + a)x + ab + b, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đồng nhất hệ số ta được $a = 0$ (mâu thuẫn).
Vậy đa thức duy nhất thoả mãn yêu cầu đề bài là $P(x) = p$ với p là số nguyên tố. □

Ví dụ (VMO 2000) Xét đa thức $P(x) = x^3 + 153x^2 - 111x + 38$. Chứng minh rằng có đúng 9 số nguyên $a \in [1; 3^{2000}]$ và chia hết cho 3^{2000}.

LỜI GIẢI Ta thấy rằng

$$3 \mid 153x^2 - 111x \Rightarrow 3 \mid x^3 + 38 \Rightarrow x \equiv 1 \pmod 3.$$

Đặt $x = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}$ thì:

$$x^3 + 153x^2 - 111x + 38 = 27(k^3 + 52k^2 + 22k + 3).$$

Do đó với $1 \leq a \leq 3^{2000}$ thì

$$3^{2000} | P(a) \Leftrightarrow 3^{1997} | Q(k), \ \text{với } 0 \leq k \leq 3^{1999}.$$

Trong đó $Q(k) = k^3 + 52k^2 + 22k + 3$. Mà $3 \mid 51k^2 + 21k + 3$, nên

$$3 | k^3 + k^2 + k = k(k^2 + k + 1) \Rightarrow k \equiv 0 \pmod 3.$$

Đặt $k = 3t, t \in \mathbb{Z}$ thì:

$$k^3 + 52k^2 + 22k + 3 = 3(9t^3 + 156t^2 + 22t + 1).$$

Do đó với $0 \leq k \leq 3^{1999}$ thì

$$3^{1997} \mid Q(k) \Leftrightarrow 3^{1996} \mid R(t), \ \text{với } 0 < t < 3^{1998}.$$

Trong đó $R(t) = 9t^3 + 156t^2 + 22t + 1$, nên $3 \nmid R'(t) = 27t^2 + 312t + 22$ mà trong khoảng $[1;3]$ chỉ có 2 thoả $3 \mid R(2)$ nên áp dụng **Định lý Hensel** suy ra phương trình: $R(t) \equiv 0 \pmod{3^{1996}}$ có duy nhất 1 nghiệm trong khoảng $[1;3^{1996}]$. Gọi nghiệm đó là a thì

$$3^{1996}+a;\ 3^{1996}\cdot 2+a, \dots,\ 3^{1997}\cdot 2+a$$

cũng là nghiệm.
Vậy có tổng cộng 9 nghiệm hay ta có đpcm. □

Ví dụ Cho A là một tập vô hạn các số nguyên dương. Tìm tất cả các số nguyên dương n thoả mãn với mọi a là phần tử của A thì:

$$1+a+a^2+\dots+a^n \mid 1+a^{1!}+a^{2!}+\dots+a^{n!}.$$

Lời giải Xét số nguyên dương n bất kì thoả mãn yêu cầu bài toán khi đó, đặt:

$$P(x)=1+x+x^2+\dots+x^n,\ Q(x)=1+x^{1!}+x^{2!}+\dots+x^{n!}.$$

Từ giả thiết đề bài, ta có $P(a) \mid Q(a)$ với vô số số nguyên dương a, kéo theo $P(x) \mid Q(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Ta thấy rằng:

$$x^{n+1} \equiv 1 \pmod{P(x)}.$$

Do vậy, gọi t_i là số dư trong phép chia $i!$ cho $n+1,\ \forall i=\overline{1,n}$. Khi đó:

$$Q(x) \equiv x^0+x^{t_1}+x^{t_2}+\dots+x^{t_n} := S(x) \pmod{P(x)}.$$

Vì các t_i không vượt quá n và đồng thời $S(x),\ P(x)$ là tổng của $n-1$ đơn thức nên để $P(x) \mid S(x)$ thì $P(x)=S(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$, và do đó: $\{0,1!,2!,\dots,n!\}$ là 1 hệ thặng dư đầy đủ modulo $n+1$. Suy ra, xét $n \geq 4$ ta được: $n! \not\equiv 0 \pmod{n+1}$ hay $n+1$ là số nguyên tố hoặc $n+1=4$ (loại do $n \geq 4$).
Mà theo **Định lý Wilson** thì $n! \equiv -1 \equiv n \pmod{n+1}$ mà $(n,n+1)=1$, suy ra $(n-1)! \equiv 1 \pmod{n+1}$. Điều này mâu thuẫn.
Vậy $n \leq 3$. Bằng cách thử trực tiếp ta thấy chỉ có $n=1,\ 2$ thoả mãn.
Vậy $n=1,\ 2$ là 2 giá trị duy nhất thoả mãn yêu cầu đề bài.
□

Ví dụ Tìm tất cả các đa thức $f(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ thoả mãn điều kiện:

$$\gcd(f(n), f(2^n))=1,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Lời giải Giả sử tồn tại $k \in \mathbb{Z}^+$ để $f(2^k)$ có ước nguyên tố là p, khi đó ta xét 2 trường sau:
TH1: $p=2$.
Chọn s là số chẵn và $s>k$ khi đó:

$$2 \mid 2^s-2^k \mid f(2^s)-f(2^k) \Rightarrow 2 \mid f(2^s)$$

và do đó:

$$2 \mid 2^s-s \mid f(2^s)-f(s) \Rightarrow 2 \mid f(s).$$

Dẫn đến mâu thuẫn do $\gcd(f(2^s), f(s)) \geq 2$.

TH2: $p \geq 3$ Xét hệ phương trình đồng dư ẩn s sau:

$$\begin{cases} s \equiv 2^k \pmod p \\ s \equiv k \pmod{p-1} \end{cases}$$

Hệ trên có nghiệm theo **Định lý CRT** và theo **Định lý Euler** thì:

$$2^s \equiv s \equiv 2^k \pmod p \Rightarrow p \mid \gcd(f(2^s), f(s)).$$

Và do đó ta có điều mâu thuẫn.
Vậy $f(2^k)$ chỉ có thể nhận giá trị 1 hoặc -1 tại vô số điểm hay f đồng nhất 1 hoặc -1.
Thử lại ta thấy thoả mãn yêu cầu đề bài.

□

Ví dụ Tìm tất cả đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ thoả mãn:

$$\sigma(n) \mid P(n), \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Lời giải Giả sử tồn tại đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ khác 0 thoả mãn yêu cầu bài toán. Đặt $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = \overline{0,n}, a_n \neq 0$.
Chọn $n = p^\alpha q^\beta$, với $p,\ q$ là hai số nguyên tố bất kì, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}^+$ thoả mãn:

$$\beta + 1 \equiv 0 \pmod{(p-1)p^\alpha} \Rightarrow \beta + 1 = (p-1)p^k x,\ x \in \mathbb{Z}^+.$$

Khi đó theo **Định lý Euler** thì:

$$q^{\beta+1} = q^{\phi(p^{\alpha+1}).k} \equiv 1 \pmod{p^{\alpha+1}},$$

suy ra

$$v_p\left(\frac{q^{\beta+1}-1}{q-1}\right) \geq \alpha$$

và:

$$\sigma(n) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} \cdot \frac{q^{\beta+1}-1}{q-1}.$$

Và từ các điều trên suy ra:

$$p^\alpha \mid \sigma(n) \mid P(n) = P(p^\alpha q^\beta) \Rightarrow p^\alpha \mid a_0.$$

Từ đây cho $\alpha \to +\infty$ ta được $a_0 = 0$. Do đó tồn tại $Q(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ thoả mãn: $P(x) = x^m Q(x)$ với $m \in \mathbb{Z}^+$ thoả $Q(0) \neq 0$.
Đặt

$$Q(x) = b_t x^t + b_{t-1}x^{t-1} + \cdots + b_1 x + b_0,\ b_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = \overline{0,t},\ b_0,\ b_t \neq 0.$$

Khi đó tiếp tục chọn $n = p^a q^b$ với $p,\ q$ là 2 số nguyên tố và $a,\ b \in \mathbb{Z}^+$ thoả:

$$\beta + 1 \equiv 0 \pmod{(p-1)p^{ta}},\ t \in \mathbb{Z}^+.$$

Tương tự ta thu được

$$v_p\left(\frac{q^{\beta+1}-1}{q-1}\right) \geq ta$$

và

$$\sigma(n) = \frac{p^{a+1}-1}{p-1}.\frac{q^{b+1}-1}{q-1}.$$

Từ các điều trên suy ra:

$$p^{ta} \mid \sigma(n) \mid P(n) = p^{ma}q^{bm}Q(p^m q^b).$$

Và từ đây cho $t \to +\infty$ suy ra $b_0 = 0$ mâu thuẫn với cách chọn b_0.
Vậy $P(n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ là đa thức duy nhất thoả mãn hay $P(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

□

Ví dụ (IRAN TST) Tìm tất cả đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ thoả mãn $\gcd(m,n) = 1$ thì $\gcd(P(m), P(n)) = 1$.

Lời giải Nếu $P(x) = c$, c là hằng số thì ta có ngay $P(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $P(x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$.
Xét $P(x)$ khác hằng, với p là số nguyên tố bất kì ta có:

$$P(p+P(p)) \equiv P(p) \equiv 0 \pmod{P(p)} \Rightarrow P(p) \mid P(p+P(p)). \qquad (*)$$

Mà ta có $\gcd(P(p), p+P(p)) = \gcd(p, P(p))$ nếu tồn tại vô số p nguyên tố để $p \nmid P(p)$ thì kéo theo $\gcd(P(p), p+P(p)) = 1$. Kết hợp (*) suy ra $|P(p)| = 1$ mà có vô số số p như thế nên mâu thuẫn với điều giả sử. Vậy với mọi p nguyên tố đủ lớn thì:

$$p \mid P(p) \Rightarrow x \mid P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó tồn tại đa thức $G(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ để $P(x) = x^k G(x)$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ để $x \nmid G(x)$.
Nếu $G(x)$ hằng thì suy ra $P(x) = x^k \cdot c,\ \forall x \in \mathbb{R}$. c là hằng số thử lại suy ra $c = 1$ hoặc $c = -1$.
Nếu $G(x)$ khác hằng thì ta có với 2 số $m,\ n \in \mathbb{Z}$ thoả $\gcd(m,n) = 1$ thì suy ra:

$$1 = \gcd(P(m), P(n)) = \gcd(m^k.G(m), n^k.G(n))$$

suy ra $\gcd(G(m), G(n)) = 1$, hay đa thức $G(x)$ có tính chất như $P(x)$ và do đó ta cũng chứng minh được $x \mid G(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ hay mâu thuẫn với điều kiện của $G(x)$.
Vậy trong trường hợp này không tồn tại đa thức thoả mãn.
Và do đó, tất cả đa thức thoả mãn bài toán là

$$P(x) \equiv 1,\ P(x) \equiv -1,\ P(x) \equiv x^n,\ P(x) \equiv -x^n$$

với $n \in \mathbb{Z}^+$ bất kì.

□

Để kết thúc bài viết, chung tôi giới thiệu một số bài tập để bạn đọc luyện tập.

Bài toán 1 Tìm tất cả đa thức $f(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$, thoả mãn với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ thì $f(n)$ cũng nguyên dương, và $f(n!) = (f(n))!$

Bài toán 2 Cho đa thức $f(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ thoả mãn tồn tại số nguyên m sao cho $P(1),\ P(2), \ldots, P(m)$ không chia hết cho m. Chứng minh rằng $P(a) \neq 0,\ \forall a \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 3 Cho đa thức $f(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ khác đa thức hằng và gọi $n,\ k$ là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương a sao cho mỗi $f(a),\ f(a+1), \ldots,\ f(a+n-1)$ có ít nhất k ước nguyên tố phân biệt.

Bài toán 4 Cho 2 đa thức $P(x), Q(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$. Ta kí hiệu $P(x) \equiv Q(x) \pmod 2$, nếu tất cả các hệ số của đa thức $P(x) - Q(x)$ đều là số chẵn. Xét dãy đa thức $P_n(x)$ được xác định bởi:

$$P_1(x) = P_2(x) = 1,\ P_{n+2}(x) = P_{n+1}(x) + xP_n(x).$$

Chứng minh rằng $P_{2^n}(x) \equiv 1 \pmod 2$, với mọi n nguyên dương.

Bài toán 5 Cho $\overline{abc}$ là 1 số nguyên tố. Chứng minh rằng phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm hữu tỷ.

Bài toán 6 Gọi $d(n)$ là ước nguyên tố nhỏ nhất của n nguyên, với n khác $-1,\ 0,\ 1$, và ta kí hiệu $d(-1) = d(0) = d(1) = 0$. Tìm tất cả đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ thoả mãn:

$$P(n + d(n)) = n + d(P(n)), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Bài toán 7 (Romania 2001) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m, n) với $m, n \geq 2$ sao cho:

$$m \mid a^n - 1, \forall a = \overline{1, n}.$$

Bài toán 8 Tìm tất cả số nguyên dương k thoả mãn tồn tại đa thức $f(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ và có bậc lớn hơn 1, sao cho với mọi p nguyên tố, và mọi $a,\ b$ tự nhiên mà

$$p \mid ab - k,\ \text{thì}\ p \mid f(a)f(b) - k.$$

Bài toán 9 Cho $P(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ và tập $A = \{a_1;\ a_2, \ldots;\ a_n\}$ gồm n số nguyên dương phân biệt. Biết rằng với mọi m nguyên dương, tồn tại $1 \leq j \leq n$ sao cho $a_j \mid P(m)$. Chứng minh rằng, tồn tại $1 \leq j_0 \leq n$ thoả mãn:

$$a_{j_0} | P(m), \forall m \in \mathbb{Z}^+.$$

Bài toán 10 (Ukraine MO 2016) Cho 2 đa thức $P(x),\ Q(x) \in \mathbb{Z}^+[x]$, xét dãy số (x_n) xác định bởi:

$$x_n = 2016^{P(n)} + Q(n), \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố p thoả mãn: ứng với mỗi p, tồn tại m sao cho $p \mid x_m$.

Cuộc phiêu lưu của kiến

Trần Quốc Đệ (Đại học Bách Khoa Hà Nội)

Giới thiệu. *Trong bài viết nhỏ này, thông qua các câu chuyện về con kiến, tác giả sẽ giới thiệu đến bạn đọc một số vấn đề cơ bản liên quan đến xác suất như: biến ngẫu nhiên, kỳ vọng, hàm mật độ xác suất, ...*

Bắt đầu với một bài toán "quen thuộc" như sau:

Bài toán 1 Trên một que gỗ độ dài 1 cm có một số con kiến di chuyển với tốc độ 1 cm/s. Biết rằng nếu 2 con kiến nếu đi ngược chiều vào đụng nhau thì chúng sẽ quay đầu và di chuyển tiếp (vẫn giữ vận tốc cũ). Chứng minh sau 1 giây thì mọi con kiến đều đã bò ra khỏi que gỗ.

Lời giải Giả sử trên que gỗ ban đầu có n con kiến, mỗi con kiến được đội trên đầu một cái mũ có đánh số từ 1 tới n. Mỗi lần 2 con kiến di chuyển ngược chiều đụng nhau, chúng quay đầu và di chuyển tiếp song *đồng thời cũng tráo đổi mũ* của chúng cho nhau.
Khi đó có thể nhận thấy rằng, các *số trên mũ của các con kiến đều di chuyển theo 1 hướng duy nhất* từ đầu tới cuối, và với vận tốc đều là 1 cm/s. Do đó sau 1 giây, tất cả các số sẽ biến mất khỏi que gỗ, cũng như khi đó các chú kiến đã bò hết ra ngoài que gỗ. □

Tiếp theo, chúng ta xem xét một số tính chất về xác suất và kì vọng.

Xét X là một biến ngẫu nhiên với hàm cộng dồn xác suất (cdf) $F_X(x)$. Ta có thể xây dựng được hàm phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên

$$Y_n = \min(X_1, ..., X_n), Z_n = \max(X_1, ..., X_n)$$

(trong đó X_i là các biến ngẫu nhiên độc lập với cùng 1 cdf $F_X(x)$:

- $P(Y_n \geq x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq x) = P(X \geq x)^n$
  $\Rightarrow 1 - F_{Y_n}(x) = (1 - F_X(x))^n$
  $\Rightarrow f_{Y_n}(x) = nf_X(x)(1 - F_X(x))^{n-1}$
- $P(Z_n \leq x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) = P(X \leq x)^n$
  $\Rightarrow F_{Z_n}(x) = F_X(x)^n$
  $\Rightarrow f_{Z_n}(x) = nf(x)F_X(x)^{n-1}$

Bài toán 2 Xét $X_1, X_2, ..., X_n$ là các biến ngẫu nhiên uniform , độc lập trên đoạn [0,1]. Đặt $Y_n = \min(X_1, ..., X_n), Z_n = \max(X_1, ..., X_n)$. Tính $E[Y_n], E[Z_n]$.

Lời giải Áp dụng công thức bên trên với $f_X(x) = 1$ và $F_X(x) = x$ thu được:

$$E[Y_n] = \int_0^1 x f_{Y_n}(x)dx = \int_0^1 nx(1-x)^{n-1}dx = \frac{1}{n+1}.$$

$$E[Z_n] = \int_0^1 x f_{Z_n}(x)dx = \int_0^1 nx^n dx = \frac{n}{n+1}.$$

□

Áp dụng 2 bài toán ta thu được bài toán sau đây:

Bài toán 3 Trên một que gỗ độ dài 1 cm ta đặt ngẫu nhiên 99 con kiến. Biết vận tốc các con kiến là 1 cm/s và nếu 2 con kiến di chuyển ngược chiều nhau đụng nhau thì chúng sẽ quay đầu và di chuyển với vận tốc cũ. Gọi Z là thời gian để toàn bộ 99 con kiến bò hết ra khỏi que gỗ. Tính $E[Z]$.

LỜI GIẢI Tương tự bài toán 1, nếu ta coi như các con kiến đội chiếc mũ trên đầu đánh số từ 1 đến 99, mỗi lần 2 con kiến đụng nhau thì quay đầu đồng thời tráo đổi chiếc mũ đội trên đầu. Khi đó ta quan sát thấy mỗi số trên mũ đều di chuyển theo 1 hướng duy nhất từ đầu tới cuối với vận tốc 1 cm/s. Do các con kiến được đặt ngẫu nhiên trên que gỗ, do đó thời gian để 1 số trên mũ di chuyển ra khỏi que gỗ là 1 biến ngẫu nhiên uniform trên đoạn $[0, 1]$.

Từ đó nếu Z là thời gian để toàn bộ các con kiến bò ra khỏi que gỗ thì $Z = \max(X_1, ..., X_{99})$ trong đó X_i là các biến ngẫu nhiên độc lập uniform trên đoạn $[0, 1]$.

Sử dụng bài toán 2 ta thu được $E[Z] = \frac{98}{99}$. □

Nhận xét: Nếu gọi Z là thời gian con kiến đầu tiên rời khỏi que gỗ thì ta cũng tính được $E[Z] = \frac{1}{99}$.

Sau đây là một số câu hỏi mở rộng từ bài toán trên:

Bài toán 4 Vẫn sử dụng đề bài từ Bài toán 3, gọi Alice là con kiến thứ 50, tính xác suất Alice lúc rời khỏi que gỗ thì di chuyển trùng với hướng di chuyển ban đầu của nó (giả sử lúc ban đầu, Alice đi sang phải thì lúc rời khỏi que gỗ cũng đi sang phải).

LỜI GIẢI Ta có các nhận xét sau đây:

- Vị trí tương đối của các con kiến là không thay đổi.
- Nếu ban đầu có t con kiến rẽ phải thì khi kết thúc cũng có tổng cộng t con kiến rẽ phải.

Không mất tổng quát, giả sử ban đầu Alice đi sang phải, thì để cuối cùng Alice kết thúc là đi bên phải thì khi đó lúc kết thúc phải có ít nhất 50 con kiến rẽ phải do có 49 con bên phải Alice và cả Alice, suy luận từ hai nhận xét trên.

Do vậy, ban đầu phải có ít nhất 49 trong 98 con kiến (không tính Alice là con ở chính giữa) là rẽ phải. Ta tính được xác suất của biến cố này là

$$\frac{1}{2^{98}} \cdot (C_{98}^{49} + C_{98}^{50} + \cdots + C_{98}^{98}) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}C_{98}^{49}}{2^{98}}.$$

□

Bài toán 5 Tính xác suất để Alice là con kiến cuối cùng rời khỏi que gỗ.

LỜI GIẢI Ta cũng có nhận xét sau đây:

Để Alice là con kiến cuối cùng rời khỏi que gỗ thì lúc kết thúc phải có 49 con chọn rẽ phải, 49 con chọn rẽ trái.

Từ nhận xét trên kết hợp Bài toán 4 thì để Alice là con kiến cuối cùng rời khỏi que gỗ thì ban đầu phải có 49 con chọn rẽ trái, 49 con chọn rẽ phải. Do đó, xác suất biến cố này là:

$$\frac{C_{98}^{49}}{2^{99}}.$$

□

Bài toán 6 Tính kì vọng số lần các con kiến va chạm. (Mỗi lần 2 con kiến đi ngược chiều đụng nhau được tính là 1 lần va chạm).

LỜI GIẢI Giả sử mỗi con kiến cầm 1 chiếc cờ, mỗi lần 2 con kiến đụng nhau thì chúng đổi cờ. Khi đó, ta thấy rằng số lần va chạm bằng với số lần các cờ "lướt qua nhau". Chú ý cờ chỉ di chuyển theo 1 hướng nhất định từ đầu tới cuối, tương tự như Bài toán 1.

Xét 2 cờ bất kì, thì xác suất 2 cờ gặp nhau là $\frac{1}{4}$ (do chỉ có 1 khả năng (trái-phải) trong 4 khả năng trái-trái, phải-phải, trái-phải, phải-trái).

Mà có C_{99}^2 cặp cờ như vậy, vì thế nên kì vọng số lần va chạm là (theo tính chất tuyến tính của kì vọng):

$$\frac{1}{4}.C_{99}^2.$$

□

TỔNG QUÁT MỘT BÀI BẤT ĐẲNG THỨC

Võ Quốc Bá Cẩn, Hà Nội

1. Giới thiệu

Năm 1994, trên tạp chí Crux Mathematicorum, mục Problems, tác giả Ji Chen đề xuất bài toán bất đẳng thức thú vị sau (bài 1940) [1].

Bài toán 1 *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\geq\frac{9}{4}. \tag{1}$$

Một kết quả đẹp, chặt cho ba biến số a, b, c. Bài toán sau đó được sử dụng lại trong đề thi Olympic Toán của Iran năm 1996 [2].

Độ khó và nét đẹp của bài toán trên đã thôi thúc nhiều người đi tìm các lời giải mới (có lẽ vì lời giải ban đầu sử dụng biến đổi tương đương khá phức tạp) cũng như tương tự hóa hoặc tổng quát hóa nó.

Năm 2007, trên diễn đàn Mathlinks (bây giờ là Art of Problem Solving), tác giả Phạm Kim Hùng đề xuất bài toán dưới đây [3].

Bài toán 2 *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+2b)^2}+\frac{1}{(b+2c)^2}+\frac{1}{(c+2a)^2}\right]\geq 1. \tag{2}$$

Năm 2009, trên diễn đàn Art of Problem Solving, tác giả Vasile Cirtoaje đề xuất một tổng quát cho bài toán 1 [2].

Bài toán 3 *Cho các số thực dương a, b, c, x, y, z. Chứng minh rằng*

$$\begin{aligned}\frac{2}{(a+b)(x+y)}+\frac{2}{(b+c)(y+z)}+\frac{2}{(c+a)(z+x)}&\\ \geq\frac{9}{(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z}&.\end{aligned} \tag{3}$$

Tuy nhiên, kết quả của tác giả Vasile Cirtoaje không thực sự sát với dạng gốc của bài toán 1. Một cách tự nhiên, ta đặt ra câu hỏi liệu kết quả sau đây có đúng không?

Bài toán 4 *Cho các số thực dương a, b, c. Khi đó, với mọi số thực không âm k, ta đều có*

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+kb)^2}+\frac{1}{(b+kc)^2}+\frac{1}{(c+ka)^2}\right]\geq\frac{9}{(1+k)^2}. \tag{4}$$

Kết quả là khẳng định! Và trong bài viết này, chúng tôi sẽ trình bày chứng minh chi tiết cho bài toán trên.

2. Lời giải của một số trường hợp riêng

2.1. Lời giải bài toán 1

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$. Ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2} \ge \frac{1}{4ab}+\frac{2}{(b+c)(c+a)}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}-\frac{2}{(b+c)(c+a)} \ge \frac{1}{4ab}-\frac{1}{(a+b)^2},$$

hay

$$\frac{(a-b)^2}{(b+c)^2(c+a)^2} \ge \frac{(a-b)^2}{4ab(a+b)^2}.$$

Vì $(b+c)^2 \le 4b^2 \le 4ab$ và $(c+a)^2 \le (a+b)^2$ nên bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng.

Bây giờ, sử dụng kết quả trên, ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{VT}_{(1)} &\ge (ab+bc+ca)\left[\frac{1}{4ab}+\frac{2}{(b+c)(c+a)}\right] = \frac{1}{4}+\frac{c(a+b)}{4ab}+\frac{2(ab+bc+ca)}{(b+c)(c+a)}\\ &= \frac{9}{4}+\frac{c(a+b)}{4ab}-\frac{2c^2}{(b+c)(c+a)} = \frac{9}{4}+\frac{c\big[(a+b)(b+c)(c+a)-8abc\big]}{4ab(b+c)(c+a)} \ge \frac{9}{4},\end{aligned}$$

vì $(a+b)(b+c)(c+a) \ge 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca} = 8abc$, theo bất đẳng thức AM-GM.

2.2. Lời giải bài toán 2

Xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1: $4(ab+bc+ca) \ge a^2+b^2+c^2$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\sum \frac{1}{(a+2b)^2} \ge \frac{\left[\sum(a+2c)\right]^2}{\sum(a+2b)^2(a+2c)^2} = \frac{9\left(\sum a\right)^2}{\sum(a+2b)^2(a+2c)^2}.$$

Như vậy, để chứng minh bất đẳng thức (2), ta sẽ chứng minh

$$9\left(\sum a\right)^2\left(\sum ab\right) \geq \sum (a+2b)^2(a+2c)^2.$$

Dễ thấy $\sum(a+2b)^2(a+2c)^2 = \left(\sum a\right)^4 + 18\left(\sum ab\right)^2$, do đó bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành

$$9\left(\sum a\right)^2\left(\sum ab\right) \geq \left(\sum a\right)^4 + 18\left(\sum ab\right)^2,$$

hay

$$\left(\sum a^2 - \sum ab\right)\left(4\sum ab - \sum a^2\right) \geq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng vì $\sum a^2 \geq \sum ab$ và $4\sum ab \geq \sum a^2$.

Trường hợp 2: $a^2+b^2+c^2 > 4(ab+bc+ca)$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \max\{a,\, b,\, c\}$. Nếu $aa < 2(b+c)$, ta có $a^2+b^2+c^2-4(ab+bc+ca) = a(a-2b-2c)+b(b-a)+c(c-a)-4bc \leq 0$, mâu thuẫn. Do đó $a \geq 2(b+c)$. Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}\sum \frac{1}{(a+2b)^2} &> \frac{1}{(a+2b)^2} + \frac{1}{(b+2c)^2} \geq \frac{2}{(a+2b)(b+2c)} \\ &= \frac{2}{2(ab+bc+ca)-b(a-2b-2c)} \geq \frac{1}{ab+bc+ca}.\end{aligned}$$

2.3. Lời giải bài toán 3

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum \frac{2\big[(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z\big]}{(b+c)(y+z)} \geq 9. \tag{5}$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned}\mathrm{VT}_{(5)} &= \sum \frac{2[a(y+z)+x(b+c)+cy+bz]}{(b+c)(y+z)} \\ &= 2\sum \frac{a}{b+c} + 2\sum \frac{x}{y+z} + \sum \frac{2(bz+cy)}{(b+c)(y+z)} \\ &= 2\sum \frac{a}{b+c} + 2\sum \frac{x}{y+z} + 3 - \sum \frac{(b-c)(y-z)}{(b+c)(y+z)}.\end{aligned}$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta lại có

$$\frac{(b-c)(y-z}{(b+c)(y+z)} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{(b-c)^2}{(b+c)^2} + \frac{(y-z)^2}{(y+z)^2}\right] = 1 - \frac{2bc}{(b+c)^2} - \frac{2yz}{(y+z)^2}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathrm{VT}_{(5)} &\geq 2\sum\frac{a}{b+c}+2\sum\frac{x}{y+z}+\sum\frac{2bc}{(b+c)^2}+\sum\frac{2yz}{(y+z)^2}\\ &=2\left(\sum ab\right)\left[\sum\frac{1}{(b+c)^2}\right]+2\left(\sum xy\right)\left[\sum\frac{1}{(y+z)^2}\right].\end{aligned}$$

Bây giờ, sử dụng kết quả bài toán 1, ta có ngay kết quả cần chứng minh.

2.4. Lời giải bài toán 4 với $k \geq \dfrac{49+9\sqrt{17}}{32}$

Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề. *Cho các số thực dương a, b, c. Khi đó, với mọi số thực $k \geq \frac{49+9\sqrt{17}}{32}$, ta đều có*

$$\sqrt{\frac{a}{b+kc}}+\sqrt{\frac{b}{c+ka}}+\sqrt{\frac{c}{a+kb}} \geq \frac{3}{\sqrt{1+k}}. \tag{6}$$

Chứng minh. Đặt $x=\sqrt{\frac{(k+1)a}{b+kc}}$, $y=\sqrt{\frac{(k+1)b}{c+ka}}$ và $z=\sqrt{\frac{(k+1)c}{a+kb}}$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases}(k+1)a-x^2b-kx^2c=0,\\ ky^2a-(k+1)b+y^2c=0,\\ z^2a+kz^2b-(k+1)c=0.\end{cases}$$

Hệ phương trình này có vô số nghiệm $(a,\, b,\, c)$ nên định thức của nó phải bằng 0. Từ đó, ta chứng minh được

$$k(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+(k^2-k+1)x^2y^2z^2=(k+1)^2. \tag{7}$$

Giả sử $x+y+z<3$. Đặt $x+y+z=3t$ với $0<t<1$ và đặt $m=\frac{x}{t}$, $n=\frac{y}{t}$, $p=\frac{z}{t}$, ta có $m+n+p=3$. Khi đó

$$\mathrm{VT}_{(7)}=kt^4\sum m^2n^2+(k^2-k+1)t^6m^2n^2p^2<k\sum m^2n^2+(k^2-k+1)m^2n^2p^2.$$

Kết hợp với (7), ta được $k\sum m^2n^2+(k^2-k+1)m^2n^2p^2>(k+1)^2$, hay

$$k\left(\sum m^2n^2-3m^2n^2p^2\right)>(k+1)^2(1-m^2n^2p^2).$$

Do $k \geq \frac{49+9\sqrt{17}}{32}$ nên $(k+1)^2 \geq \frac{81}{16}k$. Kết hợp với bất đẳng thức trên, ta được

$$16\left(\sum m^2n^2-3m^2n^2p^2\right)>81(1-m^2n^2p^2),$$

hay

$$16\sum m^2n^2+33m^2n^2p^2>81. \tag{8}$$

Đặt $Q = mn + np + pm$ và $R = mnp$, khi đó dễ thấy $Q \le 3$ (kết quả quen thuộc), $R \le 1$ (theo bất đẳng thức AM-GM) và $R \ge \frac{4Q-9}{3}$ (theo bất đẳng thức Schur).

Nếu $Q < \frac{9}{4}$, ta có

$$\mathrm{VT}_{(8)} \le 16\sum m^2n^2 + 33mnp = 16Q^2 - 63R < 16Q^2 < 81.$$

Nếu $\frac{9}{4} \le Q \le 3$, ta có

$$\mathrm{VT}_{(8)} \le 16\sum m^2n^2 + 33mnp = 16Q^2 - 63R \le 16Q^2 - 21(4Q-9) = 4(4Q-9)(Q-3) + 81 \le 81.$$

Cả hai trường hợp đều dẫn đến mâu thuẫn với (8).

Như vậy, ta phải có $x + y + z \ge 3$. Bất đẳng thức (6) được chứng minh. ■

Trở lại bài toán: Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và bất đẳng thức (6), ta có

$$\mathrm{VT}_{(4)} = \frac{1}{1+k}\left[\sum a(b+kc)\right]\left[\sum \frac{1}{(b+kc)^2}\right] \ge \frac{1}{1+k}\sum\left(\sqrt{\frac{a}{b+kc}}\right)^2 \ge \frac{9}{(1+k)^2}.$$

3. Lời giải của bài toán tổng quát

Với $k = 0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM. Với $k > 0$, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $k \ge 1$. Bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại dưới dạng

$$\left(\sum ab\right)\left[\sum (a+kb)^2(b+kc)^2\right] \ge \frac{9}{(k+1)^2}\prod (a+kb)^2.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Đặt $a = a_1 + x$, $b = b_1 + x$, $c = c_1 + x$ với $x > -c_1$, và $u = a_1 - b_1 = a - b$, $v = b_1 - c_1 = b - c$. Bất đẳng thức trên trở thành $f(x) \ge 0$, trong đó

$$\begin{aligned} f(x) = &\left[\sum (x+a_1)(x+b_1)\right]\left\{\sum \left[(k+1)x + a_1 + kb_1\right]^2\left[(k+1)x + b_1 + kc_1\right]^2\right\} \\ &- \frac{9}{(k+1)^2}\prod \left[(k+1)x + a_1 + kb_1\right]^2 \\ = &\, A(a, b, c). \end{aligned}$$

Bằng tính toán trực tiếp, ta có

$$f^{(4)}(x) = 24(5k^2 - 8k + 5)(k+1)^2\left(\sum a_1^2 - \sum a_1b_1\right) \ge 0.$$

Do đó $f'''(x)$ là hàm không giảm trên miền $(-c_1,\,+\infty)$. Mà $f'''(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f'''(x) \geq f'''(-c_1)$ với mọi số thực $x > -c_1$. Vì

$$\begin{aligned}\frac{f'''(x)}{24(k+1)} &= -3\sum\left[(k+1)x+a_1+kb_1\right]\left[(k+1)x+b_1+kc_1\right]^2\\&\quad -3\sum\left[(k+1)x+a_1+kb_1\right]^2\left[(k+1)x+b_1+kc_1\right]\\&\quad +(k+1)^3\left[\sum(x+a_1)\right]^3+(k+1)^3\left[\sum(x+a_1)\right]\left[\sum(x+a_1)(x+b_1)\right]\\&\quad -18\prod\left[(k+1)x+a_1+kb_1\right]\\&= -3\sum(a+kb)^2(b+kc)-3\sum(a+kb)(b+kc)^2+(k+1)^3\left(\sum a\right)^3\\&\quad +(k+1)^3\left(\sum a\right)\left(\sum ab\right)-18\prod(a+kb)\\&= P(a,\,b,\,c),\end{aligned}$$

nên ta dễ thấy

$$\begin{aligned}f'''(-c_1) &= P(u,\,v,\,0)\\&= (u^3+u^2v+uv^2+v^3)k^3+3uv(u-2v)k^2+3uv(v-2u)k+u^3+u^2v+uv^2+v^3\\&\geq (u^3+u^2v+uv^2+v^3)(2k^2-k)+3uv(u-2v)k^2+3uv(v-2u)k+u^3+u^2v+uv^2+v^3\\&= (2u^3+5u^2v-4uv^2+2v^3)k^2-(u^3+7u^2v-2uv^2+v^3)k+u^3+u^2v+uv^2+v^3\\&\geq (2u^3+5u^2v-4uv^2+2v^3)(2k-1)-(u^3+7u^2v-2uv^2+v^3)k+u^3+u^2v+uv^2+v^3\\&= 3(u^3+u^2v-2uv^2+v^3)k-u^3-4u^2v+5uv^2-v^3\\&\geq 3(u^3+u^2v-2uv^2+v^3)-u^3-4u^2v+5uv^2-v^3\\&= 2u^3-u^2v-2uv^2+2v^3 \geq 0.\end{aligned}$$

Như vậy, ta có $f'''(x) \geq f'''(-c_1) \geq 0$. Suy ra $f''(x)$ là hàm không giảm trên miền $(-c_1,\,+\infty)$. Mà $f''(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f''(x) \geq f''(-c_1)$ với mọi số thực $x > -c_1$. Vì

$$\begin{aligned}f''(x) &= -12\sum\left[(k+1)x+a_1+kb_1\right]^2\left[(k+1)x+b_1+kc_1\right]^2\\&\quad +8(k+1)\left[\sum(x+a_1)\right]\Big\{\sum\left[(k+1)x+a_1+kb_1\right]^2\left[(k+1)x+b_1+kc_1\right]\\&\quad +\sum\left[(k+1)x+a_1+kb_1\right]\left[(k+1)x+b_1+kc_1\right]^2\Big\}\\&\quad +4(k+1)^4\left[\sum(x+a_1)\right]^2\left[\sum(x+a_1)(x+b_1)\right]\\&\quad -72(k+1)\left[\sum(x+a_1)\right]\prod\left[(k+1)x+a_1+kb_1\right]\\&= -12\sum(a+kb)^2(b+kc)^2+8(k+1)\left(\sum a\right)\Big[\sum(a+kb)^2(b+kc)\\&\quad +\sum(a+kb)(b+kc)^2\Big]+4(k+1)^4\left(\sum a\right)^2\left(\sum ab\right)-72(k+1)\left(\sum a\right)\prod(a+kb)\\&= Q(a,\,b,\,c),\end{aligned}$$

nên ta dễ thấy

$$\begin{aligned}
f''(-c_1) &= Q(u,\, v,\, 0)\\
&= 12uv(u^2+uv+v^2)k^4 + 8(u^4+4u^3v-5uv^3+v^4)k^3\\
&\quad + 4(u^4-2u^3v-15u^2v^2-2uv^3+v^4)k^2 + 8(u^4-5u^3v+4uv^3+v^4)k\\
&\quad + 12uv(u^2+uv+v^2)\\
&\geq 12uv(u^2+uv+v^2)(4k^3-6k^2+4k-1) + 8(u^4+4u^3v-5uv^3+v^4)k^3\\
&\quad + 4(u^4-2u^3v-15u^2v^2-2uv^3+v^4)k^2 + 8(u^4-5u^3v+4uv^3+v^4)k\\
&\quad + 12uv(u^2+uv+v^2)\\
&= 4k\big[2(u^4+10u^3v+6u^2v^2+uv^3+v^4)k^2 + (u^4-20u^3v-33u^2v^2-20uv^3+v^4)k\\
&\quad + 2(u^4+u^3v+6u^2v^2+10uv^3+v^4)\big].
\end{aligned}$$

Biểu thức trong ngoặc là một tam thức với biến k và có hệ số cao nhất, hệ số tự do không âm. Biệt thức của tam thức bằng

$$\begin{aligned}
&(u^4-20uv^3-33u^2v^2-20uv^3+v^4)^2-16(u^4+10u^3v+6u^2v^2+uv^3+v^4)(u^4+u^3v+6u^2v^2+10uv^3+v^4)\\
&= -15(u^8+v^8) - 216uv(u^6+v^6) - 18u^2v^2(u^4+v^4) + 48u^3v^3(u^2+v^2) - 333u^4v^4 \leq 0.
\end{aligned}$$

(Chú ý rằng $u^6+v^6 \geq u^2v^2(u^2+v^2)$). Như vậy, ta có $f''(-c_1) \geq 0$. Suy ra $f''(x) \geq f''(-c_1) \geq 0$. Do đó $f'(x)$ là hàm không giảm trên miền $(-c_1,\, +\infty)$. Mà $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f'(x) \geq f'(-c_1)$ với mọi số thực $x > -c_1$. Vì

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\left[\sum(x+a_1)\right]\left\{\sum\left[(k+1)x+a_1+kb_1\right]^2\left[(k+1)x+b_1+kc_1\right]^2\right\}\\
&\quad + 2(k+1)\left[\sum(x+a_1)(x+b_1)\right]\left\{\sum\left[(k+1)x+a_1+kb_1\right]^2\left[(k+1)x+b_1+kc_1\right]\right.\\
&\quad \left. + \sum\left[(k+1)x+a_1+kb_1\right]\left[(k+1)x+b_1+kc_1\right]^2\right\}\\
&\quad - \frac{18}{k+1}\left\{\sum\left[(k+1)x+a_1+kb_1\right]\left[(k+1)x+b_1+kc_1\right]\right\}\prod\left[(k+1)x+a_1+kb_1\right]\\
&= 2\left(\sum a\right)\left[\sum(a+kb)^2(b+kc)^2\right] + 2(k+1)\left(\sum ab\right)\left[\sum(a+kb)^2(b+kc)\right.\\
&\quad \left. + \sum(a+kb)(b+kc)^2\right] - \frac{18}{k+1}\left[\sum(a+kb)(b+kc)\right]\prod(a+kb)\\
&= R(a,\, b,\, c),
\end{aligned}$$

nên ta dễ thấy

$$\begin{aligned}
\frac{k+1}{2}f'(-c_1) &= \frac{k+1}{2}R(u,\,v,\,0)\\
&= 2u^2v^2(u+v)k^5 + uv(3u^3+8u^2v-6uv^2+v^3)k^4\\
&\quad + (u^5+6u^4v-8u^3v^2-4u^2v^3-5uv^4+v^5)k^3\\
&\quad + (u^5-5u^4v-4u^3v^2-8u^2v^3+6uv^4+v^5)k^2 + uv(u^3-6u^2v+8uv^2+3v^3)k\\
&\quad + 2u^2v^2(u+v)\\
&\geq 2u^2v^2(u+v)(5k^4-10k^3+10k^2-5k+1) + uv(3u^3+8u^2v-6uv^2+v^3)k^4\\
&\quad + (u^5+6u^4v-8u^3v^2-4u^2v^3-5uv^4+v^5)k^3\\
&\quad + (u^5-5u^4v-4u^3v^2-8u^2v^3+6uv^4+v^5)k^2 + uv(u^3-6u^2v+8uv^2+3v^3)k\\
&\quad + 2u^2v^2(u+v)\\
&= uv(3u^3+18u^2v+4uv^2+v^3)k^4 + (u^5+6u^4v-28u^3v^2-24u^2v^3-5uv^4+v^5)k^3\\
&\quad + (u^5-5u^4v+16u^3v^2+12u^2v^3+6uv^4+v^5)k^2 + uv(u^3-16u^2v-2uv^2+3v^3)k\\
&\quad + 4u^2v^2(u+v)\\
&\geq uv(3u^3+18u^2v+4uv^2+v^3)(4k^3-6k^2+4k-1)\\
&\quad + (u^5+6u^4v-28u^3v^2-24u^2v^3-5uv^4+v^5)k^3\\
&\quad + (u^5-5u^4v+16u^3v^2+12u^2v^3+6uv^4+v^5)k^2 + uv(u^3-16u^2v-2uv^2+3v^3)k\\
&\quad + 4u^2v^2(u+v)\\
&= (u^5+18u^4v+44u^3v^2-8u^2v^3-uv^4+v^5)k^3\\
&\quad + (u^5-23u^4v-92u^3v^2-12u^2v^3+v^5)k^2 + (13u^4v+56u^3v^2+14u^2v^3+7uv^4)k\\
&\quad - 3u^4v-14u^3v^2-uv^4\\
&\geq (u^5+18u^4v+44u^3v^2-8u^2v^3-uv^4+v^5)(3k^2-3k+1)\\
&\quad + (u^5-23u^4v-92u^3v^2-12u^2v^3+v^5)k^2 + (13u^4v+56u^3v^2+14u^2v^3+7uv^4)k\\
&\quad - 3u^4v-14u^3v^2-uv^4\\
&= (4u^5+31u^4v+40u^3v^2-36u^2v^3-3uv^4+4v^5)k^2\\
&\quad + (-3u^5-41u^4v-76u^3v^2+38u^2v^3+10uv^4-3v^5)k\\
&\quad + u^5+15u^4v+30u^3v^2-8u^2v^3-2uv^4+v^5.
\end{aligned}$$

Biểu thức cuối là một tam thức với biến k và có hệ số cao nhất, hệ số tự do không âm. Biệt thức của nó bằng

$$\begin{aligned}
&(-3u^5-41u^4v-76u^3v^2+38u^2v^3+10uv^4-3v^5)^2\\
&\quad - 4(4u^5+31u^4v+40u^3v^2-36u^2v^3-3uv^4+4v^5)(u^5+15u^4v+30u^3v^2-8u^2v^3-2uv^4+v^5)\\
&= -7u^{10}-118u^9v-363u^8v^2+156u^7v^3+996u^6v^4-582u^5v^5-666u^4v^6+192u^3v^7+120u^2v^8\\
&\quad - 16uv^9-7v^{10}\\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Như vậy $f'(-c_1) \geq 0$. Suy ra $f'(x) \geq f'(-c_1) \geq 0$. Do đó $f(x)$ là hàm không giảm trên miền $(-c_1,\,+\infty)$. Mà $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x) \geq f(-c_1)$ với mọi số thực $x > -c_1$. Ta sẽ chứng minh $f(-c_1) \geq 0$, hay

$$A(u,\, v,\, 0) \geq 0.$$

Với $uv = 0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Với $uv > 0$, bất đẳng thức $A(u,\, v,\, 0) \geq 0$ tương đương với

$$uv\left[\frac{1}{(u+kv)^2} + \frac{1}{k^2u^2} + \frac{1}{v^2}\right] \geq \frac{9}{(k+1)^2}. \tag{9}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(u+kv)^2} + \frac{1}{k^2u^2} + \frac{1}{v^2} &= \frac{1}{(u+kv)^2} + \frac{(u+kv)^2}{(k+1)^4u^2v^2} + \frac{1}{k^2u^2} + \frac{1}{v^2} - \frac{(u+kv)^2}{(k+1)^4u^2v^2} \\
&= \frac{1}{(u+kv)^2} + \frac{(u+kv)^2}{(k+1)^4u^2v^2} + \left[\frac{1}{k^2} - \frac{k^2}{(k+1)^4}\right]\frac{1}{u^2} + \left[1 - \frac{1}{(k+1)^4}\right]\frac{1}{v^2} \\
&\quad - \frac{2k}{(k+1)^4uv} \\
&\geq \left[\frac{2}{(k+1)^2} + 2\sqrt{\left[\frac{1}{k^2} - \frac{k^2}{(k+1)^4}\right]\left[1 - \frac{1}{(k+1)^4}\right]} - \frac{2k}{(k+1)^4}\right]\frac{1}{uv}
\end{aligned}$$

Như vậy, để chứng minh bất đẳng thức (9), ta sẽ chứng minh

$$2\sqrt{\left[\frac{1}{k^2} - \frac{k^2}{(k+1)^4}\right]\left[1 - \frac{1}{(k+1)^4}\right]} - \frac{2k}{(k+1)^4} \geq \frac{7}{(k+1)^2},$$

hay

$$2\sqrt{(k+2)(2k+1)(k^2+2k+2)(2k^2+2k+1)} \geq \sqrt{k}(7k^2+16k+7).$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $\text{VT}^2 - \text{VP}^2 = (16k^2+39k+16)(k^2-1)^2 \geq 0$. Như vậy, ta có $f(x) \geq f(-c_1) \geq 0$. Bất đẳng thức (4) được chứng minh xong.

4. Lời bình

Có thể thấy lời giải trên mặc dù đã giải quyết được trọn vẹn bài toán 4, nhưng lời giải vẫn quá phức tạp và cần sử dụng rất nhiều tính toán. Chúng tôi hy vọng trong thời gian tới sẽ có những lời giải gọn đẹp hơn cho bài toán này.

Tài liệu

[1] Ji Chen, *Problem 1940*, Crux Mathematicorum, 1994.
(Link: cms.math.ca/wp-content/uploads/crux-pdfs/Crux_v20n04_Apr.pdf)

[2] *Topic "Famous 1996 Iran Inequality"*, Art of Problem Solving.
(Link: https://artofproblemsolving.com/community/c6h3547)

[3] *Topic "Super hard inequality of Hungkhtn"*, Art of Problem Solving.
(Link: https://artofproblemsolving.com/community/c6h141336)

Mối liên hệ về sự hội tụ giữa dãy tổng và dãy tích

Nguyễn Tấn Phúc, Trần Nhật Quang (Trường Đại học Sư Phạm TP Hồ Chí Minh)

Giới thiệu. *Trong toán học, dãy tổng (hay chuỗi) là một chủ đề được nghiên cứu rộng rãi và sâu sắc, với nhiều kết quả quan trọng đã được xây dựng qua hàng thế kỷ. Từ các chuỗi hình học đơn giản đến các chuỗi Fourier phức tạp, người ta đã phát triển nhiều công cụ và tiêu chuẩn để nghiên cứu sự hội tụ, tính chất và ứng dụng của chúng trong nhiều lĩnh vực. Tuy nhiên, các công cụ để nghiên cứu về dãy tích (tích vô hạn) lại chưa được nhắc đến nhiều, khiến cho nhiều người có tâm lý "e ngại" các bài toán về dãy tích, hay xa hơn là chưa thấy được mối liên hệ về sự hội tụ của hai loại dãy nêu trên. Vì vậy, bài viết này hướng tới mục tiêu xây dựng một lý thuyết tương đối bài bản liên quan đến dãy tích, để từ đó, làm rõ mối liên hệ về sự hội tụ của dãy tích với dãy tổng.*

1. Kiến thức bổ trợ về chuỗi số

1.1. Các khái niệm cơ bản

Trước hết, ta nhắc lại một số khái niệm cơ bản về chuỗi số và một số điều kiện cần để chuỗi số hội tụ.

Định nghĩa 1 (Chuỗi số) Cho dãy số thực (a_n). Ta gọi tổng vô hạn dưới đây

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

là một **chuỗi số** có số hạng tổng quát là a_n và gọi **tổng riêng thứ** n của chuỗi số trên là tổng hữu hạn sau

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Định nghĩa 2 (Sự hội tụ của chuỗi số) Nếu dãy tổng riêng (S_n) có giới hạn là S (có thể hữu hạn hoặc vô hạn) thì ta gọi S là tổng của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và viết

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Nếu $S \in \mathbb{R}$ thì ta nói chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **hội tụ** về S. Trong các trường hợp còn lại, ta nói chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **phân kỳ**.

Chú ý Sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ không phụ thuộc vào hữu hạn các số hạng đầu tiên.

Định lý 1 (Điều kiện cần để chuỗi số hội tụ) Nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì ta có $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Nói cách khác, nếu (a_n) không hội tụ về 0 thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Chứng minh. Giả sử chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ về S, khi đó, theo Định nghĩa 2, ta có $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, suy ra

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

■

1.2. Các tiêu chuẩn hội tụ thường dùng

Định lý 2 Điều kiện cần và đủ để một chuỗi số không âm $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ là dãy tổng riêng (S_n) bị chặn trên.

Chứng minh. Vì (a_n) là dãy không âm nên (S_n) là dãy tăng. Do đó, theo Định lý Weierstrass, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ hay dãy (S_n) hội tụ khi và chỉ khi (S_n) bị chặn trên. ■

Định lý 3 (Tiêu chuẩn Cauchy) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ khi và chỉ khi (S_n) là dãy Cauchy, nghĩa là với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $N \in \mathbb{Z}^+$ sao cho với mọi $n \geq N$, $p \in \mathbb{Z}^+$ thì

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

Định lý 4 (Dấu hiệu hội tụ tuyệt đối) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ thì ta nói chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **hội tụ tuyệt đối** và khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

Chứng minh. Giả sử chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ, ta chứng minh chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

Với mỗi $n \in \mathbb{Z}^+$, đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$ và $S'_n = \sum_{k=1}^{n} |a_n|$.

Lấy $\varepsilon > 0$ tùy ý, áp dụng Định lý 3 cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, ta tìm được số $N \in \mathbb{Z}^+$

sao cho với mọi $n \geq N$ và $p \in \mathbb{Z}^+$ thì:

$$S'_{n+p} - S'_n = \left|S'_{n+p} - S'_n\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon.$$

Từ đó, với mọi $n \geq N$ và $p \in \mathbb{Z}^+$, ta luôn có:

$$|S_{n+p} - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon.$$

Vì vậy, theo Tiêu chuẩn Cauchy 3, ta kết luận được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ. ■

Định lý 5 (Tiêu chuẩn so sánh) Nếu $|a_n| \leq b_n, \forall n \geq N$, với $N \in \mathbb{Z}^+$ nào đó và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

Chứng minh. Giả sử $|a_n| \leq b_n, \forall n \geq N$, với $N \in \mathbb{Z}^+$ nào đó và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, ta chứng minh chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

Với mỗi $n \in \mathbb{Z}^+, n \geq N$, đặt $S_n = \sum_{k=N}^{n} |a_k|$ và $S'_n = \sum_{k=N}^{n} b_k$, từ $|a_n| \leq b_n, \forall n \geq N$, ta có $S_n \leq S'_n$, $\forall n \geq N$.

Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ nên dãy $(S'_n)_{n\geq N}$ hội tụ, suy ra $(S'_n)_{n\geq N}$ bị chặn trên, mà $S_n \leq S'_n$, $\forall n \geq N$ nên dãy $(S_n)_{n\geq N}$ cũng bị chặn trên.

Suy ra dãy tổng riêng $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)_{n\geq 1}$ cũng bị chặn trên, mà $|a_n| \geq 0$, $\forall n \geq 1$ nên theo Định lý 2, ta có $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ, dẫn đến $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ (tuyệt đối). ■

Định lý 6 (Tiêu chuẩn so sánh dạng giới hạn) Giả sử với $N \in \mathbb{Z}^+$ và với mọi $n \geq N$, ta có $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ và $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ (có thể hữu hạn hoặc vô hạn). Khi đó:

(i) Nếu $0 < k < +\infty$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ khi và chỉ khi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ.

(ii) Nếu $k = 0$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ kéo theo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

(iii) Nếu $k = +\infty$ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ kéo theo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Chứng minh.

(i) Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k \in (0, +\infty)$, ta chứng minh $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ khi và chỉ khi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ.

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k$ nên tồn tại số tự nhiên N sao cho $\left|\dfrac{a_n}{b_n} - k\right| < \dfrac{k}{2}, \forall n \geq N$, suy ra $\dfrac{2}{3k}a_n < b_n < \dfrac{2}{k}a_n, \forall n \geq N$.

- Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3k}{2}b_n\right)$ hội tụ nên theo Tiêu chuẩn so sánh 5, ta suy ra $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.
- Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{k}a_n\right)$ hội tụ nên theo Tiêu chuẩn so sánh 5, ta suy ra $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ.

Tóm lại, ta có $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ khi và chỉ khi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ.

(ii) Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$, ta chứng minh nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0 < 1$ nên tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $\dfrac{a_n}{b_n} < 1, \forall n \geq N$.

Khi đó $0 \leq a_n < b_n, \forall n \geq N$ nên theo Tiêu chuẩn so sánh 5, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ kéo theo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

(iii) Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$, ta chứng minh $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ kéo theo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$ nên tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $\dfrac{a_n}{b_n} > 1, \forall n \geq N$.

Khi đó $0 \leq b_n < a_n, \forall n \geq N$ nên theo Tiêu chuẩn so sánh 5, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ kéo theo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, tương đương với việc $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ kéo theo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ. ■

Định lý 7 (Chuỗi hình học) Điều kiện cần và đủ để chuỗi (hình học) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ hội tụ là $|q| < 1$.

Chứng minh. Trước hết, xét trường hợp $|q| < 1$, ta chứng minh $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ hội tụ.
Thật vậy, với mỗi $n \in \mathbb{Z}^+$, ta có

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q\left(1-q^n\right)}{1-q}.$$

Hơn nữa, do $|q| < 1$ nên $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{q\left(1-q^n\right)}{1-q} = \frac{q}{1-q},$$

tức là $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ hội tụ về $\frac{q}{1-q}$.

Tiếp theo, xét trường hợp $|q| \geq 1$, ta có $|q^n| = |q|^n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.
Điều đó cho thấy q^n không thể hội tụ về 0 khi $n \to \infty$.

Từ đó, theo Định lý 1, ta kết luận được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ phân kỳ.

Nói tóm lại, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ hội tụ khi và chỉ khi $|q| < 1$. ■

Định lý 8 (Tiêu chuẩn D'Alembert) Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, giả sử tồn tại $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.
Khi đó:

(i) Nếu $L > 1$ thì chuỗi đã cho phân kỳ.

(ii) Nếu $L < 1$ thì chuỗi đã cho hội tụ.

Chứng minh.

(i) Giả sử $L > 1$, ta chứng minh chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

Do $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L > \frac{L+1}{2}$ (vì $L > 1$) nên tồn tại số tự nhiên N sao cho:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > \frac{L+1}{2}, \ \forall n \geq N.$$

Từ đó, với mọi $n \geq N+1$ ta đều có:

$$|u_n| = \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\right| \cdots \left|\frac{u_{N+1}}{u_N}\right| \cdot |u_N| > \left(\frac{L+1}{2}\right)^{n-N} |u_N|.$$

Đến đây cho $n \to +\infty$ với chú ý $\frac{L+1}{2} > 1$, ta được $\lim_{n\to\infty} |u_n| = +\infty$.

Vì thế, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ theo Định lý 1.

(ii) Giả sử $L < 1$, ta chứng minh chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Do $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L < \frac{L+1}{2}$ nên tồn tại số tự nhiên N sao cho:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \frac{L+1}{2}, \ \forall n \geq N.$$

Từ đó, với mọi $n \geq N+1$ ta đều có:

$$|u_n| = \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\right| \cdots \left|\frac{u_{N+1}}{u_N}\right| \cdot |u_N| < \left(\frac{L+1}{2}\right)^{n-N} |u_N|.$$

Chú ý rằng $0 < \frac{L+1}{2} < 1$ nên theo Định lý 7, ta có $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{L+1}{2}\right)^{n-N}$ hội tụ.

Từ đó, theo Tiêu chuẩn so sánh 5, ta kết luận được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

■

Chú ý Ta có thể thay số $\frac{L+1}{2}$ trong chứng minh trên bởi một số tùy ý nằm giữa L và 1.

Định lý 9 (Chuỗi Dirichlet) Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ hội tụ khi và chỉ khi $s > 1$.

Chứng minh. Trước hết, xét $s > 1$, ta chứng minh $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ hội tụ.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^{1-s}}{1-s}$, $x > 0$. Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{x^s}, \forall x > 0.$$

Với mỗi $n \geq 2$, theo định lý Lagrange, tồn tại $c_n \in (n-1; n)$ sao cho

$$f(n) - f(n-1) = f'(c_n) = \frac{1}{c_n^s} > \frac{1}{n^s}.$$

Do đó, với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^s} &< 1 + \sum_{k=2}^{n} [f(k) - f(k-1)] \\ &= 1 + f(n) - f(2) \\ &= 1 + \frac{2^{1-s} - n^{1-s}}{s-1} \\ &< 1 + \frac{2^{1-s}}{s-1}.\end{aligned}$$

Mà $\frac{1}{n^s} > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ nên theo Định lý 2, ta suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ hội tụ.

Tiếp theo ta chứng minh với $s \leq 1$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ phân kỳ.

Chú ý rằng với $s \leq 1$, ta có $\frac{1}{n^s} \geq \frac{1}{n} > 0$ nên ta chỉ cần chứng minh $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ.

Với mỗi $n \in \mathbb{Z}^+$, đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, ta có

$$|S_{2n} - S_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Như vậy, (S_n) không là dãy Cauchy nên theo Tiêu chuẩn Cauchy 3, ta kết luận được $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ, suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ phân kỳ khi $s \leq 1$.

Vậy chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ hội tụ khi và chỉ khi $s > 1$. ■

2. Tích vô hạn

Định nghĩa 3 (Tích vô hạn) Cho dãy số thực (a_n). Ta gọi

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

là một tích vô hạn có số hạng tổng quát là a_n và gọi **tích riêng thứ** n của tích vô hạn trên là tích hữu hạn sau:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Sự hội tụ của tích vô hạn được định nghĩa hoàn toàn tương tự với sự hội tụ của chuỗi, theo nghĩa là: thay dãy tổng riêng (S_n) bằng dãy tích riêng (P_n). Cũng cần nói thêm rằng, nếu dãy (a_n) có phần tử $a_N = 0$ thì $P_n = 0,\ \forall n \geq N$, là một tình huống rất "tầm thường". Vì vậy trong phần còn lại của bài viết này, chúng ta quy ước với nhau rằng: nếu dãy (a_n) chỉ có hữu hạn các phần tử bằng 0 thì tích vô hạn $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ được hiểu là bỏ đi những phần tử bằng 0 của dãy (a_n).

Định nghĩa 4 (Sự hội tụ của tích vô hạn [1]) Nếu dãy tích riêng (P_n) có giới hạn là P (có thể hữu hạn hoặc vô hạn) thì ta viết

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = P.$$

Nếu $P \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ thì ta nói tích vô hạn $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ **hội tụ** về P. Trong các trường hợp còn lại, ta nói tích vô hạn $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ **phân kỳ**.

Chú ý Trong định nghĩa trên, tình huống $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$ không được liệt kê vào trường hợp tích vô hạn $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ (về 0), mục đích là để phù hợp với định nghĩa về sự hội tụ của chuỗi 2. Thật vậy, với mỗi $n \geq 1$ ta đặt $P'_n = \prod_{k=1}^{n} |a_k|$ và $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \ln|a_k|$ (lưu ý $a_k \neq 0,\ \forall k \in \mathbb{Z}^+$). Khi đó

$$S'_n = \ln P'_n,\ \forall n \geq 1.$$

Nói cách khác, tính hội tụ hay phân kỳ của dãy (S'_n) phụ thuộc vào dãy (P'_n). Như vậy nếu $\lim_{n\to\infty} P_n = P \neq 0$ $\left(\text{tương ứng với } \prod_{n=1}^{\infty} a_n \text{ hội tụ}\right)$ thì $\lim_{n\to\infty} P'_n = |P| > 0$, dẫn đến $\lim_{n\to\infty} S'_n = \ln|P| \in \mathbb{R}$, đồng nghĩa với việc chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \ln|a_n|$ hội tụ theo Định nghĩa 2.

Còn đối với trường hợp $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$, sẽ tương ứng với $\lim_{n\to\infty} S'_n = -\infty$, tức là chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \ln|a_n|$ phân kỳ theo Định nghĩa 2. Vậy nên, sẽ là không "công bằng" nếu ta công nhận $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, trong khi "người bạn thân" $\sum_{n=1}^{\infty} \ln |a_n|$ lại phân kỳ!

Tương tự với Định lý 1, ta cũng có điều kiện cần để tích vô hạn $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Định lý 10 (Điều kiện cần để tích vô hạn hội tụ) Nếu tích vô hạn $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì ta có $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Nói cách khác, nếu (a_n) không hội tụ về 1 thì tích vô hạn $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Chứng minh. Giả sử tích vô hạn $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ về P, khi đó, theo Định nghĩa 4, ta có $\lim_{n\to\infty} P_n = P \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên tồn tại chỉ số $N \in \mathbb{N}$ sao cho $P_n \neq 0$, $\forall n \geq N$, suy ra $a_n = \dfrac{P_{n+1}}{P_n}$, $\forall n \geq N$ nên $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{P_{n+1}}{P_n} = \dfrac{P}{P} = 1$. ■

Chú ý Kết quả trong định lý trên gợi ý cho ta một cách biểu diễn mới của tích vô hạn (sẽ được dùng xuyên suốt trong phần còn lại của bài viết này), đó là $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$. Khi đó, theo Định lý 10, nếu tích vô hạn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ hội tụ thì ta có $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

3. Mối liên hệ về sự hội tụ giữa chuỗi và tích vô hạn

Định lý 11 Cho (a_n) là một dãy số thực thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

(i) $a_n > -1$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$;

(ii) Các phần tử a_n cùng dấu với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

Khi đó, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và tích vô hạn $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Chứng minh. Với mỗi $n \in \mathbb{Z}^+$, xét các dãy tổng riêng, tích riêng lần lượt là $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ và $P_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k)$ và xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, vì $a_n \geq 0$ nên ta có đánh giá

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_n) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_n > \sum_{k=1}^{n} a_n = S_n$$

Mặt khác, với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, sử dụng điều kiện $a_n \geq 0$ và áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $1 + x \leq e^x$, $\forall x \geq 0$, ta thu được

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_n) \leq e^{a_1} \cdot e^{a_2} \cdots e^{a_n} = e^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = e^{S_n}.$$

Suy ra

$$S_n < P_n \leq e^{S_n},\ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Điều đó chứng tỏ (S_n) bị chặn trên khi và chỉ khi (P_n) bị chặn trên.
Hơn nữa, từ $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, ta suy ra (S_n), (P_n) là các dãy tăng và $P_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ nên ta thu được điều cần chứng minh.

Trường hợp 2. $-1 < a_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Trong trường hợp này, (S_n) và (P_n) đều là các dãy giảm ngặt.

Tương tự **Trường hợp 1**, áp dụng bất đẳng thức $1 + x < e^x$, với $-1 < x < 0$, ta thu được đánh giá

$$0 < P_n < e^{S_n},\ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ thì (S_n) phân kỳ, mà (S_n) là dãy giảm nên $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$, suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} e^{S_n} = 0$ nên (P_n) có giới hạn là 0, dẫn đến $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ phân kỳ.

Bây giờ ta quan tâm trường hợp $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, và cần chứng minh dãy tích riêng (P_n) hội tụ về một số thực khác 0. Lưu ý rằng (P_n) đã là dãy giảm ngặt nên chỉ cần chứng minh (P_n) bị chặn dưới bởi một số dương nữa là được. Ta có thể xử lý theo 2 hướng sau:

Cách 1: Đầu tiên ta nhắc lại một bất đẳng thức quan trọng, có thể chứng minh dễ dàng bằng cách khảo sát hàm số:

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x),\ \forall x \in (-1, 0).$$

Áp dụng bất đẳng thức trên, với mỗi $n \geq 1$ ta có:

$$\ln P_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + a_k) > \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{2} = S_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{2}. \tag{1}$$

Chú ý rằng $a_k < 0,\ \forall k \in \mathbb{Z}^+$ nên $a_i a_j > 0,\ \forall i, j \in \mathbb{Z}^+$, dẫn đến là:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{2} < \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^2}{2} = \frac{S_n^2}{2}.$$

Áp dụng đánh giá trên vào (1) ta được:

$$\ln P_n > S_n - \frac{S_n^2}{2},\ \forall n \in \mathbb{Z}^+. \tag{2}$$

Lại có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên dãy (S_n) có giới hạn hữu hạn, giả sử là S. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} \left(S_n - \dfrac{S_n^2}{2}\right) = S - \dfrac{S^2}{2}$, vì thế tồn tại số thực M để mà:

$$S_n - \frac{S_n^2}{2} > M,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Kết hợp với (2) ta được:

$$P_n > e^M,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Lại có dãy (P_n) giảm ngặt nên nó có giới hạn hữu hạn $P \geq e^M > 0$. Vậy tích vô hạn $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ hội tụ.

Cách 2: Do $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên theo Tiêu chuẩn Cauchy 3, tồn tại $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ sao cho

$$|S_n - S_{n_0}| < \frac{1}{2},\ \forall n \geq n_0 + 1$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2} < \sum_{i=n_0+1}^{n} a_i < 0,\ \forall n \geq n_0 + 1 \text{ (do } (S_n) \text{ giảm ngặt)}.$$

Do $-1 < a_n < 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ nên $P_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Ta sẽ chứng minh quy nạp rằng

$$\frac{P_n}{P_{n_0}} \geq 1 + \sum_{i=n_0+1}^{n} a_i,\ \forall n \geq n_0 + 1.$$

Với $n = n_0 + 1$, ta có $\dfrac{P_{n_0+1}}{P_{n_0}} = 1 + a_{n_0+1} = 1 + \sum\limits_{i=n_0+1}^{n_0+1} a_i$.

Giả sử $\dfrac{P_{n_0+k}}{P_{n_0}} \geq 1 + \sum\limits_{i=n_0+1}^{n_0+k} a_i$, với $k \in \mathbb{Z}^+$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
\frac{P_{n_0+k+1}}{P_{n_0}} &= \frac{P_{n_0+k}}{P_{n_0}}\left(1+a_{n_0+k+1}\right) \\
&\geq \left(1+\sum_{i=n_0+1}^{n_0+k} a_i\right)\left(1+a_{n_0+k+1}\right) \\
&= 1+\sum_{i=n_0+1}^{n_0+k+1} a_i + a_{n_0+k+1}\sum_{i=n_0+1}^{n_0+k} a_i \\
&\geq 1+\sum_{i=n_0+1}^{n_0+k+1} a_i.
\end{aligned}$$

Theo Nguyên lý quy nạp, ta suy ra

$$\frac{P_n}{P_{n_0}} \geq 1+\sum_{i=n_0+1}^{n} a_i,\ \forall n \geq n_0+1.$$

Do đó $\dfrac{P_n}{P_{n_0}} > 1-\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, $\forall n \geq n_0+1$, dẫn đến $P_n > \dfrac{P_{n_0}}{2}$. ■

Trong thực hành, chúng ta thường sử dụng các hệ quả sau của định lý trên.

Hệ quả 1 Cho (a_n) là một dãy số thực không âm. Khi đó, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và tích vô hạn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Hệ quả 2 Cho (a_n) là một dãy số thực không âm. Khi đó, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và tích vô hạn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

4. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. (Olympic Sinh viên 2023) Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{4^k}\right) = \left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4^n}\right),\ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) hội tụ và xác định giới hạn của dãy số chính xác đến 1 chữ số sau dấu phẩy thập phân.

LỜI GIẢI Vì $0 < \frac{1}{4} < 1$ nên theo Định lý 7, ta có $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ hội tụ.

Theo Hệ quả 1, ta có $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{4^n}\right)$ hội tụ, tức là (u_n) hội tụ.

Áp dụng bất đẳng thức $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x,\ \forall x \ge 0$, ta được

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4^k} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16^k}\right) \le \ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{4^k}\right) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}$$

Cho $n \to \infty$ và chú ý rằng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$ (theo Định lý 7), ta được

$$\frac{3}{10} \le \lim_{n\to\infty} u_n \le \frac{1}{3}.$$

Vậy giá trị xấp xỉ chính xác đến 1 chữ số sau dấu phẩy thập phân của giới hạn của dãy số (u_n) là 0,3. □

Ví dụ 2. Cho dãy số (a_n) xác định bởi công thức:

$$a_n = n - n\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right),\ \forall n \ge 1.$$

Với mỗi $n \ge 1$, đặt $b_n = n! \prod_{k=1}^{n} a_k$. Chứng minh dãy (b_n) có giới hạn hữu hạn khác 0.

LỜI GIẢI Không khó để nhận ra rằng: $b_n = \prod_{k=1}^{n} (ka_k),\ \forall n \ge 1$. Yêu cầu bài toán tương đương với việc chứng minh tích vô hạn $\prod_{n=1}^{\infty} (na_n)$ hội tụ. Viết lại:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (na_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[n^2 \left(1 - \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)\right)\right] = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - c_n),$$

ở đây $c_n = 1 - n^2\left(1 - \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)\right),\ \forall n \ge 1$. Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $1 - \cos x < \frac{x^2}{2},\ \forall x > 0$, ta kiểm tra được $c_n > 0,\ \forall n \ge 1$. Thật vậy, ta có

$$c_n = 1 - n^2\left(1 - \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)\right) > 1 - n^2 \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^2}{2} = 0.$$

Như vậy, để áp dụng được Hệ quả 2, ta cần chứng minh chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ hội tụ.

Ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) - 1\right) + 1}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) - 1 + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4}}. \quad (1)$$

Sử dụng quy tắc L'Hospital, ta tính được:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{\frac{x^4}{4}} \overset{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + x}{x^3} \overset{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 1}{3x^2} \overset{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Mặt khác $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{n} = 0$ nên ta có ngay: $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) - 1 + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{6}$. Vì lẽ đó, từ (1) ta suy ra: $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{6} < 1.$

Lại có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên theo Tiêu chuẩn so sánh dạng giới hạn 6, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ cũng hội tụ.

Do đó, bằng cách sử dụng Hệ quả 2, ta kết luận được tích $\prod_{n=1}^{\infty} (na_n)$ hội tụ.

Vậy dãy (b_n) có giới hạn hữu hạn khác 0. □

Ví dụ 3. Cho dãy số (a_n) xác định bởi

$$a_1 = \frac{2024}{2023}, \; a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n} + \frac{n^2}{a_n}, \; \forall n \geq 1.$$

Với mỗi $n \in \mathbb{Z}^+$, đặt $b_n = \frac{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}{a_1a_2\cdots a_n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Chứng minh rằng (b_n) có giới hạn hữu hạn.

Lời giải: Để ý rằng $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ và $b_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_k}\right)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, từ đó, theo ý tưởng của Hệ quả 1, ta chỉ cần chứng minh $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ hội tụ.

Đầu tiên, ta chứng minh $a_n > n^2$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ bằng quy nạp. Rõ ràng khẳng định này đúng với $n = 1$. Giả sử ta đã có $a_n > n^2$, với $n \geq 1$ nào đó. Khi đó

$$\begin{aligned} a_{n+1} - (n+1)^2 &= (a_n - n^2) + 2\left(\sqrt{a_n} - n\right) + \left(\frac{n^2}{a_n} - 1\right) \\ &= \left(a_n - n^2\right)\left(1 + \frac{2}{\sqrt{a_n} + n} - \frac{1}{a_n}\right) \\ &= \left(a_n - n^2\right)\left(\frac{a_n - 1}{a_n} + \frac{2}{\sqrt{a_n} + n}\right) > 0 \end{aligned}$$

nên $a_{n+1} > (n+1)^2$. Theo nguyên lý quy nạp, ta suy ra $a_n > n^2$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Từ đó ta có $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, mà chuỗi $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ hội tụ theo Định lý 9 nên theo Tiêu chuẩn so sánh 5, ta kết luận được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ hội tụ. Cuối cùng, áp dụng Hệ quả 1, ta suy ra (b_n) hội tụ. □

Ví dụ 4. (VMO 2023) Xét dãy số (a_n) thỏa mãn: $a_1 = \frac{1}{2}$, $0 \leq a_n \leq 1$ với mọi $n \geq 1$ và

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_{n+1} - a_n}, \forall n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng dãy số (a_n) xác định duy nhất và có giới hạn hữu hạn.

b) Cho dãy số (b_n) xác định bởi:

$$b_n = (1 + 2a_1)\left(1 + 2^2 a_2\right)\ldots(1 + 2^n a_n), \ \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy số (b_n) có giới hạn hữu hạn.

Lời giải a) Đặt $c_n = \frac{a_n}{2}$ với mọi $n \geq 1$ thì $c_1 = \frac{1}{4}$, $0 \leq c_n \leq \frac{1}{2}$ và

$$c_n = 3c_{n+1} - 4c_{n+1}^3, \forall n \geq 1.$$

Đặt $\alpha = \arcsin \frac{1}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$. Bằng quy nạp ta sẽ chứng minh rằng:

$$c_n = \sin \frac{\alpha}{3^{n-1}}, \forall n \geq 1.$$

Hiển nhiên khẳng định trên đúng với $n = 1$. Giả sử ta đã có $c_k = \sin \frac{\alpha}{3^{k-1}}$ với $k \geq 1$ nào đó. Ta cần chứng minh: $c_{k+1} = \sin \frac{\alpha}{3^k}$.
Thật vậy, xét hàm số $f(x) = 3x - 4x^3$ với $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Ta có $f'(x) = 3(1 - 2x)(1 + 2x) > 0$ với mọi $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ nên hàm f đồng biến trên $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Lại có

$$f\left(\sin \frac{\alpha}{3^k}\right) = 3\sin \frac{\alpha}{3^k} - 4\sin^3 \frac{\alpha}{3^k} = \sin \frac{\alpha}{3^{k-1}} = c_k$$

nên $\sin \dfrac{\alpha}{3^k}$ chính là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = c_k$. Mặt khác $f(c_{k+1}) = c_k$ nên:

$$c_{k+1} = \sin \frac{\alpha}{3^k}.$$

Vậy $c_n = \sin \dfrac{\alpha}{3^{n-1}}, \forall n \geq 1$, dẫn đến $a_n = 2 \sin \dfrac{\alpha}{3^{n-1}}, \forall n \geq 1$.
Từ kết quả trên ta suy ra dãy (a_n) được xác định duy nhất. Dễ dàng tính được $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

b) Ta có $b_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + 2^k a_k\right)$, $\forall n \geq 1$. Theo Hệ quả 1, dãy (b_n) có giới hạn hữu hạn khác 0 khi và chỉ khi chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2^n a_n)$ hội tụ. Chú ý rằng:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{n+1} a_{n+1}}{2^n a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2a_{n+1}}{3a_{n+1} - a_{n+1}^3} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{3 - a_{n+1}^2} = \frac{2}{3} < 1.$$

Vì thế theo Tiêu chuẩn D'Alembert 8, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_n$ hội tụ. Vậy dãy (b_n) có giới hạn hữu hạn (khác 0). □

Ví dụ 5. (Trải nghiệm VMO 2023) Cho dãy số (x_n) xác định bởi: $x_1 = a < 0$ và

$$x_{n+1} = 3 - \sqrt{9 - 6x_n}, \ \forall n \geq 1.$$

a) Tính giới hạn $\lim\limits_{n \to \infty} (nx_n)$.

b) Với mỗi số nguyên dương n, đặt $y_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + x_k^2\right)$. Chứng minh rằng: dãy số (y_n) hội tụ.

Lời giải a) Bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n < 0, \forall n \geq 1$.
Ta viết lại giả thiết như sau:

$$x_{n+1} = \frac{6x_n}{3 + \sqrt{9 - 6x_n}}, \forall n \geq 1.$$

Để ý $\dfrac{6}{3 + \sqrt{9 - 6x_n}} < \dfrac{6}{3 + \sqrt{9}} = 1$ nên $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1, \forall n \geq 1$. Mà $x_n < 0$ nên $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \geq 1$. Hơn nữa dãy (x_n) bị chặn trên bởi 0 nên tồn tại $L = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Từ $x_{n+1} = 3 - \sqrt{9 - 6x_n}$, $\forall n \geq 1$, cho $n \to \infty$, ta được

$$L = \frac{6L}{3 + \sqrt{9 - 6L}} \iff L = 0.$$

Như vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Tiếp theo ta tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{nx_n}$, ta có:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+\sqrt{9-6x_n}}{6x_n}-\frac{1}{x_n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9-6x_n}-3}{6x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{9-6x_n}+3} = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Áp dụng bổ đề Cesaro - Stolz ta được:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nx_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}\right) = -\frac{1}{6}.$$

Suy ra: $\lim\limits_{n\to\infty}(nx_n) = -6$.

b) Dựa vào Hệ quả 1, ta biết rằng dãy (y_n) hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ hội tụ. Hơn nữa đây là chuỗi số dương nên ta chỉ cần chứng minh dãy tổng riêng (S_n) của chuỗi bị chặn trên là đủ (theo Định lý 2).
Do $\lim\limits_{n\to\infty}(nx_n) = -6$ nên tồn tại số tự nhiên N để $|nx_n+6| < 1,\ \forall n \geq N$. Như vậy, với mọi $n \geq N$ thì:

$$|x_n| = \frac{|nx_n|}{n} \leq \frac{|nx_n+6|+|-6|}{n} < \frac{7}{n}.$$

Từ đó, với mọi $n > N$ ta đều có:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 < \sum_{k=1}^{N-1} x_k^2 + \sum_{k=N}^{n}\left(\frac{7}{k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{N-1} x_k^2 + 49\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

Chú ý rằng chuỗi $\sum\limits_{k=N}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$ hội tụ theo định lý 9 nên tồn tại $M > 0$ sao cho $\sum\limits_{k=N}^{n}\dfrac{1}{k^2} < M$ với mọi $n > N$. Từ đó $S_n < \sum\limits_{k=1}^{N-1} x_k^2 + 49M$ với mọi $n > N$, tức là dãy (S_n) bị chặn trên. Hơn nữa, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ là chuỗi số không âm nên bài toán được giải quyết xong! □

Ví dụ 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = 4-\sqrt{6},\ u_2 = 4-\sqrt{6+\sqrt{6}},\ u_n = 4-\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}}_{n \text{ dấu } \sqrt{\ }},\ \forall n\in\mathbb{Z}^+.$$

Chứng minh rằng tích vô hạn $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Lời giải. Với mỗi $n \in \mathbb{Z}^+$, đặt $v_n = u_n - 1 = 3 - \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots + \sqrt{6}}}}_{n \text{ dấu } \sqrt{}}$. Theo Hệ quả 2, yêu cầu của bài toán tương đương với việc chứng minh chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ.

Với mỗi $n \in \mathbb{Z}^+$, ta có:

$$3 - v_{n+1} = \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots + \sqrt{6}}}}_{n+1 \text{ dấu } \sqrt{}}$$

$$\Longrightarrow (3 - v_{n+1})^2 - 6 = \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots + \sqrt{6}}}}_{n \text{ dấu } \sqrt{}} = 3 - v_n.$$

Suy ra:

$$v_n = -v_{n+1}^2 + 6v_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+. \tag{2}$$

Do $\sqrt{6} < 3$ nên bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$\underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots + \sqrt{6}}}}_{n \text{ dấu } \sqrt{}} < 3, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Dẫn đến $0 < v_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Và thế là ta có:

$$v_{n+1} - v_n = v_{n+1}^2 - 5v_{n+1} = v_{n+1}(v_{n+1} - 5) < 0.$$

Nói cách khác, (v_n) là dãy giảm ngặt. Kết hợp với $v_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ ta suy ra dãy (v_n) có giới hạn hữu hạn $L \geq 0$. Từ (2) ta cho $n \to \infty$ thì được:

$$L = -L^2 + 6L \Longrightarrow L = 0 \ \ (\text{do } L \geq 0).$$

Như vậy $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$, dẫn đến:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{-v_{n+1}^2 + 6v_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6 - v_{n+1}} = \frac{1}{6} < 1.$$

Vì vậy, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ theo Tiêu chuẩn D'Alembert 8. Nói tóm lại, tích vô hạn $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ. □

Ở các ví dụ trên, ta đã sử dụng Định lý 11 cùng các hệ quả để chuyển việc khảo sát sự hội tụ của tích vô hạn phức tạp về khảo sát sự hội tụ của chuỗi số. Ngược lại, đối với các bài toán mà việc khảo sát sự hội tụ của chuỗi số quá phức tạp, một ý tưởng mà ta có thể nghĩ đến là đưa về tích vô hạn. Bài toán sau là một ví dụ minh họa cho ý tưởng đó.

Ví dụ 7. (Trải nghiệm VMO 2023) Cho dãy số thực dương (a_n) thỏa mãn điều kiện $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

a) Chứng minh rằng (a_n) chứa vô số các số hạng cực đại bên phải, tức là số hạng mà không nhỏ hơn tất cả số hạng bên phải nó.

b) Với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, đặt

$$S_n = \left|1 - \frac{a_2}{a_1}\right| + \left|1 - \frac{a_3}{a_2}\right| + \cdots + \left|1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Chứng minh rằng dãy số (S_n) không bị chặn trên.

Lời giải

a) Giả sử (a_n) chỉ chứa hữu hạn số hạng cực đại bên phải, khi đó, tồn tại $n_1 \in \mathbb{Z}^+$ sao cho a_n không là số hạng cực đại bên phải với mọi $n \geq n_1$.
Vì a_{n_1} không là số hạng cực đại bên phải nên tồn tại $n_2 > n_1$ sao cho $a_{n_2} > a_{n_1}$.
Vì $n_2 > n_1$ nên a_{n_2} không là số hạng cực đại bên phải, suy ra tồn tại $n_3 > n_2$ sao cho $a_{n_3} > a_{n_2}$.
Tiếp tục như vậy, ta xây dựng được dãy con tăng ngặt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}^+}$ của $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$.
Từ đó, ta có $a_{n_k} > a_{n_1} > 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ nên $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}^+}$ không thể hội tụ về 0, điều này mâu thuẫn với $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Vậy điều giả sử là sai nên (a_n) chứa vô số các số hạng cực đại bên phải.

b) Giả sử dãy (S_n) bị chặn trên. Chú ý rằng (S_n) là dãy tổng riêng của chuỗi số không âm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ nên theo Định lý 1, ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ hội tụ và theo Hệ quả 2, ta suy ra tích vô hạn $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left|1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ hội tụ.
Do chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ hội tụ nên theo Định lý 1, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \left|1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$.
Suy ra tồn tại $N \in \mathbb{Z}^+$ sao cho

$$\left|1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,\ \forall n \geq N.$$

Xét dãy tích riêng $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \left|1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, ta có

$$\begin{aligned}
0 \le \frac{P_n}{P_{N-1}} &= \prod_{k=N}^{n} \left(1 - \left|1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right) \\
&\le \prod_{k=N}^{n} \left|1 - \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right)\right| \quad (\text{áp dụng BĐT } |x| - |y| \le |x - y|) \\
&= \prod_{k=N}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} \\
&= \frac{a_{n+1}}{a_N}, \ \forall n \ge N.
\end{aligned}$$

Lại có $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_N} = 0$ nên theo nguyên lý kẹp, ta kết luận được $\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{N-1}} = 0$ hay $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$, dẫn đến tích vô hạn $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left|1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ không hội tụ, mâu thuẫn.
Vậy điều giả sử là sai, suy ra (S_n) không bị chặn trên. □

5. Bài tập rèn luyện

Bài 1. Tích vô hạn $\prod_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ hội tụ hay phân kỳ?

Bài 2. Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi $x_1 \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ và

$$x_{n+1} = 3x_n^2 - 2nx_n^3, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Với mỗi $n \in \mathbb{Z}^+$, đặt $y_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + kx_k)$. Chứng minh rằng dãy (y_n) hội tụ.

Bài 3. (Đà Nẵng TST 2024-2025) Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $x_1 = 2024$ và

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{2 + x_n^2}, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

(a) Tìm $\lim_{n\to+\infty} \left(nx_n^2\right)$.

(b) Chứng minh rằng dãy (y_n) xác định bởi: $y_n = (1 + x_1^4)(1 + x_2^4) \cdots (1 + x_n^4)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ hội tụ.

Bài 4. (Hà Nam TST 2023-2024) Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $x_0 = -2$ và

$$x_{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x_n}}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $y_n = (1 + x_0^2)(1 + x_1^2) \cdots (1 + x_n^2)$. Chứng minh rằng dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn.

Bài 5. Cho dãy số thực dương (x_n) được xác định như sau:

$$(x_n) : \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = 2 + \sqrt{x_{n-1}} - 2\sqrt{1 + \sqrt{x_{n-1}}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Với mỗi $n \geq 1$, đặt $y_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + x_k 2^k\right)$. Chứng minh rằng dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim\limits_{n \to \infty} y_n < 2$.

Tài liệu

[1] Charles H. C. Little, Kee L. Teo, Bruce van Brunt (2022), *An Introduction to Infinite Products* , Springer.

[2] Trần Trí Dũng (2020). *Giáo trình Giải tích hàm một biến*, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Lưu hành nội bộ.

[3] Nhóm Facebook *Hướng tới Olympic Toán VN*. https://www.facebook.com/groups/vmo.tst/.

CÁC BÀI TOÁN CỦA BA LAN TẠI IMO

NGUYỄN HÙNG SƠN
ĐẠI HỌC TỔNG HỢP VAC-SA-VA, BA LAN

Giới thiệu. *Năm 1959, Ba lan là một trong các quốc gia sáng lập ra kỳ thi toán quốc tế International Mathematical Olimpiad, viết tắt là IMO. Ba lan cũng liên tục có nhiều đóng góp cho kỳ thi này, trong đó có 3 lần đăng cai tổ chức IMO. Các đề thì của các nhà toán học Ba lan cũng được đánh giá cao và cho trong suốt 66 kỳ thi IMO, Ba lan đã đóng góp được 29 bài thi. Ở tham luận này tôi muốn giới thiệu một số bài toán tiêu biểu gần đây của Ba lan tại IMO.*
Từ khoá: *IMO, bài thi, Ba lan*

Mục lục

1. Giới thiệu

Trong 66 kỳ thi IMO Ba lan đã đóng góp 29 bài thi. Trong đó hơn một nửa (16 bài) là các bài Hình học. Tác giả có nhiều bài tại IMO nhất là Tiến sỹ Marcin Emil Kuczma (ĐHTH Vac-sa-va). Đặc biệt tại IMO năm 1995, ông là tác giả của 2 bài toán: Bài 4 (Đại số) và bài 6 (Tổ hợp).

Năm	Bài thi	Thể loại	Năm	Bài thi	Thể loại
1959	Bài 1	Số học	1984	Bài 6	Đại số
1961	Bài 2	Hình học	1989	Bài 6	Tổ hợp
1962	Bài 1	Số học	1995	Bài 4	Đại số
1964	Bài 6	Hình học	1995	Bài 6	Tổ hợp
1965	Bài 2	Đại số	1999	Bài 2	Đại số
1965	Bài 6	Tổ hợp	2003	Bài 3	Hình học
1966	Bài 6	Hình học	2004	Bài 5	Hình học
1967	Bài 1	Hình học	2005	Bài 4	Số học
1968	Bài 4	Hình học	2005	Bài 5	Hình học
1969	Bài 3	Hình học	2010	Bài 4	Hình học
1970	Bài 1	Hình học	2018	Bài 6	Hình học
1971	Bài 3	Số học	2020	Bài 1	Hình học
1973	Bài 2	Hình học	2021	Bài 4	Hình học
1973	Bài 5	Đại số	2024	Bài 4	Hình học
1983	Bài 5	Tổ hợp			

Bảng 1. Các bài toán của Ba lan tại IMO từ năm 1959 đến 2024.

Đặc biệt, từ năm 2003 đến nay, các chuyên gia hình học như Waldemar Pompe, Dominik Burek, Tomasz Ciesla và Marcin Kuczma cũng đã đóng góp cho IMO 8 bài hình học. Bài báo này sẽ giới thiệu với bạn đọc các bài hình học này.

Các bài thi ở các kỳ IMO được chia thành 3 mức độ thách thức. Các bài khó nhất được đánh số là bài 3 và bài 6. Thông thường không quá 10% số thí sinh đạt điểm tối đa cho bài 3 và bài 6. Các bài số 1 và số 4 thường được xem là các bài có mức độ thách thức vừa phải, nhẹ nhàng, còn các bài số 2 và số 5 là các bài có mức độ thách thức cao, nhưng không khó như các bài số 3 và số 6. Để đạt giải nhất các thí sinh phải làm được nhiều hơn 4 bài. Vì vậy tôi cũng xin giới thiệu các bài thi theo độ khó tăng dần

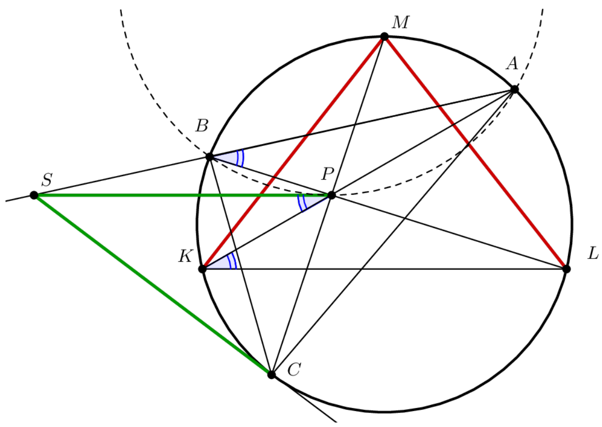
2. Các bài thách thức vừa

Bài 4 – IMO 2010 (Marcin Kuczma): –
Cho tam giác ABC ($CA \neq CB$). Với P là một điểm bên trong tam giác đó ta kẻ các đường thẳng AP, BP và CP cắt đường tròn ngoại tiếp Γ của tam giác ABC lần thứ hai lần lượt tại K, L, M. Đường tiếp tuyến với Γ tại C cắt đường thẳng AB tại S.
Chứng minh rằng nếu $SC = SP$ thì $MK = ML$.

LỜI GIẢI Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $AS > BS$. Tính phương tích của điểm S ta có: $SP^2 = SC^2 = SB \cdot SA$, do đó $\overline{SP}$ tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔABP. Do đó:

$$\angle KPS = 180 - \angle SPA = \angle ABP$$

(góc nội tiếp cung $\overset{\frown}{AP}$ và góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây cung AP).



Ta hãy tính góc:

$$\begin{aligned}\angle MKL &= \angle MKA + \angle AKL = (\angle KPC - \angle KMC) + \angle SPK \\ &= \angle SPC - \angle KMC = \angle SCM - \angle KMC \\ &= \angle MLC - \angle KLC = \angle MLK.\end{aligned}$$

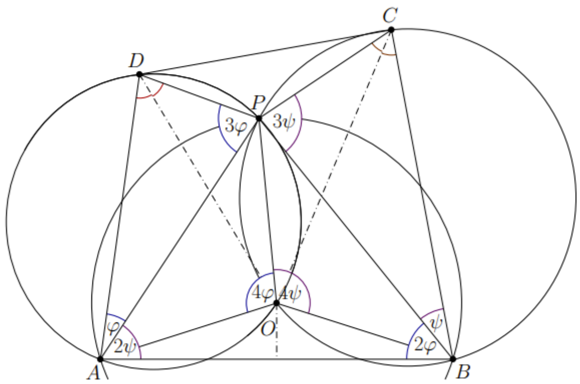
Tam giác ΔMKL cân tại M, suy ra $MK = ML$ (đpcm). □

Bài 1 – IMO 2020 (Dominik Burek) –
Cho tứ giác lồi $ABCD$. Điểm P nằm bên trong của $ABCD$. Biết rằng:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Chứng minh rằng các phân giác trong của hai góc $\angle ADP$ và $\angle PCB$ và trung trực của đoạn AB đồng quy.

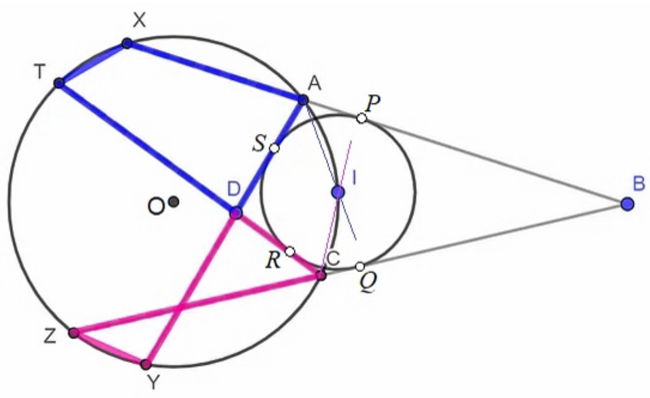
LỜI GIẢI Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔPAB. Ta sẽ chứng minh O chính là điểm hội tụ.



Thực vậy, nếu đặt $\angle PAD = \varphi$ thì ta có $\angle PBA = 2\varphi$, $\angle DPA = 3\varphi$. Tương tự nếu đặt và $\angle CBP = \psi$ thì $\angle BAP = 2\psi$ và $\angle BPC = 3\psi$.
Để ý rằng góc $\angle POA = 2\angle PBA = 4\varphi$, còn góc $\angle PDA = 180^\circ - \varphi - 3\varphi = 180^\circ - 4\varphi$. Từ đó suy ra $PDAO$ là tứ giác nội tiếp.
Hơn nữa, ta có $OA = OP$, từ đó suy ra O là trung điểm cung $\overset{\frown}{AP}$ và DO là phân giác góc $\angle PDA$. Tương tự $PCBO$ cũng là tứ giác nội tiếp và CO là phân giác góc $\angle PCB$ (đpcm). □

Bài 4 – IMO 2021 (Dominik Burek, Tomasz Ciesla) –
Cho Γ là đường tròn tâm I và $ABCD$ là tứ giác lồi sao cho mỗi đoạn thẳng AB, BC, CD và DA tiếp xúc với Γ. Gọi Ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác AIC. Tia BA kéo dài cắt Ω lần thứ hai tại X và tia BC kéo dài cắt Ω lần thứ hai tại Z. Các tia AD và CD kéo dài cắt Ω lần lượt tại Y và T. Chứng minh rằng:

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$



LỜI GIẢI Gọi O là tâm đường tròn Ω và P, Q, R, S là các tiếp điểm tương ứng của Γ với các cạnh AB, BC, CD, DA. Ta có $IP = IQ = IR = IS$.
Ta thấy rằng I là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔXAY với phân giác ngoài của góc $\angle XAY$. Suy ra I là trung điểm của cung $\overset{\frown}{XAY}$. Tương tự, I cũng là trung điểm của cung $\overset{\frown}{ZCT}$. Điều này chứng tỏ OI là đường trung trực của cả XY lẫn ZT. Từ đó suy ra:

1. $XT = YZ$;

2. $IX = IY$ và $IZ = IT$. Từ điều này ta có 2 cặp tam giác bằng nhau là: $\Delta IPX = \Delta ISY$ và $\Delta IRT = \Delta IQZ$. Suy ra $PX = SY$, $RT = QZ$ và:

$$\begin{aligned} AD + DT + XA &= AS + SD + DT + XA = AP + DR + DT + XA \\ &= PX + RT = SY + ZQ = SD + DY + ZC + CQ \\ &= CR + RD + DY + ZC = CD + DY + YZ \end{aligned}$$

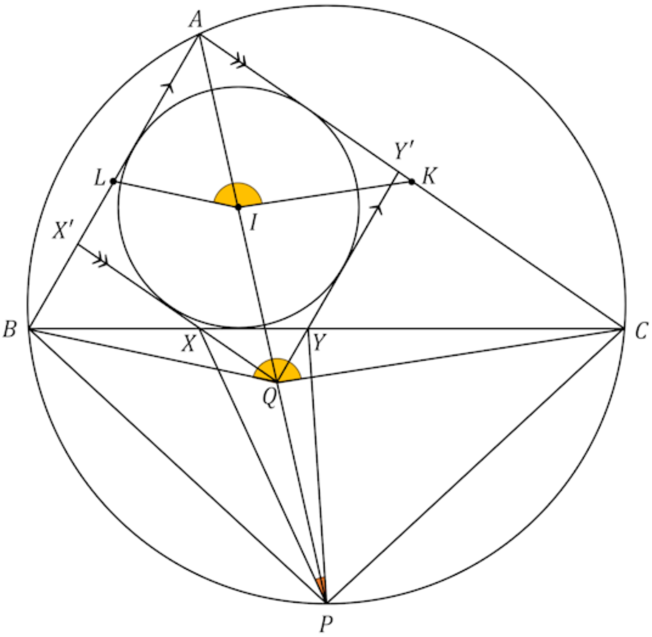
Kết hợp các tính chất trên ta có

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC$$

và đây là điều cần phải chứng minh. □

Bài 4 – IMO 2021 (Dominik Burek) –

Cho tam giác ABC với ω là đường tròn nội tiếp thoả mãn điều kiện $AB < AC < BC$. Đường tiếp tuyến của ω song song với AC cắt BC tại X. Đường tiếp tuyến của ω song song với AB cắt BC tại Y. Đường thẳng AI cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC một lần nữa tại $P \neq A$. Gọi K và L lần lượt là trung điểm của AC và AB và I là tâm đường tròn ω. Chứng minh rằng $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.



LỜI GIẢI Gọi x là tiếp tuyến với ω song song với AC và y là tiếp tuyến với ω song song với AB. Gọi Q là giao điểm của x và y, X' là giao điểm của x với AB và Y' là giao điểm của y với AC. Ta thấy tứ giác $AX'QY'$ là hình bình hành và ω là đường tròn nội tiếp nên nó cũng là hình thoi. Từ đó ta có các điều sau đây:

1. Điểm Q nằm trên đường phân giác góc $X'AY'$. Từ đây ta có

A, I, Q, P thẳng hàng và I là trung điểm của đoạn AQ. Vì vậy LI và IK là các đường trung bình trong các tam giác tương ứng ΔABQ và ΔAQC. Do đó $LI \parallel BQ$ và $IK \parallel QC$. Suy ra $\angle KIL = \angle CQB$.

2. $\angle AQX' = \angle QAY = \angle PAC = \angle PBC$. Suy ra tứ giác $PBXQ$ nôi tiếp đường tròn, và từ đó ta có $\angle QPX = \angle QBX$. Tương tự tứ giác $PCYQ$ nôi tiếp đường tròn và $\angle YPQ = \angle YCQ$.

Từ 2 điều trên ta có:

$$\begin{aligned}\angle KIL + \angle YPX &= \angle CQB + \angle YPQ + \angle QPX \\ &= \angle CQB + \angle YCQ + \angle QBX \\ &= 180^\circ. \quad \text{(đpcm).}\end{aligned}$$

□

3. Các bài thách thức cao

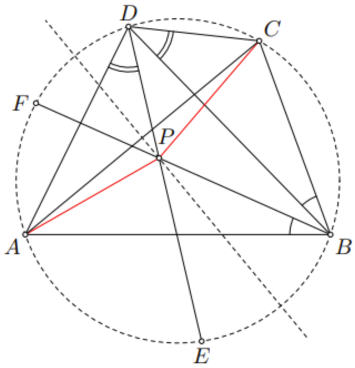
Bài 5 – IMO 2004 (Waldemar Pompe) –
Trong một tứ giác lồi $ABCD$, đường chéo BD không phải là phân giác góc $\angle ABC$ cũng như góc $\angle CDA$. Điểm P nằm bên trong $ABCD$ và thỏa mãn

$$\angle PDA = \angle BDC \text{ và } \angle PBA = \angle CBD.$$

Chứng minh rằng $ABCD$ là tứ giác nội tiếp khi và chỉ khi $AP = CP$.

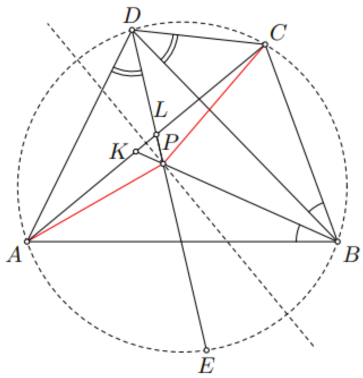
Lưu ý: Đây không phải là bài toán quá khó, nhưng cần phải chứng minh 2 chiều và rất dễ bị nhầm lẫn. Tại kỳ thi IMO 2024, có khoảng 50% trong tổng số 469 thí sinh chứng minh được ít nhất 1 chiều, trong đó chỉ có 62 (khoảng 13%) đạt điểm tuyệt đối ở bài này.

LỜI GIẢI **Chứng minh "⇒":** Gọi E và F tương ứng là giao điểm của BP và DP với đường tròn ngoại tiếp $ABCD$. Từ điều kiện $\angle EDA = \angle PDA = \angle BDC$ suy ra $AE = BC$, và ta có $ACBE$ là hình thang cân. Tương tự $ACDF$ cũng là hình thang cân. Từ đó suy ra các đoạn BE, AC và DF có chung 1 trục đối xứng, và trục đối xứng này chứ điểm P. Từ đó suy ra $PA = PC$.



Chứng minh "⇐": Giả sử $PA = PC$:
Gọi K, L là giao điểm của BP, và DP với AC. Không mất tính tổng quat ta giả sử P nằm trong tam giác ΔABC. Khi đó A, C là 2 điểm liên hợp đẳng giác cho tam giác ΔPDB, từ đó suy ra $\angle CPD = \angle KPA$. Từ điều kiện $PA = PC$ ta suy ra $PK = PL$ và K, L đối xứng với nhau qua trung trực đoạn AC.
Gọi $\mathcal{S}$ là phép đối xứng qua trung trực đoạn AC và gọi $E = \mathcal{S}(B)$. Do $\mathcal{S}(K) = L$, $\mathcal{S}(P) = P$, $\mathcal{S}(B) = E$ suy ra E, P và L thẳng hàng. Hơn nữa $\mathcal{S}(\Delta PBC) = \Delta PEA$, ta có

$$\angle DBA = \angle CBP = \angle AEP = \angle AED$$

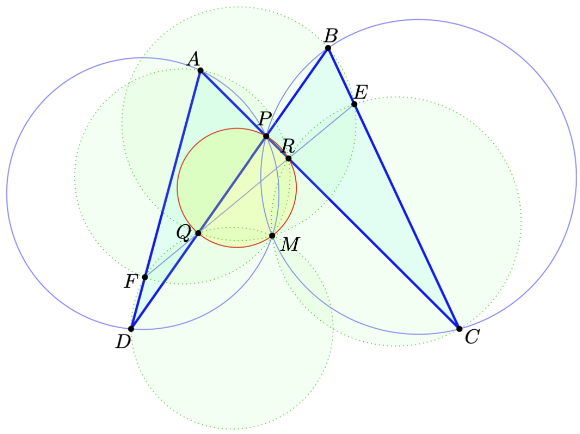


Từ đây suy ra A, E, B, D nằm trên 1 đường tròn, hay nói cách khác: điểm D nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔABE.
Mặt khác $ACBE$ la hình thang cân nên C cũng nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔABE. Suy ra $ABCD$ là tứ giác nội tiếp (đpcm). □

Bài 5 – IMO2005 (Waldemar Pompe) –

Cho $ABCD$ là tứ giác lồi cố định với $BC = AD$ và $BC \nparallel AD$. Hai điểm E và F chạy trên hai cạnh BC và DA thoả mãn $BE = DF$. Các đường thẳng AC và BD cắt nhau tại P, các đường thẳng BD và EF cắt nhau tại Q, các đường thẳng EF và AC cắt nhau tại R.
Chứng minh rằng khi E và F thay đổi, các đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR có một điểm chung, khác P.

Lưu ý: Tuy là bài số 5, nhưng có lẽ là bài hợp gu với học sinh Việt nam nhất. Tại IMO 2005, cả 6 thí sinh Việt nam đều đạt điểm tuyệt đối ở bài này trong khi chỉ 3 bạn làm được bài 1 và 1 bạn làm được bài 4.



LỜI GIẢI Gọi M là giao điểm thứ hai của 2 đường tròn ngoại tiếp các tam giác ΔPAD và ΔPBC. Ta sẽ chứng minh M là điểm cần tìm, tức là tứ giác $PQMR$ luôn nội tiếp đường tròn.
Để chứng minh điều này ta có thể chứng minh rằng các góc $\angle MPR$ và $\angle MQR$ bằng nhau.
Ta có $\angle MAD = \angle MPC = \angle MBC$ và tương tự $\angle MCB = \angle MPD = \angle MAD$. Vì $AD = BC$ nên hai tam giác ΔMAB và ΔMCB bằng nhau. Từ đó $\Delta MFD = \Delta MEB$.
Ta có các tam giác cân ΔMEF và ΔMBC đồng dạng. Từ đó suy ra $\angle QFM = \angle QDM$. Điều này có nghĩa $DMQF$ là tứ giác nội tiếp và $\angle MQR = \angle MDF = \angle MPR$.
Suy ra $PQMR$ nội tiếp đường tròn (đpcm). □

4. Các bài khó nhất

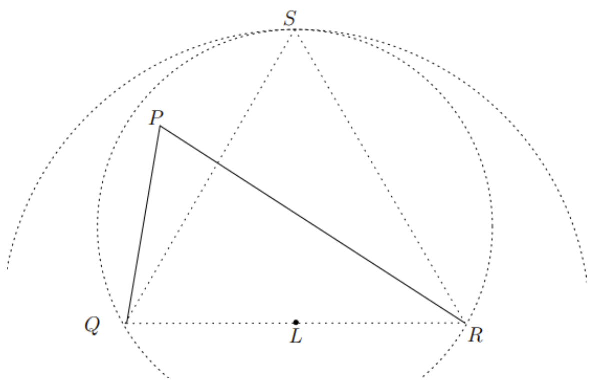
Bài 3 – IMO2003 (Waldemar Pompe) –
Mỗi cặp cạnh đối diện của một lục giác lồi thoả mãn tính chất:

khoảng cách giữa hai trung điểm của chúng bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *lần tổng độ dài của chúng.*

Chứng minh rằng tất cả các góc của lục giác đó bằng nhau.

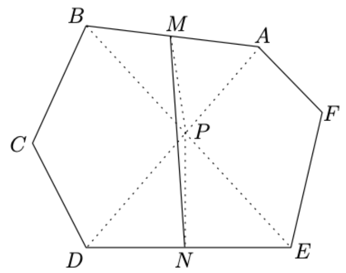
Lưu ý: Đây là một bài về bất thức hình học khá thú vị. Tại IMO 2023, 424 trên tổng số 457 thí sinh được 0 điểm cho bài toán này. Chỉ có 23 thí sinh làm được 7 điểm, trong đó có Lê Hùng Việt Bảo và Nguyễn Trọng Cảnh của Việt nam. Hai thí sinh của chúng ta cũng là 2 trong 3 người đạt điểm tối đa tại IMO 2003.

LỜI GIẢI Trước tiên ta chứng minh bổ đề:



Bổ đề: Cho tam giác ΔPQR với $\angle PQR \geq 60^\circ$. Nếu L là trung điểm của QR, thì $PL \leq \sqrt{3} \cdot QR/2$, và dấu bằng chỉ xảy ra khi PQR là tam giác đều.
Gọi S là điểm sao cho tam giác QRS đều và các điểm P và S nằm trong cùng phía đối với đường thẳng QR. Khi đó điểm P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔQRS, và đường tròn này nằm bên trong đường tròn

tâm L và bán kính $\sqrt{3} \cdot QR/2$. Điều này hoàn thành việc chứng minh bổ đề.
Quay lại bài toán. Xét 3 đường chéo chính AD, BE, CF của lục giác lồi $ABCDEF$. Gọi $\alpha \angle(AD, BE)$, $\beta = \angle(BE, CF)$, $\gamma = \angle(CF, AD)$. Ta có $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Suy ra một trong 3 góc α, β, γ phải lớn hơn hoặc bằng $60°$.
Không mất tính tổng quat ta giả sử $\alpha = \angle APB = \angle DPE \geq 60°$



Gọi M, N làn lượt là trung điểm của AB và DE. Áp dụng bổ đề ta có:

$$MN = \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + EC) \geq MP + PN \geq MN$$

Dấu bằng xảy ra nên $\alpha = 60°$, và ΔAPB, ΔDPE là các tam giác đều. Vat ta có $AB \parallel DE$.
Từ đó ta cũng có $\beta + \gamma = 120°$, và ta lại thấy một trong 2 góc β, γ phải lớn hơn hoặc bằng $60°$. Sử dụng phương pháp như ở trên ta cũng sẽ có $BC \parallel EF$ và $CD \parallel FA$.
Từ đó suy ra các góc đối diện của $ABCDEF$ bằng nhau (đpcm). $\square$

Bài 6 – IMO 2018 (Tomasz Ciesla) –

Cho tứ giác lồi $ABCD$ thỏa mãn

$$AB \cdot CD = BC \cdot DA.$$

Điểm X nằm bên trong tứ giác $ABCD$ sao cho

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{và} \quad \angle XBC = \angle XDA$$

Chứng minh rằng $\angle BXA + \angle CXD = 180°$.

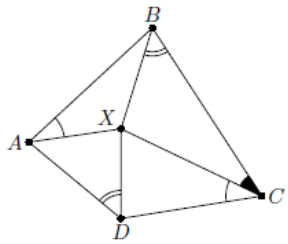
Lưu ý: Đây là bài toán khó. Chỉ có 18 trên tổng số 594 thí sinh tại IMO 2018 làm được trọn vẹn bài này. Hơn 550 thí sinh chỉ được 0, 1 hoặc 2 điểm, trong đó có cả 6 thí sinh của đoàn Việt nam.

LỜI GIẢI Ý tưởng chính của bài toán này là tính chất:

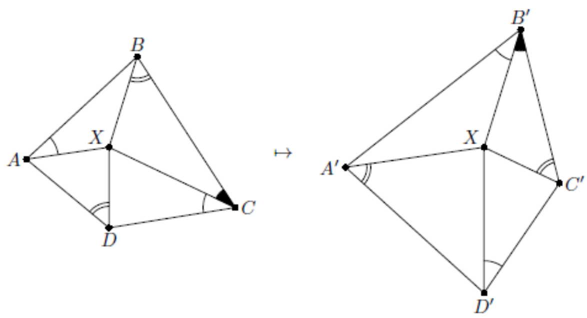
$$\frac{XB}{XD} = \frac{AB}{CD} \quad \text{và} \quad \frac{XA}{XC} = \frac{DA}{BC}. \tag{1}$$

và lời giải sẽ gồm 2 phần:

Phần 1: Chứng minh công thức (1) là đúng;



Để chứng minh phần 1, ta xét phép nghịch đảo tâm X đối với đường tròn đơn vị biến $ABCD$ thành $A'B'C'D'$



Ta có các góc tương ứng bằng nhau:

$$\angle XB'A' = \angle XD'C' = \angle XAB = \angle XCD$$
$$\angle XC'B' = \angle XA'D' = \angle XBC = \angle XDA$$

và

$$A'B' \cdot C'D' = \frac{AB}{XA \cdot XB} \cdot \frac{CD}{XC \cdot XD} = A'D' \cdot B'C'$$

Ta thấy rằng nếu $ABCD$ và $D'A'B'C'$ là các tứ giác đồng dạng thì

$$\frac{BC}{AB} = \frac{A'B'}{D'A'} = \frac{AB}{XA \cdot XB} \cdot \frac{XD \cdot XA}{DA} = \frac{AB}{AD} \cdot \frac{XD}{XB}$$

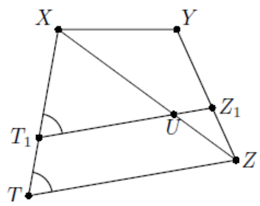
Từ đây suy ra

$$\frac{XB}{XD} = \frac{AB^2}{BC \cdot AD} = \frac{AB}{CD}$$

Để chứng minh $ABCD$ và $D'A'B'C'$ đồng dạng với nhau, ta chỉ cần chứng minh bổ đề sau đây:

Bổ đề Cho tứ giác $XYZT$ thoả mãn: $XY \cdot ZT = XT \cdot YZ$. Nếu chọn các điểm $Z_1 \in YZ, T_1 \in XT$ sao cho $Z_1T_1 \parallel ZT$ và $Z_1 \neq Z$ thì $XY \cdot Z_1T_1 \neq XT_1 \cdot YZ_1$.

Chứng minh bổ đề: Không mất tính tổng quát, giả sử $XT_1 < XT$.



Khi đó

$$\frac{XT_1}{T_1Z_1} < \frac{XT_1}{T_1U} = \frac{XT}{TZ} = \frac{XY}{YZ} < \frac{XY}{YZ_1}$$

Suy ra $XY \cdot Z_1T_1 > XT_1 \cdot YZ_1$. □

Phần 2: Chứng minh rằng nếu công thức (1) đúng thì $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$

Để chứng minh phần 2 ta thấy rằng

- Nếu $\frac{XB}{XD} = \frac{AB}{CD}$ thì

$$\frac{\sin\angle AXB}{\sin\angle XAB} = \frac{\sin\angle CXD}{\sin\angle XCD}$$

suy ra $\sin\angle AXB = \sin\angle CXD$. Từ đó

$$\angle AXB = \angle CXD \text{ hoặc } \angle AXB + \angle CXD = 180^\circ$$

- Tương tự $\sin \angle BXC = \sin \angle DXA$ và từ đó

$$\angle BXC = \angle DXA \text{ hoặc } \angle BXC + \angle DXA = 180^\circ$$

Nếu $\angle AXB + \angle CXD = 180^\circ$ hoặc $BXC + \angle DXA = 180^\circ$ thì ta có ngay điều phải chứng minh.
Xét trường hợp $\angle AXB = \angle CXD$ và $\angle BXC = \angle DXA$. Điều này dẫn đến các góc đối diện của $ABCD$ bằng nhau, suy ra $ABCD$ là hình bình hành. Từ điều kiện $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ suy ra $AB = AD$ và $ABCD$ là hình thoi. Trong cả 2 trường hợp ta đều có $\angle AXB + \angle CXD = 180^\circ$ (đpcm).

□

5. Kết luận

Ba lan là một trong những quốc gia đầu tiên sáng lập ra phong trào thi toán quốc tế IMO. Ngoài việc gửi các thí sinh đi thi và đạt giải cao, chúng ta cũng có thể quan sát được cách các nhà Toán học tổ chức phong trào học Toán và thi toán ở trong nước. Là thành viên của ban ra đề và được làm việc gần gũi, trực tiếp với tất cả các tác giả của các bài toán trong bài báo này tôi nhận thấy nguyên nhân để các bài toán của Ba lan thường xuyên được chọn tại IMO chính là do họ có một ban ra đề rất mạnh, làm việc rất nhiệt tình và trung thực. Chưa bao giờ xảy ra hiện tượng lộ đề hoặc nhiếm đoạt đề bài của người khác. Tất cả mọi thành viên trong ban ra đề đều không tham gia giảng dạy các thí sinh.

Chính môi trường lành mạnh dẫn đến việc các tác giả của các bài toán rất yên tâm gửi đề vào ngân hàng đề bài. Ví dụ như tác giả của bài 6 năm 2018 là một bạn trẻ rất đam mê hình học. Mỗi năm anh ấy gửi vào ngân hàng đề bài khoảng 20 đến 30 bài hình mới. Chính vì có ngân hàng đề bài đồ sộ, nên khả năng chọn được bài toán hay, gửi cho IMO cũng rất cao.

Tài liệu

[1] Trang web chính thức của IMO: https://www.imo-official.org/

[2] Trang web Art of Problem Solving https://artofproblemsolving.com/

[3] Trang web của Olympic toán Ba lan: https://om.sem.edu.pl/

Một phép thế đặc biệt trong giải toán phương trình hàm

Trần Nhật Quang (Trường Đại Học Sư Phạm TP Hồ Chí Minh)

Giới thiệu. *Có nhiều bài toán phương trình hàm mà sau một vài bước xử lý, ta bắt gặp tình huống sau đây:*

$$f(x+a) = f(x) + b,\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{*}$$

với a, b là các số thực. Để tận dụng được tính chất (*), ta thường sử dụng các phép thế "tịnh tiến" như thay x bởi $x+a$, x bởi $x+na$ (n là số tự nhiên),... Dựa trên ý tưởng đó, khi gặp những bài toán mà trong phương trình đề cho có chứa $f(xg(y))$ thì liệu có thể tịnh tiến $xg(y)$ thành $xg(y)+a$ hay không? Trong bài viết này, tác giả xin được giới thiệu đến bạn đọc phép thế x bởi $x + \dfrac{a}{g(y)}$.

1. Các bài toán $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Bài toán 1 Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x + yf(x)) = f(x) + xf(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn các yêu cầu bài toán.
Trong (1) cho $y = 0$ thì được:

$$f(x) = f(x) + xf(0), \ \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f(0) = 0.$$

Xét 2 trường hợp:
$\boxed{\text{TH1:}}$ Tồn tại $a \neq 0$ để $f(a) = 0$. Lúc này trong (1) cho $x = a$ thì được:

$$af(y) = 0, \ \forall y \in \mathbb{R} \Longrightarrow f \equiv 0.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.
$\boxed{\text{TH2:}}$ $f(x) \neq 0, \ \forall x \neq 0$ (hay $f(x) = 0 \iff x = 0$)
Trong (1) cho $x = 1$ thì được:

$$f(1 + yf(1)) = f(1) + f(y), \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Nếu $f(1) \neq 1$ thì trong đẳng thức trên thay y bởi $\dfrac{1}{1 - f(1)}$ ta được:

$$f\left(\frac{1}{1 - f(1)}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{1 - f(1)}\right) \Longrightarrow f(1) = 0, \ \text{vô lý!}$$

Do đó $f(1) = 1$ và ta cũng thu được:

$$f(y + 1) = f(y) + 1, \ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Trong (1) cho $y = \dfrac{1}{f(x)}$ rồi sử dụng (2) thì được:

$$xf\left(\frac{1}{f(x)}\right) = 1, \ \forall x \neq 0 \Longrightarrow f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{x}, \ \forall x \neq 0. \tag{3}$$

Trong (1) thay y bởi $y+\dfrac{1}{f(x)}$ và sử dụng (2) thì được:

$$\begin{aligned}
&f(x+yf(x))+1=f(x)+xf\left(y+\frac{1}{f(x)}\right),\ \forall x\neq 0, y\in\mathbb{R}\\
&\overset{(1)}{\Longrightarrow} xf(y)+1=xf\left(y+\frac{1}{f(x)}\right),\ \forall x\neq 0, y\in\mathbb{R}\\
&\Longrightarrow f(y)+\frac{1}{x}=f\left(y+\frac{1}{f(x)}\right),\ \forall x\neq 0, y\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Đến đây thay x bởi $\dfrac{1}{f(x)}$ rồi sử dụng (3) thì được:

$$f(y)+f(x)=f(y+x),\ \forall x\neq 0, y\in\mathbb{R}.$$

Kết hợp với $f(0)=0$ ta suy ra f là hàm cộng tính trên $\mathbb{R}$. Vì thế ta có quyền viết lại (1) như sau:

$$\begin{aligned}
&f(x)+f(yf(x))=f(x)+xf(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\
&\Longrightarrow f(yf(x))=xf(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Đến đây cho $y=1$ ta có ngay $f(f(x))=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Lúc này trong (4) thay x bởi $f(x)$ thì được:

$$f(xy)=f(x)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Như vậy hàm f vừa nhân tính, vừa cộng tính trên $\mathbb{R}$. Do đó $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy đúng.
Vậy có 2 hàm số thỏa mãn các yêu cầu bài toán là $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. □

Chú ý

✓ Ta có thể chứng minh hàm f cộng tính trên $\mathbb{R}$ bằng cách khác như sau: Trong (1) thay y bởi $y+1$ rồi sử dụng (2) thì được:

$$\begin{aligned}
&f(x+yf(x)+f(x))=f(x)+xf(y)+x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\
&\overset{(1)}{\Longrightarrow} f(x+yf(x)+f(x))=f(x+yf(x))+x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Đến đây thay y bởi $\dfrac{y-x}{f(x)}$ thì được:

$$f(y+f(x))=f(y)+x,\ \forall x\neq 0, y\in\mathbb{R}.$$

Dĩ nhiên đẳng thức trên cũng đúng khi $x=0$, vì vậy ta có:

$$f(y+f(x))=f(y)+x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \qquad (5)$$

Đến đây cho $y=0$ thì được: $f(f(x))=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Lúc này trong (5) thay x

bởi $f(x)$ ta được:

$$f(y) + f(x) = f(y + x), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

✓ Tính chất $f(x) = 0 \iff x = 0$ trong lời giải trên có thể hiểu nôm na là hàm f "đơn ánh tại 0" (nghĩa là, nếu có 2 số thực a, b sao cho $f(a) = f(b) = 0$ thì $a = b$). Sở dĩ ta cần phải có tính chất này là để phép thế $y = \dfrac{1}{f(x)}$ thực hiện được với mọi $x \neq 0$, đó cũng là lý do mà bài toán được chia thành 2 trường hợp như trong lời giải trên.

Việc chứng minh hàm f đơn ánh tại 0 sẽ còn xuất hiện nhiều trong những ví dụ tiếp theo.

Bài toán 2 (Ninh Bình TST 2023-2024) Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(xf(y) + y^{2023}) = yf(x) + f(y)^{2023}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn các yêu cầu bài toán.
Trong (6) cho $y = 0$ thì được:

$$f(xf(0)) = f(0)^{2023}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nếu $f(0) \neq 0$ thì từ đẳng thức trên ta suy ra f là hàm hằng. Thay vào (6) ta tìm được $f \equiv 0$, vô lý! Do đó $f(0) = 0$.
Trong (6) cho $x = 0$ thì được:

$$f\left(y^{2023}\right) = f(y)^{2023}, \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Từ đó ta viết lại (6) như sau:

$$f(xf(y) + y^{2023}) = yf(x) + f\left(y^{2023}\right), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Đến đây ta xét 2 trường hợp:
$\boxed{\text{TH1:}}$ Tồn tại $a \neq 0$ để mà $f(a) = 0$. Khi đó trong (6) cho $y = a$ ta được:

$$af(x) = f(a^{2023}) = f(a)^{2023} = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thấy $f \equiv 0$ là một nghiệm hàm của bài toán.
$\boxed{\text{TH2:}}$ $f(x) = 0 \iff x = 0$. Ta có $f(1)^{2023} = f(1)$ và $f(1) \neq 0$ nên $f(1) = \pm 1$. Nếu $f(1) = -1$ thì trong (7) cho $x = y = 1$ ta được: $f(0) = -2$, vô lý! Do đó $f(1) = 1$.
Trong (7) cho $y = 1$ thì được:

$$f(x + 1) = f(x) + 1, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Trong (7) cho $x = \dfrac{1}{f(y)}$ và sử dụng (8) thì được:

$$f\left(y^{2023}\right) + 1 = yf\left(\frac{1}{f(y)}\right) + f\left(y^{2023}\right), \ \forall y \neq 0$$
$$\Longrightarrow f\left(\frac{1}{f(y)}\right) = \frac{1}{y}, \ \forall y \neq 0. \qquad (9)$$

Trong (7) thay x bởi $x + \dfrac{1}{f(y)}$ và sử dụng (8) thì được:

$$f(xf(y) + y^{2023}) + 1 = yf\left(x + \frac{1}{f(y)}\right) + f\left(y^{2023}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}, y \neq 0$$
$$\overset{(7)}{\Longrightarrow} yf(x) + f\left(y^{2023}\right) + 1 = yf\left(x + \frac{1}{f(y)}\right) + f\left(y^{2023}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}, y \neq 0$$
$$\Longrightarrow f(x) + \frac{1}{y} = f\left(x + \frac{1}{f(y)}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}, y \neq 0.$$

Từ đây thay y bởi $\dfrac{1}{f(y)}$ và sử dụng (9) thì được:

$$f(x) + f(y) = f(x+y), \ \forall x \in \mathbb{R}, y \neq 0.$$

Đến đây làm tiếp như bài toán trước ta thu được $f(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy đúng.
Vậy có 2 hàm số thỏa mãn các yêu cầu bài toán là $f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$. □

Bài toán 3 Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(f(x) + yf\left(x^2\right)\right) = x[1 + xf(y)], \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \qquad (10)$$

Lời giải Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn các yêu cầu bài toán.
Trong (10) cho $x = 0$ và $y = -1$ thì được: $f(0) = 0$.
Trong (10) cho $y = 0$ thì được:

$$f(f(x)) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (11)$$

Đẳng thức trên chứng tỏ f là song ánh, dẫn đến $f(x) \neq 0, \ \forall x \neq 0$.
Trong (10) cho $x = 1$ và $y = -1$ thì được: $f(-1) = -1$.
Trong (10) cho $x = -1$ và $y = f(1)$, với chú ý $f(f(1)) = 1$ thì được:

$$f(-1 + f(1)^2) = 0 = f(0) \Longrightarrow f(1)^2 - 1 = 0 \Longrightarrow f(1) \in \{-1, 1\}.$$

Lại có $f(-1) = -1$ và f là song ánh nên $f(1) = 1$.
Trong (10) cho $x = 1$ thì được:

$$f(y+1) = f(y) + 1, \ \forall y \in \mathbb{R}. \qquad (12)$$

Trong (10) thay y bởi $y + \dfrac{1}{f(x^2)}$ và sử dụng (12) ta được:

$$\begin{aligned} & f\left(f(x) + yf(x^2)\right) + 1 = x\left[1 + xf\left(y + \frac{1}{f(x^2)}\right)\right], \ \forall x \neq 0, y \in \mathbb{R} \\ & \stackrel{(10)}{\Longrightarrow} x[1 + xf(y)] + 1 = x\left[1 + xf\left(y + \frac{1}{f(x^2)}\right)\right], \ \forall x \neq 0, y \in \mathbb{R} \\ & \Longrightarrow f\left(y + \frac{1}{f(x^2)}\right) = f(y) + \frac{1}{x^2}, \ \forall x \neq 0, y \in \mathbb{R} \qquad (13) \end{aligned}$$

Đến đây cho $y = 0$ rồi sử dụng (11) ta có ngay:

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{1}{f(x^2)}\right) = \frac{1}{x^2} = f\left(f\left(\frac{1}{x^2}\right)\right), \ \forall x \neq 0 \\ & \Longrightarrow \frac{1}{f(x^2)} = f\left(\frac{1}{x^2}\right), \ \forall x \neq 0 \text{ (do } f \text{ là đơn ánh).} \end{aligned}$$

Thay ngược trở lại vào (13) ta được:

$$f\left(y + f\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = f(y) + \frac{1}{x^2}, \ \forall x \neq 0, y \in \mathbb{R}.$$

Nói cách khác,

$$f(y + f(x)) = f(y) + x, \ \forall x > 0, y \in \mathbb{R}. \qquad (14)$$

Tiếp tục thay y bởi $f(y)$ rồi sử dụng (11) ta được:

$$\begin{aligned} & f(f(y) + f(x)) = y + x = f(f(x + y)), \ \forall x > 0, y \in \mathbb{R} \\ & \Longrightarrow f(x) + f(y) = f(x + y), \ \forall x > 0, y \in \mathbb{R} \text{ (do } f \text{ là đơn ánh).} \end{aligned}$$

Đến đây cho $y = -x$ ta thu được f là hàm lẻ, và vì thế, đẳng thức trên trở thành:

$$f(x) + f(y) = f(x + y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Như vậy ta có thể viết lại (10) như sau:

$$\begin{aligned} & f(f(x)) + f\left(yf(x^2)\right) = x + x^2 f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ & \stackrel{(11)}{\Longrightarrow} f\left(yf(x^2)\right) = x^2 f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ & \Longrightarrow f(yf(x)) = xf(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ (do } f \text{ là hàm lẻ).} \end{aligned}$$

Đến đây thay x bởi $f(x)$ và sử dụng (11) ta suy ra f là hàm nhân tính trên $\mathbb{R}$. Hơn nữa f cũng là hàm cộng tính trên $\mathbb{R}$ nên $f(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.
Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $f(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$. □

Chú ý

✓ Sau khi thu được (14), ta chưa thể thực hiện phép thế x bởi $f(x)$ vào đẳng thức này được vì ta chưa có tính chất: $f(x) > 0, \ \forall x > 0$.

✓ Việc tính được $f(1)$ đóng một vai trò quan trọng trong lời giải trên. Ta có thể làm việc này bằng cách khác như sau:

Đầu tiên ta thay $x = 1$ vào (10) thì được:

$$f(f(1) + yf(1)) = 1 + f(y), \ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Quan sát đẳng thức trên, ta mong muốn triệt tiêu hàm f ở cả hai vế bằng cách lựa chọn y sao cho:

$$f(1) + yf(1) = y \iff [1 - f(1)]y = f(1).$$

Nếu $f(1) \neq 1$ thì $y = \dfrac{f(1)}{1 - f(1)}$ chính là số cần tìm. Tuy nhiên với số y được chọn như vậy thì đẳng thức (15) lại trở thành: $0 = 1$, vô lý!

Điều vô lý đó chứng tỏ $f(1) = 1$.

Bài toán 4 (Gặp gỡ Toán học 2023) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(xy - 1) + f(x)f(y) = 2xy - 1, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Lời giải Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn các yêu cầu bài toán.
Trong (16) cho $y = 0$ thì được:

$$f(-1) + f(x) \cdot f(0) = -1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nếu $f(0) \neq 0$ thì từ đẳng thức trên ta suy ra f là hàm hằng, tuy nhiên không có hàm hằng nào thỏa (16) cả! Vì vậy $f(0) = 0$, kéo theo $f(-1) = -1$.
Trong (16) cho $x = y = 1$ thì được: $f(1)^2 = 1$. Suy ra $f(1) = \pm 1$.
$\boxed{\text{TH1:}}$ $f(1) = 1$. Trong (16) cho $y = 1$ thì được:

$$f(x - 1) + f(x) = 2x - 1, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Trong (16) thay y bởi $\dfrac{1}{x}$ thì được:

$$f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1, \ \forall x \neq 0. \tag{18}$$

Trong (16) thay y bởi $1 + \dfrac{1}{x}$ ta được:

$$\begin{aligned}
f(x) + f(x) \cdot f\left(1 + \frac{1}{x}\right) &= 2x + 1, \ \forall x \neq 0 \\
\overset{(17)}{\Longrightarrow} f(x) + f(x)\left[\frac{2}{x} + 1 - f\left(\frac{1}{x}\right)\right] &= 2x + 1, \ \forall x \neq 0 \\
\overset{(18)}{\Longrightarrow} f(x)\left(\frac{2}{x} + 2\right) &= 2x + 2, \ \forall x \neq 0 \\
\Longrightarrow f(x) &= x, \ \forall x \neq 0; -1.
\end{aligned}$$

Kết hợp với $f(0) = 0$ và $f(-1) = -1$ ta suy ra $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại đúng.
$\boxed{\text{TH2:}}$ $f(1) = -1$. Làm tương tự như $\boxed{\text{TH1}}$ ta tìm được $f(x) = -x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Vậy có 2 hàm số thỏa mãn các yêu cầu bài toán là $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = -x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$. $\square$

Chú ý

✓ Mặc dù không thu được tính chất $f(x+1) = f(x) + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ như những bài toán trước, song ta vẫn có mối liên hệ giữa $f(x+1)$ và $f(x)$ (đẳng thức (17)), và kĩ thuật của ta vẫn tỏ ra hữu ích.

✓ Một bài toán "họ hàng" với bài toán trên là bài toán xuất hiện trong đề thi **VMO 2021**: Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x)f(y) = f(xy - 1) + xf(y) + yf(x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thật vậy, đặt $g(x) = x - f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ thì giả thiết đã cho trở thành:

$$g(x)g(y) + g(xy - 1) = 2xy - 1,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 5 (India IMO Training Camp 2018) Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x)f(yf(x) - 1) = x^2 f(y) - f(x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Lời giải

Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn các yêu cầu bài toán.
Trong (19) cho $y = 0$ thì được:

$$f(x)[f(-1) + 1] = x^2 f(0),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\text{TH1:}}$ $f(-1) \neq -1$. Khi đó từ đẳng thức trên ta suy ra: $f(x) = ax^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (a là hằng số). Thay vào (19) ta được:

$$ax^2 f\left(ax^2 y - 1\right) = ax^2(y^2 - 1),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \Longrightarrow a = 0.$$

Thử lại thấy hàm $f \equiv 0$ là nghiệm hàm của bài toán.
$\boxed{\text{TH2:}}$ $f(-1) = -1$, kéo theo $f(0) = 0$.
Trong (19) cho $x = -1$ thì được:

$$f(-y - 1) = -f(y) - 1,\ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Trong (19) cho $y = -1$ thì được:

$$\begin{aligned} & f(x)f(-f(x) - 1) = -x^2 - f(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \overset{(20)}{\Longrightarrow}\ & f(x)\left[-f(f(x)) - 1\right] = -x^2 - f(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Longrightarrow\ & f(x)f(f(x)) = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{21}$$

Từ đây ta suy ra f đơn ánh tại 0. Thật vậy, nếu tồn tại $a \neq 0$ để $f(a) = 0$ thì thay $x = a$ vào đẳng thức trên ta được: $a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0$, vô lý!
Trong (21) cho $x = 1$ và đặt $a = f(1)$ thì được: $af(a) = 1$.

Trong (19) cho $x = y = a$ thì được:

$$a^2 f(a) - f(a) = 0 \Longrightarrow a^2 - 1 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1.$$

Nếu $f(1) = -1$ thì trong (20) cho $y = 1$ ta được: $f(-2) = 0$, vô lý vì f đơn ánh tại 0. Do đó $f(1) = 1$. Lúc này trong (19) cho $x = 1$ thì được:

$$f(y-1) = f(y) - 1, \ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

Đến đây thay y bởi $-y$ rồi so sánh với (20) ta được f là hàm lẻ.
Áp dụng (22) đối với (19) thì được:

$$f(x)f(yf(x)) = x^2 f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

Đến đây cho $y = x$ ta được:

$$f(x)[f(xf(x)) - x^2] = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chú ý rằng $f(x) = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$ nên từ đẳng thức trên ta suy ra:

$$f(xf(x)) = x^2, \ \forall x \neq 0.$$

Kết hợp với $f(0) = 0$, ta được:

$$f(xf(x)) = x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

Đẳng thức trên cho thấy f có thể nhận mọi giá trị không âm tùy ý. Lại có f là hàm lẻ nên f là toàn ánh. Trong (23) cho $y = \dfrac{1}{f(x)}$ ta được:

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{f(x)}{x^2}, \ \forall x \neq 0. \tag{25}$$

Trong (19) thay y bởi $y + \dfrac{1}{f(x)}$ thì được:

$$\begin{aligned}
& f(x)f(yf(x)) = x^2 f\left(y + \frac{1}{f(x)}\right) - f(x), \ \forall x \neq 0, y \in \mathbb{R} \\
\overset{(23)}{\Longrightarrow} \quad & x^2 f(y) = x^2 f\left(y + \frac{1}{f(x)}\right) - f(x), \ \forall x \neq 0, y \in \mathbb{R} \\
\Longrightarrow \ & f\left(y + \frac{1}{f(x)}\right) = f(y) + \frac{f(x)}{x^2}, \ \forall x \neq 0, y \in \mathbb{R} \\
\overset{(25)}{\Longrightarrow} \ & f\left(y + \frac{1}{f(x)}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{f(x)}\right), \ \forall x \neq 0, y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Do f là toàn ánh nên $\dfrac{1}{f(x)}$ có thể nhận mọi giá trị khác 0 tùy ý. Do đó từ đẳng thức trên ta suy ra:

$$f(y+z) = f(y) + f(z), \ \forall z \neq 0, y \in \mathbb{R}.$$

Cộng thêm việc $f(0) = 0$, ta kết luận được f là hàm cộng tính trên $\mathbb{R}$.
Trong (21) thay x bởi $xf(x)$ và sử dụng (24) ta được:

$$\begin{aligned} & x^2 f(x^2) = x^2 f(x)^2, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Longrightarrow\ & f(x^2) = f(x)^2, \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ (chú ý } f(0) = 0). \end{aligned}$$

Nói cách khác, $f(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$. Hơn nữa, f còn là hàm cộng tính trên $\mathbb{R}$ nên theo kết quả của phương trình hàm Cauchy, ta suy ra $f(x) = \alpha x, \ \forall x \in \mathbb{R}$ (với α là hằng số).
Thay vào (19) ta tìm được $\alpha = 1$.
Vậy bài toán có duy nhất một nghiệm hàm là $f(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$. □

Chú ý Ngoài phép thế y bởi $y + \dfrac{1}{f(x)}$ theo đúng tinh thần của bài viết, ta còn có thể giải bài toán chỉ với phép thay x bởi $x + 1$ như sau:

Trong (21) thay x bởi $x + 1$ rồi sử dụng (22) ta được:

$$\begin{aligned} & [f(x) + 1][f(f(x)) + 1] = (x - 1)^2, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \overset{(21)}{\Longrightarrow}\ & f(x) + f(f(x)) = 2x, \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Kết hợp với (21), theo định lý Viete đảo thì $f(x)$ và $f(f(x))$ là các nghiệm của phương trình:

$$Y^2 - 2xY + x^2 = 0 \Longleftrightarrow Y = x.$$

Nói tóm lại, $f(x) = f(f(x)) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Qua các ví dụ vừa rồi, có lẽ bạn đọc đã làm quen được với cách sử dụng phép thế mà tác giả đã đề cập ở đầu bài viết để giải quyết một số bài toán phương trình hàm. Tuy vậy, dường như sức mạnh của kĩ thuật này chưa được phát huy tối đa, bằng chứng là có những bài toán chỉ cần sử dụng các phép thế đơn giản hơn mà vẫn cho ra được lời giải gọn và đẹp (chẳng hạn như bài toán 5). Vậy thì chúng ta hãy cùng nhau tiếp tục khám phá thêm vẻ đẹp của phương pháp này qua các ví dụ tiếp theo sau đây.

2. Các bài toán $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

Bài toán 6 (Quảng Bình TST 2023-2024) Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(1 + xy + f(x)) = xf(y) + x + 1, \forall x, y > 0. \tag{1}$$

Lời giải Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn các yêu cầu bài toán.
Trong (1) cho $x = 1$ và đặt $c = f(1) + 1$ thì được:

$$f(y + c) = f(y) + 2, \ \forall y > 0.$$

Trong (1) thay y bởi $y + \dfrac{c}{x}$ và sử dụng kết quả vừa thu được ở trên thì được:

$$\begin{aligned}
& f(1 + xy + f(x)) + 2 = xf\left(y + \frac{c}{x}\right) + x + 1, \ \forall x, y > 0 \\
\overset{(1)}{\Longrightarrow}\ & xf(y) + x + 1 + 2 = xf\left(y + \frac{c}{x}\right) + x + 1, \ \forall x, y > 0 \\
\Longrightarrow\ & xf(y) + 2 = xf\left(y + \frac{c}{x}\right), \ \forall x, y > 0 \\
\Longrightarrow\ & f(y) + \frac{2}{x} = f\left(y + \frac{c}{x}\right), \ \forall x, y > 0.
\end{aligned}$$

Đến đây thay x bởi $\dfrac{c}{x}$ và đặt $a = \dfrac{2}{c}$ thì được:

$$f(y) + ax = f(x + y), \ \forall x, y > 0.$$

Đến đây đổi vị trí của x và y cho nhau rồi so sánh với đẳng thức trên ta được:

$$\begin{aligned}
& f(y) + ax = f(x) + ay, \ \forall x, y > 0 \\
\Longrightarrow\ & f(x) - ax = f(y) - ay, \ \forall x, y > 0 \\
\Longrightarrow\ & f(x) - ax = b, \ \forall x > 0 \text{ (với } b \text{ là hằng số)} \\
\Longrightarrow\ & f(x) = ax + b, \ \forall x > 0.
\end{aligned}$$

Thay công thức trên vào (1) ta tìm được $a = 1$ và $b = 0$.
Vậy bài toán có duy nhất một nghiệm hàm là $f(x) = x, \ \forall x > 0$. □

Bài toán 7 (Tạp chí Pi tháng 8/2024, Trần Nhật Quang) Tìm tất cả cặp hàm số (f, g) với $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(xy + f(x)) = xf(y) + g(x), \ \forall x, y > 0. \tag{2}$$

Lời giải. Giả sử tồn tại các hàm số f, g thỏa mãn các yêu cầu bài toán.
Trong (2) cho $x = 1$ và đặt $a = f(1)$, $b = g(1)$ thì được:

$$f(y + a) = f(y) + b, \ \forall y > 0. \tag{3}$$

Trong (2) thay y bởi $y + \dfrac{a}{x}$ rồi sử dụng (3) thì được:

$$\begin{aligned}
& f(xy + f(x)) + b = xf\left(y + \frac{a}{x}\right) + g(x), \ \forall x, y > 0 \\
\overset{(3)}{\Longrightarrow}\ & xf(y) + g(x) + b = xf\left(y + \frac{a}{x}\right) + g(x), \ \forall x, y > 0 \\
\Longrightarrow\ & f(y) + \frac{b}{x} = f\left(y + \frac{a}{x}\right), \ \forall x, y > 0.
\end{aligned}$$

Đến đây thay x bởi $\frac{a}{x}$ và đặt $A = \frac{b}{a}$ thì được:

$$f(y) + Ax = f(y+x), \forall x, y > 0.$$

Đến đây hoán đổi vị trí của x và y cho nhau rồi so sánh với đẳng thức cũ, ta được:

$$\begin{aligned} & f(y) + Ax = f(x) + Ay, \ \forall x, y > 0 \\ \Longrightarrow \ & f(y) - Ay = f(x) - Ax, \ \forall x, y > 0. \end{aligned}$$

Dẫn đến $f(x) = Ax + B$, $\forall x > 0$, với A, B là hằng số. Chú ý rằng $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ nên $A, B \geq 0$ và $A^2 + B^2 > 0$. Thật vậy,

- Nếu $A < 0$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
- Nếu $B < 0$ thì $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = B < 0$.
- Nếu $A^2 + B^2 = 0$ thì $A = B = 0$, dẫn đến $f \equiv 0$.

Cuối cùng, thay $f(x) = Ax + B$ vào (2) ta tìm được:

$$g(x) = A(xy + Ax + B) + B - x(Ay + B) = (A^2 - B)x + (AB + B), \ \forall x > 0.$$

Tương tự như trên, ta tìm được điều kiện cần và đủ để $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là $A^2 \geq B$. Nói tóm lại, tất cả các cặp hàm (f, g) thỏa mãn yêu cầu bài toán là $f(x) = Ax + B$, $\forall x > 0$ và $g(x) = (A^2 - B)x + (AB + B)$, $\forall x > 0$, với A, B là các số thực thỏa mãn $A, B \geq 0$, $A^2 \geq B$ và $A^2 + B^2 > 0$. □

Đối với một số bài toán mà hàm cần tìm là đơn ánh, việc sử dụng kĩ thuật trên có thể có chút khác biệt so với những ví dụ trước, song vẫn tận dụng được triệt để giả thiết (*). Mời bạn đọc quan sát 2 ví dụ sau đây.

Bài toán 8 (Trường Đông miền Nam 2019) Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy, \ \forall x, y > 0. \quad (4)$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn các yêu cầu bài toán.
Trong (4) cho $x = 1$ thì được:

$$f(f(y) + f(1)) = 2f(1) + y, \ \forall y > 0. \quad (5)$$

Từ đây ta có ngay f là đơn ánh. Cũng từ đẳng thức trên, thay y bởi $f(y) + f(1)$ và đặt $c = 3f(1)$ thì được:

$$f(y + c) = f(y) + c, \ \forall y > 0. \quad (6)$$

◊ **Phân tích:** Sau khi thu được (6), nếu ta thực hiện phép thế x bởi $x + \frac{c}{f(y)}$ vào (4) như những bài toán trước thì tình huống sẽ trở nên vô cùng phức

tạp. Mặt khác, do f đã là đơn ánh nên ta mong muốn biến đổi vế phải của phương trình (4) về dạng $f(B)$. Từ đó ta nghĩ đến việc tịnh tiến $2f(x)+xy$ thành $2f(x)+xy+c$, cụ thể như sau:
Trong (4) thay y bởi $y+\dfrac{c}{x}$ thì được:

$$\begin{aligned}
&f\left(xf\left(y+\frac{c}{x}\right)+f(x)\right)=2f(x)+xy+c,\ \forall x,y>0\\
\overset{(4)}{\Longrightarrow}\ &f\left(xf\left(y+\frac{c}{x}\right)+f(x)\right)=f(xf(y)+f(x))+c,\ \forall x,y>0\\
\overset{(6)}{\Longrightarrow}\ &f\left(xf\left(y+\frac{c}{x}\right)+f(x)\right)=f(xf(y)+f(x)+c),\ \forall x,y>0.
\end{aligned}$$

Lại có f là đơn ánh nên:

$$\begin{aligned}
&xf\left(y+\frac{c}{x}\right)+f(x)=xf(y)+f(x)+c,\ \forall x,y>0\\
\Longrightarrow\ &f\left(y+\frac{c}{x}\right)=f(y)+\frac{c}{x},\ \forall x,y>0.
\end{aligned}$$

Đến đây thay x bởi $\dfrac{c}{x}$ ta được:

$$f(y+x)=f(y)+x,\ \forall x,y>0.$$

Đến đây đổi vị trí của x và y cho nhau rồi so sánh với đẳng thức trên ta được:

$$\begin{aligned}
&f(y)+x=f(x)+y,\ \forall x,y>0\\
\Longrightarrow\ &f(x)-x=f(y)-y,\ \forall x,y>0\\
\Longrightarrow\ &f(x)-x=b,\ \forall x>0 \text{ (với } b \text{ là hằng số)}\\
\Longrightarrow\ &f(x)=x+b,\ \forall x>0.
\end{aligned}$$

Thay công thức trên vào (4) ta tìm được $b=1$.
Vậy bài toán có duy nhất một nghiệm hàm là $f(x)=x+1,\ \forall x>0$. □

Chú ý Sau khi thu được (6), ta vẫn có thể giải tiếp bài toán bằng cách sử dụng phép thế y bởi $y+c$. Đó cũng là lời giải của Ban tổ chức kỳ thi [1], xin được nêu ra để bạn đọc tham khảo.

Cách 2. Từ (6), bằng quy nạp, ta suy ra:

$$f(y+nc)=f(y)+nc,\ \forall y>0, n\in\mathbb{N}^*. \tag{7}$$

Trong (4) thay y bởi $y+c$ và sử dụng (6) thì được:

$$\begin{aligned}
&f(xf(y)+f(x)+cx)=2f(x)+xy+cx,\ \forall x,y>0\\
\overset{(4)}{\Longrightarrow}\ &f(xf(y)+f(x)+cx)=f(xf(y)+f(x))+cx,\ \forall x,y>0. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Đến đây ta mong muốn thu được $f(z+cx)=f(z)+cx,\ \forall x,z>0$. Lấy $x,z>0$

tùy ý và chọn $n \in \mathbb{N}$ (đủ lớn) sao cho $\dfrac{z+nc-f(x)}{x} > 2f(1)$. Lúc này, kết hợp với (5) ta thấy tồn tại $y > 0$ thỏa mãn $\dfrac{z+nc-f(x)}{x} = f(y)$, hay là $xf(y)+f(x) = z+nc$. Thay y vừa tìm được vào (8) ta thu được

$$f(z+cx) = f(z) + cx,\ \forall x, z > 0.$$

Đến đây giải tiếp như **Cách 1**.

Bài toán 9 Cho trước số nguyên dương n. Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(x^n + f(x)f(y)) = x^n + yf(x),\ \forall x, y > 0. \tag{9}$$

Lời giải Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn các yêu cầu bài toán.
Rõ ràng f là đơn ánh, ta chứng minh f là toàn ánh. Thật vậy, lấy $c > 0$ tùy ý và đặt $x_0 = \sqrt[n]{\dfrac{c}{2}}$, $y_0 = \dfrac{c}{2f(x_0)}$. Khi đó theo (9) ta có:

$$f\left(x_0^n + f(x_0)f(y_0)\right) = \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c.$$

Do đó f là toàn ánh. Suy ra tồn tại $\alpha > 0$ để $f(\alpha) = 1$. Lúc này trong (9) cho $x = \alpha$, đồng thời đặt $d = \alpha^n$ thì được:

$$f(d + f(y)) = y + d,\ \forall y > 0.$$

Đến đây thay y bởi $f(y) + d$ ta được:

$$f(y + 2d) = f(y) + 2d,\ \forall y > 0. \tag{10}$$

Trong (9) thay y bởi $y + \dfrac{2d}{f(x)}$ thì được:

$$\begin{aligned}
&f\left(x^n + f(x)f\left(y + \frac{2d}{f(x)}\right)\right) = x^n + yf(x) + 2d,\ \forall x, y > 0\\
\overset{(9)}{\Longrightarrow}\ &f\left(x^n + f(x)f\left(y + \frac{2d}{f(x)}\right)\right) = f(x^n + f(x)f(y)) + 2d,\ \forall x, y > 0\\
\overset{(10)}{\Longrightarrow}\ &f\left(x^n + f(x)f\left(y + \frac{2d}{f(x)}\right)\right) = f(x^n + f(x)f(y) + 2d),\ \forall x, y > 0.
\end{aligned}$$

Lại có f là đơn ánh nên

$$\begin{aligned}
x^n + f(x)f\left(y + \frac{2d}{f(x)}\right) &= x^n + f(x)f(y) + 2d,\ \forall x, y > 0\\
\Longrightarrow f\left(y + \frac{2d}{f(x)}\right) &= f(y) + \frac{2d}{f(x)},\ \forall x, y > 0.
\end{aligned}$$

Chú ý rằng f là toàn ánh nên đẳng thức trên có thể viết lại thành:

$$f(y + z) = f(y) + z,\ \forall y, z > 0.$$

Đến đây hoán đổi vị trí của y và z cho nhau rồi so sánh với đẳng thức cũ, ta được:

$$\begin{aligned} & f(y)+z=f(z)+y,\ \forall y,z>0 \\ \Longrightarrow\ & f(y)-y=f(z)-z,\ \forall y,z>0 \\ & \Longrightarrow f(y)=y+a,\ \forall y>0 \text{ (với } a \text{ là hằng số).} \end{aligned}$$

Thay công thức trên vào đẳng thức $f(d+f(y))=y+d,\ \forall y>0$, ta tìm được $a=0$. Thử lại thấy $f(x)=x,\ \forall x>0$ là nghiệm hàm của bài toán. □

Chú ý Với $n=2023$ ta có bài toán trong Balkan MO Shortlist 2023.

Bài toán 10 (USAMO 2023) Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(xy+f(x))=xf(y)+2,\ \forall x,y>0. \tag{11}$$

Bài toán này thực ra chỉ là một trường hợp đặc biệt của bài toán 7, khi $g(x)=2,\ \forall x>0$. Vì lẽ đó, sẽ là rất nhàm chán nếu "copy paste" lời giải của bài 7 vào đây. Với mong muốn giúp bạn đọc có cái nhìn đa chiều hơn về kĩ thuật sử dụng phép thế đã nêu, tác giả xin lựa chọn một cách tiếp cận khác cho bài này. Dẫu lời giải này không ngắn gọn như của bài toán 7 hay 6, song nó lại phô bày được nhiều kĩ thuật cơ bản để giải phương trình hàm như: chứng minh đơn ánh, toàn ánh, phương trình hàm Cauchy,...[2]

Lời giải Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn các yêu cầu bài toán.
Trong (11) cho $x=1$ và đặt $c=f(1)$ thì được:

$$f(y+c)=f(y)+2,\ \forall y>0. \tag{12}$$

Ta chứng minh f là đơn ánh. Thật vậy, giả sử có $a,b>0$ sao cho $f(a)=f(b)=m$. Trong (11) lần lượt cho $x=a,\ y=b$ và $x=b,\ y=a$ rồi so sánh 2 đẳng thức thu được, ta thấy:

$$am+2=f(ab+m)=bm+2 \quad \Longrightarrow a=b.$$

Do đó f là đơn ánh. Bây giờ, trong (11) thay x bởi $x+\dfrac{2}{f(y)}$ thì được:

$$\begin{aligned} f\left(xy+\frac{2y}{f(y)}+f\left(x+\frac{2}{f(y)}\right)\right) &= xf(y)+2+2 \\ &\overset{(11)}{=} f(xy+f(x))+2 \\ &\overset{(12)}{=} f(xy+f(x)+c),\ \forall x,y>0. \end{aligned}$$

Mà f là đơn ánh nên:

$$\begin{aligned} & xy+\frac{2y}{f(y)}+f\left(x+\frac{2}{f(y)}\right)=xy+f(x)+c,\ \forall x,y>0 \\ & \Longrightarrow f\left(x+\frac{2}{f(y)}\right)=f(x)+c-\frac{2y}{f(y)},\ \forall x,y>0. \end{aligned}$$

Đến đây cho $x = c$ và sử dụng (12) thì được: $f\left(\frac{2}{f(y)}\right) = f(c) + c - 2 - \frac{2y}{f(y)}$, $\forall y > 0$. Thay ngược trở lại vào đẳng thức trước, ta được:

$$f\left(x + \frac{2}{f(y)}\right) = f(x) + f\left(\frac{2}{f(y)}\right) - f(c) - 2, \ \forall x, y > 0.$$

Đến đây ta quan tâm tập giá trị của $\frac{2}{f(y)}$ khi y chạy trong khoảng $(0, +\infty)$. Bằng việc thay x bởi $\frac{x}{f(y)}$ vào (11), ta thấy hàm f có thể nhận mọi giá trị trong khoảng $(2, +\infty)$. Dẫn đến $\frac{2}{f(y)}$ có thể nhận bất cứ giá trị nào thuộc khoảng $(0, 1)$. Vì vậy, ta có thể viết lại đẳng thức trên như sau:

$$f(x+z) = f(x) + f(z) - A, \ \forall x > 0, \ z \in (0,1) \quad (\text{với } A = f(c) + 2 > 0).$$

Xét ánh xạ $g : \mathbb{R}^+ \to (-A, +\infty)$ xác định bởi công thức: $g(x) = f(x) - A, \ \forall x > 0$. Thế thì từ đẳng thức trên ta có:

$$g(x+z) = g(x) + g(z), \ \forall x > 0, \ z \in (0,1). \tag{13}$$

Ta sẽ chứng minh $g(x+z) = g(x) + g(z), \ \forall x, z > 0$. Đầu tiên, từ (13) ta chứng minh được

$$g(nx) = n \cdot g(x), \ \forall x \in (0,1), n \in \mathbb{N}^*. \tag{14}$$

Bây giờ, lấy 2 số thực $x, z > 0$ bất kỳ. Ta chọn số nguyên dương n (đủ lớn) sao cho $\frac{x}{n}, \frac{z}{n} < \frac{1}{2}$, kéo theo là $\frac{x+z}{n} < 1$. Lúc này ta có:

$$g(x+z) = g\left(n \cdot \frac{x+z}{n}\right) \overset{(14)}{=} n \cdot g\left(\frac{x+z}{n}\right) \overset{(13)}{=} n\left[g\left(\frac{x}{n}\right) + g\left(\frac{z}{n}\right)\right] \overset{(14)}{=} g(x) + g(z).$$

Nói tóm lại, $g(x+z) = g(x) + g(z), \ \forall x, z > 0$. Nói riêng, ta có $g(nx) = ng(x), \ \forall x > 0, n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra, với mỗi $x > 0$ ta đều có:

$$g(x) = \frac{g(nx)}{n} > \frac{-A}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đến đây cho $n \to \infty$ ta thu được $g(x) \geq 0$. Như vậy $g(x) \geq 0, \ \forall x > 0$. Kết hợp với sự kiện g là hàm cộng tính trên $\mathbb{R}^+$, ta suy ra $g(x) = ax, \ \forall x > 0$ (a là hằng số).
Dẫn đến $f(x) = ax + A, \ \forall x > 0$. Thay công thức này vào (11) ta tìm được duy nhất một nghiệm hàm của bài toán là $f(x) = x + 1, \ \forall x > 0$. □

3. Các bài toán rèn luyện

Bài 1: (VMO 2021) Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x)f(y) = f(xy - 1) + xf(y) + yf(x), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 2: Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(f(x) + xf(y)) = xy + f(x), \ \forall x, y > 0.$$

Bài 3: (Balkan MO 2022) Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(yf(x)^3 + x) = x^3 f(y) + f(x), \ \forall x, y > 0.$$

Bài 4: (Brazil 2006) Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy, \ \forall x, y > 0.$$

Bài 5: (Tạp chí Crux 3/2024) Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(x + yf(x^2)\right) = f(x) + x^2 f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 6: (Balkan MO Shortlist 2017) Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x + yf(x^2)) = f(x) + xf(xy), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 7: (Trung Quốc TST 2021) Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(xf(y) + y^3\right) = yf(x) + f(y)^3, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Tài liệu

[1] Đội Huấn luyện viên Trường Đông miền Nam, *Đáp án Trường Đông miền Nam 2019*.

[2] Trần Nhật Quang, *Bài toán phương trình hàm trong đề thi USAMO 2023*. https://s.net.vn/6VCv

[3] Diễn đàn *Art of Problem Solving*. https://artofproblemsolving.com/community

[4] Nhóm Facebook *Hướng tới Olympic Toán VN*. https://www.facebook.com/groups/vmo.tst/

Phương trình hàm liên quan đến số học

Nguyễn Tất Thu (Trường THPT Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)
Nguyễn Thái Hưng (Trường Đại Học Sư Phạm TP Hồ Chí Minh)

Phương trình hàm liên quan đến số học

Nguyễn Tất Thu (Trường THPT Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)
Nguyễn Thái Hưng (Trường Đại Học Sư Phạm TP HỒ Chí Minh)

Giới thiệu. *Trong các kỳ thi Olympic Toán ta thường gặp các bài toán yêu cầu tìm một hàm số thỏa mãn một số tính chất số học nào đó. Với các bài toán này ngoài các kĩ thuật thường dùng trong giải phương trình hàm thỏa mãn đẳng thức đại số, chúng ta còn kết hợp với các tính chất số học để tìm được hàm thỏa bài toán. Trong bài viết này, chúng tôi xin chia sẻ với bạn đọc một số bài toán như vậy.*

Các điều kiện số học thường xuất hiện liên quan đến chia hết, số chính phương, ước chung lớn nhất, bội chung nhỏ nhất,...
Chúng ta bắt đầu với bài toán IMO Shortlist 2013.

Bài toán 1 (IMO Shortlist 2013, N1) Tìm tất cả các hàm $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n \tag{1}$$

với mọi $m,\ n \in \mathbb{Z}^+$.

Với bài toán này, ta thường chọn $m,\ n$ sao cho $mf(m) + n$ là các số nguyên tố hoặc tích của một số số nguyên tố, vì khi đó ta sẽ xác định được giá trị của $m^2 + f(n)$. Ngoài ra, ta thường hay sử dụng các tính chất sau

- Nếu $a \mid b$ với $a,\ b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ thì $|b| \geq |a|$.
- Cho S là một tập con vô hạn của tập các số nguyên và a là một số nguyên cố định. Khi đó, nếu $n \mid a$ với mọi $n \in S$ thì $a = 0$.

Ta có thể tiếp cận bài toán trên theo các cách sau:

Lời giải **Cách 1:** Cho $m = n = 2$ trong (1), ta có

$$4 + f(2) \mid 2f(2) + 2.$$

Mà
$$2f(2) + 2 < 2(4 + f(2)),$$
nên ta có
$$2f(2) + 2 = 4 + f(2) \Rightarrow f(2) = 2.$$
Cho $m = 2$ trong (1), ta có

$$4 + f(n) \mid 4 + n,$$

dẫn tới $f(n) \leqslant n$ với mọi n.
Cho $m = n$ trong (1), ta có

$$n^2 + f(n) \mid nf(n) + n \Rightarrow nf(n) + n \geqslant n^2 + f(n)$$

hay
$$(n-1)(f(n) - n) \geqslant 0.$$
Do đó $f(n) \geqslant n$ với mọi $n \geqslant 2$.
Điều này cũng đúng với $n = 1$. Vì vậy $f(n) = n$ với mọi n. Thử lại thỏa mãn.
Cách 2: Cho $m = f(n)$ trong (1), ta có

$$f(n)(f(n) + 1) \mid f(n)f(f(n)) + n.$$

Suy ra $f(n) \mid n$ với mọi n.
Xét m là số nguyên dương bất kì và số nguyên tố p thỏa mãn $p > 2m^2$. Khi đó $p > mf(m)$. Cho $n = p - mf(m)$ trong (1), ta thu được $m^2 + f(n)$ là ước

của p, mà $m^2 + f(n) > 1$ nên $m^2 + f(n) = p$. Do đó

$$p - m^2 = f(n) \mid n = p - mf(m),$$

mà

$$p - mf(m) < p < 2\left(p - m^2\right),$$

nên

$$p - mf(m) = p - m^2, \text{ hay } f(m) = m.$$

Cách 3: Cho $m = 1$ trong (1), ta được $1 + f(n) \leqslant f(1) + n$ nên $f(n) \leqslant n + c$ với $c = f(1) - 1$. Giả sử tồn tại số nguyên dương n sao cho $f(n) \neq n$. Với m đủ lớn (chẳng hạn $m \geqslant \max\{n, c+1\}$), ta có

$$mf(m) + n \leqslant m(m + c) + n \leqslant 2m^2 < 2\left(m^2 + f(n)\right),$$

suy ra $mf(m) + n = m^2 + f(n)$. Dẫn đến

$$0 \neq f(n) - n = m(f(m) - m),$$

điều này vô lý vì $m > |f(n) - n|$. Vậy $f(n) = n$ với mọi số nguyên dương n. □

Bài toán 2 (INMO 2018) Tìm tất cả các hàm $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn hai điều kiện sau

i) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)\ \forall m,\ n \in \mathbb{Z}^+$.

ii) $m + n \mid f(m) + f(n)\ \forall m,\ n \in \mathbb{Z}^+$.

LỜI GIẢI Từ i) cho $m = n = 1$, ta có $f(1) = 1$.
Từ ii) cho $m = 1$, ta có

$$n + 1 \mid f(n) + 1.$$

Giả sử $f(2)$ có ước nguyên tố lẻ p. Khi đó ta có

$$p \mid f(p-1) + 1 = f\left(2 \cdot \frac{p-1}{2}\right) + 1 = f\left(\frac{p-1}{2}\right) f(2) + 1.$$

Suy ra $p \mid 1$ (vô lí). Do đó, $f(2)$ không có ước nguyên tố lẻ, hay $f(2) = 2^k$.
Cho $m = 1,\ n = 2$ trong ii), ta có

$$3 \mid f(2) + 1 = 2^k + 1 \Rightarrow k \text{ lẻ}.$$

Sử dụng i) ta có

$$f(2^m) = 2^{km}\ \forall m \in \mathbb{Z}^+.$$

Thay m bởi 2^m trong ii), ta có

$$2^m + n \mid 2^{mk} + f(n) = 2^{mk} + n^k + f(n) - n^k.$$

Do k lẻ, nên $2^m + n \mid 2^{mk} + n^k$, do đó

$$2^m + n \mid f(n) - n^k, \ \forall m \in \mathbb{Z}^+.$$

Suy ra $f(n) = n^k$. Thử lại ta thấy hàm này thỏa mãn. $\square$

Bài toán 3 (Thanh Hóa 2018-2019) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện

$$(f(a) + f(b) - ab) \mid (af(a) + bf(b)), \text{ với mọi } a, \ b \in \mathbb{N}^*. \quad (2)$$

Lời giải Giả sử f là hàm số thỏa mãn điều kiện bài toán. Cho $a = b = 1$ trong (2), ta được

$$2f(1) - 1 \mid 2f(1) \Rightarrow 2f(1) - 1 \mid 1.$$

Hơn nữa

$$f(1) \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2f(1) - 1 = 1 \Rightarrow f(1) = 1.$$

Xét số nguyên tố p bất kì, $p \geq 7$. Cho $a = p$, $b = 1$ trong (2), ta được

$$\begin{aligned} f(p) - p + 1 \mid pf(p) + 1 &\Rightarrow f(p) - p + 1 \mid pf(p) - p^2 + p + (p^2 - p + 1) \\ &\Rightarrow f(p) - p + 1 \mid (p^2 - p + 1). \end{aligned}$$

- Nếu $f(p) - p + 1 = p^2 - p + 1$ thì $f(p) = p^2$.
- Nếu $f(p) - p + 1 \neq p^2 - p + 1$, do $p^2 - p + 1$ lẻ nên

  $$p^2 - p + 1 \geq 3\left(f(p) - p + 1\right).$$

  Từ đó ta có

  $$f(p) \leq \frac{1}{3}\left(p^2 + 2p - 2\right).$$

  Cho $a = b = p$ trong (2), ta được

  $$\begin{aligned} 2f(p) - p^2 \mid 2pf(p) &\Rightarrow 2f(p) - p^2 \mid 2pf(p) - p^3 + p^3 \\ &\Rightarrow 2f(p) - p^2 \mid p^3. \end{aligned}$$

  Mặt khác $f(p) \geq 1$ nên

  $$-p^3 < 2f(p) - p^2 \leq \frac{2}{3}\left(p^2 + 2p - 2\right) - p^2 < -p.$$

  Do p nguyên tố và $p \geq 7$ nên điều này mâu thuẫn với điều kiện $2f(p) - p^2$ là ước của p^3.

Với mỗi số nguyên a cố định, chọn số nguyên tố p đủ lớn. Cho $b = p$, từ (2) ta được

$$\begin{aligned} f(a) + p^2 - pa \mid af(a) + p^3 &\Rightarrow f(a) + p^2 - pa \mid af(a) + ap^2 - a^2p + p^3 - ap^2 + a^2p \\ &\Rightarrow f(a) + p^2 - pa \mid p(p^2 - ap + a^2). \end{aligned}$$

Do p đủ lớn nên p không là ước của $f(a)$, vì vậy $f(a)+p^2-pa$ và p nguyên tố cùng nhau nên

$$\begin{aligned} & f(a)+p^2-pa \mid p^2-ap+a^2 = \left(f(a)+p^2-pa\right)+a^2-f(a) \\ \Rightarrow & f(a)+p^2-pa \mid a^2-f(a). \end{aligned}$$

Vì $a^2-f(a)$ cố định nên ta có thể chọn p đủ lớn để

$$f(a)+p^2-pa > a^2-f(a).$$

Do đó để

$$f(a)+p^2-pa \mid a^2-f(a) \Leftrightarrow a^2-f(a)=0.$$

Vậy $f(a)=a^2$ với $\forall a \in \mathbb{N}^*$. Thử lại thấy thỏa mãn. □

Bài toán 4 Tìm tất cả các hàm $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$n! + f(m)! \mid f(n)! + f(m!) \qquad (3)$$

với mọi $m,\ n \in \mathbb{Z}^+$.

LỜI GIẢI Cho $m=n=1$ trong (3), ta có

$$1+f(1)! \mid f(1)!+f(1) \Rightarrow 1+f(1)! \mid f(1)-1.$$

Mà $1+f(1)! > |f(1)-1|$, nên $f(1)=1$. Cho $m=1$ trong (3), ta có

$$n!+1 \mid f(n)!+1 \Rightarrow f(n)! \geq n! \Rightarrow f(n) \geq n.$$

Cho $(m,n)=(1,p-1)$ trong (3) với p là số nguyên tố, ta có

$$p \mid (p-1)!+1 \mid f(p-1)!+1 \Rightarrow f(p-1) < p \Rightarrow f(p-1)=p-1.$$

Cho $n=p-1$ trong (3), ta có

$$(p-1)!+f(m)! \mid (p-1)!+f(m!),$$

hay

$$(p-1)!+f(m)! \mid f(m!)-f(m)!$$

với mọi số nguyên tố p, điều này dẫn tới $f(m!)=f(m)!$. Do đó ta có thể viết lại đề bài như sau

$$n!+f(m)! \mid f(m)!+f(n)! \Rightarrow n!+f(m)! \mid f(n)!-n!$$

với mọi số nguyên dương m. Suy ra

$$f(n)! = n! \Rightarrow f(n)=n.$$

□

Bài toán 5 (2024 Taiwan TST Round 2 Mock P3) Tìm tất cả các hàm $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ sao cho

$$mf(m) + (f(f(m)) + n)^2 \mid 4m^4 + n^2(f(f(n))^2 \tag{4}$$

với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải. Gọi $P(u, v)$ là phép thế n bởi u, m bởi v trong (4).
Từ $P(1, 1)$ ta được $f(1) = 1$. Từ $P(n, 1)$ ta được

$$n^2 + 2n + 2 \mid 4 + n^2 f(f(n))^2. \tag{5}$$

Từ $P(1, m)$ ta được

$$mf(m) + f(f(m))^2 + 2f(f(m)) + 1 \mid 4m^4 + 1. \tag{6}$$

Từ (6) suy ra

$$f(f(m)) \leq 2m^2 - 1, \ \forall m \in \mathbb{N}, \quad m > 1. \tag{7}$$

Trong (5), thay n bởi 2, ta được $5 \mid f(f(2))^2 + 1$, mà theo (7), $f(f(2)) \leq 7$. Do đó $f(f(2))$ chỉ có thể bằng 2, 3 hoặc 7. Mặt khác $f(f(2))$ chẵn, vì nếu $f(f(2))$ lẻ, ta thay $m = 2$ vào (6) thì thu được điều vô lý. Vậy $f(f(2)) = 2$.
Thay $m = 2$ vào (6) ta được

$$2f(2) + 9 \mid 65 = 13 \cdot 5,$$

suy ra $f(2) = 2$ hoặc $f(2) = 28$. Nếu $f(2) = 28$, từ $P(2, 2)$ ta có được điều vô lý, do đó $f(2) = 2$.
Với n lẻ, ta có

$$\gcd(n^2, n^2 + 2n + 2) = 1 \text{ và } n^4 + 4 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2),$$

nên từ (6) ta có

$$n^2 + 2n + 2 \mid f(f(n))^2 - n^2, \ \forall n \text{ lẻ}. \tag{8}$$

Trong (10) cho $n = 3$, ta được $\left[\begin{array}{l} f(f(3)) - 3 \ \vdots \ 17 \\ f(f(3)) + 3 \ \vdots \ 17 \end{array}\right.$. Nếu $f(f(3)) + 3$ chia hết cho 17 thì $f(f(3)) = 14$ (vì $f(f(3)) \leq 17$ theo (7)), tuy nhiên từ $P(3, 2)$, ta thu được điều vô lý. Do đó $f(f(3)) - 3$ chia hết cho 17, dẫn đến $f(f(3)) = 3$.

Trong (6), cho $m = 3$ ta được

$$3f(3) + 16 \mid 325 = 25 \cdot 13.$$

Từ đó $f(3) = 3$ hoặc $f(3) = 103$. Nếu $f(3) = 103$, từ $P(2, 3)$ ta thấy vô lý. Do đó $f(3) = 3$.

Lấy p lẻ bất kỳ, thực hiện $P(2,p)$, $P(3,p)$ và kết hợp với (10), ta được

$$\begin{cases} f(f(p))^2 - p^2 \vdots p^2 + 2p + 2 \\ f(f(p))^2 - p^2 \vdots p^2 + 4p + 8 \\ f(f(p))^2 - p^2 \vdots p^2 + 6p + 18. \end{cases}$$

Hơn nữa $\begin{cases} \gcd(p^2 + 2p + 2, p^2 + 4p + 8) \leq 5 \\ \gcd(p^2 + 4p + 8, p^2 + 6p + 18) \leq 13 \\ \gcd(p^2 + 6p + 18, (p^2 + 2p + 2) \leq 5. \end{cases}$ (với p lẻ).

Giả sử $f(f(p)) \neq p$, khi đó

$$f(f(p))^2 - p^2 \geq \frac{(p^2 + 2p + 2)(p^2 + 4p + 8)(p^2 + 6p + 18)}{25 \cdot 13}.$$

Mặt khác $f(f(p)) \leq 2p^2 - 1$ nên

$$\frac{(p^2 + 2p + 2)(p^2 + 4p + 8)(p^2 + 6p + 18)}{25 \cdot 13} \leq (2p^2 - 1)^2 - p^2$$

với mọi p lẻ, điều này là vô lý.

Do đó $f(f(p)) = p$ với p lẻ đủ lớn. Với p sao cho $f(f(p)) = p$, thực hiện $P(q,p)$ với q lẻ đủ lớn, ta được

$$pf(p) + p^2 + 2pq + q^2 \mid 4p^2 + q^4,$$

mà

$$4p^2 + q^4 = (pf(p) + p^2 + 2pq + q^2)(2p^2 - 2pq + q^2) + p(p - f(p))(2p^2 - 2pq + q^2).$$

do đó

$$p(f(p) - p)(2p^2 - 2pq + q^2) \vdots pf(p) + p^2 + 2pq + q^2$$

với mọi q lẻ đủ lớn.

Giả sử $f(p) \neq p$. Ta có

$$\frac{p(f(p) - p)(2p^2 - 2pq + q^2)}{pf(p) + p^2 + 2pq + q^2} \to p(f(p) - p) \text{ khi } q \to +\infty.$$

Do đó với q đủ lớn thì

$$2p^2 - 2pq + q^2 = pf(p) + p^2 + 2pq + q^2$$

điều này vô lý. Do đó

$$f(f(p)) = p \Rightarrow f(p) = p. \tag{9}$$

Từ $P(n,p)$ với p lẻ đủ lớn, ta được

$$2p^2 + 2pn + n^2 \mid n^2(f(f(n))^2 - n^2),$$

với mọi p lẻ đủ lớn. Điều này chỉ xảy ra khi $f(f(n)) = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Từ đây áp dụng (4), ta suy ra

$$mf(m) + (m+n)^2 \mid (2m^2 + 2mn + n^2)(2m^2 - 2mn + n^2), \ \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Với n lẻ thì $\gcd(2m^2+2mn+n^2, 2m^2-2mn+n^2) = 1$ nên $mf(m)+(m+n)^2$ là ước của $2m^2 + 2mn + n^2$ hoặc $2m^2 - 2mn + n^2$.

- Nếu $mf(m) + (m+n)^2 \mid 2m^2 - 2mn + n^2$ thì $mf(m) + (m+n)^2 \mid mf(m) - m^2 + 4mn$. Với n lẻ đủ lớn, ta suy ra
$$mf(m) + (m+n)^2 \leq mf(m) - m^2 + 4mn. \tag{10}$$
Tuy nhiên, bất đẳng thức trong (10) không xảy ra khi n đủ lớn.
- Nếu $mf(m) + (m+n)^2 \mid 2m^2 + 2mn + n^2$, tương tự ta suy ra được $mf(m) + (m+n)^2 \mid m^2 - mf(m)$. Cho $n \to +\infty$, ta suy ra $f(m) = m$.

Vậy hàm số $f(n) = n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ là hàm số duy nhất thỏa mãn điều kiện. □

Bài toán 6 (2021 Francophone MO Seniors) Tìm tất cả các hàm $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn các điều kiện sau

a) $n = (f(2n) - f(n))\,(2f(n) - f(2n))$,

b) $f(m)f(n) - f(mn) = (f(2m) - f(m))\,(2f(n) - f(2n)) +$
$+\,(f(2n) - f(n))\,(2f(m) - f(2m))$,

c) $m - n$ chia hết $f(2m) - f(2n)$ nếu m và n là hai số nguyên tố lẻ phân biệt.

Lời giải. Kí hiệu $\mathcal{P}$ là tập các số nguyên tố.
Thay $n = 1$ vào điều kiện a), ta có

$$(f(2) - f(1))(2f(1) - f(2)) = 1 \ \Rightarrow \ f(1) = 2; \ f(2) = 3.$$

Thay $n = p$ là số nguyên tố vào điều kiện a), ta có

$$(f(2p) - f(p))(2f(p) - f(2p)) = p.$$

Suy ra
$$\begin{cases} f(2p) - f(p) = a \\ 2f(p) - f(2p) = b \end{cases}$$
với $a, \ b \in \mathbb{Z}, \ ab = p$. Suy ra

$$\begin{cases} f(p) = a + b \\ f(2p) = 2a + b. \end{cases}$$

Mặt khác, ta cần có $a, \ b, \ a + b \in \mathbb{Z}^+$ và $ab = p$, nên $a, \ b$ là hoán vị của 1 và

p. Vậy ta có $f(p) = p + 1$ với mọi p là số nguyên tố, và

$$\left[\begin{aligned} &f(2p) = p + 2 \\ &f(2p) = 2p + 1 \end{aligned}\right.$$

Ta phân hoạch tập số nguyên tố thành hai phần như sau:

$$\begin{cases} A = \{p \in \mathcal{P} \mid f(2p) = 2p + 1\} \\ B = \{p \in \mathcal{P} \mid f(2p) = p + 2\}. \end{cases}$$

Ta giả sử hai tập A và B đều có ít nhất 1 phần tử. Do tập $\mathcal{P}$ là tập hợp vô hạn, nên khi phân hoạch, ít nhất 1 trong 2 tập A và B có số phần tử vô hạn. Không mất tính tổng quát, giả sử tập đó là A.
Xét m thuộc tập A, n thuộc B. Theo điều kiện c), ta có

$$2m + 1 - n - 2 \mathrel{\vdots} m - n,$$

suy ra

$$n - 1 \mathrel{\vdots} m - n, \ \forall m \in A, n \in B. \tag{11}$$

Do tập A là tập vô hạn, nên ta có thể chọn m đủ lớn để $m > 2n - 1$, như vậy thì (11) không thỏa, vô lí. Vậy ta suy ra

$$\left[\begin{aligned} &f(2p) = 2p + 1, \ \forall p \in \mathcal{P} \\ &f(2p) = p + 2, \ \forall p \in \mathcal{P} \end{aligned}\right.$$

Mặt khác, ta thay $n = 4$ vào điều kiện a), ta tính được $f(4) = 5$ hoặc $f(4) = 4$.
Nếu $f(4) = 4$, thì ta thay $m = n = 2$ vào điều kiện b), rõ rãng không đúng.
Vậy $f(4) = 5$. Hơn nữa, $4 = 2 \cdot 2$ và 2 là số nguyên tố, nên ta suy ra được $f(2p) = 2p + 1$ với p là số nguyên tố.
Ta thay $m = p$, $n = q$ (với p, q là 2 số nguyên tố) vào điều kiện b), ta tính được $f(pq) = pq + 1$ với mọi p, q là số nguyên tố.
Ta sẽ tính tiếp giá trị của $f(pqr)$ với p, q, r là các số nguyên tố (không nhất thiết phân biệt). Thay $m = p$ là số nguyên tố vào điều kiện b), ta có:

$$(p + 1)f(n) - f(np) = p(2f(n) - f(2n)) + f(2n) - f(n).$$

Suy ra

$$f(np) = (p - 1)f(2n) - (p + 2)f(n) \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ p \in \mathcal{P}. \tag{12}$$

Thay $n = pq$ vào điều kiện a), ta tính được

$$\left[\begin{aligned} &f(2pq) = pq + 2 \\ &f(2pq) = 2pq + 1 \end{aligned}\right.,$$

với p, q là 2 số nguyên tố. Thay $m = 2p$, $n = q$ vào điều kiện b), ta có

$$(2p + 1)(q + 1) - f(2pq) = (f(4p) - f(2p)) + (2f(2p) - f(4p))q. \tag{13}$$

Thay $n = 2p$ vào điều kiện a), ta có

$$\left[\begin{array}{l} f(4p) = 4p + 1 \\ f(4p) = 2p + 2 \end{array}\right.$$

Nếu $f(2pq) = pq + 2$, thì ta thay $f(2pq)$ và 2 trường hợp của $f(4p)$ vào (13), ta có:

$$(2p+1)(q+1) - pq - 2 = \left[\begin{array}{l} 2p + q \\ 2pq + 1. \end{array}\right.$$

Suy ra

$$\left[\begin{array}{l} pq = 1 \\ (q-2)(p-1) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow q = 2.$$

Tương tự vậy, khi thay $m = 2q$, $n = p$ vào điều kiện b), ta cũng thu được $p = 2$. Vậy nếu tồn tại số có dạng $2pq$ (p, q là số nguyên tố) thỏa $f(2pq) = pq + 2$, thì $p = q = 2$. Tức là $f(8) = 6$.
Thay $n = 8$ vào điều kiện a), ta có $f(16)$ nhận một trong hai giá trị là 8 hoặc 10.
Thay $m = n = 4$ vào điều kiện b), ta có $f(16) = 17$ (vô lí). Vậy $f(2pq) = 2pq + 1$ với mọi p, q là hai số nguyên tố.
Thay $n = qr$ vào (12), với q, r là hai số nguyên tố, ta tính được $f(pqr) = pqr + 1$.
Giả sử ta có

$$f(p_1p_2\cdots p_n) = p_1p_2\cdots p_n + 1,\ \forall p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathcal{P},\ n \in N^*,\ n \leq k,\ k \geq 3. \tag{14}$$

Ta sẽ chứng minh

$$f(p_1p_2\cdots p_{k+1}) = p_1p_2\cdots p_{k+1} + 1,\ \forall p_1, p_2, \ldots, p_k, p_{k+1} \in \mathcal{P}. \tag{15}$$

Thật vậy, ta thay $m = p_1p_2\cdots p_{k-1}$, $n = p_kp_{k+1}$ vào điều kiện b), ta áp dụng giả thiết (14) vào $f(p_1p_2\cdots p_{k-1})$, $f(p_kp_{k+1})$, $f(2p_1p_2\cdots p_{k-1})$, và $f(2p_kp_{k+1})$, ta chứng minh được (15) đúng.
Vậy ta có thể kết luận (các số $p_1, p_2, \ldots, p_n$ không nhất thiết phân biệt):

$$f(p_1p_2\cdots p_n) = p_1p_2\cdots p_n + 1,\ \forall p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathcal{P},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đó, ta có $f(n) = n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Thử lại ta thấy thỏa mãn. □

Bài toán 7 (Iberoamerican 2022, Day 2, P3) Tìm tất cả các hàm $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $f(a)f(a+b) - ab$ là số chính phương với mọi số nguyên dương a, b.

Lời giải Kí hiệu $P(x, y)$ là phép thế $a = x$ và $b = y$ trong $f(a)f(a+b) - ab$.
Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho $p \mid f(x)$ nhưng $p \nmid x$. Khi đó $\nu_p(f(x)) = 1$, vì ngược lại từ $P(x, p)$, ta lại có

$$\nu_p(f(x)f(x+p) - xp) = 1 \text{ hay } f(x)f(x+p) - xp$$

không là số chính phương. Khi đó, ta chứng minh được

$$\nu_p(f(x+p^2)) = 1 \text{ và } \nu_p(f(x+p)) = 0.$$

Đặt $m = x + p^2$ và $n = x + p$. Từ $P(p, m-p)$, ta được $f(p)f(m) - p(m-p)$ là số chính phương, suy ra $\nu_p(f(p)) = 0$. Tuy nhiên, từ $P(p, n-p)$, ta được $f(p)f(n) - n(n-p)$ là số chính phương, suy ra $\nu_p(f(p)) = 1$ (Mâu thuẫn).
Như vậy $p \mid f(x) \implies p \mid x$. Từ $P(q, x-q)$ với q là số nguyên tố và $q \nmid x$, ta có $f(q) = q$.
Từ $P(a, q-a)$, ta có

$$q(f(a) - a) + a^2$$

là số chính phương với mọi số nguyên tố q đủ lớn.
Chọn $q \equiv 1 \pmod{a}$ thì $f(a)$ là thặng dư chính phương modulo a.
Chọn $q \equiv z \pmod{a}$ với z không là thặng dư chính phương modulo a và nguyên tố cùng nhau với a, khi đó $a \mid f(a)$.
Vậy $f(a) = (k+1)a$, từ đó suy ra $a(a+qk)$ là số chính phương với mọi số nguyên tố q.
Từ đây thu được $k = 0$. Vậy $f(a) = a$ với mọi số nguyên dương a.
Thử lại thỏa mãn. □

Bài toán 8 (2021 APMO) Tìm tất cả các hàm $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn $f(f(a) - b) + bf(2a)$ là số chính phương với mọi số nguyên $a,\ b$.

LỜI GIẢI Gọi $P(x, y)$ là phép thế a bởi x, b bởi y trong $f\left(f\left(a\right) - b\right) + bf\left(2a\right)$.
Từ $P(0, f(0))$, ta có $f(0) + f(0)^2$ là số chính phương, mà $f(0)$ là số nguyên nên $f(0) = 0$ hoặc $f(0) = -1$.
Giả sử $f(0) = -1$. Từ $P(0; -1-b)$, ta có $f(b) + b + 1$ là số chính phương. Do đó $f\left(f(a)\right) + f(a) + 1$ là số chính phương. Từ $P(0, a)$, ta có $f\left(f(a)\right)$ là số chính phương.
Nếu $f(a)$ chia 4 dư 1 thì $f\left(f(a)\right) + f(a) + 1$ chia 4 dư 2 hoặc 3 (không thể là số chính phương). Do đó không tồn tại a nguyên để $f(a)$ chia 4 dư 1.
Từ $P(0, 0)$, ta có $f(-1)$ là số chính phương nên $f(-1)$ chia hết cho 4. Từ $P(-1, f(-1))$, ta có $f(-1)f(-2) - 1$ là số chính phương, chia 4 dư 3 (Vô lí).
Như vậy $f(0) = 0$.
Từ $P(0, -a)$, ta có $f(a)$ là số chính phương với mọi số nguyên a.

- **Trường hợp 1:** Tồn tại số nguyên dương c để $f(c) = 0$.

  Từ $P\left(c, -c\right)$, ta được $-cf(2c) \leq 0$ là số chính phương. Suy ra $f(2c) = 0$. Tương tự ta có $f\left(2^k c\right) = 0$ với k là số tự nhiên.

  Với mỗi số nguyên a_0, chọn k đủ lớn để $f\left(a_0\right) < 2^k c$. Từ $P\left(a_0, f(a_0) - 2^k c\right)$, ta có

  $$\left(f(a_0) - 2^k c\right) f\left(2a_0\right)$$

  là số chính phương, suy ra $f\left(2a_0\right) = 0$.

  Vậy $f\left(2x\right) = 0$ và $f\left(2x+1\right)$ là số chính phương bất kì với mọi x nguyên.

- **Trường hợp 2:** $f(x) > 0$ nếu $x > 0$.

  Từ $P(a, f(a) - 2a)$, ta có
  $$(f(a) - 2a + 1) f(2a)$$
  là số chính phương. Như vậy với mọi a nguyên dương, $f(a) - 2a + 1$ là số chính phương.

  Với số nguyên tố p bất kì, lấy $k = \dfrac{p+1}{2}$ thì $f(k)$ và $f(k) - p$ là 2 số chính phương. Dễ dàng tính được $f(k) = k^2$. Vì vậy $f(x) = x^2$ với vô số số nguyên x.

  Gọi $A \subset \mathbb{Z}$ là tập các số nguyên x thỏa mãn $f(x) = x^2$. Với $x, y \in A$, từ $P(x, x^2 - y)$, ta có
  $$y^2 + \left(x^2 - y\right) f(2x) = \left(y - \frac{f(2x)}{2}\right)^2 + x^2 f(2x) - \frac{f(2x)^2}{4}$$
  là số chính phương. Cố định x, cho y tiến dần đến $+\infty$, suy ra
  $$x^2 f(2x) - \frac{f(2x)^2}{4} = 0 \;\Rightarrow\; f(2x) = 4x^2.$$
  Với số nguyên a bất kì, từ $P(x, x^2 - a)$, ta có
  $$f(a) + \left(x^2 - a\right) 4x^2 = \left(2x^2 - a\right)^2 + f(a) - a^2$$
  là số chính phương. Với x đủ lớn thì $f(a) = a^2$. Vậy $f(x) = x^2$ với mọi x nguyên.

□

Bài toán 9 (China TST 2021, Test 2, Day 2 P4) Tìm tất cả các hàm $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ sao cho với mọi số nguyên dương $m \geq n$ ta có
$$f(m\varphi(n^3)) = f(m) \cdot \varphi(n^3). \tag{16}$$
Trong đó $\varphi(n)$ là số các số nguyên dương không vượt quá n và nguyên tố cùng nhau với n.

Lời giải. Kí hiệu $P(a;b)$ là phép thế $m = a,\ n = b$ trong (16).
Ta chứng minh
$$f(mn) = nf(m),\ \forall m \geq n \tag{17}$$
bằng quy nạp theo n.
Hiển nhiên (17) đúng với $n = 1$. Giả sử (17) đúng với $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Ta chứng minh (17) đúng với n. Nếu n là hợp số, khi đó ta xét số nguyên tố

$p \mid n$. Ta có

$$f(mn) = f\left(m\frac{n}{p} \cdot p\right) = pf\left(m\frac{n}{p}\right) = p \cdot \frac{n}{p} f(m) = nf(m).$$

Xét $n = p$ là số nguyên tố. Từ $P(m; p)$ với $m \geq p$, ta có

$$f(m\varphi(p^3)) = f(m) \cdot \varphi(p^3).$$

Mà $\varphi(p^3) = p^2(p-1)$, nên ta có

$$f(mp^2(p-1)) = f(m) \cdot p^2(p-1).$$

Mặt khác

$$f\left(mp^2(p-1)\right) = (p-1)f(mp^2).$$

Suy ra

$$f(mp^2) = \frac{f(mp^2(p-1))}{p-1} = \frac{f(m) \cdot p^2(p-1)}{p-1} = f(m) \cdot p^2.$$

Từ $P(m; p^2)$ với $m \geq p^2$, ta có

$$f(mp) = \frac{f(mp^5)}{p^4} = \frac{f(mp^5(p-1))}{p^4(p-1)} = \frac{f(m) \cdot p^5(p-1)}{p^4(p-1)} = f(m) \cdot p.$$

Do đó, với mọi $m \geq p$ ta có

$$f(mp) = \frac{f(mp^2)}{p} = \frac{f(m) \cdot p^2}{p} = f(m) \cdot p.$$

Từ đó ta có (17) được chứng minh. Xét số nguyên tố $p \geq 2$, ta có

$$2f(p) = f(2p) = pf(2) \Rightarrow f(2) \vdots 2,$$

hay $f(2) = 2a$ với $a \in \mathbb{Z}^+$.
Trong (17) ta cho $m = 2,\ n = 2$, ta có

$$f(2^2) = 2f(2) = 2^2a.$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$f(2^k) = 2^k a,\ \forall k \geq 1.$$

Khi đó với $n \geq 2$, luôn tồn tại k sao cho $2^{k-1} \leq n < 2^k$. Khi đó

$$f(n) = \frac{f(2^{k-1}n)}{2^{k-1}} = \frac{f(2^k n)}{2^k} = \frac{f(2^k) \cdot n}{2^k} = \frac{2^k a \cdot n}{2^k} = an.$$

Hơn nữa, ta thấy $f(1)$ có thể nhận giá trị bất kì.

Vậy $f(n) = \begin{cases} b \text{ nếu } n = 1 \\ an \text{ nếu } n \geq 2 \end{cases}$, trong đó $a,\ b$ là hai số nguyên dương. □

Bài toán 10 (Canada MO 2021) Một hàm $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ gọi là hàm "đẹp", nếu

$$\gcd(f(f(x)), f(x+y)) = \gcd(x, y) \tag{18}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{N}^*$. Tìm tất cả các số nguyên dương m sao cho $f(m) = m$ với mọi hàm đẹp.

LỜI GIẢI Kí hiệu $P(a, b)$ là phép thế $x = a$ và $y = b$ trong (18).
Xét x là số nguyên dương có ít nhất hai ước nguyên tố phân biệt. Đặt $x = p^k \cdot q$ với p là số nguyên tố và $q > 1$ là số nguyên dương nguyên tố cùng nhau với p.
Từ $P(q, x-q)$, ta có

$$\gcd(f(f(q)), f(x-q+q)) = \gcd(f(f(q)), f(x)) = \gcd(q, x-q) = q.$$

Suy ra $q \mid f(x)$. Từ $P\left(p^k, x-p^k\right)$ ta có

$$\begin{aligned} \gcd\left(f\left(f\left(p^k\right)\right), f\left(x-p^k+p^k\right)\right) &= \gcd\left(f\left(f\left(p^k\right)\right), f(x)\right) \\ &= \gcd\left(p^k, x-p^k\right) = p^k. \end{aligned}$$

Suy ra $p^k \mid f(x)$. dẫn đến $x \mid f(x)$. Do đó $f(x) \geq x$. Nếu $f(x) > x$ thì từ $P(x, f(x)-x)$ ta có

$$f(f(x)) = \gcd(f(f(x)), f(x+f(x)-x)) = \gcd(x, f(x)-x) = \gcd(x, f(x)).$$

Suy ra

$$f(f(x)) \mid x \Rightarrow f(f(x)) \mid f(x).$$

Từ $P(x, x)$, ta có

$$\gcd(f(f(x)), f(2x)) = \gcd(x, x) = x.$$

Suy ra $x \mid f(f(x))$, do đó $f(f(x)) = x$. Vì x có ít nhất hai ước nguyên tố phân biệt và $x \mid f(x)$, nên $f(x)$ cũng có ít nhất hai ước nguyên tố phân biệt. Suy ra

$$f(x) \mid f(f(x)) = x.$$

Do đó, $f(x) = x$. Xét x có không quá một ước nguyên tố. Khi đó $x = p^k$ với $k \in \mathbb{N}$ và p là số nguyên tố. Xét hàm f thỏa mãn

$$f(p^{k+1}) = p^k,\ f(p^k) = p^{k+1},\ f(f(x)) = x\ \forall x \notin \{p^k;\ p^{k+1}\}.$$

Ta thấy $f(f(x)) = x\ \forall x \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh hàm f thỏa bài toán.

Nếu $x+y \notin \{p^k; p^{k+1}\}$, ta có

$$\gcd(f(f(x)), f(x+y)) = \gcd(x; x+y) = \gcd(x, y).$$

Nếu $x+y = p^{k+1}$, ta có

$$\gcd(f(f(x)), f(x+y)) = \gcd(x, p^k) = \gcd(x, p^{k+1}-x) = \gcd(x, y) \text{ (do } x < p^{k+1}).$$

Nếu $x+y = p^k$, kết hợp với $x < p^k$, ta có

$$\gcd(f(f(x)), f(x+y)) = \gcd(x; p^{k+1}) = \gcd(x; p^k - x) = \gcd(x; y).$$

Vậy m có ít nhất hai ước nguyên tố là các giá trị cần tìm. □

Để kết thúc bài viết, chúng tôi giới thiệu một số bài toán để bạn đọc tham khảo.

Bài tập 1 (2020 Caucasus MO) : Tìm tất cả các hàm $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ sao cho

$$f(m) + n - m \,\vdots\, f(n)$$

với mọi số nguyên dương $m,\ n$.

Bài tập 2 (IMO Shortlist 2012, N3) : Cho n là số nguyên dương lẻ. Tìm tất cả các hàm $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(x) - f(y) \mid x^n - y^n$$

với mọi $x,\ y \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 3 (Swiss 2020) : Tìm tất cả các hàm $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi $m,\ n \in \mathbb{N}$, ta có

$$f(m) + f(n) \mid m + n.$$

Bài tập 4 (Nam Định 2021-2022) : Xét hàm số $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện

$$(2a + f(b)) \mid \left(b^2 + 2f(a)\cdot f(b)\right) \text{ với mọi } a, b \in \mathbb{N}^*.$$

1. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố thì $f(p)$ có không quá 3 ước nguyên dương.
2. Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn điều kiện đã nêu.

Bài tập 5 (Indonesian MO 2020) : Tìm tất cả các hàm $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$n^2 + f(m)f(n) \,\vdots\, f(n) + m,$$

với mọi số nguyên dương $m,\ n$.

Bài tập 6 (IMO Shortlist 2016) : Tìm tất cả các hàm $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn với mọi $m,\ n \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$0 \neq f(m) + f(n) - mn \mid mf(m) + nf(n).$$

Bài tập 7 (Japan MO Finals 2021) : Tìm tất cả các hàm $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$n \mid m \Leftrightarrow f(n) \mid f(m) - n$$

với mọi $m,\ n \in \mathbb{Z}^+$.

Bài tập 8 (CMO 2021) : Tìm tất cả các hàm $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) \mid x + f(y)$$

với mọi $x,\ y \in \mathbb{Z}^+$.

Bài tập 9 (BMO 2020) : Tìm tất cả các hàm $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ sao cho với mọi số nguyên dương n, ta luôn có

i) $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ là số chính phương.

ii) $f(n)$ chia hết n^3.

Bài tập 10 (2024 Japan MO P2) : Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ sao cho

$$\operatorname{lcm}(m, f(m + f(n))) = \operatorname{lcm}(f(m), f(m) + n)$$

với mọi số nguyên dương m và n.

Một Ứng Dụng Thú Vị Của Ánh Xạ Đối Với Các Mối Quan Hệ Họ Hàng

Lâm Gia Bảo

1. Đặt Vấn Đề

Quan hệ họ hàng - một trong những mối quan hệ cơ bản và quan trọng nhất giữa con người với nhau. Quan hệ họ hàng có thể chỉ xuất phát từ những mối quan hệ rất gần gũi như Cha, Mẹ, Anh, Chị, Em, đến cả những mối quan hệ "xa hơn"một chút như Ông, Bà, Cô, Chú, Bác, Dì, Cậu, Mợ, Thím, Dượng,... hay thậm chí là Vợ/Chồng, Anh/Em/Con rể, Chị/Em/Con dâu, Sui gia,...

Quan hệ họ hàng, dòng dõi, gia tộc, hậu duệ,... từ xưa đến nay vốn là một chủ đề được nghiên cứu rất nhiều trong các lĩnh vực về Nhân chủng học, Gia phả học,... và đó là những môn khoa học mang tính chất xã hội. Nhưng sẽ ra sao nếu chúng ta thử "mô hình hóa"lĩnh vực này, cụ thể ở đây là các mối quan hệ họ hàng, bằng Toán học - một ngôn ngữ đẹp đẽ tưởng rằng chỉ được sử dụng trong các lĩnh vực tự nhiên?

Dưới đây sẽ là một vài suy nghĩ vu vơ của tác giả trong việc cố gắng mô hình hóa các mối quan hệ họ hàng bằng Toán học. Trước hết ta nhận ra rằng, một mối quan hệ họ hàng liệu có liên quan gì đó đến khái niệm Ánh xạ - một trong những khái niệm cơ bản nhất của Toán học hay không?

2. Một Số Định Nghĩa

Dĩ nhiên, khi muốn xây dựng một lý thuyết nào đó trong Toán học nói riêng và các môn khoa học nói chung, thì những dòng định nghĩa chính là những viên gạch cốt lõi không thể thiếu. Dưới đây tác giả sẽ đưa ra một vài định nghĩa và ký hiệu đơn giản nhất.

2.1. Một Số Định Nghĩa Cơ Bản

- **Tập nhân loại (People set)**: Là tập hợp tất cả mọi người trên thế giới, ký hiệu P. Như vậy, bạn đọc, tác giả và bất cứ ai khác đều thuộc vào tập nhân loại này.
- **Mối quan hệ họ hàng**: Là những ánh xạ (đơn trị hoặc đa trị) kết nối giữa người với người thông qua những quan hệ cơ bản như Cha, Mẹ, Anh, Chị, Em, Con, Vợ/Chồng,... và những quan hệ được mở rộng từ các quan hệ trên như Ông, Bà, Cô, Chú,...

- **Tập quan hệ họ hàng đơn trị**: Là tập hợp tất cả các mối quan hệ họ hàng mà là ánh xạ đơn trị (tạm gọi tắt là quan hệ đơn trị), xin được ký hiệu S.
- **Tập quan hệ họ hàng đa trị**: Là tập hợp tất cả các mối quan hệ họ hàng mà là ánh xạ đa trị (tạm gọi tắt là quan hệ đơn trị, chứa các mối quan hệ đơn trị), xin được ký hiệu M.
- **Tập quan hệ họ hàng (nói chung)**: Xin được ký hiệu $R = S \cup M$.

2.2. Một Số Ký Hiệu Về Quan Hệ Họ Hàng

Dùng những định nghĩa và tính chất đã biết về ánh xạ, tác giả xin ký hiệu một số mối quan hệ như sau:

2.2.1 Các Mối Quan Hệ Cơ Bản Nhất

Xét $X \in P$, ta ký hiệu:

- Bản thân X: $i(X) = X$.
- Ba của X: $b(X)$.
- Mẹ của X: $m(X)$.
- Bạn đời của X: $l(X)$ (Vợ của X, nếu X là nam, và Chồng của X, nếu X là nữ).

2.2.2 Các Mối Quan Hệ Sâu Xa Hơn

Xét $X \in P$, ta ký hiệu:

- Ông nội của X: $b(b(X)) := b^2(X)$.
- Bà nội của X: $m(b(X)) := mb(X)$.
- Ông ngoại của X: $b(m(X)) := bm(X)$.
- Bà ngoại của X: $m(m(X)) := m^2(X)$.
- ...

2.2.3 Các Mối Quan Hệ Là Ánh Xạ Đa Trị

Xét $X \in P$, ta ký hiệu:

- Phụ huynh của X (Gồm ba và mẹ): $p(X) = \{b(X), m(X)\}$.

- Các anh chị em của X (gồm cả X): $s(X)$.
- Các con của X: $c(X)$.

Để cho thuận tiện, tác giả xin gọi các mối quan hệ $i(X)$, $b(X)$, $m(X)$, $l(X)$, $ct(X) \in c(X)$, $st(X) \in s(X)$ là những mối quan hệ trực tiếp.

2.2.4 Một Số Mối Quan Hệ Khác

Xét $X \in P$.

- Hợp của các mối quan hệ đơn trị: Với $f \in S$, ta định nghĩa:

$$f^n(X) := f \circ f \circ \cdots \circ f(X) \quad (n \text{ lần}, n \in \mathbb{N})$$

- Tổ tiên: Được định nghĩa tổng quát như sau:

$$p^0(X) = \{X\}, \quad p^1(X) = p(X),$$

$$p^n(X) := \{p_1 \circ p_2 \circ \cdots \circ p_n(X), p_i(X) \in p(X), i = \overline{1, n}\} \quad (n > 1)$$

  Ví dụ: $p^2(X) = \{bm(X), mb(X), b^2(X), m^2(X)\}$ gồm ông bà nội và ông bà ngoại của X. Ngoài ra, với $p^0(X) = \{X\}, p^1(X) = p(X)$ thì $p^n(X)$ $(n > 1)$ có thể được định nghĩa đệ quy như sau:

$$p^n(X) := \bigcup_{Y \in p^{n-1}(X)} p(Y)$$

2.3. Quan Hệ Họ Hàng Và Quan Hệ Huyết Thống Giữa Hai Người

Dưới đây tác giả sẽ đưa ra những định nghĩa hoàn chỉnh nhất đối với quan hệ họ hàng và huyết thống.

2.3.1 Quan Hệ Họ Hàng Giữa Hai Người

Định nghĩa: Cho $A, B \in P$, ta nói A có quan hệ họ hàng với B (ngắn gọn hơn: A có họ hàng với B), ký hiệu $A \sim B$, nếu tồn tại một mối quan hệ họ hàng đơn trị giữa người này với người kia. Tức:

$$A \sim B \Leftrightarrow \exists f \in S : P \to P \quad \text{sao cho} \quad A \mapsto B = f(A)$$

Có thể kiểm chứng rằng $\sim$ là một quan hệ tương đương. Lớp tương đương của $X \in P$ theo quan hệ $\sim$, ký hiệu $[X]_\sim$, khi đó sẽ là tập hợp những người có quan hệ họ hàng với X.

Ví dụ: A có họ hàng với bà nội của A, B có họ hàng với em trai của ba B,...

Định nghĩa này đã thành công trong việc mô hình hóa việc "có quan hệ họ hàng"giữa hai người. Lưu ý rằng trong bài báo này, để tránh phiền phức, tác giả đã quy ước hai người có họ hàng chỉ thông qua việc tồn tại một mối quan hệ họ hàng đơn trị. Thật ra nếu quan hệ đó là đa trị thì về mặt xã hội vẫn có thể xem như hai người đó có họ hàng, nhưng cần để ý rằng các mối quan hệ đa trị về cơ bản cũng chứa các mối quan hệ đơn trị, và lại quay về định nghĩa ban đầu.

2.3.2 Quan Hệ Huyết Thống Giữa Hai Người

Huyết thống nghĩa là cùng dòng máu, cùng dòng máu nghĩa là có cùng tổ tiên. Từ đây tác giả đưa ra một định nghĩa sau khá thú vị:

Định nghĩa: Cho $A, B \in P$, ta nói A có cùng huyết thống với B, ký hiệu $A \bowtie B$, nếu $\exists m, n \in \mathbb{N}$ sao cho $p^m(A) \cap p^n(B) \neq \emptyset$.

Ví dụ: A và bố của A (tức $b(A)$) có cùng huyết thống vì $p^2(A) \cap p(b(A)) = \{mb(A), b^2(A)\} \neq \emptyset$. Ta viết $A \bowtie b(A)$.

Ví dụ: A và $l(A)$ không có cùng huyết thống.

Nhận xét: Quan hệ huyết thống không phải là một quan hệ tương đương. Nhưng rõ ràng nếu hai người có quan hệ huyết thống với nhau thì cũng có quan hệ họ hàng với nhau.

2.4. Một Số Kết Quả Thu Được

2.4.1 Về Các Mối Quan Hệ Đơn Trị

Từ một số kinh nghiệm thực tiễn, chúng ta có thể dễ dàng suy ra các quy tắc đối với các mối quan hệ họ hàng như sau:

- Bản thân của bản thân thì vẫn là bản thân:

$$i^n(X) = X, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Cha/mẹ của anh chị em ta cũng chính là cha mẹ của ta:

$$p(s'(X)) = p(X), \quad \forall s'(X) \in s(X)$$

- Bạn đời của ba là mẹ, bạn đời của mẹ là ba:

$$l(b(X)) = m(X), \quad l(m(X)) = b(X)$$

- Bạn đời của bạn đời của ta là chính ta (không xét trường hợp ly dị):

$$l(l(X)) = X$$

- Con của ba mình cũng là con của mẹ mình:

$$c(b(X)) = c(m(X)), \quad c(l(X)) = c(X)$$

- Anh chị em của anh chị em mình vẫn là anh chị em của mình:

$$s(s'(X)) = s(X), \quad \forall s'(X) \in s(X)$$

- Mình thuộc vào tập các con của ba mẹ mình:

$$X \in c(p'(X)), \quad \forall p'(X) \in p(X)$$

- Mình thuộc vào tập các anh chị em của mình:

$$X \in s(X)$$

2.4.2 Một Số Định Lý

Dưới đây là một số định lý mà tác giả đã đúc kết và chứng minh được. Phần chứng minh có thể sẽ có sai sót do năng lực của tác giả có hạn.

Định lý: Tập các quan hệ đơn trị cùng với phép hợp ánh xạ, tức $(S, \circ)$, là một nhóm (không giao hoán).

Chứng minh: Dành cho bạn đọc.

Định lý: $Y \in c(X)$ khi và chỉ khi $s(Y) = c(X)$.

Chứng minh:

- Chiều đảo: Hiển nhiên $Y \in s(Y)$, do $s(Y) = c(X)$ nên $Y \in c(X)$.
- Chiều thuận: Với $Y \in c(X)$, ta cần chứng minh $c(X) \subset s(Y)$ và $s(Y) \subset c(X)$. Lấy $Z \in c(X)$, khi đó $\{Z, Y\} \subset c(X)$, nghĩa là Z và Y có chung cha/mẹ là X, dẫn đến việc họ là anh chị em ruột với nhau, tức $Z \in s(Y) \Rightarrow c(X) \subset s(Y)$. Ngược lại, lấy $T \in s(Y)$, tức T với Y là anh chị em ruột, nên có cùng cha mẹ, mà $Y \in c(X)$ nên X là cha/mẹ của Y, cũng là cha/mẹ của T, nên $T \in c(X) \Rightarrow s(Y) \subset c(X)$.

Định lý: Xét $X \in P$, khi đó: $\forall n \in \mathbb{N}, \exists A \in P : A \in p^n(X)$.

Chứng minh: Trước hết, định lý trên có thể phát biểu lại như sau: Xét $X \in P$, khi đó: $\forall n \in \mathbb{N}, p^n(X) \neq \emptyset$. Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

- Hiển nhiên $p^0(X) = \{X\} \neq \emptyset$, $p^1(X) = \{b(X), m(X)\} \neq \emptyset$ (vì nếu không có ba mẹ ta thì sẽ không ai sinh ra ta).
- Giả sử $p^i(X) \neq \emptyset$ với mọi $i = 1, k$, ta chứng minh $p^{k+1}(X) \neq \emptyset$.
- Thật vậy, theo định nghĩa đệ quy của $p^{k+1}(X)$:

$$p^{k+1}(X) := \bigcup_{Y \in p^k(X)} p(Y)$$

Do tất cả các $p^i(Y)$, $i = 1, k$ đều khác rỗng nên hợp của chúng cũng khác rỗng, dẫn đến $p^{k+1}(X) \neq \emptyset$.

Định lý: Xét $X \in P$. Mọi mối quan hệ $f \in S$ của X đều có thể phân tích được thành 1 trong các mối quan hệ sau:

$$f(X) = g \circ p_i(X); \quad f(X) = g \circ l(X);$$

$$f(X) = g \circ s_i(X); \quad f(X) = g \circ c_i(X)$$

với $p_i(X) \in p(X)$, $c_i(X) \in c(X)$, $s_i(X) \in s(X)$ và g là một quan hệ đơn trị bất kỳ.

Định lý trên còn có thể được phát biểu dưới dạng: Mọi mối quan hệ $f \in S$ của X có thể phân tích được dưới dạng $f(X) = g \circ h(X)$, với g là một quan hệ đơn trị bất kỳ và h là một quan hệ trực tiếp.

Chứng minh: Dành cho bạn đọc.

Ví dụ: Định nghĩa $er'(X)$ là một người em rể (chồng của em gái) của X. Khi đó có thể phân tích: $er'(X) := l \circ e'(X)$, với $e'(X) \in s(X)$ đại diện cho một người em gái của X, là một quan hệ trực tiếp của X.

3. Đôi Lời Của Tác Giả

3.1. Một Số Hạn Chế Của Lý Thuyết Trên

Những ý tưởng tác giả đã suy nghĩ và trình bày cho bạn đọc vừa rồi vẫn còn khá sơ sài và tồn đọng những hạn chế như sau:

- Lý thuyết chưa mở rộng mối quan hệ cho các trường hợp của con nuôi, con riêng, cha mẹ kế... mà theo lý thuyết vẫn có thể được tính là họ hàng (một cách miễn cưỡng hoặc không).
- Lý thuyết chưa đề cập đến các trường hợp khá đặc biệt hoặc hy hữu như hai chị em ruột của gia đình này, mỗi người kết hôn với một trong hai anh em ruột của gia đình nọ; hay trường hợp chênh lệch tuổi tác, vai vế khi kết hôn,...
- ...

3.2. Một Số Hướng Phát Triển Tiếp Theo

Dựa trên những gì tác giả đã đặt nền móng (hoặc không), bạn đọc có thể mở rộng lý thuyết trên cho những vấn đề như sau:

- Vấn đề về thế hệ (Generation), vai vế,...
- Những trường hợp “hy hữu” như tác giả đã đề cập ở trên.
- Lý thuyết về việc "giải phương trình", tìm các mối quan hệ họ hàng bị ẩn từ "phương trình"cho trước.
- ...

Tác giả hy vọng bạn đọc đã cảm thấy một chút hứng thú đối với những gì tác giả đã trình bày ở trên. Những nội dung trình bày ở trên chỉ mang tính tham khảo và "giải trí"cho những ai muốn khám phá những thứ mới lạ hơn trong lĩnh vực Toán học.

Lời cuối cùng xin được chúc tất cả các bạn luôn dồi dào sức khỏe và luôn giữ được lòng yêu mến đối với Toán học của mình.

Thân ái!

Tích Bội Ba Và Định Lý Fermat-Euler Về Tổng Hai Bình Phương

Trần Nam Dũng (Trường Đại học KHTN TP Hồ Chí Minh)

Giới thiệu. *Định lý Fermat-Euler về tổng hai bình phương là một viên ngọc của toán học. Định lý khẳng định rằng nếu p là một số nguyên tố dạng $4k+1$ thì p sẽ biểu diễn được dưới dạng tổng bình phương của hai số nguyên $p = a^2 + b^2$. Có nhiều cách chứng minh cho định lý này như cách chứng minh của Euler (sử dụng phương pháp xuống thang), cách chứng minh của Lagrange (sử dụng dạng toàn phương), cách chứng minh của Dedekind (sử dụng số nguyên Gauss), cách chứng minh của Minkowsky (sử dụng tính chất của tập lồi). Năm 1990, Zagier, dựa trên một chứng minh ngắn của Heath-Brown, đã đưa ra một phép "chứng minh một dòng". Gần đây nhất, năm 2016, Cristopher đã đưa ra một phép chứng minh dựa trên lý thuyết phân hoạch.*

Các phép chứng minh này đa số đều có dạng chứng minh không xây dựng, tức là chỉ chỉ ra sự tồn tại của a, b mà không chỉ ra cách tìm a, b thế nào, cũng không cho biết rõ có bao nhiêu nghiệm như vậy.

Bài viết này sẽ đưa ra một cách chứng minh khác cho định lý Fermat-Euler về tổng hai bình phương, qua đó cho biết số nghiệm nguyên của phương trình $n = a^2 + b^2$ với mọi n, từ đó mà định lý Fermat-Euler chỉ là một trường hợp riêng.

1. Định lý về q-nhị thức

Chúng ta đều biết về định lý nhị thức và các hệ số nhị thức. Có một khái niệm tương tự như vậy, được gọi là q nhị thức và hệ số q-nhị thức.

Định nghĩa. Đặt $(q)_0 = 1$ và $(q)_n = \prod_{i=1}^{n}(1-q^i)$, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \dfrac{(q)_n}{(q)_k(q)_{n-k}}$. Ta cũng đặt $(q)_\infty = lim_{n->\infty}(q)_n$.

Có thể nói hệ số q-nhị thức là mở rộng của các hệ số nhị thức, bởi vì

$$\lim_{q\to 1^-} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \binom{n}{k}.$$

Ta có thể dễ dàng chứng minh được các tính chất cơ bản sau đây của hệ số q-nhị thức

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{2}$$

Chú ý, khi cho q dần đến 1^- thì (1), (2) trở thành tính chất của hệ số nhị thức. Từ (1) và (2), bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

là đa thức theo q.

Ta có định lý sau, được gọi là định lý q-nhị thức.

Định lý 1 Cho n là số nguyên dương, x và q là các biến độc lập. Khi đó ta có

$$(1+x)(1+xq)\cdots(1+xq^{n-1}) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} x^k \tag{3}$$

LỜI GIẢI (G. Polya, G.L. Alexanderson) Đặt

$$f(x) = (1+x)(1+xq)\cdots(1+xq^{n-1}).$$

Chú ý $(1+x)f(xq) = f(x)(1+xq^n)$. Bây giờ đặt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} Q_k x^k,$$

trong đó Q_k là hàm số theo q thì

$$(1+x)\sum_{k=0}^{n} Q_k q^k x^k = (1+xq^n)\sum_{k=0}^{n} Q_k x^k.$$

So sánh hệ số của x^k ở hai vế ta có

$$Q_k q^k + Q_{k-1} q^{k-1} = Q_k + q^n Q_{k-1}.$$

Từ đây suy ra

$$Q_k = q^{k-1} \cdot \frac{1-q^{n-k+1}}{1-q^k} \cdot Q_{k-1}.$$

Từ đây, chú ý $Q_0 = 1$, ta có

$$Q_k = q^{k-1} \cdot \frac{1-q^{n-k+1}}{1-q^k} \cdot q^{k-2} \frac{1-q^{n-k+2}}{1-q^{k-1}} \cdots q^0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \cdot Q_0 = q^{k(k-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Đẳng thức (3) được chứng minh. □

2. Hai đồng nhất thức của Euler

Viết định lý (3) lại dưới dạng

$$(1+x)(1+xq)\cdots(1+xq^{n-1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(q)_n}{(q)_{n-k}(q)_k} q^{k(k-1)/2} x^k.$$

Với $|q| < 1$ cho n dần đến vô cùng, ta được

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+xq^{k-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k(k-1)/2}}{(q)_k} x^k. \tag{1}$$

Đồng nhất thức này được tìm ra bởi Euler.

Tiếp theo, trong (3) ta thay $x = -1$ thì được

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k q^{k(k-1)/2}$$

Nhân hai vế với $\frac{(-1)^n}{(q)_n}$, ta được

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(q)_{n-k}} \cdot \frac{q^{k(k-1)/2}}{(q)_k}, \quad n \geq 1. \tag{2}$$

Biểu thức ở vế phải có dạng

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

là hệ số của x^n trong khai triển của $A(x) \cdot B(x)$ với

$$A(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(q)_m} x^m, \quad B(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m(m-1)/2}}{(q)_m} x^m.$$

Từ (2) ta suy ra $A(x) \cdot B(x) = 1$. Từ đây và từ (1), ta suy ra

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(q)_m} x^m = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + xq^{k-1})} \tag{3}$$

Và (3) cũng được gọi là đồng nhất thức Euler.

3. Đồng nhất thức Jacobi về tích bội ba

Đồng nhất thức Jacobi về tích bội ba là một đồng nhất thức nổi tiếng có nhiều ứng dụng đẹp đẽ.

Định lý 2 (Đồng nhất thức Jacobi về tích bội ba) Cho q và z là các số phức với $|q| < 1$. Khi đó ta có

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j^2} z^j = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + zq^{2j-1})(1 + z^{-1} q^{2j-1})(1 - q^{2j}). \tag{1}$$

Có rất nhiều cách chứng minh cho đồng nhất thức này. Dưới đây chúng tôi trình bày cách chứng minh của Andrews Thay q bởi q^2 trong (1), ta được

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + xq^{2k-2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k(k-1)}}{(q^2)_k} x^k. \tag{2}$$

Trong (2), lại thay x bởi xq, ta có

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + xq^{2k-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2}}{(q^2)_k} x^k. \tag{3}$$

Chú ý là

$$\frac{1}{(q^2)_k} = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - q^{2m+2k}}{1 - q^{2m}}.$$

Ta có thể viết (3) lại dưới dạng

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{\infty}(1+xq^{2k-1}) &= \sum_{k=0}^{\infty}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-q^{2m+2k}}{1-q^{2m}}q^{k^2}x^k\\ &= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2m}}\sum_{k=0}^{\infty}(1-q^{2m+2k})q^{k^2}x^k\\ &= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2m}}\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m+2k})q^{k^2}x^k\\ &= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2m}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m+2k})q^{k^2}x^k.\end{aligned}$$

Ở đây, trong bước cuối cùng ta đã sử dụng sự kiện

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m+2k})q^{k^2}x^k = 0.$$

với mọi $k < 0$. Từ đây suy ra

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+xq^{2k-1})(1-q^{2k}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m+2k})q^{k^2}x^k \tag{4}$$

Trong (2), thay x bởi $-q^{2k+2}$, ta có

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m+2k}) = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{q^{l^2+l+2kl}}{(q^2)_l}.$$

Thay biểu thức này vào vế phải của (4), ta được

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{\infty}(1+xq^{2k-1})(1-q^{2k}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}q^{k^2}x^k\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{q^{l^2+l+2kl}}{(q^2)_l}\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-q)^l q^{(k+l)^2}}{(q^2)_l}\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}q^{(k+l)^2}x^{k+l}\right)\frac{(-q/x)^l}{(q^2)_l}\\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}q^{k^2}x^k\right)\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^{-1}q^{2k-1}}.\end{aligned} \tag{5}$$

Ở bước cuối ta sử dụng (3) để suy ra

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-q/x)^l}{(q^2)_l} = \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^{-1}q^{2m-1}}.$$

Từ (4) và (5) ta suy ra đồng nhất thức Jacobi.

Trong đồng nhất thức Jacobi, xét các trường hợp đặc biệt:

- $z = 1$ thì ta được
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j^2} = \prod_{j=1}^{\infty} (1+q^{2j-1})^2(1-q^{2j}). \tag{6}$$

- $z = q$ thì ta được
$$\begin{aligned}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j^2+j} &= \prod_{j=1}^{\infty} (1+q^{2j})(1+q^{2j-2})(1-q^{2j}) \\ &= 2\prod_{j=1}^{\infty} (1+q^{2j})^2(1-q^{2j}).\end{aligned} \tag{7}$$

- $z = -1$ thì ta được
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j^2} = \prod_{j=1}^{\infty} (1-q^{2j-1})^2(1-q^{2j}).$$
Chú ý
$$\prod_{j=1}^{\infty} (1-q^{2j-1}) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2j-1})(1-q^{2j})}{1-q^{2j}} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1-q^j}{(1-q^j)(1+q^j)} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1+q^j}. \tag{8}$$
Thay vào ta được
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j^2} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1-q^j}{1+q^j}. \tag{9}$$

4. Số cách biểu diễn n dưới dạng tổng bình phương của hai số nguyên

Định lý Fermat-Euler về tổng hai bình phương là một trong những viên ngọc quý của Lý thuyết số. Định lý này khẳng định số nguyên tố lẻ p biểu diễn được dưới dạng tổng bình phương của hai số nguyên khi và chỉ khi $p \equiv 1 \pmod 4$. Có nhiều cách chứng minh cho định lý này như cách sử dụng phương pháp xuống thang của Euler, có cách sử dụng dạng bậc hai của Lagrange, cách sử dụng số nguyên Gauss của Dedekind, các sử dụng định lý Minkowsky về thể tích (thực chất là diện tích) hay cách chứng minh "*một dòng*" của Zagier chỉ dùng một phép biến đổi. Và còn một cách nữa, thông qua bổ đề Thue và thuật toán Euclid mở rộng, không những chứng minh sự tồn tại mà còn chỉ ra cách tìm a và b sao cho $p = a^2 + b^2$ với p là số nguyên tố dạng $4k + 1$.

Từ định lý Fermat-Euler và hằng đẳng thức quen thuộc $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ ta có thể mô tả được tất cả các số nguyên dương n biểu diễn được dưới dạng tổng của hai bình phương: Đó sẽ là các số mà trong khai triển chính tắc của nó thành tích của các số nguyên tố, các ước số có dạng 4k+3 có số mũ chẵn.

Tất cả các kết quả đẹp đẽ này, tuy nhiên, chỉ là hệ quả khá hiển nhiên của định lý Jacobi về tổng của hai bình phương dưới đây:

Định lý 3 (Định lý Jacobi về hai bình phương) Với mỗi số nguyên dương n, gọi $r_2(n)$ là số cách biểu diễn n thành tổng bình phương của hai số nguyên. Khi đó ta có

$$r_2(n) = 4\left(\sum_{d|n,\, d\equiv 1 \pmod 4} 1 - \sum_{d|n, d\equiv 3 \pmod 4} 1\right)$$

Dưới đây, chúng ta trình bày chứng minh của M.D. Hirschhorn cho kết quả đáng kinh ngạc này.

Trong (1), thay z bởi $-x^2q$ ta suy ra

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1-x^2q^{2j})(1-x^{-2}q^{2j-2})(1-q^{2j}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{j^2+j}x^{2j}.$$

Lại thay q^2 bởi q thì ta được

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1-x^2q^{j})(1-x^{-2}q^{j-1})(1-q^{j}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{j(j+1)/2}x^{2j},$$

hay là

$$(1-x^{-2})\prod_{j=1}^{\infty}(1-x^2q^{j})(1-x^{-2}q^{j})(1-q^{j}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{j(j+1)/2}x^{2j}.$$

Từ đó suy ra

$$(x-x^{-1})\prod_{j=1}^{\infty}(1-x^2q^{j})(1-x^{-2}q^{j})(1-q^{j}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^j x^{2j+1}q^{j(j+1)/2} \quad (1)$$

Tách riêng tổng với $j=2n$ và $j=2n-1$ ở vế phải của (1), ta được

$$(x-x^{-1})\prod_{j=1}^{\infty}(1-x^2q^{j})(1-x^{-2}q^{j})(1-q^{j}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x^{4n+1}q^{2n^2+n} - \sum_{n=-\infty}^{\infty}x^{4n-1}q^{2n^2-n}.$$

Áp dụng đồng nhất thức Jacobi cho $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}(x^4q)^n(q^2)^{n^2}$ ta được

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^{4n+1}q^{2n^2+n} = x\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^4q^{4n-1})(1+x^{-4}q^{4n-3})(1-q^{4n}).$$

Tương tự

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{4n-1}q^{2n^2-n} = x^{-1}\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^4q^{4n-3})(1+x^{-4}q^{4n-1})(1-q^{4n}).$$

Từ đó

$$(x-x^{-1})\prod_{j=1}^{\infty}(1-x^2q^j)(1-x^{-2}q^j)(1-q^j) = x\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^4q^{4n-1})(1+x^{-4}q^{4n-3})(1-q^{4n})$$
$$-x^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^4q^{4n-3})(1+x^{-4}q^{4n-1})(1-q^{4n}).$$

Lấy đạo hàm hai vế rồi thay $x=1$ vào ta được

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^3 = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{4n-1})(1+q^{4n-3})(1-q^{4n})\left(1-4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q^{4n-3}}{1+q^{4n-3}}-\frac{q^{4n-1}}{1+q^{4n-1}}\right)\right). \tag{2}$$

Chú ý

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^3 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3(1-q^{2n-1})^3 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3(1-q^{2n-1})^4(1+q^n).$$

(Vì do theo (8) thì $\prod_{k=1}^{\infty}(1+q^n)(1-q^{2n-1})=1$).

Và

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{4n-1})(1+q^{4n-3})(1-q^{4n}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})(1-q^{2n})(1+q^{2n}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^n),$$

nên đẳng thức (2) có thể viết lại thành

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})^2\right]^2 = 1-4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q^{4n-3}}{1+q^{4n-3}}-\frac{q^{4n-1}}{1+q^{4n-1}}\right). \tag{3}$$

Thay q bởi $-q$ ta được

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left((1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2\right)^2 = 1+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}-\frac{q^{4n-1}}{1-q^{4n-1}}\right). \tag{4}$$

Theo hệ quả (6) của đồng nhất thức Jacobi thì vế trái của (4) chính là $\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2}\right)^2$ và như vậy bằng $\sum_{n=0}^{\infty} r_2(n)q^n$. So sánh hệ số của qn trong đẳng thức

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_2(n)q^n = 1+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}-\frac{q^{4n-1}}{1-q^{4n-1}}\right),$$

ta suy ra kết quả của định lý (1).

5. Định lý Jacobi về tổng của bốn bình phương

Tương tự như trường hợp định lý Fermat-Euler về tổng hai bình phương, định lý Lagrange về tổng của 4 bình phương (định lý khẳng định rằng một số tự nhiên bất kỳ luôn biểu diễn được dưới dạng tổng của bốn bình phương) cũng có nhiều cách chứng minh khác nhau. Đó là cách cổ điển của Lagrange (sử dụng phương pháp xuống thang) hay cách dùng số nguyên Hurwitz. Định lý Jacobi về bốn bình phương cho chúng ta số cách biểu diễn như vậy. Cụ thể là:

Định lý 4 Với mỗi số nguyên dương n, gọi $r_4(n)$ là số cách biểu diễn n thành tổng bình phương của bốn số nguyên. Khi đó ta có

$$r_4(n) = 8\left(\sum_{d|n, d\not\equiv 0 \pmod 4} d\right).$$

Cách chứng minh dưới đây cũng thuộc về M.D. Hirschhorn, được đưa ra vào năm 1987. Xuất phát từ (1), lấy đạo hàm theo x hai vế rồi cho $x = 1$, ta được

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1-q^k)^3 = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k (2k+1) x^{2k} q^{k(k+1)/2}.$$

Bình phương hai vế ta thu được

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1-q^k)^6 = \frac{1}{4}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} (2m+1)(2n+1) q^{(m^2+n^2+m+n)/2}.$$

Tách tổng vế trái thành tổng với $m+n \equiv 0 \pmod 2$ và $m+n \equiv 1 \pmod 2$ ta được

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1-q^k)^6$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sum_{\substack{m,n=-\infty \\ m+n\equiv 0 \pmod 2}}^{\infty} (2m+1)(2n+1) q^{(m^2+n^2+m+n)/2} - \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ m+n\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} (2m+1)(2n+1) q^{(m^2+n^2+m+n)/2}\right).$$

Trong tổng thứ nhất đặt

$$r = \frac{1}{2}(m+n), \quad s = \frac{1}{2}(m-n),$$

và trong tổng thứ hai đặt

$$r = \frac{1}{2}(m-n-1), \quad s = \frac{1}{2}(m+n+1),$$

thì hai tổng nói trên lại hợp lại thành

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^6 = \frac{1}{2}\sum_{r,s=-\infty}^{\infty}((2r+1)^2-(2s)^2)q^{r^2+s^2+r}.$$

Tiếp tục tách tổng vế phải

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^6 &= \frac{1}{2}\left(\sum_{s=-\infty}^{\infty}q^{s^2}\sum_{r=-\infty}^{\infty}(2r+1)^2q^{r^2+r}-\sum_{r=-\infty}^{\infty}q^{r^2+r}\sum_{s=-\infty}^{\infty}(2s)^2q^{s^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{s=-\infty}^{\infty}q^{s^2}\times(1+4q\frac{d}{dq})\sum_{r=-\infty}^{\infty}q^{r^2+r}-\sum_{r=-\infty}^{\infty}q^{r^2+r}\times(4\frac{d}{dq})\sum_{s=-\infty}^{\infty}q^{s^2}\right).\end{aligned}$$

Áp dụng các hệ quả (6), (7) của đồng nhất thức Jacobi ta có

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^6 = \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{\infty}(1+q^{2k-1})^2(1-q^{2k})\times(1+4q\frac{d}{dq})2\prod_{k=1}^{\infty}(1+q^{2k})^2(1-q^{2k})$$
$$-\frac{1}{2}2\prod_{k=1}^{\infty}(1+q^{2k})^2(1-q^{2k})\times(4q\frac{d}{dq})\prod_{k=1}^{\infty}(1+q^{2k-1})^2(1-q^{2k}).$$

Sử dụng công thức tính đạo hàm của tích, ta được

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^6 = \prod_{k=1}^{\infty}(1+q^{2k-1})^2(1-q^{2k})(1+q^{2k})^2(1-q^{2k})\left(1+8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2kq^{2k}}{1+q^{2k}}-4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2kq^{2k}}{1-q^{2k}}\right)$$
$$-\prod_{k=1}^{\infty}(1+q^{2k})^2(1-q^{2k})(1+q^{2k-1})^2(1-q^{2k})\left(8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)q^{2k-1}}{1+q^{2k-1}}-4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2kq^{2k}}{1-q^{2k}}\right).$$

Hay là

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^6 = \prod_{k=1}^{\infty}(1+q^{2k-1})^2(1-q^{2k})^2(1+q^{2k})^2\left(1-8\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)q^{2k-1}}{1+q^{2k-1}}-\frac{2kq^{2k}}{1+q^{2k}}\right)\right).$$

Chia hai vế của đẳng thức cho

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^2(1+q^k)^4 = \prod_{k=1}^{\infty}(1+q^{2k-1})^2(1+q^{2k})^2(1-q^{2k})^2.$$

Ta được

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^k}{1+q^k}\right)^4 = 1-8\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)q^{2k-1}}{1+q^{2k-1}}-\frac{2kq^{2k}}{1+q^{2k}}\right).$$

Áp dụng hệ quả (9), ta được

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^jq^{j^2}\right)^4 = 1-8\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)q^{2k-1}}{1+q^{2k-1}}-\frac{2kq^{2k}}{1+q^{2k}}\right).$$

Thay q bởi $-q$ thì ta được

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j^2}\right)^4 &= 1 + 8\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)q^{2k-1}}{1-q^{2k-1}} + 8\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2kq^{2k}}{1+q^{2k}} \\
&= 1 + 8\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)q^{2k-1}}{1-q^{2k-1}} + 8\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2kq^{2k}}{1-q^{2k}} - 8\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2kq^{2k}}{1-q^{2k}} - \frac{2kq^{2k}}{1+q^{2k}}\right) \\
&= 1 + 8\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kq^k}{1-q^k} - 8\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4kq^{4k}}{1-q^{4k}}.
\end{aligned}
$$

Hay

$$
\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j^2}\right)^4 = 1 + 8\sum_{k \not\equiv 0 \pmod 4} \frac{kq^k}{1-q^k}.
$$

Từ đây định lý được chứng minh.

Tài liệu

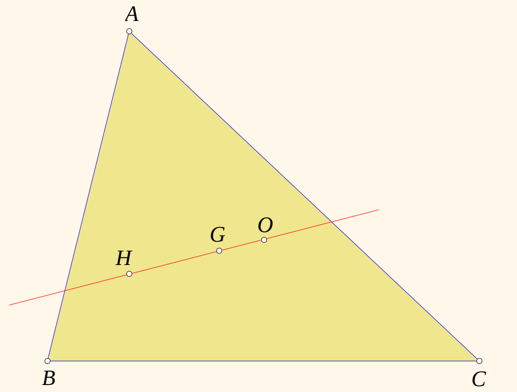
[1] *Euler's identities and Jacobi Triple Product Identity*: https://cpb-us-w2.wpmucdn.com/blog.nus.edu.sg/dist/2/3912/files/2014/10/Chapter9-20ycqjr.pdf

[2] M.D. Hirschhorn, *A simple proof of Jacobi four squares theorem*, The American Mathematical Monthly, March 1987.

Đôi nét về đường thẳng Euler trong lịch sử hình học sơ cấp và trong một số bài toán Olympic

Trần Quang Hùng

Giới thiệu. *Đường thẳng Euler, được đặt theo tên của nhà toán học Leonhard Euler, là một đường thẳng đặc biệt trong hình học của tam giác. Đường thẳng này được xác định từ tam giác bất kỳ không đều và đi qua các điểm quan trọng trong tam giác như trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, và tâm của đường tròn chín điểm.*



Hình 1. Hình minh họa đường thẳng Euler nối trực tâm H, trọng tâm G, tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác ABC.

1. Mở đầu

Năm 1765, Euler (xem [1]) đã chứng minh rằng trong một tam giác, các điểm đặc biệt như trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm và tâm đường tròn chín điểm luôn thẳng hàng trên một đường gọi là đường thẳng Euler. Trong tam giác đều, bốn điểm này trùng nhau, nhưng ở các tam giác khác, chúng tách biệt và chỉ cần biết vị trí của hai trong số bốn điểm này cũng có thể xác định được đường thẳng Euler. Ngoài bốn điểm kể trên, một số điểm đặc biệt khác như điểm de Longchamps, điểm Schiffler và điểm Exeter cũng thuộc đường thẳng này. Tuy nhiên, tâm đường tròn nội tiếp và các tâm đường tròn bàng tiếp chỉ nằm trên đường thẳng Euler trong trường hợp tam giác cân.

Đường thẳng Euler là một trong những khám phá quan trọng nhất trong hình học sơ cấp, mở ra nhiều hướng nghiên cứu sâu rộng về sau. Không chỉ giới hạn trong hình học phẳng, đường thẳng Euler còn xuất hiện trong hình học không gian, nơi nó liên kết các điểm đặc biệt của một tứ diện. Hơn thế nữa, khái niệm này đã được mở rộng sang cả đa giác và không gian nhiều chiều, thể hiện sự phổ quát và tính chất đối xứng đáng kinh ngạc của nó.

Sự tồn tại của đường thẳng Euler là minh chứng rõ ràng cho vẻ đẹp và sự hài hòa trong hình học. Ngay cả trong một hình đơn giản như tam giác, vẫn có những định lý và mối quan hệ bất ngờ đang chờ đợi được khám phá. Với những tính chất và ứng dụng phong phú, đường thẳng Euler chắc chắn sẽ tiếp tục là một chủ đề nghiên cứu quan trọng trong hình học trong nhiều năm tới.

Từ khi được phát hiện, đường thẳng Euler đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học qua các thời kỳ. Giai đoạn hoàng kim của nghiên cứu hình học sơ cấp diễn ra vào cuối thế kỷ 19 và đầu thế kỷ 20, khi nhiều công trình quan trọng trong lĩnh vực này được công bố. Tuy nhiên, sang thế kỷ 20, nghiên cứu hình học sơ cấp dần suy giảm, nhường chỗ cho sự phát triển mạnh mẽ của toán học hiện đại. Trong thời gian gần đây, với sự ra đời của *Forum Geometricorum*, các nghiên cứu về đường thẳng Euler lại có cơ hội phát triển mạnh mẽ trở lại.

Bản thân tác giả bài viết này cũng đã thực hiện hai nghiên cứu quan trọng liên quan đến đường thẳng Euler, trong đó có các kết quả về sự kết hợp của đường thẳng Euler với tỷ số vàng trong tam giác đều và trong hình chữ nhật vàng (xem [2, 3]).

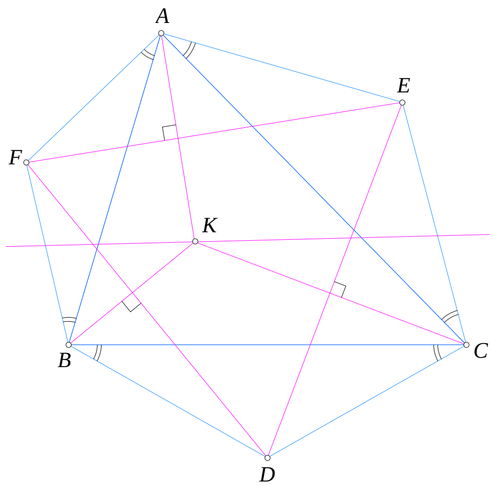
Không chỉ xuất hiện trong các công trình nghiên cứu, đường thẳng Euler còn là một chủ đề quen thuộc trong các kỳ thi Olympic Toán học (xem [4]). Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ cùng phân tích một bài toán Olympic tiêu biểu có liên quan đến đường thẳng Euler.

2. Bài thi chọn đội tuyển Đài Loan năm 2017

Năm 2017, trong kỳ thi chọn đội tuyển Đài Loan (Taiwan TST) có một bài toán thú vị liên quan tới đường thẳng Euler được đề nghị bởi Telv Cohl như sau (xem [9])

Bài toán 1 (Taiwan TST 2017)**.** *Cho $\triangle ABC$ và ba điểm D, E, F sao cho $DB = DC$, $EC = EA$, $FA = FB$, $\angle BDC = \angle CEA = \angle AFB$. Cho Ω_D là đường tròn có tâm D đi qua B, C và tương tự với Ω_E, Ω_F. Chứng minh rằng tâm đẳng phương của $\Omega_D, \Omega_E, \Omega_F$ nằm trên đường thẳng Euler của $\triangle DEF$.*

Lời giải dưới đây là của tác giả tìm ra và có sử dụng nó trong các kỳ tập huấn HSG trên cả nước, tác giả cũng đã đăng ở [9].



Hình 2. Minh họa bài toán Taiwan TST 2017 và lời giải.

LỜI GIẢI (Xem hình 2). Các đường tròn Ω_E, Ω_F có chung điểm A nên đường thẳng qua A vuông góc đường nối tâm EF chính là trục đẳng phương của Ω_E, Ω_F. Tương tự thì đường thẳng qua B vuông góc đường nối tâm FD chính là trục đẳng phương của Ω_F, Ω_D, và đường thẳng qua C vuông góc đường nối tâm DE chính là trục đẳng phương của Ω_D, Ω_E. Do đó các đường vuông góc qua A, B, C tương ứng đến EF, FD, DE, đồng quy tại K chính là tâm đẳng phương của cặp đường tròn $\Omega_D, \Omega_E, \Omega_F$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng K nằm trên đường thẳng Euler của DEF bằng cách sử dụng tọa độ tripolar (xem [10]) của đường Euler, điều này tương đương với

$$
\begin{aligned}
&\left(DE^2 - DF^2\right) KD^2 + \left(EF^2 - ED^2\right) KE^2 + \left(FD^2 - FE^2\right) KF^2 = 0 \\
\iff\ & DE^2 \left(KD^2 - KE^2\right) + EF^2 \left(KE^2 - KF^2\right) + FD^2 \left(KF^2 - KD^2\right) = 0 \\
\iff\ & DE^2 \left(CD^2 - CE^2\right) + EF^2 \left(AE^2 - AF^2\right) + FD^2 \left(BF^2 - BD^2\right) = 0 \\
\iff\ & DE^2 \left(x^2 - y^2\right) + EF^2 \left(y^2 - z^2\right) + FD^2 \left(z^2 - x^2\right) = 0.
\end{aligned}
$$

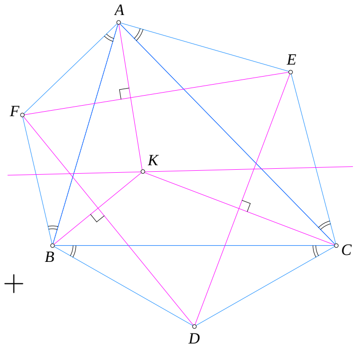
Đặt

$$\angle DBC = \angle DCB = \angle ECA = \angle EAC = \angle FAB = \angle FBA = \theta,$$

$$BC = a, CA = b, AB = c,$$

và

$$DB = DC = \frac{a}{2\cos\theta} = x,\ EC = EA = \frac{b}{2\cos\theta} = y,\ FA = FB = \frac{c}{2\cos\theta} = z.$$



Áp dụng định luật cosine thì

$$EF^2 = y^2 + z^2 + 2yz\cos(A + 2\theta),$$

và tương tự với FD, DE. Chúng ta cần chứng minh rằng

$$\begin{aligned}
&\left(x^2 + y^2 + 2xy\cos(C+2\theta)\right)\left(x^2 - y^2\right) + \left(y^2 + z^2 + 2yz\cos(A+2\theta)\right)\left(y^2 - z^2\right) + \\
&+ \left(z^2 + x^2 + 2zx\cos(B+2\theta)\right)\left(z^2 - x^2\right) = 0 \\
&\iff xy\left(x^2 - y^2\right)\cos(C+2\theta) + yz\left(y^2 - z^2\right)\cos(A+2\theta) + zx\left(z^2 - x^2\right)\cos(B+2\theta) = 0 \\
&\iff ab\left(a^2 - b^2\right)\frac{\cos(C+2\theta)}{\cos^4\theta} + bc\left(b^2 - c^2\right)\frac{\cos(A+2\theta)}{\cos^4\theta} + ca\left(c^2 - a^2\right)\frac{\cos(C+2\theta)}{\cos^4\theta} = 0 \\
&\iff ab\left(a^2 - b^2\right)(\cos C\cos 2\theta - \sin C\sin 2\theta) + bc\left(b^2 - c^2\right)(\cos A\cos 2\theta - \sin A\sin 2\theta) + \\
&+ ca\left(c^2 - a^2\right)(\cos B\cos 2\theta - \sin B\sin 2\theta) = 0 \\
&\iff \cos 2\theta\left((a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) + (b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2) + (c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)\right) - \\
&- \sin 2\theta\left(\frac{abc}{R}(a^2 - b^2 + b^2 - c^2 + c^2 - a^2)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Dễ thấy cuối cùng đúng, chúng ta đã hoàn thành chứng minh. □

3. Một số bài toán khác về đường thẳng Euler trong nghiên cứu và thi Olympic

Các bài toán này chủ yếu được tác giả sưu tập trong [2, 4–7].

Bài toán 2 (G5 IMOSL 2016). *Cho D là hình chiếu của đỉnh A trên đường thẳng Euler của tam giác nhọn không cân ABC. Đường tròn (S) đi qua A và D cắt lại AB, AC lần lượt tại X, Y. Gọi P là chân đường cao hạ từ A. M là trung điểm BC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SXY cách đều P và M.*

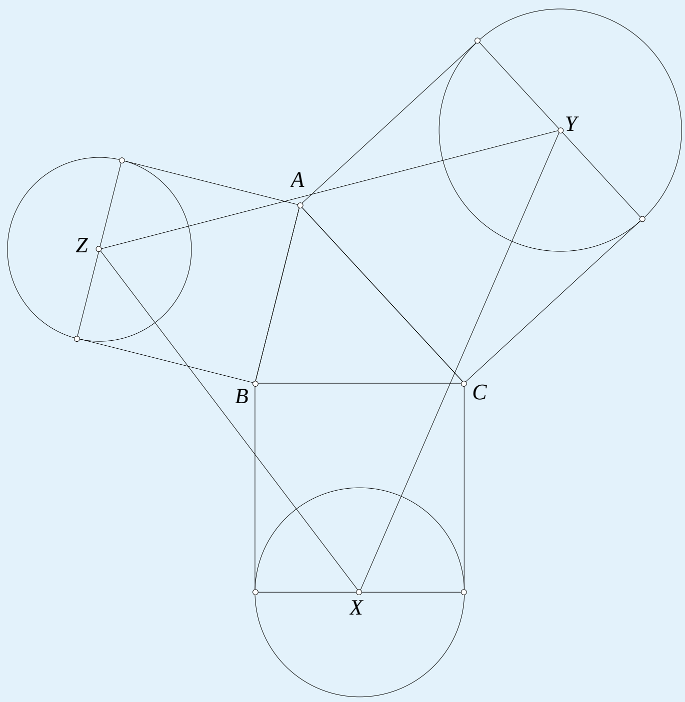
Bài toán 3 (Antreas Hatzipolakis)**.** *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác PBC, PCA, PAB đồng quy khi và chỉ khi đường nối A, B, C và các tâm ngoại tiếp tam giác PBC, PCA, PAB đồng quy.*

Bài toán 4 (Antreas Hatzipolakis)**.** *Cho lục giác $ABCDEF$ đều và điểm P bất kỳ. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác PAC, PBE, PCF đồng quy.*

Bài toán 5 (Buratino)**.** *Cho ABC là tam giác có tâm nội tiếp I. N là tâm đường tròn chín điểm của tam giác IBC. K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NBC. L là hình chiếu của K trong đường thẳng BC. Chứng minh đường thẳng NL song song với Euler của tam giác ABC.*

Bài toán 6 (Buratino)**.** *Cho tam giác ABC có trọng tâm G. D, E, F là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác GBC, GCA, GAB. X, Y, Z là trọng tâm của các tam giác DBC, ECA, FAB. Chứng minh rằng trọng tâm của tam giác XYZ nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.*

Bài toán 7 (Buratino)**.** *Dựng ra ngoài một tam giác ba hình vuông. Chứng minh rằng tâm đẳng phương của các đường tròn có đường kính là cạnh các hình vuông bên ngoài tam giác (không kể cạnh tam giác) nằm trên đường thẳng Euler của tam giác tạo bởi trung điểm các cạnh đó.*



Hình 3.

Bài toán 8 (Zhao Yong). *Cho tam giác ABC có tam giác Morley là XYZ. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác AYZ, BZX, CXY đồng quy ($X(5390)$).*

4. Kết luận

Hiện nay, ranh giới giữa một nghiên cứu hình học sơ cấp và một bài toán Olympic ngày càng trở nên mờ nhạt do sự xuất hiện dày đặc và đôi khi có phần "hỗn loạn"của các bài toán hình học phẳng. Tuy nhiên, theo tôi, vẫn có những tiêu chí để phân biệt hai khái niệm này.

Một nghiên cứu hình học sơ cấp thường mang tính định hướng, thúc đẩy sự phát triển của lĩnh vực, đào sâu vào các vấn đề kinh điển, có nền tảng lý thuyết vững chắc và thu hút sự quan tâm của nhiều chuyên gia. Ngược lại, toán Olympic thường tập trung vào các kỹ thuật giải bài nhanh, đòi hỏi sự nhạy bén, tư duy sáng tạo nhưng đôi khi nặng về mẹo mực. Đặc biệt, các bài toán này thường có hình vẽ phức tạp, cần dựng thêm hình phụ để tìm ra lời giải, và ít khi trở thành đối tượng nghiên cứu của giới chuyên môn.

Theo tôi, hình học sơ cấp Euclid nên tập trung vào hai định hướng chính: phục vụ giáo dục và thúc đẩy nghiên cứu, thay vì trở thành một công cụ để thỏa mãn cá nhân. Trên mạng xã hội, tôi bắt gặp không ít dạng toán "chế biến"một cách vô tội vạ, biến hình học thành một mớ hỗn độn chỉ để thỏa mãn sở thích cá nhân, mà không mang lại giá trị thực tiễn cho toán thi, giáo dục hay nghiên cứu. Những dạng bài này không những không giúp người học phát triển tư duy toán học mà còn có thể tạo ra sự lệch lạc trong cách tiếp cận hình học. Vì vậy, việc chọn lọc kỹ lưỡng những tài liệu, bài toán có giá trị là điều cần thiết trong bối cảnh hiện nay, để tránh bị cuốn vào những xu hướng vô nghĩa và tập trung vào những gì thực sự có ích.

Lời cảm ơn

Bài viết này được tôi hoàn thiện và bổ sung thêm từ bài giảng cho trường Đông ở Khoa Toán–Cơ–Tin học cuối năm 2023. Tôi xin được nói lời cảm ơn chân thành tới Khoa Toán–Cơ–Tin học của ĐHKHTN–ĐHQGHN nơi đã ươm mầm đào tạo tôi, nơi đưa đường chỉ lối cho những bước đi đầu tiên của tôi trong Toán học.

Tài liệu

[1] Leonhard Euler,
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler/.

[2] Q. H. Tran, Euler Line in the Golden Rectangle, *Forum Geom.*, **16** (2016), 371–372.

[3] Q. H. Tran and F. V. Lamoen, Odom's Triangle, *Int. J. Comput. Math.*, **6** (2021), 68–77.

[4] IMO Problems and IMO Shortlist, https://www.imo-official.org/problems.aspx.

[5] AoPS forum, https://artofproblemsolving.com/community.

[6] Encyclopedia of Triangle Centers https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

[7] Khoa Toan–Cơ–Tin học, Kỷ yếu trường Đông cho học sinh THPT chuyên, Hà Nội 24/12/2022.

[8] Khoa Toan–Cơ–Tin học, Kỷ yếu trường Đông cho học sinh THPT chuyên, Hà Nội 24/12/2023.

[9] TelvCohl, Radical center lies on Euler line, from AoPS forum, https://artofproblemsolving.com/community/c6h1437579.

[10] F. V. Lamoen and W. E. Weisstein, Tripolar Coordinates from *MathWorld–A Wolfram Web Resource*, https://mathworld.wolfram.com/TripolarCoordinates.html.

Từ đề thi Sharygin 2018 đến bài 3a, VMO 2025

Lê Phúc Lữ (Trường ĐH Khoa học tự nhiên, ĐHQG-HCM)
Trương Tuấn Nghĩa (ENS Paris, Pháp)

Giới thiệu. *Trong kỳ thi VMO 2025 vừa qua, bài toán 3a đã khiến không ít thí sinh phải vất vả để tiếp cận, thậm chí là các bạn học hình bài bản. Nguyên nhân chính là do mô hình lạ với nhiều điểm xây dựng có vẻ không được tự nhiên. Qua tìm hiểu và khai thác các cách tiếp cận, chúng tôi đã tìm ra một mối liên hệ hết sức thú vị giữa bài toán này và một bài trong đề thi vòng Final của kỳ thi Sharygin nhiều năm trước. Mong rằng qua các phân tích bên dưới, bạn đọc sẽ có thêm góc nhìn mới mẻ, bất ngờ và rút ra được các kinh nghiệm bổ ích.*

Ở đây, chúng tôi tập trung phân tích về bài 3a, còn bài 3b thực sự không có liên hệ nào với bài 3a này và nó lại là một câu chuyện khác.

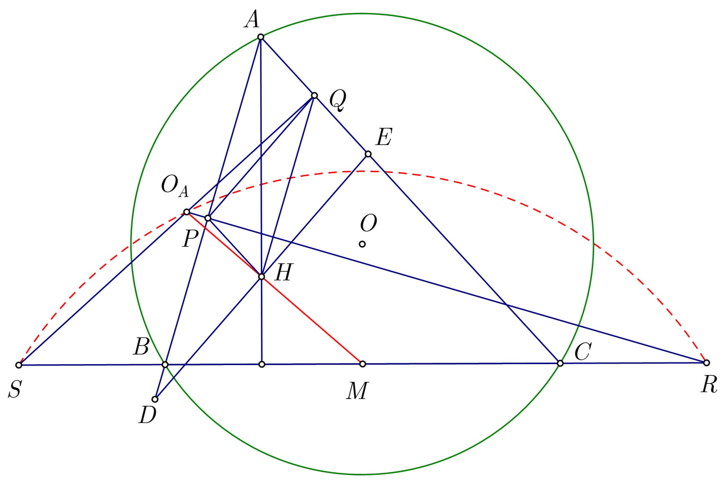
1. Các bài toán liên quan

Trước hết, ta phát biểu bài toán trong đề thi khối 9, vòng Final kỳ thi Sharygin 2018 của tác giả *A.Mudgal, Ấn Độ*:

Bài toán 1 Cho dây cung BC cố định của đường tròn ω và điểm A thay đổi trên cung lớn BC. Gọi Hlà trực tâm của tam giác ABC và các điểm D, E lần lượt thuộc AB, AC. Gọi O_A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AXY. Chứng minh rằng các điểm O_A tương ứng luôn di chuyển trên đường tròn cố định.

Bên dưới là 2 cách giải, cách đầu tiên là của tác giả, rất ấn tượng khi xây dựng được các điểm cố định trên BC:

Lời giải Cách 1. Đặt $\angle BAC = 90^\circ - \alpha$ là cố định, gọi O là tâm của ω. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD, AE. Trung trực AD, AE lần lượt cắt BC tại R, S. Ta thấy HQ là đường trung bình của tam giác ADE nên $HQ \parallel AB$.



Từ đó có

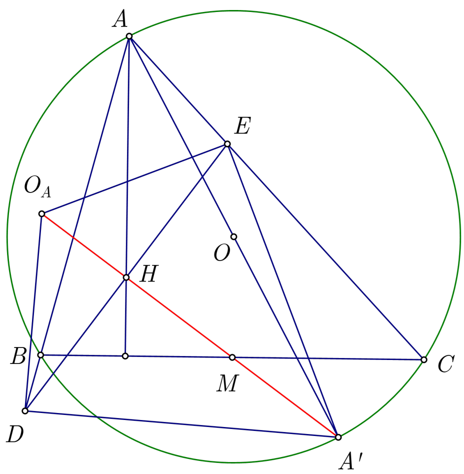
$$\angle CHQ = 90^\circ \text{ và } \angle QCH = 90^\circ - \angle CQH = \alpha.$$

Ta biết rằng H di chuyển trên đường tròn cố định, đối xứng với ω qua BC, đặt là Γ. Mà $\frac{CQ}{CH} = \frac{1}{\cos\alpha}$ không đổi nên Q sẽ thuộc đường tròn Γ_1 là ảnh của Γ thông qua phép vị tự quay tâm C, góc α và tỷ số $\frac{1}{\cos\alpha}$.

Chú ý rằng $\angle OCB = \alpha$ nên tâm của Γ_1 sẽ thuộc BC, và là điểm cố định. Hơn nữa, ta có $\angle CQS = 90^\circ$ nên CS chính là đường kính của Γ_1. Do đó, điểm S là cố định. Chứng minh tương tự thì R cố định. Cuối cùng, chú ý rằng $O_A = PR \cap QS$ và ta tính được $\angle RO_AS = 90^\circ + \alpha$ nên O_A sẽ thuộc cung chứa góc cố định dựng trên RS. □

Tiếp theo là cách của bạn *Nguyễn Minh Khang, cựu HS chuyên Tin PTNK, thí sinh thi trực tiếp tại Nga.*

LỜI GIẢI CÁCH 2. Theo định lý con bướm, áp dụng cho đường tròn đường kính BC thì ta dễ dàng có $HM \perp DE$. Vì thế nên $O_A \in HM$.



Hơn nữa, lấy AA' là đường kính của (O) thì cũng có H, M, A' thẳng hàng. Vì AH, AO đẳng giác trong góc $\angle BAC$, mà AH là trung tuyến của ADE nên AA' là đối trung của ADE. Mà A' thuộc trung trực của DE nên A' chính là giao điểm hai tiếp tuyến của (O_A) ở D, E. Do đó

$$\angle O_A DA' = \angle O_A EA' = 90^\circ.$$

Mặt khác, theo tính chất góc ở tâm thì $\angle DO_A E = 180^\circ - \angle BAC$ nên tam giác $O_A DA'$ luôn có "hình dạng" cố định khi A thay đổi.

Vì $DH \perp O_A A'$ và M là trung điểm của HA' nên suy ra $\frac{MO_A}{MA'} = k$ cố định. Mà A' di chuyển trên (O) nên từ đó, ta thấy rằng O_A sẽ thuộc đường tròn cố định, là ảnh của (O) qua phép vị tự tâm M, tỷ số k. □

Tiếp theo là một bài toán được đổi mô hình từ Bài toán 1 ở trên, có trong đề chọn đội tuyển QG của PTNK năm 2018. Bạn đọc có thể tự kiểm chứng được tính chất tương đương này.

Bài toán 2 Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với B, C cố định và A di động trên (O). D là trung điểm BC. Trên AB lấy các điểm M, P và trên AC lấy các điểm N, Q sao cho $DA = DP = DQ$, đồng thời $DM \perp AC, DN \perp AB$.

a) Chứng minh rằng các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn $(\mathcal{C})$ và $(\mathcal{C})$ luôn đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh rằng tâm của $(\mathcal{C})$ luôn thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải

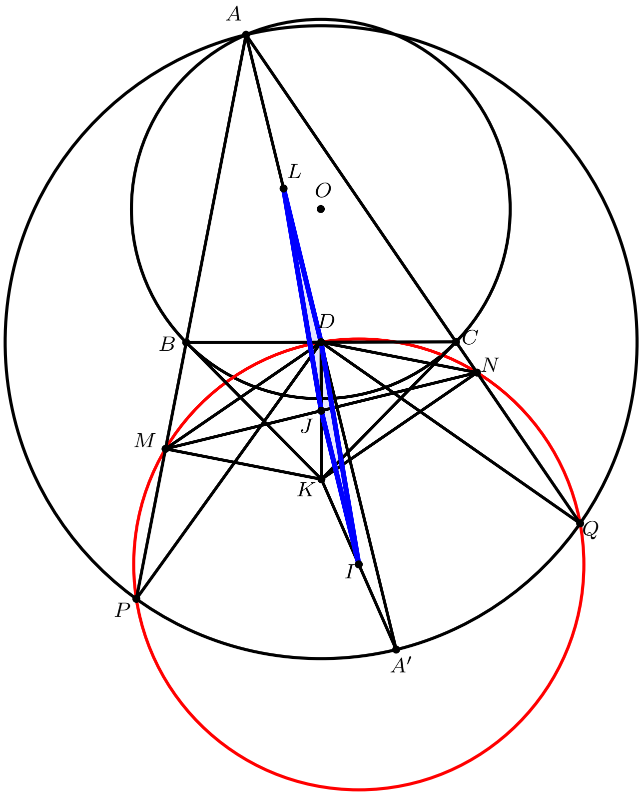
Dễ thấy tam giác AMQ cân tại M nên

$$\angle DMQ = \angle DMA = 90^\circ - \angle A = \frac{180^\circ - 2\angle A}{2} = \frac{180^\circ - \angle PDQ}{2} = \angle DPQ,$$

Do đó tứ giác $MPDQ$ nội tiếp. Chứng minh tương tự, ta có tứ giác $QNDP$ nội tiếp nên M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn $(\mathcal{C})$, và $(\mathcal{C})$ luôn đi qua điểm D cố định.

Gọi KB, KC là hai tiếp tuyến của (O). Ta có D, K, O thẳng hàng, lại có:

$$\angle BKO = 90^\circ - \angle BOK = 90^\circ - \angle BAC = \angle BMD$$



Từ đó tứ giác $BDKM$ nội tiếp. Để ý rằng $KD \perp BC$ nên $KM \perp AB$, hơn nữa $DN \perp AB$ nên $KM \parallel DN$. Tương tự thì $KN \parallel DM$. Do đó $DMKN$ là hình bình hành hay DK, MN có J là trung điểm chung.

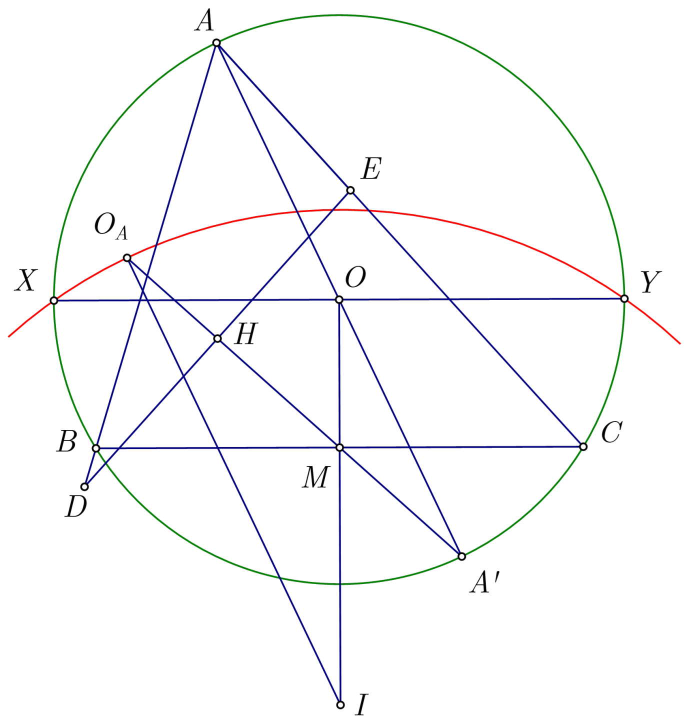
Gọi I là tâm của $(\mathcal{C})$ thì $IJ \perp MN$ và $JL \parallel AD$. Chú ý rằng D là tâm (APQ) và cũng là trực tâm tam giác AMN nên PQ, MN là hai đường đối song. Đồng thời nếu L là trung điểm AD thì JL vuông góc với đường nối hai chân đường cao từ M, N của tam giác AMN nên $JL \perp PQ$. Lại có $DP = DQ$ và $IP = IQ$ nên $ID \perp PQ$, do đó $JL \parallel DI$.

Từ đây $IDLJ$ là hình bình hành và IL, DJ có T là trung điểm chung cố định. Xét pháp vị tự tâm D tỉ số $\frac{1}{2}$ hợp với phép đối xứng tâm T thì $A \mapsto I$. Do A thuộc đường tròn (O) cố định nên I cũng thuộc đường tròn cố định là ảnh của (O) qua hợp các phép biến hình trên. □

Khai thác đường tròn cố định đã nêu ở trên, ta có tính chất thú vị như sau:

Bài toán 3 Ký hiệu các điểm như Bài toán 1, chứng minh rằng đường tròn cố định cắt (O) tại X, Y mà X, O, Y thẳng hàng.

Bài toán này có thể giải bằng cách khai thác tính chất của phép vị tự đã nêu ở cách 2 như sau:



Lời giải Gọi R là bán kính của (O) và (I) là đường tròn cố định qua O_A. Ta thấy XY chính là trục đẳng phương của $(O), (I)$. Do đó, cần chứng minh rằng

$$\mathcal{P}_{O/(I)} = \mathcal{P}_{O/(O)} = -R^2 \text{ hay } IO^2 - IO_A^2 = -R^2.$$

Theo cách 2 ở bài 1, qua phép vị tự thì $A' \to O_A$ và $O \to I$. Do đó $O_AI \parallel OA'$. Đến đây, đặt $\angle BAC = \beta$ thì ta tính được

$$\frac{IO_A}{OA'} = \frac{MO_A}{MA'} = 1 + \frac{2HO_A}{HA'} = 1 + 2\cot^2\beta$$

nên $IO_A = R(1+2\cot^2\beta)$. Tương tự ta tính được $OI^2 = 4R^2\cot^2\beta(1+\cot^2\beta)$ nên

$$IO_A^2 - OI^2 = R^2(1+2\cot^2\beta)^2 - 4R^2\cot^2\beta(1+\cot^2\beta) = R^2.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Ngoài cách trên, ta còn một cách tiếp cận thú vị khác như: Kẻ BB', CC' là đường kính của (O). Tiếp tuyến tại B', C' của (O) cắt nhau ở J và cắt BC tại P, Q. Xét phép vị tự tâm J biến $B'C'$ thành PQ. Gọi T là ảnh của C và JT cắt (I) tại K. Khi đó, QT là đường kính của (I). Khi đó thì $J'C' \parallel JC$ nên $JC \perp OQ$ nên QO đi qua K, từ đó dễ dàng tính được

$$\mathcal{P}_{O/(I)} = -OQ \cdot OK = -OC \cdot OC' = -R^2.$$

Bây giờ ta thử mở rộng bài toán trên khi thay trực tâm, tương ứng với đường tròn đường kính BC, bởi một đường tròn cố định nào đó đi qua B, C. Cách mở rộng này cũng hay được áp dụng trong việc sáng tạo các bài toán mới. Nội dung cụ thể như sau:

Bài toán 4 Trong mặt phẳng, cho hai đường tròn $(O), (O')$ cố định và cắt nhau tại các điểm B, C sao cho O, O' nằm cùng phía so với BC. Xét điểm A di động trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn, không cân và AB, AC theo thứ tự cắt (O') tại D, E. Gọi I là giao điểm của BE, CD và tia $O'I$ cắt (O) tại K. Đường thẳng qua I, song song với AK cắt AB, AC lần lượt tại R, S. Gọi G là giao điểm hai tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ARS.

1. Chứng minh rằng phân giác của $\angle IAG$ luôn đi qua điểm cố định khi A di động trên (O).
2. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ARS luôn di chuyển trên một đường tròn cố định khi A di động trên (O).

Lời giải 1) Kẻ DE cắt BC tại T thì áp dụng định lý Brocard cho tứ giác toàn phần $BCDE.AT$, ta có $AK \perp IO'$. Vì thế nên $IO' \perp RS$. Chú ý rằng

$$A(TI, BC) = -1 \implies A(KI, RS) = -1,$$

mà $AK \parallel RS$ nên I là trung điểm của đoạn RS. Do đó, IO' là trung trực của RS và nếu gọi J là tâm ngoại tiếp tam giác ARS thì $J, P \in IO'$.

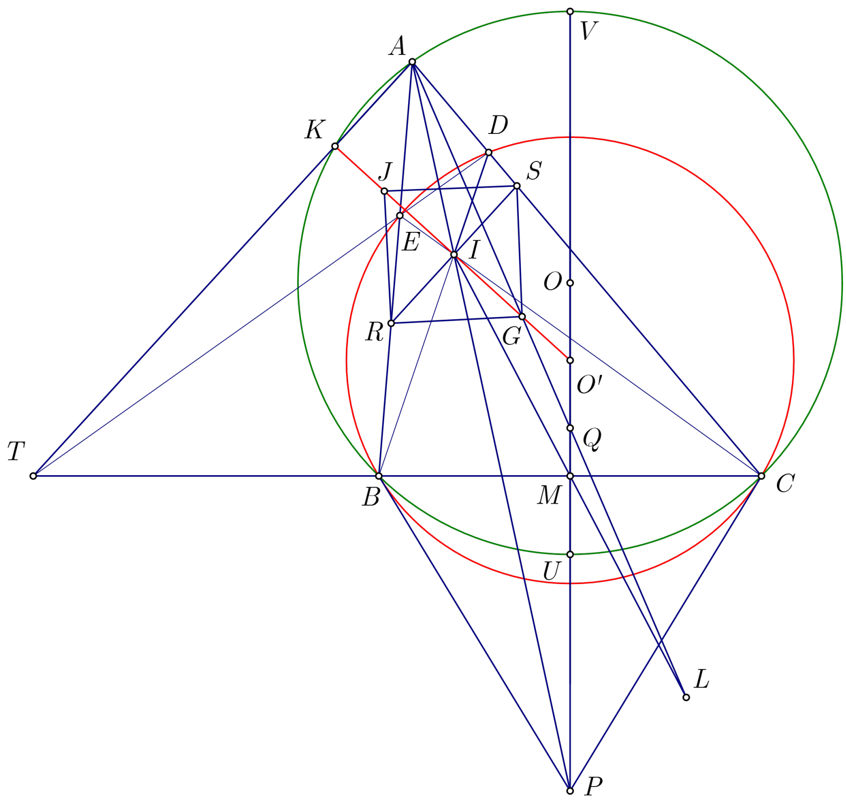
Vì AG là đối trung trong tam giác ARS nên AI, AG đẳng giác trong góc RAS, cũng là $\angle BAC$. Vì thế nên phân giác của $\angle IAG$ cũng chính là phân giác $\angle BAC$ nên sẽ đi qua trung điểm cung BC của (O), là điểm cố định.

2) Gọi L là điểm đối xứng với I qua trung điểm M của BCthì $BICL$ là hình bình hành. Biến đổi góc, ta được

$$\angle ABL = \angle ACL = \angle AEI = \angle ADI$$

nên hai tứ giác I, L là hai điểm tương ứng trong cặp tam giác đồng dạng ADE, ABC. Từ đó có AI, AL đẳng giác và A, G, L thẳng hàng.

Gọi P là giao điểm hai tiếp tuyến của (O') tại B, C thì P cố định. Vì BC là đối cực của P và nó đi qua T nên đối cực của T, chính là AI sẽ đi qua P. Giả sử AL cắt OO' tại Q và các phân giác trong, ngoài của góc IAG cắt (O) lần lượt tại U, V thì sẽ có U, V, P, Q thẳng hàng và $(PQ, UV) = -1$. Chú ý rằng P, U, V cố định nên Q cũng cố định.



Tiếp theo, xét tam giác IMO' có các điểm G, Q, L thẳng hàng nên theo định lý Menelaus thì

$$\frac{GO'}{GI} \cdot \frac{QM}{QO'} \cdot \frac{LI}{LM} = 1.$$

Do đó, dễ thấy rằng $\frac{GO'}{GI}$ cố định. Xét tam giác JSG vuông tại S có

$$\angle SJG = \frac{1}{2}\angle SJR = \angle BAC$$

cố định nên tỷ số $\frac{IJ}{JG}$ không đổi. Từ đó kéo theo tỷ số $\frac{O'J}{O'I} = k$ không đổi. Hơn nữa,

$$\angle BIC = \angle BDC + \angle ACE = \angle BDC + \angle BEC - \angle BAC$$

là không đổi. Vì thế, I di chuyển trên đường tròn (ω) cố định và J sẽ di chuyển trên (ω') là ảnh của (ω) qua phép vị tự tâm O', tỷ số k. $\square$

Tiếp theo là cách giải khác cho bài toán trên, có mở rộng ra một tính chất đặc biệt của mô hình, đã có phát biểu trong Bài toán 3. Lời giải này của bạn *Đặng Đình Trung, SV trường ĐH KHTN TPHCM*:

Bài toán 5 Trong mặt phẳng, cho hai đường tròn $(O), (O')$ cố định và cắt nhau tại các điểm B, C sao cho O, O' nằm cùng phía so với BC (O' nằm gần hơn so với O). Xét điểm A di động trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn, không cân và AB, AC theo thứ tự cắt (O') tại D, E. Gọi I là giao điểm của BE, CD và tia $O'I$ cắt (O) tại K. Đường thẳng qua I, song song với AK cắt AB, AC lần lượt tại R, S. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ARS luôn di chuyển trên một đường tròn (ω) cố định khi A di động trên (O), đồng thời O thuộc trục đẳng phương của (O) và (ω).

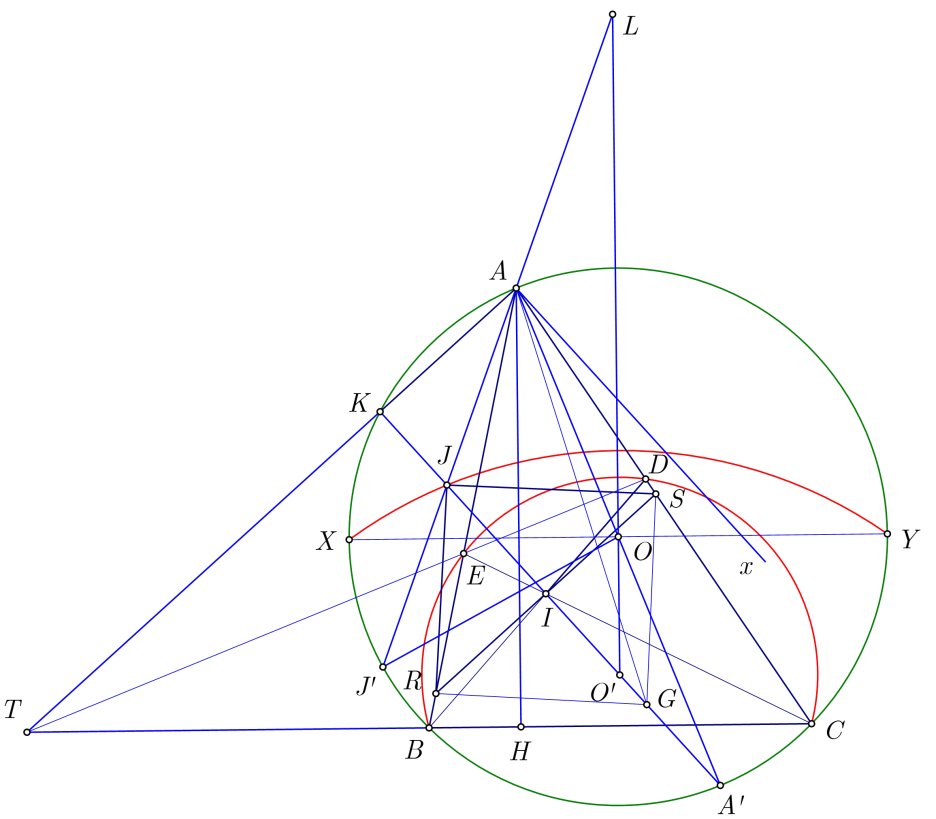
Lời giải Cho JA cắt OO' ở L, kẻ $AH \perp BC$ và đặt Ax là tia song song với IO'. Vì $IO' \perp RS$ nên $Ax \perp RS$, khi đó Ax, AJ là đẳng giác trong $\angle BAC$. Ta có AH, AO đẳng giác trong $\angle BAC$ nên

$$\angle JAO = \angle xAH = \angle OO'I$$

(do $OO' \parallel AH$ và $Ax \parallel IO'$), kéo theo $\angle LAO = \angle OO'A'$. Từ đó ta có L, A, A', O' cùng thuộc một đường tròn nên

$$\overline{OL} \cdot \overline{OO'} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = -R^2$$

với R là bán kính của (O), là cố định. Vì thế điểm L cố định khi A thay đổi.



Tiếp theo, ta xét phép nghịch đảo Ω tâm L, phương tích $\overline{LO} \cdot \overline{LO'}$. Giả sử $\Omega : J \to J'$. Kẻ đường thẳng qua O, vuông góc với OO' và cắt (O) tại X, Y thì

$$OX^2 = OY^2 = OL \cdot OO'$$

nên tam giác LXO', LYO' lần lượt vuông ở X, Y. Do đó

$$LX^2 = LY^2 = \overline{LO} \cdot \overline{LO'}$$

nên $\Omega : X \to X,\ Y \to Y$. Vì $\Omega : O \to O'$ nên tứ giác $OO'J'J$ nội tiếp, kéo theo $\angle OJ'A = \angle OO'J = \angle JAO$ nên $OA = OJ'$, do đó $J' \in (O)$. Từ đó, ta thấy rằng $J \in (\omega)$ là ảnh của (O) qua Ω.

Do các điểm L, O, O' cố định nên (ω) cố định, hơn nữa X, Y bất biến qua Ω nên $X, Y \in (\omega)$. Vậy nên XY chính là trục đẳng phương của $(O), (\omega)$ và ta cũng có X, O, Y thẳng hàng. □

Nhận xét. Qua bài toán trên, ta còn thấy rằng B, C không nhất thiết là giao điểm của $(O), (O')$ mà có thể là một dây cung thay đổi nào đó nhưng luôn vuông góc với OO'.

Ta có một bài toán được xây dựng theo cách tổng quát như trên, có trong đề thi chọn đội tuyển TPHCM 2019. Bạn đọc có thể tham khảo:

Bài toán 6 Cho hai đường tròn $(O), (O')$ cố định, cắt nhau ở hai điểm B, C sao cho O, O' nằm cùng một phía đối với đường thẳng BC (điểm O' gần BC hơn). Điểm A thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn và giả sử các đoạn thẳng AB, AC cắt (O') lần lượt tại D, E. BE cắt CD ở I và AI cắt BC ở K. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của IB với KD, của IC với KE.

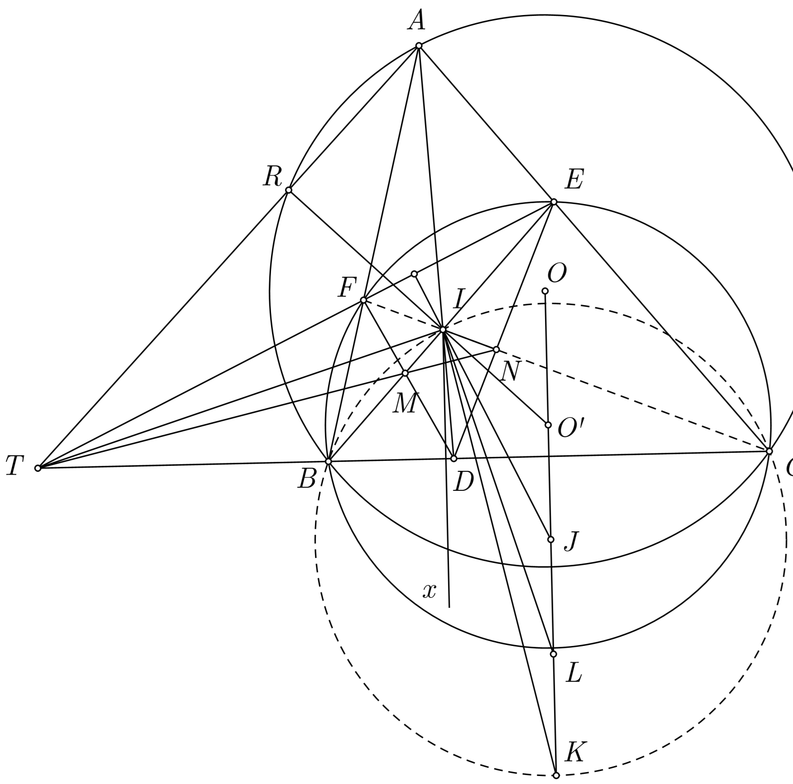
1. Tia $O'I$ cắt đường tròn (O) ở R. Chứng minh rằng AR, MN cắt nhau tại một điểm T nằm trên đường thẳng BC.
2. Chứng minh rằng khi A thay đổi trên (O) thì đường phân giác trong và đường cao đỉnh I của tam giác IMN luôn lần lượt đi qua các điểm cố định.

Lời giải 1) Giả sử EF cắt BC ở T' thì theo định lý Brocard cho tứ giác toàn phần $BCEF.AT$ với đường tròn (O') ngoại tiếp $BCEF$, ta có $O'I \perp AT$ tại điểm Miquel R'. Mặt khác, $R' \in (ABC)$ nên $R' \equiv R$. Do đó AR, EF, BC đồng quy ở T' và $(T'D, BC) = -1$. Mặt khác, theo định lý Desargues cho hai tam giác BMF và CNE thì có $BF \cap CE = A$, $BM \cap CN = I$, $EM \cap NE = D$ và A, I, D là thẳng hàng nên EF, BC, MN đồng quy. Vì thế giao điểm của AR, MN nằm trên đường thẳng BC.

2) Để ý rằng $\angle BAC, \angle BEC, \angle BFC$ cùng chắn cung BC của hai đường tròn $(O), (O')$ nên số đo của chúng không đổi. Suy ra

$$\angle BIC = 360^\circ - (\angle BAC + \angle AEI + \angle AFI)$$

cũng không đổi.



Do đó, I di chuyển trên đường tròn tâm J cố định. Suy ra phân giác trong góc I của tam giác IMN sẽ đi qua trung điểm cung BC không chứa I của đường tròn (J), là điểm cố định.

Tiếp theo, do $BCEF$ nội tiếp nên EF đối song trong tam giác IBC, kéo theo IJ là đường nối tâm trong tam giác này sẽ là đường cao trong tam giác kia, hay $IJ \perp EF$. Giả sử đường thẳng qua I, vuông góc với IT cắt OO' ở L và Ix là tia vuông góc với BC.

Xét chùm điều hòa $T(AI, FD)$ với $IO' \perp TA$ (theo câu 1), ta có

$$IJ \perp TF, IL \perp IT, Ix \perp TD$$

nên theo tính chất chùm trực giao thì ta cũng có $(Ix, IJ, IL, IO') = -1$. Mặt khác, $Ix \parallel OO'$ nên theo tính chất chùm điều hòa thì J là trung điểm $O'L$, hay nói cách khác L cố định. Cuối cùng, giả sử đường cao đỉnh I trong tam giác IMN cắt OO' ở K. Từ chùm điều hòa $T(EM, IB) = -1$, trực giao qua đỉnh I, ta có $(IJ, IK, IL, Ix) = -1$ nên tương tự trên, ta cũng có L là trung điểm JK, dẫn đến K cố định. Vì thế đường cao đỉnh I trong tam giác IMN luôn đi qua điểm K cố định. $\square$

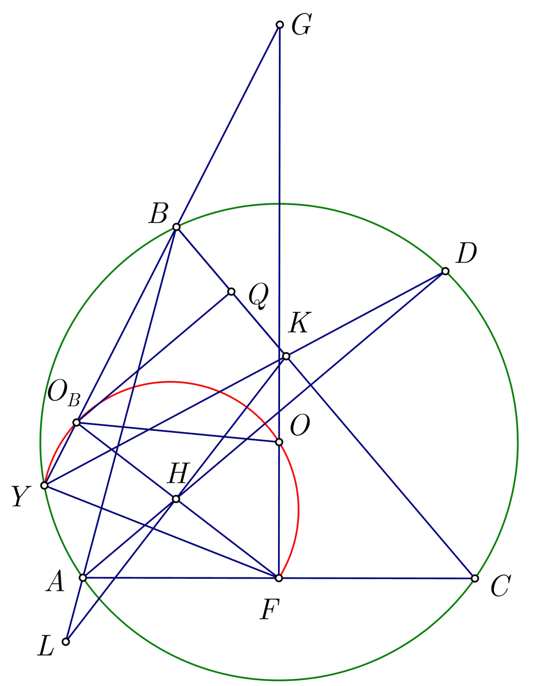
2. Về bài toán 3a, VMO 2025 và mối liên hệ

Trong phần này, ta sẽ phân tích mối liên hệ giữa các bài toán đã nêu và bài 3a trong đề VMO 2025. Nội dung bài toán như sau (tất nhiên không dễ để nghĩ đến mối liên hệ này):

Bài toán 7 Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H. Đường thẳng AH cắt lại (O) tại D khác A. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC. Đường thẳng qua H, vuông góc với HF cắt đường thẳng BC tại K. Đường thẳng DK cắt lại (O) tại Y khác D. Chứng minh rằng giao điểm của BY và trung trực của đoạn BK thì nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác OFY.

Trong bài toán 5, nếu ta đặc biệt hoá ngược lại, cho O' trùng với trung điểm BC thì các tính chất của mô hình trong phép nghịch đảo vẫn đúng, và ta cũng khai thác được thêm vài tính chất mới. Ta sẽ dựa vào ý này để giải bài toán 3a như sau:

Lời giải Cho HK cắt AB tại L thì cũng theo mô hình định lý con bướm, ta có H là trung điểm của KL. Gọi O_B là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BKL thì ta có ngay $O_B \in HF$ và cũng có O_B thuộc trung trực của BK.



Dựng G sao cho $FO \cdot FG = R^2$ thì theo mô hình ở Bài toán 5, ta có G, B, O_A thẳng hàng. Ta định nghĩa lại điểm Y là giao điểm khác B của BG và (O)

thì có ngay O, F, Y, O_B cùng thuộc một đường tròn (cũng theo tính chất của phép nghịch đảo ở Bài toán 5), vì thế nên $O_B \in (OFY)$.

Do đó, để kết thúc bài toán, ta chỉ cần chứng minh Y, K, D thẳng hàng là được. Ta có

$$\angle OFH = \angle OYB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BOY = 90^\circ - \angle BDY$$

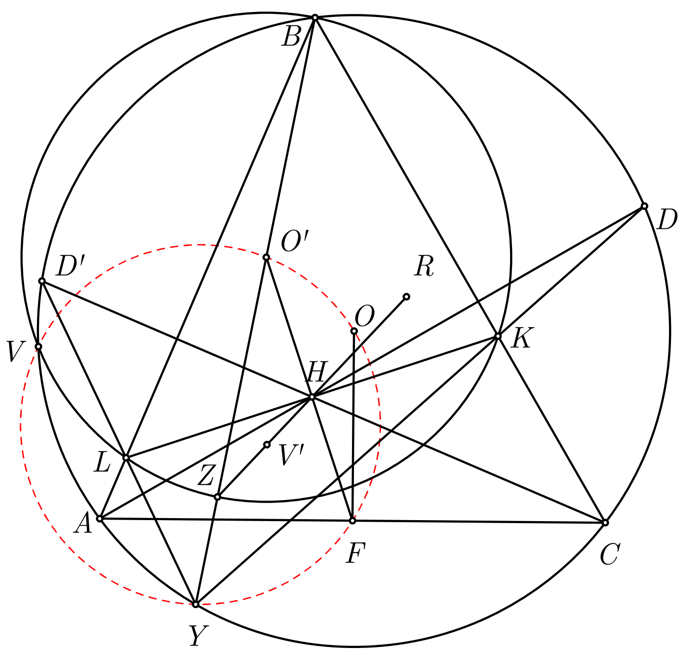
nên do tính đối xứng của H, D qua AC thì

$$\angle BDY = 90^\circ - \angle OFH = \angle AFH = \angle BHK = \angle BDK.$$

Vì thế nên Y, K, D thẳng hàng và bài toán được giải quyết. □

Bài toán này cũng có nhiều cách giải khác, từ rất kỹ thuật, dùng số phức chẳng hạn, cho đến những cách rất nhẹ nhàng dùng tam giác đồng dạng. Bên dưới là một cách tiếp cận khác:

Lời giải. Gọi CH cắt (O) tại D' và HK cắt AB tại L. Khi đó, theo định lý Pascal, ta được Y nằm trên $D'L$. Gọi O' là tâm ngoại tiếp tam giác BLK. Ta sẽ chứng minh O' nằm trên BY và (OFY).



Trước hết, theo định lý con bướm thì H là trung điểm KL và theo phép vị tự quay, ta có

$$\triangle VLK^{\cup\{O'\}\cup\{H\}} \sim \triangle VAC^{\cup\{O\}\cup\{F\}} \quad (*)$$

dẫn tới $(VO', VO) \equiv (LK, AC) \equiv (FO', FO) \pmod{\pi}$ nên V, O', O, F đồng viên. Tiếp theo ta chỉ ra $VAYC$ là tức giác điều hòa. Thật vậy, gọi BY

cắt (BKL) tại Z, ta có

$$\triangle ZLK^{\cup\{H\}} \sim \triangle YAC^{\cup\{F\}}.$$

Gọi V' là đối xứng của V qua BA và R là trực tâm tam giác BKL, khi đó $V'H$ là đường thẳng Steiner đối với tam giác ABC và $V'R$ là đường thẳng Steiner tam giác BKL ứng với V, và do đó $V'H$ và $V'R$ đều đi qua đối xứng của V qua BC, dẫn tới V', H, R thẳng hàng. Hơn nữa vì $LZKR$ là hình bình hành, ZR đi qua H, hay ZH đi qua V'. Do đó, ta có đẳng thức góc

$$\angle VCY = \angle VD'L = \angle V'HL = \angle LHZ = \angle YFA$$

dẫn tới $\angle VYC = \angle AYF$ hay tứ giác $VAYC$ điều hòa. Do đó, theo kết quả quen thuộc, Y nằm trên (VOF). Như vậy các điểm V, O', O, F, Y đồng viên. Cuối cùng, ta có

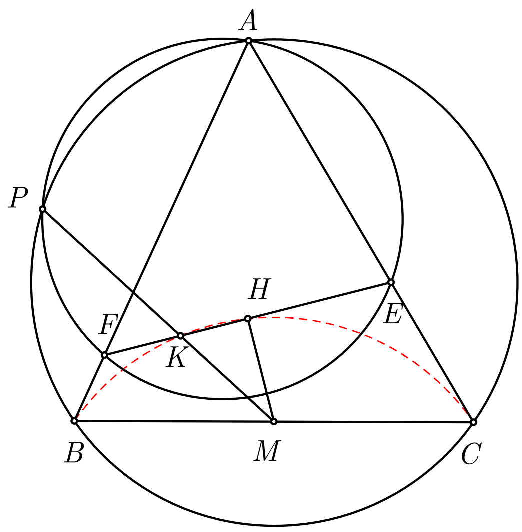
$$\angle VYO' = \angle VOO' = \angle VYB$$

vì OO' là trung trực BV. Và do đó, B, O', Y thẳng hàng. □

Ta đưa ra một số bài toán dựa trên mô hình này, cũng như các mở rộng. Các bạn có thể thử giải những bài toán này một cách độc lập với bài 3a VMO 2025 xem như để luyện tập.

Nhận xét. Nếu gọi BH cắt (O) tại B' khác B, thì KL, YB' và BC đồng quy, theo định lý Pascal. Do đó, đối xứng của Y qua AC nằm trên KL và nằm trên VF do tứ giác $VAYC$ điều hòa. Như vậy, ta có thể đưa ra một bài toán ngắn gọn hơn như sau:

Bài toán 8 Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có trực tâm H và M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua H vuông góc với HM cắt CA, AB tại E, F. Gọi (AEF) cắt (O) tại P khác A và MP cắt EF tại K. Chứng minh rằng H, K, B, C đồng viên.



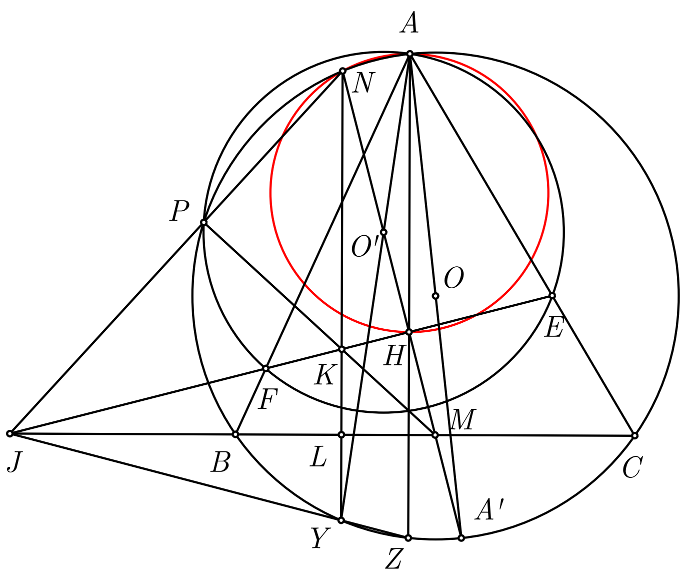
Như một ứng dụng của lời giải bài toán 3a VMO và bài toán trên, ta có thể tiếp tục giải bài toán sau.

Bài toán 9 Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có trực tâm H. Gọi M là trung điểm BC. Đường thẳng qua H vuông góc với HM cắt CA, AB tại E, F. Gọi đường tròn đường kính AH cắt (O) tại N và L là hình chiếu của N trên BC. Chứng minh rằng AL, BE, CF đồng quy.

LỜI GIẢI Gọi (AEF) cắt (O) tại P khác A và EF cắt BC tại S. Gọi MP cắt EF tại K. Theo Bài 8, ta có $KHCB$ nội tiếp, và theo kết quả quen thuộc, M, H, N thẳng hàng. Do đó,

$$\overline{MK} \cdot \overline{MP} = MB^2 = \overline{MN} \cdot \overline{MH}$$

nên $NPKH$ là tứ giác nội tiếp. Như vậy, NP, HK, BC đồng quy tại J là tâm đẳng phương của (O), (HBC) và $(HNPK)$.



Bây giờ, gọi O' là tâm (AEF) và AO' cắt (O) tại Y. Mặt khác, gọi AA' là đường kính của (O) và AH cắt (O) tại X, bởi AO', đường thẳng qua A vuông góc EF và (AH, AO) là hai cặp đường đẳng giác $\angle BAC$ nên

$$\angle YAZ = \angle O'AH = \angle(AO, HM) = \angle A'AN$$

nên $AN = YZ$ dẫn tới $NYZA$ là hình thang. Do đó, $NY \parallel AZ$ hay NY đi qua K. Kết hợp với việc $PBYC$ là tứ giác điều hòa theo Bài **??**, ta được

$$(LJ, BC) = N(LJ, BC) = (YP, BC) = -1$$

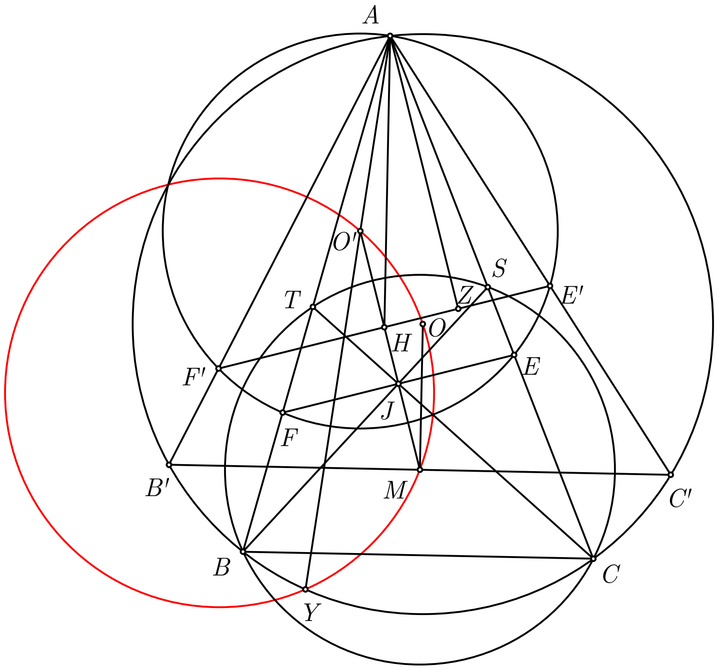
nên AL, BE, CF đồng quy.

$\square$

Tiếp theo, như một thao tác quen thuộc, ta tổng quát tình huống trực tâm H thành đường tròn bất kỳ đi qua B, C. Nhưng ở đây ta cố gắng đưa ra một liên kết hết sức đặc biệt giữa mô hình đường tròn đường kính BC và đường tròn bất kỳ. Chúng ta hãy xem xét bài toán sau, là một mở rộng trực tiếp của Bài toán 7.

Bài toán 10 Cho tam giác ABC không cân nội tiếp (O). Đường tròn (M) bất kỳ đi qua B, C cắt CA, AB tại S, T. Gọi BS cắt CT tại J. Đường thẳng qua J vuông góc với MJ cắt CA, AB tại E, F. Gọi O' là tâm (AEF), và AO' cắt (O) tại Y khác A. Chứng minh rằng O', Y, M, O là đồng viên.

Lời giải Ở đây, ta sẽ không cố gắng giải bài toán triệt để này mà nhường lại việc đó cho bạn đọc. Chúng tôi chỉ muốn đưa ra một góc nhìn đáng ngạc nhiên, bằng cách đưa bài toán này về tình huống ban đầu. Cần phải nhấn mạnh rằng rất hiếm khi ta có thể làm được điều này. Ta giả sử rằng M nằm trong (O), và qua đó, có thể dựng dây cung $B'C'$ đi qua M và vuông góc OM. Tương tự như bài toán gốc, gọi H là trực tâm tam giác $AB'C'$ và đường thẳng qua H vuông góc với MH cắt $C'A$, AB' tại E' và F' tương ứng. Lúc này, E', F' nằm trên (AEF) như hình vẽ.



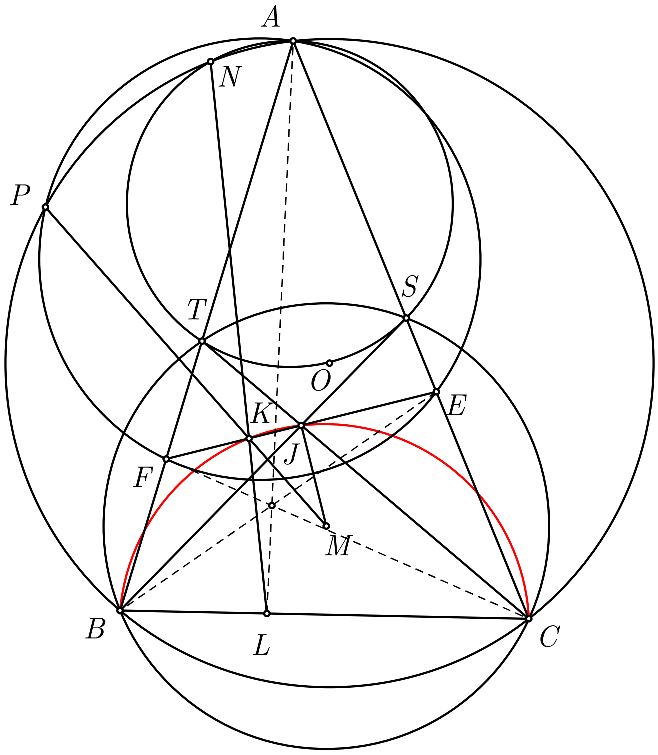
Để ý nếu ta chứng minh được điều này, bài toán có thể đưa về bài toán gốc. Như vậy, ta chỉ chứng minh (AEF) đi qua E', F'. Gọi O_1 là tâm của $(AE'F')$ và Z là hình chiếu của A trên $E'F'$. Khi đó, AO_1 và AZ đẳng giác $\angle E'AF'$. Lưu ý $B'C' \parallel BC$ nên AO_1 và AZ cũng đẳng giác $\angle EAF$. Hơn nữa, $AZ \perp E'F'$ nên $AZ \parallel O'M$ hay $AZ \perp EF$. Do đó, AZ, AO' đẳng giác $\angle BAC$ hay A, O, O_1 thẳng hàng. Mặt khác, O' và O_1 cùng nằm trên JM, dẫn tới O' trùng O_1 vì cùng là giao điểm của 2 đường thẳng.

Do đó, tâm (AEF) và $(AE'F')$ trùng nhau, và chúng cùng đi qua A nên hai đường tròn trùng nhau. □

Cuối cùng, như các mở rộng của Bài toán 8 và Bài toán 9, ta có bài toán sau.

Bài toán 11 Cho tam giác ABC không cân nội tiếp (O). Đường tròn (M) bất kỳ đi qua B, C cắt CA, AB tại S, T. Gọi BS cắt CT tại J. Đường thẳng qua J vuông góc với MJ cắt CA, AB tại E, F.

1. Gọi MP cắt EF tại K. Chứng minh rằng B, J, K, C đồng viên.
2. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AST cắt (O) tại N khác A. Gọi NK cắt BC tại L. Chứng minh rằng AL, BE, CF đồng quy.



Bài toán này xin dành cho bạn đọc.

Những câu chuyện toán học

Nguyễn Tố Như (Hà Nội)

Giới thiệu. *Ban biên tập giữ nguyên văn lời giới thiệu của GS.TSKH Trần Văn Nhung về tác giả Nguyễn Tố Như.*
GS. TSKH. Nguyễn Tố Như quê Diễn Châu, Nghệ An. Ngay từ khi học lớp 9 anh đã được trao Giải Nhất của báo Toán học và Tuổi trẻ năm 1964. Sau đó anh vào học Khoa Toán, ĐH Tổng hợp HN/ VNU, tốt nghiệp xuất sắc ngành Giải tích hàm. Theo phân công của nhà nước, anh lên dạy ở Trường (trọng điểm) Thanh niên lao động XNCN tỉnh Hòa Bình. Biết được tài năng của anh Như, GS. BT. Tạ Quang Bửu đã cho anh Như thi tuyển NCS để đi làm TS và TSKH tại Ba Lan. Sau đó anh được các nước như Anh và Mỹ mời đi giảng dạy và NCKH. Anh có nhiều công trình khoa học được đăng trên các tạp chí khoa học chất lượng cao như Proceedings of the American Mathematical Society, ...

1. Thi Vô địch Toán các nước Xã hội chủ nghĩa

Thi Vô địch Toán các nước XHCN là tiền thân của thi toán quốc tế ngày nay. Kỳ thi vô địch Toán các nước XHCH lần đầu tiên được tổ chức ở Rumani từ ngày 21/7 đến ngày 31/7 năm 1959, có 7 nước tham gia: Liên Xô và các nước XHCN cũ của Đông Âu.

Hồi đó anh ruột tôi, Nguyễn Phiệt, là cán bộ giảng dạy ĐH Bách khoa Hà Nội. Anh tôi thường xuyên dịch các đề thi học sinh giỏi của Liên Xô từ tiếng Nga gửi về cho các em. Anh tôi là một kỹ sư điện nhưng rất giỏi toán.

Bố tôi thường nói với các con: "Trong tất cả bọn bay, không có đứa em nào giỏi như anh Phiệt".

Chính anh tôi cũng nghĩ thế và không đánh giá cao mấy đứa em.

Tôi nghĩ anh tôi là một tài năng lớn không được biết đến. Là một kỹ sư điện, nhưng anh tôi rất giỏi toán.

Trong những năm 1963-1964 anh tôi dịch rất nhiều đề thi vô địch Toán của Liên Xô, đặc biệt là *các kỳ thi vô địch toán cho học sinh phổ thông và các lớp chuyên Toán* gửi về cho chúng tôi xem và bảo tôi làm thử cho vui. Tôi thấy các bài toán trong các kỳ **"Thi vô địch toán vùng Siberia"** có nhiều bài toán rất hay và khó. Đặc biệt là năm nào anh tôi cũng dịch các đề **"Thi vô định toán các nước XHCN"** về cho tôi, làm được bài nào thì gửi cho anh tôi xem.

Anh tôi rất ngưỡng mộ anh Vũ Hoài Chương. Anh tôi còn gửi cho chúng tôi xem một số lời giải các đề thi vô địch toán của Liên Xô do Vũ Hoài Chương đăng trong Tập san Toán Lý do UBKH nhà nước xuất bản.

Tôi có một kỷ niệm rất đáng nhớ. Lúc đó anh Phiệt gứi một số bài toán thi vô định toán quốc tế và thi vô địch toán vùng Seberia. Tôi cũng giải được hơn chục bài, có một bài toán rất khó tôi không làm được và tôi hỏi anh Phiệt thì anh chỉ cho tôi lời giải rất hay.

Bây giờ nhìn thấy anh Vũ Hoài Chương trên FB tôi cũng thấy ngờ ngợ? (Tôi chưa gặp anh Vũ Hoài Chương ngoài đời). Không biết anh có phải anh là Vũ Hoài Chương năm xưa anh tôi kể cho các em không? Nhìn anh trên FB tôi thấy anh Vũ Hoài Chương khá trẻ so với Vũ Hoài Chương trong tâm trí tôi?

Mãi gần đây tôi mới được biết anh Vũ Hoài Chương là em họ Vũ Băng Tú, người hùng của Trường Hòa Bình và là thần tượng của tôi trong những năm tôi ở Trường Hòa Bình.

Là một kỹ sư điện, anh tôi tôi có thể giải được hầu hết các bài toán trong kỳ thi vô địch toán ở Liên Xô ngày xưa nếu anh tôi bỏ thời gian. Với một kỹ sư điện, điều này là rất đặc biệt!

Có những bài toán khá khó trong kỳ thi vô địch toán vùng Seberi tôi nghĩ mãi không ra, tôi hỏi anh tôi và anh tôi đã tìm ra lời giải.

Tôi cũng giải được hơn chục bài toán trong các kỳ thi vô địch toán Seberia. Tôi định bảo anh tôi gửi đến đăng Tập San Toán Lý giống như anh Vũ Hoài Chương nhưng tháng 10 năm đó Báo Toán Học & Tuổi Trẻ (THTT) ra đời nên tôi thấy việc giải các bài toán đăng ở Báo THTT thì phù hợp hơn.

Anh tôi là một người rất giỏi toán và rất đam mê kỹ thuật.

Với tôi, anh còn hơn cả một người anh ruột: Anh tôi đã mở đường cho tôi đến với Bác Tạ Quang Bửu, người đã làm thay đổi hoàn toàn cuộc đời tôi sau này.

Nhờ có anh mà tôi được Bác Tạ Quang Bửu biết từ rất sớm (từ năm học lớp 9 trường cấp 3 Diễn Châu) và có lẽ tôi cũng là người CUỐI CÙNG được Bác Bửu giúp trước khi Bác về hưu. Thậm chí ngay cả sau khi Bác về hưu, Bác Tạ Quang Bửu vẫn đích thân lên Bộ Đại Học nhờ họ tiếp tục giúp tôi.

Những kỳ thi vô địch toán cho học sinh phổ thông đầu tiên do các nước XHCN tổ chức, vào cuối thập kỷ 50 đầu 60 của thế kỷ trước. Lúc đó chỉ có học sinh các nước XHCN tham gia. (Liên Xô và các nước XHCN Đông Âu).

Tôi thấy các đề thi Toán Quốc tế trong các năm đó không khó như đề thi Olympic Toán bây giờ, có những bài toán khá đơn giản, học sinh chỉ cần có một chút linh cảm về toán là làm được. Tôi còn nhớ trong kỳ thi Toán Vô địch Toán các nước XHCN 1962 có bài toán:

Bài toán: Tìm một số tự nhiên nhỏ nhất N có tính chất sau đây:

1. Viết trong hệ thập phân thì chữ số cuối cùng của N là 6;
2. Nếu bỏ số 6 cuối cùng đi và thêm chữ số 6 vào trước các chữ số còn lại thi ta được môt số mới lớn gấp 4 lần số ban đầu.

Một học sinh có chút tư duy về toán sẽ thấy ngay là chữ số đầu tiên của N phải là 1. Các chữ số tiếp theo của N cũng có thể tìm được bằng một phép biện luận đơn giản.

Bây giờ ở tuổi U80 tôi vẫn theo dõi các đề thi IMO công bố hàng năm. Tôi nói với các bạn trẻ là ở tuổi U80 tôi vẫn giải được bất cứ bài toán nào trong các đề thi IMO, nếu tôi có thời gian và hứng thú (nhưng nếu tôi phải làm 3 bài toán thi IMO trong 4 giờ thì tôi không làm được!

Trong các đề thi toán quốc tế, tôi quan tâm đến bài toán của GS Văn Như Cương trong kỳ thi IMO 1982:

Bài Toán Văn Như Cương: Cho hình vuông S có độ dài cạnh 100. L là một đường gấp khúc không tự cắt tạo thành từ các đoạn thẳng AoA1, A1A2,... A(n-1) An, với Ao khác An. Giả sử mỗi điểm P trên chu vi hình vuông đều tồn tại một điểm thuộc L cách P không quá ½. Chứng minh rằn tồn tại hai điểm X và Y thuộc L sao cho khoảng cách giữa X và Y không quá 1 và độ dài đuòng gấp khúc L nằm giữa X và Y không nhỏ hơn 198.

Trong kỳ thi IMO năm đó chỉ có 20 học sinh giải được bài toán này. Riêng đoàn Việt Nam chỉ có anh Lê Tự Quốc Thắng (đạt điểm 42/42) giải được bài toán. Nhìn vào thông tin đó, ta có thể nghĩ bài toán Văn Như Cương là rất khó. Nhưng tôi thấy nó thực sự không khó. Tôi có lời giải đơn giản (không quá 10 dòng!) cho bài toán Văn Như Cương. Tôi vào Đại Học Vinh "dụ" các em học sinh chuyên toán trường Vinh ngồi nghe tôi trình bày lời giải, nhưng các em không mấy quan tâm!

Với bài Toán Văn Như Cương, mặc dù ở tuổi U80, tôi chỉ cần 1 giờ là tìm được lời giải, nếu ngồi trong phòng thi.

Lời giải bài toán Văn Như Cương của tôi chỉ 5-7 dòng. Tôi có ý định đến kỷ niệm 60 năm ngày thành lập báo TT & TT sẽ nói về lời giải bài toán Văn Như Cương cho các cháu lớp 11,12 nghe cho vui, nhưng tiếc là lễ kỷ niệm đã không xảy ra.

2. Báo Toán học và Tuổi trẻ

Nhân dịp 60 năm ngày thành lập báo THTT, tôi xin đăng lại bài viết của tôi ghi lại vài kỷ niệm thú vị với tờ báo mà tôi gắn với nó từ thời niên thiếu. Tôi viết bài này cách đây 3 năm và đã đăng trên FB một lần, cách đây vài năm. GS Ngô Việt Trung lúc đó đọc bài của tôi trên FB có nhận xét:

"Bài của anh Như nếu đăng trên báo THTT thì chắc có nhiều người đọc". Tôi chưa gửi đăng báo THTT, nhưng đã cho các anh trong tòa soạn báo THTT xem qua và bị "chê" là bài tôi hơi dài, không phù hợp với báo THTT nên tôi không submit lên đăng báo THTT.

Lễ kỷ niệm 10 năm thành lập báo THTT thì tôi đang chăn bò trên đất Hòa Bình (lúc đó tôi đang có tên trong sổ đoạn trường) nên không ai nhớ đến tôi. Lễ kỷ niêm 20 năm ngày thành lập báo THTT (tên tôi đã được rút ra khỏi sổ đoạn trường) và tôi được mời đọc tham luận trong buổi lễ kỷ niệm. 30 năm 40 năm kỷ niệm thành lập báo THTT tôi đang làm việc ở Mỹ nên không về dự được. Kỷ niệm 50 năm thành lập báo THTT, dù không được mời tôi vẫn "theo" GS Ngô Việt Trung đến dự. Thấy tôi có mặt trong buổi lễ, ban tổ chức trịnh trọng giới thiệu:

Ông Nguyễn Tố Như, giải nhất báo THTT cách đây 50 năm, đến dự lễ kỷ niệm.

*Tôi cảm thấy rất vui. Thời gian 50 năm là ½ thế kỷ nhưng tôi cứ nghĩ như chuyện mới xảy ra ngày hôm qua. Nay lại là **60 năm** rồi, không biết nên vui hay nên buồn?*

Báo THTT ra đời trong chiến tranh ác liệt. Đó là nhờ công lao của GS Tạ Quang Bửu, GS Lê Văn Thiêm, GS Hoàng Tụy, GS Nguyễn Cảnh Toàn, GS Hoàng Xuân Sính, GS Hoàng Chúng và một số các nhà toán học trẻ thời đó.

Rõ ràng không một ai có thể phủ nhận vai trò của toán học trong mọi ngành khoa học và trong đời sống xã hội. Toán học đã soi rọi mọi ngõ ngách của khoa học, kể cả các ngành khoa học xã hội. Anh Lưu Nghiệp Quỳnh là một tài năng toán học, nhưng anh Quỳnh đã mang tư duy toán học của mình để soi sáng cho một ngành khoa học tưởng như rất xa với toán học: Văn học và Điện ảnh!

Sau này tôi cũng thành công trong một lĩnh vực khoa học ứng dụng là FFT, một lĩnh vực mà background của tôi tuyệt đối là zero!

Tôi sẽ nói về câu chuyện FFT của tôi trong một bài viết sau.

Một điều rất đáng tự hào là trong chiến tranh ác liệt, Việt Nam vẫn tổ chức được các kỳ thi Học sinh giỏi toàn Miền Bắc và cho xuất bản tờ báo THTT để làm tài liệu tham khảo cho các học sinh phổ thông yêu toán. Đây là một minh chứng cho sự nhìn xa trông rộng của các nhà lãnh đạo giáo dục Việt Nam thời bấy giờ, đứng đầu là Bộ Truởng Tạ Quang Bưu và GS Lê Văn Thiêm. Trong khi những nước không có chiến tranh, với các điều kiện tốt hơn chúng ta rất nhiều như Thái Lan, Indonesia, Malaysia, mà ngay cả Trung Quốc cũng không làm được!

Tôi còn nhớ lúc được mời ra Hà Nội nhận giải nhất Báo THTT là lúc chiến tranh phá hoại Miền Bắc của máy bay Mỹ đang ác liệt. Tuy nhiên đó là thời kỳ đầu của cuộc chiến tranh phá hoại, máy bay Mỹ chỉ ném bom ban ngày, không ném bom ban đêm.

Tôi phải đạp xe từ Nghệ An ra Hà Nội. Xuất phát từ Yên Lý (Diễn Châu) lúc 6 giờ chiều, đạp xe suốt đêm đến Thanh Hóa thì trời sáng. Tôi vào một làng quê ở Thanh Hóa xin nghỉ lại, chờ tối lại đạp xe đi tiếp. Tôi không dám đi ban ngày vì sợ máy bay Mỹ ném bom.

Cứ như thế, đêm đạp xe đi, ngày vào làng quê xin nghỉ để tránh máy bay. Thức ăn mang theo là những chiếc bánh chưng được chuẩn bị từ nhà. Dọc đường không có hàng quán ăn.

Khi qua thị xã Ninh Bình thì thì tôi được đạp xe ban ngày vì lúc đó máy bay Mỹ chưa đánh phá đoạn Ninh Bình ra Hà Nội. Tôi phải đạp xe mất 5 ngày đêm từ Yên Lý Nghệ An tới Hà Nội.

Ra đến Hà Nội tôi tìm đến nhà bà con ở phố 70 Trần Hưng Đạo. Tôi đến phố Trần Hưng Đạo, chỉ thấy số nhà 69 và số nhà tiếp theo là 71. Tìm mãi không thấy số nhà 70 đâu cả. Tôi hỏi một người đi đường:

- Tại sao số nhà 69 rồi tiếp theo là nhà 71 bác nhỉ? Cái biển số nhà 70 bị rơi đâu mất rồi hở bác? Cháu tìm không thấy?

Người đi đường trả lời:

- Số nhà 70 ở bên kia đường cháu ạ. Bên này đường là nhà số lẻ. Bên kia là nhà số chẵn.

Tôi nói với người đi đường:

- Hà Nội rắc rối quá bác nhỉ. Tại sao số nhà 69 ở đây mà số nhà 70 lại tít bên kia đường? Vừa mới đến Hà Nội cháu đã thấy ở đây khác nhà quê của của cháu quá rồi?

- Rồi cháu sẽ thấy Hà Nội còn có nhiều cái hay, cái lạ hơn nữa, người đi đường bảo tôi.

Ra đến Hà Nội, các anh trong tòa soạn báo THTT rất mừng và rất ngạc nhiên! Các anh không nghĩ là tôi có thể ra Hà Nội vào thời gian đó!

Cùng thời điểm với tôi có anh Võ Văn Năm, quê ở Đô Lương Nghệ An cũng được mời ra Hà Nội nhận giải thưởng Báo THTT nhưng không đi được vì sợ máy bay Mỹ ném bom.

Lúc đó tôi có một ước mơ thật là đơn giản: Bao giờ hết chiến tranh tôi được đạp xe từ Nghệ An ra Hà Nội "thênh thang giữa ban ngày", chứ không phải đạp xe ban đêm như hiện nay!

Anh Trần Trung Hiếu được giải nhất cuộc thi học sinh giỏi toàn Miền Bắc năm 1965. Anh Hiếu bằng tuổi tôi, nhưng học trên tôi một lớp.

Sau buổi tối 5 tháng 7, 1965 tôi và anh Hiếu ở lại Hà Nội chơi với nhau mấy hôm. Mặc dù mới gặp lần đầu tiên nhưng tôi và anh Hiếu khá thân nhau, tôi đi chơi với anh Hiếu rất nhiều chỗ ở Hà Nội.

Tôi có những kỷ niệm rất đẹp về anh Trần Trung Hiếu. Tôi và anh Hiếu đi xem một vở kịch nói ở Nhà Hát Lớn (do báo THTT cho vé mời). Là người nhà quê, chưa bao giờ bước ra khỏi đất Nghệ An, lần đầu tiên tôi vào một nơi như Nhà Hát Lớn tôi choáng ngợp, một nơi mà tôi nghĩ những người như tôi có thể đặt chân đến!

Hôm sau tôi và anh Trần Trung Hiếu đi tham quan Viện Bảo Tàng Lịch Sử, Viện bảo tàng cách mạng. Nhìn thấy ảnh ông Phùng Chí Kiên trong Bảo Tàng cách mạng, tôi bảo anh Hiếu:

- Phùng Chí Kiên là bác họ của tớ. Ông tên thật là Nguyễn Vĩ.

Sau khi chia tay ở Hà Nội, tôi và anh Hiếu không có liên lạc với nhau.

Bây giờ ngồi viết những dòng này này tự nhiên tôi rất nhớ anh Trần Trung Hiếu. Không biết bây giờ anh Hiếu đang ở đâu? Nếu tôi biết được chỗ ở anh Hiếu thì tôi sẽ đến chơi với anh, cũng là điều rất thú vị!

Khi qua Ba Lan làm nghiên cứu sinh tôi biết anh Trần Trung Hiếu trước đó đã học cơ khí ở của Trường Đại học Poznan, nhưng tôi không có thông tin gì về anh Trần Trung Hiếu.

Tôi hồi hộp chở ngày gặp lại anh Trần Trung Hiếu sau 60 năm xa cách!

Khi tôi hai lần được giải nhất báo Toán học & Tuổi trẻ (THTT) (1965 & 1966) thì cả trường Cấp 3 Diễn Châu cũng không ai biết. Các thầy không ai biết, các bạn tôi cũng không ai biết. Mãi đến 21 năm sau (1986) mới có thư của trường Cấp 3 Diễn Châu bảo tôi gửi ảnh về lưu niệm tại phòng truyền thống của trường. Lúc đó tôi mới gửi ảnh Bác Tạ Quang Bửu trao giải nhất báo THTT cho tôi về phòng truyền thống của Trường Cấp 3 Diễn Châu.

Trong số học sinh được giải thưởng báo THTT hôm đó, có một người rất "đa tài", anh Lưu Nghiệp Quỳnh (hàng đầu, thứ 3 bên phải), khi đó là công nhân lắp máy Cửa Ông, Quảng Ninh. Năm 1974, Anh Quỳnh đã được giải nhất trong cuộc thi chuyện ngắn Báo Văn Nghệ với Truyện ngắn "Tốc độ". Anh Lưu Nghiệp Quỳnh là một nhà điện ảnh, nhà biên kịch tài năng của nền Điện ảnh Việt Nam hiện nay.

Đặc biệt, Anh Lưu Nghiệp Quỳnh rất nổi tiếng với bộ sưu tập đồ sộ gồm **12 nghìn** bộ phim, trong đó có phim về danh hài thế giới Charlie Chaplin.

Về cá nhân, tôi rất ngưỡng mộ anh Lưu Nghiệp Quỳnh. Khởi nghiệp từ một người lao động, công nhân lắp máy Cửa Ông, lấy báo THTT làm thú vui ban đầu, anh đã rất thành đạt trong lĩnh vực văn học, nghệ thuật.

Tối hôm 5 tháng 7 năm 1965 có khá đông các bạn tham dự nên tôi cũng không nói chuyện nhiều với anh Lưu Nghiệp Quỳnh nhưng tôi rất ấn tượng về anh: Anh là người duy nhất trong buổi tối hôm đó, không phải là học sinh phổ thông.

Khi tôi đang làm việc ở trường Hòa Bình, một anh bạn tôi cùng dạy trường Hòa Bình với tôi hỏi:

- Anh Như còn nhớ anh Lưu Nghiệp Quỳnh không?

Tôi bảo: Có

- Anh Quỳnh có một số chuyện ngắn đăng trong "Tác Phẩm Mới". Anh cũng biết đấy "Tác Phẩm Mới" chỉ đăng các tác phẩm văn học có chất lượng cao.

Tôi cũng đang rất hồi hộp mong ngày gặp lại vợ chồng anh Lưu Nghiệp Quỳnh sau 60 năm xa cách!

Anh Lưu Nghiệp Quỳnh kể cho tôi nghe một câu chuyện thú vị: Anh dự thi vào trường đạo diễn điện ảnh. Bài thi làm trong 3 giờ. Trong 3 giờ làm bài thi anh Quỳnh đã viết bài thi 45 trang theo các vấn đề nêu ra trong đầu bài thi. Kết quả anh Quỳnh đỗ thủ khoa trong kỳ thi đó, nhưng cơ quan anh Quỳnh, nơi anh đang làm việc không đồng ý cho anh đi học lớp đạo diễn vì anh đang phụ trách một mảng quan trọng trong công ty anh, nếu anh đi học lớp đạo diễn thì không tìm được người thay thế.

Ảnh chụp tối ngày 5 tháng 7 năm 1965 tại Ủy Ban Khoa Học Kỹ Thuật Nhà Nước, 39 Trần Hưng Đạo, Hà Nội.

Bộ Trưởng Tạ Quang Bửu (hàng đầu, thứ 4 từ trái sang), GS Lê Văn Thiêm (hàng đầu, thứ 4 từ phải sang), GS Nguyễn Cảnh Toàn (hàng sau, thứ 5 từ trái sang), GS Hoàng Xuân Sính (hàng đầu, thứ 5 từ trái sang), GS Hoàng Chúng (Em trai GS Hoàng Tụy, hàng sau, thứ 4 từ trái sang) và GS Ngô Thúc Lanh (hàng đầu, thứ 2 từ trái sang), nhà giáo dục Lê Hải Châu (hàng đầu, thứ nhát bên trái) cùng các em học sinh được giải thưởng báo Toán học và Tuổi trẻ.

Người đứng hàng sau, thứ 1 từ trái sang, là anh Ngô Đạt Tứ, cạnh đó là trai tôi, Nguyễn Phiệt, người mất ngày 7 tháng 6 năm 1967.

Tối ngày 19 tháng 7 năm 1965 tôi về đến nhà. Hôm sau ra đồng đi cấy với bà con, mọi người "khen" tôi:

- Chú Như đi Hà Nội có 2 tháng mà trông chú "đẹp trai" hơn hẳn. Ăn cơm Hà Nội có khác.

(Ông nội tôi là con út trong dòng họ Nguyễn Mỹ Quan nên mọi người trong làng đều gọi anh em chúng tôi là "các chú" chứ không ai gọi chúng tôi là "anh").

Đúng như vậy. Quê tôi Nghệ An, gió lào cát bụi và công việc đồng áng đã tàn phá cơ thể con người, đặc biệt là các cô gái. Một cô gái 17,18 chỉ cần ra Hà Nội vài tháng về là xinh hơn hẳn, da trắng mịn nói năng nhẹ nhàng hơn:

Em đi Hà Nội mới về Gió lào cát bụt bay đi rất nhiều

Phỏng thơ Nguyễn Bính

3. Cụ Trí Uẩn và ba bài toán sơ cấp không giải được

Có nhiều bài toán, tưởng như quá dễ ai cũng hiểu được, ngay cả người mù chữ cũng hiểu, nhưng lại quá khó đối các nhà toán học. Các nhà toán học phải loay hoay hàng thế kỷ, vẫn không tìm ra lời giải và cuối cùng khi có lý thuyết Galois ra đời các bài toán này mới có lời giải trọn vẹn. Trong các bài toán siêu khó, chúng ta nghĩ ngay đến ba bài toán mà người ít học cũng hiểu được dễ dàng:

1. Bài toán chia ba một góc

2. Bài toán cầu phương hình tròn

3. Bài toán dựng một hình lập phương có thể tích gấp đôi một hình lập phương cho trước.

Khi nói đến các bại toán này, tôi nghĩ đến cụ Trí Uẩn. Cụ Trí Uẩn là một người rất thông minh. Cụ nghĩ ra trò chơi Trí Uẩn rất thú vị mà ai cũng biết. Nhưng cụ Trí Uẩn nổi tiếng hơn với 3 bài toán trên.

Thuở ấy, Cụ Trí Uẩn tuyên bố là đã tìm ra cách giải 3 Bài toán 1,2,3. Cụ Trí Uẩn rất vui mừng vì cụ giải được bài toán mà thế giới tuyên bố là không giải được. Cụ Trí Uẩn đã gửi lời giải của mình đến Viện Toán Học và nhiều cơ quan nghiên cứu trong nước, nhưng cụ rất không thỏa đáng với câu trả lời "không giải được" của các nhà toán học.

Tức quá, cụ Trí Uẩn đã gửi lời giải đến Thủ Tướng Phạm Văn Đồng và kêu các nhà toán học Việt Nam "dốt quá", không hiểu được lời giải của cụ. Thủ Tướng Phạm Văn Đồng đành phải đồng ý cho cụ lập hội đồng gồm những nhà toán học hàng đầu Việt Nam để nghe cụ Trí Uẩn trình bày lời giải.

Hôm Cụ Trí Uẩn trình bày lời giải bài toán chia ba một góc bằng thước và compa có thầy Phạm Ngọc Thao và GS Lê Văn Thiêm đến nghe. Theo thầy Phạm Ngọc Thao kể lại, GS Lê Văn Thiêm và thầy Phạm Ngọc Thao đến nghe vì phải theo chỉ thị của Thủ Tướng Phạm Văn Đồng, chứ họ biết thừa là chuyện gì rồi.

Nghe cụ Trí Uẩn trình bày xong, GS Lê Văn Thiêm nói:

- Anh ạ, bài toán chia 3 một góc đã được các nhà toán học giải rồi anh ạ. Họ chứng minh nếu chỉ dùng thước và compa thì không thể chia 3 một góc bất kỳ được. Ngay một góc 60 độ cũng không chia thành 3 phần bằng nhau được.

Cụ Trí Uẩn quát:

-Anh đừng mang tư tưởng của Chủ Nghĩa Tư Bản (CNTB) nói chuyện với tôi. Biết bao nhiêu chuyện ngày xưa dưới chế độ phong kiến đế quốc dân ta không làm được nhưng bây giờ có Đảng, có CNXH dân ta vẫn giải quyết được. Có chủ nghĩa Mác Lênin thì không có chuyện gì không giải quyết được.

Chuyện Cụ Trí Uẩn ai cũng biết nên tôi không muốn nói nhiều, tôi muốn nói chuyện cờ gánh, một trò chơi thú vị thời thơ ấu của trẻ con làng quê.

Luật chơi cờ gánh đại khái như sau: Có 16 cái vỏ sò, hai người choi với nhau mỗi người có 8 quân: Một người chọn quân sấp (úp vỏ sò xuống) và người kia chọn quân ngữa (lật ngữa vỏ sò lên). Theo luật chơi cứ sau mỗi bước đi, nếu thắng một nước cờ thì người đi được lật vài quân bên kia (sấp thành ngữa hay ngữa thành sấp tùy theo bên thắng là ai). Khi nào tất cả các quân vỏ sò được lật hết lên (trên bàn cờ chỉ còn quân sấp hoặc quân ngửa). Bên nào có hết các quân (sấp hoặc ngửa) thì bên đó thắng ván cờ.

Trò chơi nay rất phổ biến trong quê tôi ngày xưa (tôi nghĩ cũng có nhiều vùng quê khác cũng có trò chơi này?). Trưa hè, trẻ con, người lớn cụ già (và kể cả người không biết chữ) tụ tập chơi cờ gánh với nhau. Làng tôi lúc đó hầu hết người già và trung niên trong làng không ai biết chữ. Khi chơi, có lúc ông già thắng, có lúc trẻ con thắng. Người chơi cờ gánh giỏi nhất làng tôi là một cụ

U80, không biết chữ.

Một hôm tất cả mọi người đang chơi vui vẻ thì một anh chàng trẻ tuổi trong làng mang chiếc xe đạp mới toanh đến thách tất cả mọi người đang chơi cờ gánh: "Ai vẽ được bàn cờ gánh bằng 7 nét thì tôi cho ngay các xe đạp này".

Thấy phần thưởng khá hấp dẫn nên tất cả mọi người đang chơi cờ, bỏ hết cuộc chơi lao và giải bài toán của người thanh niên với hy vọng có chiếc xe đạp để đổi đời. (Cái xe đạp mới toanh hồi đó, lúc tôi mới 9-10 tuổi, cũng ngang căn hộ chung cư cao cấp bây giờ?)

Rồi mọi người từ trẻ con đến ông già đều lao vào vẽ bàn cờ gánh. Nhưng khi vẽ xong 7 nét thì chỉ "gần xong", nghĩa là bàn cờ gánh vẫn thiếu một tí tẹo tèo teo. Và cuối cùng không ai lấy được cái xe đạp của người anh kia.

Hôm sau đi học, bài toán cờ gánh cũng theo tôi đến trường. Tất cả các bạn trong lớp tôi đều tham gia giải bài toán cờ gánh. Thầy giáo tôi cũng tham gia, với hy vọng được chiếc xe đạp. Các thầy giáo cấp 1 làm gì biết được định lý sau xa của toán học là bàn cờ có 16 điểm lẻ thì vẽ bàn cờ phải cần 8 nét.

Vậy tôi có hai bài toán sau đây cho các bạn FB, những người có cháu đang chuẩn bị thi học sinh giỏi môn toán lớp 11, 12 phổ thông:

Bài toán 1. Chứng minh rằng trong một hình, gồm các đoạn thẳng kết nối với nhau một cách tùy ý trong mặt phẳng thì tổng số điểm lẻ phải là số chẵn. (Điểm lẻ là một điểm có một số lẻ đường đi đến điểm đó. Chẳng hạn trong bàn cờ gánh có 16 điểm lẻ.)

Bài toán 2. Chứng minh rằng muốn vẽ được một hình trong mặt phẳng như trong bài toán 1 thì số nét vẽ phải cần ít nhất là ½ tổng số điểm lẻ của hình đó.

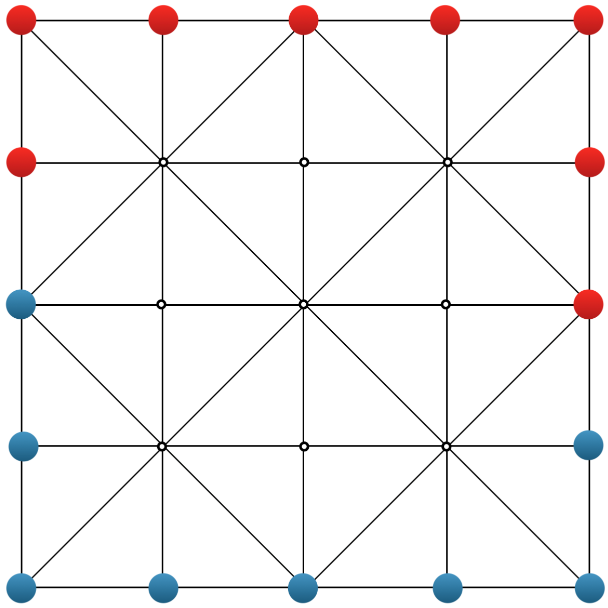
Chẳng hạn trong bàn cờ gánh có 16 điểm lẻ thì cần ít nhất là 8 nét mới vẽ xong. Tôi rất lạ là anh bạn trẻ mới học hết lớp 3 phổ thông rồi bỏ học mà biết được bàn cờ gánh không thể vẽ bằng 7 nét.

Hai bài toán trên là các định lý trong lý thuyết đồ thị nhưng có thể giải được bằng biện luận sơ cấp phù hợp với học sinh giỏi lớp 11, 12 phổ thông.

Bài toán 3: Hãy tìm một thuật toán để cho trong một cuộc chơi cờ gánh, người đi trước bao giờ cũng là người tháng cuộc.

Ngay cả khi thuật toán đó được tìm ra thì cờ gánh vẫn tồn tại. Để hiểu và vận dụng được thuật toán đó thì đến các giáo sư tiến sỹ còn khó, mà cờ gánh chỉ là trò chơi cho bọn trẻ trâu ở nhà quê, nơi các cháu ít được học hành, thậm chí không được cắp sách đến trường.

Một thuật toán cao siêu như vậy, dù có ra đời, cũng không giúp gì cho mấy đứa trẻ trâu chốn quê mùa hẻo lánh.



4. Biến đổi Fourier nhanh (FFT) là gì?

Tôi giải thích như thế này, mặc dù chưa hoàn toàn chính xác, nhưng rất dễ hiểu với các bạn FB: Nếu các nhà toán học phải làm NxN phép toán theo cách tính thông thường thì với sự hỗ trợ của FFT họ chỉ phải làm (NlogN) phép toán.

Sự khác biệt giữa $N \times N$ và $NlogN$ là rất lớn! Tôi lấy ví dụ $N = 1.000$ thì $N \times N = 1.000.000$ nhưng $NlogN = 3.000$. Như vậy đáng lẽ ra phải làm 1 triệu phép tính thì với sự hỗ trợ của FFT các nhà toán học chỉ cần làm 3.000 phép tính. Tức là FFT đưa con số 1 triệu về con số 3.000, tiết kiệm được $99,7\%$ công sức của các nhà khoa học.

Ví dụ $N = 1.000$ là con số quá khiêm tốn. Trong thực tế tính toán của các kỹ sư con số N có khi lên hàng triệu, thậm chí hàng trăm triệu. Khi đó sự khác biệt giữa $N \times N$ và $NlogN$ là vô cùng lớn?

Chắc bạn sẽ hỏi: Nếu data không phải là số chính phương thì sao? Chả lẽ FFT chỉ tính được các data chính phương? Mà data là số chính phương thì hầu như không xảy ra trong các bài toán thực tế? Vậy ứng dụng thực tế của FFT là quá khiêm tốn?

Trả lời: Nếu data không phải là số chính phương thì chỉ cần thêm số 0 vào data để được số chính phương gần nhất! Tôi nghĩ sự phát minh ra FFT là một trong các phát minh vĩ đại nhất trong toán học ứng dụng.

Bây giờ tôi vào vấn đề chính của bài tôi viết hôm nay. Một lần tôi gặp một giáo sư người Trung Quốc (sau này ông về dạy ở Khoa Điện của trường Duke

University) tên là Qing Huo Liu. Liu là một giáo sư giỏi và là một kỹ sư tài năng trong ngành Điện.

Qing Huo Liu cũng là người "Vua biết mặt, Chúa biết tên". Ông được Tổng Thống Bill Clinton mời đến Nhà Trắng ăn tối.

Thực ra, buổi tối hôm đó Tổng Thống Clinton đã mời một số người mới được giải thưởng khoa học đến ăn dinner tại Nhà Trắng. Liu là một trong số những người được mời dự dinner với Clinton.

Liu bảo tôi:

- Tôi đang muốn tìm một thuật toán biến đổi Fourier nhanh trong trường hợp không đều (Nonuniform Fast Fourier Transforms) để giải quyết một bài toán tôi đang nghiên cứu, ông giúp tôi được không?

Tôi thấy đây là một lĩnh vực hoàn toàn xa lạ đối với chuyên môn của mình, nhưng vì lúc đó tôi đang rảnh rỗi nên tôi nhận lời làm việc với Liu.

Ba tuần sau tôi gọi cho Liu:

- Đây là thuật toán của tôi. Ông chạy thử trên máy xem?

Gần 12 giờ đêm hôm đó Liu gọi cho tôi:

- Tôi đã chạy thuật toán của ông trên máy, ông đã làm được một điều kỳ diệu ngoài sức tưởng tượng của tôi!

Đây là một điều quá bất ngờ với Liu (và bất ngờ đối với cả tôi!). Một thành công ngoài mong đợi!

Hôm sau Liu bảo tôi:

- Tôi làm việc với các nhà toán học rất nhiều, nhưng lần đầu tiên tôi gặp một người làm toán như ông.

Tôi không tin tôi là người như Liu nói. Thực ra trong chuyện này tôi chỉ là người gặp may mà thôi.

Nhưng tôi hiểu lúc đó Liu không những "ngạc nhiên" mà Liu còn "giật mình sửng sốt" khi nhận được thuật toán của tôi. Cho nên tôi tin lời nói của Liu là chân thành, không phải là câu xã giao màu mè khách sáo, bởi vì chính bản thân tôi cũng rất ngạc nhiên không hiểu tại sao tôi lại tìm ra được thuật toán này.

Và tôi hiểu trước khi gặp tôi, Liu đã làm việc với nhiều nhà toán học về bài toán này. Tôi cũng hiểu tại sao các nhà toán học trước đây không tìm ra lời giải cho bài toán của Liu.

Liu cũng cho tôi biết là đã nói bài toán này với 2 người trong khoa toán của tôi, nhưng không ai cho kết quả.

Lúc đó Liu chỉ làm việc với các nhà Toán học ứng dụng gần với lĩnh vực ông nghiên cứu. Các nhà Toán học ứng dụng có cả một kho công cụ để giải bài toán. Nhưng các công cụ của họ thuộc loại "kháng sinh nhờn thuốc", điều trị không hiệu quả.

Thật ra các công cụ của họ, Liu đều biết hết. Là một kỹ sư, nhưng Liu rất giỏi Toán, Liu đã không làm được thì họ khó mà làm được?

Tôi thì khác, "tay không bắt giặc" cũng là một lợi thế. Không có gì trong tay nên tôi được tự do suy nghĩ, không có lối mòn, tôi phải tự tìm ra con đường riêng để tiếp cận với bài toán của Liu và may mắn đã đứng về phía tôi. Tôi là nhà toán học lý thuyết nên tôi có cách nhìn KHÁC với các nhà toán học ứng dụng về bài toán của Liu.

Bài này được đăng trong một tạp chí hàng đầu của ngành Toán ứng dụng:

The Regular Fourier Matrices and Nonuniform Fast Fourier Transforms

Nhu Nguyen and Qing Huo Liu

SIAM Journal on Scientific Computing, 21(1999), 283-293.

CITED 182 TIMES

Bài báo này đã có 182 lần trích dẫn.

Sau khi viết xong bài về Nonuniform Fast Fourier Transforms, Liu và tôi viết thêm hai bài về ứng dụng của thuật toán mới của chúng tôi trong ngành Điện, đăng ở các Tạp chí chuyên ngành:

An Acurate Algorithm for Nonuniform Fast Fourier Transforms

Qing Huo Liu and Nhu Nguyen

IEEE Microwave and Guided Wave Letters, 8(1998), 18-20

CITED 317 TIMES VÀ 2569 FULL TEXT VIEWS

Bài báo ngắn (chỉ 3 trang) đăng trong một tạp chí chuyên ngành hẹp về điện, nhưng đến nay đã có 317 lần trích dẫn và 2569 lượt xem toàn văn.

Nonuniform Fast Fourier Transforms (NUFFT) Algorithm and Its Applictions

Qing Huo Liu and Nhu Nguyen

Antennas and Propagation Society International Symposium 1998, IEEE, 3(1998), 1782-1785.

CITED 423 TIMES VÀ 583 FULL FULL TEXT VIEWS

Bài báo này đã có 423 lần trích dẫn và 583 lượt xem toàn văn. Tôi thật sự không hiểu: Đếm số là trích dẫn của một bài báo thì dễ nhưng đọc toàn văn thì làm sao mà đếm được?

Tôi chỉ làm việc với Qing Huo Liu trong chưa đầy 2 tháng, nhưng đã để lại ấn tượng sâu đậm về chuyên môn với Liu. Tôi đã có chung 3 bài báo với Liu đăng trong các tạp chí quốc tế có uy tín cao. Tôi đã thành công với Qing Huo Liu trong một lĩnh vực xa lạ, một lĩnh vực mà background của tôi hoàn toàn zero!

Tôi là người vô danh, nhưng thuật toán FFT của tôi đã làm cho một người LỪNG DANH như Qing Huo Liu giật mình.

Tôi thấy vui vì biến đổi Fourier nhanh FFT cũng là lĩnh vực Bác Tạ Quang

Bửu quan tâm: trong số 187 bài giảng của Bác Tạ Quang Bửu cũng có 5 bài giảng về FFT (bài số 118,126,132,156,157 trong danh sách bài giảng của GS Tạ Quang Bửu)

Bác Bửu vẫn nhớ đến tôi. Một lần anh Phạm Thiêm bảo:

- Trong suốt 10 năm, từ khi Bác Bửu nghỉ hưu (27-6-1976) đến khi bác Bửu mất (21-8-1986), Bác chỉ đến Bộ Đại Học DUY NHẤT MỘT LẦN và chỉ nói một câu: Tôi có việc này nhờ các anh giúp ...

Sau vài tuần làm việc với Qing Huo Liu, tôi thấy Liu là người có kiến thức Toán học rất tốt, hiểu biết khá sâu rộng vững vàng về toán. Tôi nói:

- Ông giỏi Toán quá. Tôi ngạc nhiên về những hiểu biết Toán học của ông.

Liu trả lời:

- Vâng, với các kỹ sư, tôi cũng là người giỏi Toán. Nhưng tôi nghĩ giỏi toán phải là những người như các ông.

Một điều thú vị là các viết của tôi và Liu 3 bài báo và 3 bài báo của chúng tôi đã được hàng ngàn lần trích dẫn và xem toàn văn (full text views). Một con số thật sự ấn tượng!

Lĩnh vực nghiên cứu của Liu quả là đang rất "hot" và được các nhà khoa học thế giới đang quan tâm mạnh mẽ. Đó là lý do tại sao sau các bài báo với tôi, Liu đã được nhiều giải thưởng lớn như:

- 2017 Techical Achievemment Award

- 2018 Distinguished Alumni Award

- The 2018 Computational Electromagnetics Award from the Applied Computational Electromagnetics Society

- The 2018 Harrington-Mittra Award in Computational Electromagnetics from IEEE Antennas and Propagation Society.

Và tôi biết chắc chắn là các bài báo chung với tôi đã góp phần không nhỏ trong các giải thưởng lớn của Liu. Vì chuyện tế nhị Liu đã lảng tránh điều đó.

Lúc này tôi rất nhớ Bộ Trưởng Tạ Quang Bửu. Làm Bộ Trưởng nhưng Bác Bửu rất quan tâm đến những lý thuyết sâu xa của toán học hiện đại, trong số 187 bài giảng của Bác Bửu đã có 3 bài giảng về FFT. Ước gi Bác Tạ Quang Bửu vẫn còn đến ngày hôm nay để nhìn thấy 3 bài báo của tôi với Qing Huo Liu với 465 lượt trích dẫn.

Tôi tin rằng Bác Bửu sẽ rất vui khi biết việc tôi làm với Qing Huo Liu và nếu Bác Bửu còn sống đến ngày hôm nay, tôi tin **Bác Bửu sẽ có thêm bài giảng thứ 6** về FFT xung quanh 3 bài báo của tôi với Qing Huo Liu.

Thật sự tôi rất vui khi báo với Bộ Trưởng Tạ Quang Bửu về những việc tôi làm được trong lĩnh vực FFT, một lĩnh vực rất xa chuyên môn của tôi, và là một lĩnh vực được Bác Bửu rất quan tâm.

Tôi còn nhớ như in câu Bộ Trưởng Tạ Quang Bửu nói khi tôi gặp Bộ Trưởng tại nhà riêng 36 Hoàng Diệu:

"Làm bất cứ nghề gì, giỏi toán là lợi thế không nhỏ".

Thời gian tôi làm việc với Liu tuy ngắn ngủi (hai tháng), nhưng đã để lại ấn tượng sâu sắc về chuyên môn với tôi và Liu.

Bây giờ nghĩ lại, tôi thấy rất tiếc: Nếu năm 1966 tôi được đi học nước người thì có thể tôi cũng trở thành một người như Qing Huo Liu? (vua biết mặt chúa biết tên).

Sau này tôi gặp cảnh trầm luân tôi rất buồn: Năm 1966 nếu tôi được đi học nước ngoài thì tôi cũng được như anh Lê Dũng Mưu, Đinh Văn Huỳnh... và chắc chắn tôi không phải đi chăn bò 4 năm trên miền Tây Bắc.

Có người nghĩ, tôi không được đi học nước ngoài chắc là do lý lịch gia đình, nhưng hoàn toàn không đúng: lý lịch gia đình tôi trên cả tuyệt vời: Bố mẹ tôi đều là đảng viên đảng cọng sản Việt Nam. Mẹ tôi vào đảng từ năm 16 tuổi, bị thực dân Pháp kết àn 3 năm tù. Chính quyền địa phương đề nghị cho tôi đi học nước ngoài...

Nếu năm 1966 tôi viết thư cho Bộ Trưởng Tạ Quang Bửu, kèm theo bản lý lịch gia đình thì chắc chắn là tôi đã được đi học nước ngoài. **Sau này tôi nghĩ đây là sai lầm lớn nhất trong cuộc đời tôi...**

5. Chuyện FFT

Xuyên suốt cuốn hồi ký của tôi là câu nói của Nguyễn Phiệt: "Bộ Trưởng Tạ Quang Bửu là một nhà bác học **thiên kinh vạn quyển**, từ trường lượng tử đến bèo hoa dâu, lĩnh vực nào Bác Bửu cũng thông thạo. Một người làm chính trị có kiến thức khoa học đồ sộ như Bác Tạ Quang Bửu không phải thời nào cũng có"

Một người như Tạ Quang Bửu không phải thời nào cũng có.

Tôi nhắc đi nhắc lại câu nói của Nguyễn Phiệt nhiều lần vì đó là là nguyên nhân sự ra đời của cuốn hồi ký. Nhìn lại các nhà khoa học Viêt Nam, nhiều người đang đứng ở "đỉnh cao" của nền khoa học Việt Nam đã chuyển sang làm chính trị. Việc một nhà khoa học hàng đầu của đất nước chuyển sang lĩnh vực chính trị là niềm tự hào của tất cả các nhà khoa học Việt Nam. Lĩnh vực chính trị phải có các nhà khoa học đang ở "đỉnh cao" đặt chân đến: điều đó thật là tuyệt vời! Nhưng có nhà khoa học, dù đang ở đỉnh cao khi bước sang lĩnh vực chính trị thì họ không còn là nhà khoa học nữa. Đó cũng không phải là điều đang chê trách vì các nhà khoa học cũng chỉ có một cái đầu!

Bộ Trưởng Tạ Quang Bưu là một người hoàn toàn khác. Dù là Bộ Trưởng, bác Tạ Quang Bửu vẫn luôn theo rất sát những thành tựu quan trọng và hiện đại của khoa học thế giới. Số 187 bài giảng của Bác Bửu đã nói về rất nhiều lĩnh vực khoa học khác nhau, trong đó có FFT: Fast Fourier Transform (bài giảng số 118, 126, 132, 156, 157 trong list các bài giảng của Bác Tạ Quang Bửu đều bàn về FFT).

FFT là một khoa học ứng dụng sâu sắc mà ngay các nhà toán học ứng dụng Việt Nam cũng không nhiều người biết. FFT đã được phát minh ra bởi một nhà toán học vĩ đại nhất thế giới: Carl Fredrich Gauss từ thế kỷ 19. Gauss được nhiều người biết đến với hai bài toán sơ cấp mà ai cũng biết: Tìm tổng của 100 số tự nhiên đầu tiên và bài toán dựng hình 17 cạnh đều bằng thước và compa, nhưng ít người biết Gauss là người đầu tiên phát hiện ra FFT: Fast Fourier Transform.

FFT là một thuật toán khoa học nhưng thú vị như một câu chuyện cổ tích: Vì muốn tìm ra quỹ đạo quỹ đạo của hai hành tinh Pallas và Juno do chính mình phát hiện ra nên Gauss đã nghĩ ra thuật toán FFT và chính FFT đã giúp ông lập lại quỹ đạo của hai hành tinh Pallas và Juno. Trong khi làm Bộ trưởng, bác Tạ Quang Bửu vẫn làm chủ được FFT thì thật là kỳ diệu.

Trong vài năm qua, tôi cố gắng tìm một nhà toán học Việt Nam để nói chuyện về FFT, nhưng tôi không tìm thấy ai cả. Trong khi đó Bác Tạ Quang Bửu, với công việc bộn bề của người bộ trưởng bác vẫn có những bài giảng sâu sắc về FFT Trong bài trước tôi đã bàn về **Biến đổi Fourier nhanh (FFT)**, một thuật toán rất hiệu quả trong khoa học tính toán. FFT giúp các nhà khoa học làm một công việc đáng lẽ họ phải làm trong vài tháng thì với sự hỗ trợ của FFT họ chỉ phải làm làm trong vài giờ.

FFT không phải là lĩnh vực trong chuyên môn của tôi, nhưng FFT mang một dấu ấn đậm nét trong cuộc đời nghiên cứu toán học của bản thân tôi.

Nhà toán học Đức Carl Fredrich Gauss (1777-1855) đã tìm ra FFT năm 1805. Gauss được lịch sử toán học thế giới đánh giá là "Thiên tài của mọi thời đại". Nói đến Gauss chúng ta có cả một kho chuyện "cổ tích" để kể cho trẻ con nghe.

Chuyện thứ 2 tôi muốn kể ở đây là Gauss là người đã tìm ra cách dựng hình 17 cạnh đều bằng thước và compa năm 19 tuổi. Khi tìm ra công thức dựng hình 17 cạnh đều bằng thước và compa, Gauss đưa ra công thức tổng quát dựng hình bằng thước và compa cho tất cả đa giác đều có số cạnh là số nguyên tố Fermat (số nguyên tố có dạng $2^{2^n}+1$).

Số nguyên tố Fermat nhỏ nhất có dạng $2^{2^n}+1$ là 5 (với $n=1$). Hình 5 cạnh đều được dựng một cách rất đơn giản bằng thước kẻ và compa mà không cần dùng đến công thức của Gauss. Còn các đa giác đều 7, 9, 11, 13, 14, 15 cạnh thì không dựng được bằng thước và compa. Hình đa giác đều 17 cạnh ứng với số nguyên tố Fermat với n=2.

Ứng với số nguyên tố Fermat với n=3 là 257. Bản thảo về dựng hình đa giác đều có 257 cạnh bằng thước kẻ và compa nặng 30 kg xếp đầy một vali to hiện nay đang được lưu trữ tại thư viện trường đại học Gottingen.

Hồi còn học Trường Cấp 3 Diễn Châu, tôi có đọc cách dựng hình 17 cạnh đều của giáo sư Văn Như Cương đăng trong báo THTT (tôi không nhở rõ THTT số nào? Hình như 1965 thì phải). Cách giải của GS Văn Như Cương tương đối phức tạp. Nay tôi xem cuốn sách của GS Ngô Việt Trung: "Lý thuyết Galois về các vấn đề Giải phương trình bằng căn thức - Dựng hình bằng thước kẻ và compa" thì tôi thấy cách dựng hình 17 cạnh đều của GS Ngô Việt Trung rất sơ cấp, đơn giản dễ hiểu và hay hơn so với lời giải của GS Văn Như Cương đăng trên báo THTT cách đây gần 60 năm.

Theo ý kiến cá nhân tôi cuốn sách của GS Ngô Việt Trung là cuốn sách toán HAY NHẤT viết bằng tiếng Việt cho đến nay mà tôi được đọc. GS Ngô Việt Trung đã mô tả những vấn đề phức tạp, hiện đại của toán học bằng ngôn ngữ sơ cấp hay hơn và đơn giản mà ai cũng hiểu. Lý thuyết Galois thật là tuyệt vời! Những người yêu toán ai cũng mê! Thật là thú vị khi thấy những bài toán (chia 3 một góc, cầu phương hình tròn, gấp đôi thể tích một hình lập phương,...) tưởng như "tầm thường" đối những đứa trẻ trâu nhà quê ít được học hành lại là bài toán làm cho toán học thế giới "đau đầu" trong hàng trăm năm!

Nay nhân đọc cuốn sách Lý thuyết Galois của GS Ngô Việt Trung tôi còn nhớ câu chuyện thú vị cách đây hơn 60 năm: Lúc đó thầy giáo giảng bài bài hình học chia đôi một góc. Cuối giờ thầy ra bài tập về nhà: Bài toán: Hãy chia một góc vuông 90 độ thành 3 phần bằng nhau.

Hôm sau thầy hỏi cả lớp: -Ai xung phong lên bảng trình bày cách chia góc vuông 90 độ thành 3 phần bằng nhau? Khoảng hơn 30 bạn (hơn 2/3 số học sinh) lớp tôi giơ tay xung phong lên bảng, nhưng tôi may mắn được thầy gọi lên trình bày lời giải.

Trình bày lời giải xong tôi hỏi thầy: -Thưa thầy, làm sao ta có thể chia một góc bất kỳ thành 3 phần bằng nhau? Thầy giáo tôi trả lời: -Chia một góc bất kỳ thành 3 phần bằng nhau là việc rất đơn giản, bất cứ bác thợ mộc nào cũng làm được, nhưng nếu chỉ dùng thước kẻ và compa khì không ai làm được!

Thầy giáo tôi còn nói thêm: -Nếu chỉ dùng thước kẻ và compa thi ngay việc chia một góc 60 độ thành 3 phần băng nhau cũng không ai làm được.

Và buổi học đó của lớp tôi trở nên rất sôi nổi và thú vị về việc chia một góc thành 3 phần bằng nhau. Sau đó thầy giảng cho chúng tôi nghe về sự khác nhau của các bài toán "không làm được" và "chưa làm được": Bài toán "chưa làm được" là bài toán chưa ai tìm ra lời giải, còn bài toán "không làm được" là bài toán đã có lời giải rồi và "không làm được" chính là đáp số cuối cùng của bài toán. Cả lớp tôi đều tin lời thầy giáo và không có bạn nào trong lớp tôi trở thành Cụ Trí Uẩn!

Bài toán "chia 3 một góc" tưởng như dễ đến mức những đứa trẻ con ít được học hành ở xứ nhà quê cũng hiểu được dễ dàng, nhưng các nhà toán học lại phải mất cả trăm năm mới tìm ra lời giải. Chỉ đến khi có Lý thuyết Galois các nhà toán mới đưa ra câu trả lời chính xác trọn vẹn. Tôi nghĩ cuốn sách Lý thuyết Galois của GS Ngô Việt Trung thật là tuyệt vời.

Lý thuyết Galois đã giải quyết những vấn đề sơ cấp như chia 3 một góc, cầu phương hình tròn, gấp đôi thể tích một hình lập phương,... và cao cấp hơn một chút là tìm nghiệm của một phương trình đa thức có bậc 5 và cao hơn. Đó là các vấn đề tôi biết từ hồi còn học phổ thông. Lúc đó tôi chỉ nghe thầy giáo nói là các vấn đề "không làm được", còn tại sao lại không làm được thì đến khi đọc Lý thuyết Galois tôi mới biết là tại sao?

Thật tiếc là một lý thuyết hay như thế lại đến với cuộc đời tôi quá muộn! Giá ngày xưa tôi học khoa toán ĐHTH Hà Nội mà tôi gặp được một thầy giáo như GS Ngô Việt Trung thì chắc chắn tôi sẽ theo đuổi Lý thuyết Galois trọn đời!

Gauss là "vua toán học", đồng thời ông cũng là nhà thiên văn hàng đầu trong lịch sử thiên văn học của nhân loại. Năm 1805 các nhà thiên văn thế giới đã phát hiện ra 2 hành tinh mà họ đặt tên là Pallas và Juno. Trong khi các nhà thiên văn đang tìm kiếm quỹ đạo của 2 hành tinh Pallas và Juno thì chúng bất ngờ biến mất.

Các nhà thiên văn thế giới đã dùng tất cả các kính thiên văn mạnh nhất thời đó để dò tìm 2 hành tinh Pallas và Juno nhưng không có kết quả.

Điều thú vị là trong khi tất cả các kính thiên văn mạnh nhất đều thất bại, Gauss đã nghĩ ra một thuật toán (mà ngay nay ta gọi thuật toán FFT) và bằng thuật toán FFT Gauss đã chỉ cho các nhà thiên văn thế giới biết là Pallas và Juno sẽ xuất hiện vào vị trí ông đã chỉ định sẵn. Cuối năm 1805 các nhà thiên văn thế giới hồi hộp quan sát vị trí mà Gauss đã chỉ ra trước đó và họ đã nhìn thấy Pallas và Juno đã xuất hiện đúng vào vị trí đó của Gauss.

Sau đó năm 1807 Gauss đã được cử làm giám đốc đài thiên văn Gottingen.

Tôi thấy câu chuyên tìm ra thuật toán FFT của Gauss hay như **một chuyện cổ tích**! Thuật toán để tìm quỹ đạo 2 hành tinh Pallas và Juno của Gauss chính là FFT ngày nay!

Thuật toán của Gauss được ông tìm thấy từ năm 1805, nhưng mãi hơn 250 năm sau, 1965 hai nhà toán học James Cooley và John Tukey mới tiếp tục phát triển và xây dựng thành lý thuyết **Biến đổi Fourier nhanh** FFT. Ý tưởng của Cooley và Tukey hoàn toàn dựa theo thuật toán của Gauss dùng để tính quỹ đạo của 2 hành tinh là Pallas và Juno.