HÌNH HỌC RỐI LƯỢNG TỬ
Đàm Thanh Sơn

TÍNH **DUY LÝ** CỦA **HÀM ĐỘC TÀI**
Ngô Quang Hưng

CUỘC ĐỜI VÀ SỰ NGHIỆP CỦA **GEORGE BOOLE**
SỰ KHỞI ĐẦU CHO **KỶ NGUYÊN KỸ THUẬT SỐ**
Desmond MacHale

NHẬN DẠNG **CHÓ MÈO**
Nguyễn Thanh Bình

VÀ CÁC CHUYÊN MỤC KHÁC

Epsilon

Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

No 06

> *Ta gọi mặt cầu này là giả tưởng vì một nhà du hành vũ trụ rơi tự do vào lỗ đen sẽ không thấy gì ở chỗ này. Tuy nhiên, một khi vượt qua mặt cầu này, người đó sẽ không quay trở lại được. Người đó sẽ đi vào một vùng mà không gian suy sụp vào một "kỳ dị", chỗ mà hình học co lại hoàn toàn. Tới gần điểm kỳ dị nhà du hành vũ trụ sẽ chết bẹp dưới lực hấp dẫn.*
>
> **Hình học rối lượng tử**

> *Thực ra giữa toán học "thuần tuý" và toán học "ứng dụng" không thể vạch ra một ranh giới rõ rệt được. Vì vậy trong toán học không thể phân ra một lớp người tối cao thiên về vẻ đẹp hoàn thiện của toán học và chỉ chú ý đến thiên hướng đó, và những người phục vụ cho họ.*
>
> **Logic của Toán học ứng dụng**

13

THÁNG 12

Epsilon

Chủ biên:

TRẦN NAM DŨNG

Biên tập viên:

VÕ QUỐC BÁ CẨN

TRẦN QUANG HÙNG

NGUYỄN VĂN HUYỆN

NGUYỄN TIẾN LÂM

LÊ PHÚC LỮ

NGUYỄN TẤT THU

ĐẶNG NGUYỄN ĐỨC TIẾN

15

LỜI NGỎ CHO EPSILON SỐ 6

Ban Biên tập Epsilon

Cuối cùng số 6 của Tạp chí Epsilon cũng đã đến tay các bạn. Số 6 của năm đầu tiên.

Bắt đầu từ ngày 13/2/2015, rồi đến hẹn lại lên, cứ vào ngày 13 của những tháng chẵn, Epsilon-tạp chí online của những người yêu toán lại được ra mắt hàng trăm, hàng ngàn độc giả.

Và để có được sự đều đặn với nội dung ngày càng phong phú và hình thức ngày càng đẹp hơn như hiện nay là sự nỗ lực của cả một tập thể: từ những người viết bài đến các biên tập viên. Tất cả đều làm việc trên tinh thần tự nguyện và mong muốn đóng góp cho cộng đồng.

Đặc biệt, dù hoàn toàn dựa trên tinh thần tự nguyên, không có quyền lợi vật chất, cũng như bất cứ ràng buộc pháp lý nào nhưng tất cả mọi người đều làm việc với tinh thần trách nhiệm cao, có những đêm phải thức trắng để hoàn tất bài viết hay hoàn chỉnh phần biên tập.

Qua các số báo, Epsilon đã dần có thêm được nhiều tác giả hơn, nhiều cộng tác viên hơn và nhiều độc giả hơn. Đội ngũ biên tập cũng được bổ sung về số lượng và nâng cao về chất lượng, vừa đảm bảo được công tác biên tập đúng tiến độ, vừa chủ động tạo nguồn bài dồi dào cho các số báo.

Chúng ta đã đi qua được 1 năm đầy khó khăn nhưng cũng thật tự hào. Có năm đầu tiên, có nghĩa là sẽ có năm thứ 2, thứ 3...

Và để Epsilon được tiếp nối, nguồn năng lượng lớn nhất đối với chúng tôi vẫn là sự ủng hộ của các độc giả. Những sự góp ý, bình luận, đặt hàng từ phía các độc giả sẽ là động lực cho Epsilon tiếp tục được ấn hành. Đặc biệt, ban biên tập luôn chờ đón các bài viết từ phía độc giả. Chúng tôi tin rằng những bài viết của các bạn chắc chắn sẽ làm tăng thêm sự phong phú của tạp chí, về nội dung đề tài lẫn phong cách hành văn.

Đi nhiều người ta sẽ đi rất xa.

Tháng 12, 2015,
Ban Biên tập Epsilon.

MỤC LỤC

Ban Biên tập Epsilon

Lời ngỏ cho Epsilon số 6 3

Ngô Quang Hưng

Tính duy lý của hàm độc tài 7

Lý Ngọc Tuệ

Xấp xỉ Diophantine với độ đo - Định lý Khintchine 21

Đàm Thanh Sơn

Hình học rối lượng tử 33

I. I. Blekman, A. D. Myshkis, Ya. G. Panovko

Logic của toán học ứng dụng 39

Desmond MacHale

Cuộc đời và sự nghiệp của George Boole - Sự khởi đầu cho kỷ nguyên kỹ thuật số 55

Bình Nguyễn

Nhận dạng chó mèo 59

Đặng Nguyễn Đức Tiến

Bài toán cân tiền 67

Nguyễn Tiến Dũng

Xung quanh bài toán hình học trong kỳ thi VMO 2014 77

Nguyễn Ngọc Giang

Mối liên hệ Euclide, Afin và Xạ ảnh qua một bài toán trong sách "Các phương pháp giải toán quá các kỳ thi Olympic" 89

Trần Quang Hùng

Về bài hình học thi IMO năm 2009 - Ngày thứ hai 103

Trần Minh Hiền

Thuật toán tham lam trong xây dựng cấu hình tổ hợp 109

Lưu Bá Thắng

Định đề Bertrand 125

Kiều Đình Minh

Chuỗi điều hòa 133

Yimin Ge

Số dư của $A.a^x + Bx$ 149

Trần Nam Dũng

Bài toán hay lời giải đẹp 153

Trần Nam Dũng

Các vấn đề cổ điển và hiện đại 157

Ban Biên tập Epsilon

Kỳ thi Toán quốc tế Formula of Unity - The Third Millennium 173

TÍNH DUY LÝ CỦA HÀM ĐỘC TÀI

Ngô Quang Hưng
(Đại học Buffalo, Mỹ)

Bài viết này chứng minh một định lý kinh điển của Kinh Tế học, gọi là định lý bất khả thi của Arrow. Định lý có nhiều chứng minh ngắn gọn, chỉ khoảng nửa trang. Nhưng chúng ta sẽ chọn một con đường tương đối dài để đến cùng kết luận. Đích đến, như người ta thường nói, đôi khi không thú vị bằng đường đi.

1. Định lý bất khả thi của Arrow

Marquis de Condorcet là một triết gia, nhà toán học, và nhà khoa học chính trị người Pháp sống ở thế kỷ 18. Năm 1785, ông viết bài "Essay on the Application of Analysis to the Probability of Majority Decisions" có ảnh hưởng sâu rộng đến lý thuyết chọn lựa xã hội, kinh tế học, và đến các thuật toán xếp hạng quảng cáo trên mạng. Condorcet là một trong những người đầu tiên mang (tính chặt chẽ của) Toán học vào nghiên cứu khoa học xã hội. Ông tham gia cách mạng Pháp, viết vài quyển sách bất hủ ủng hộ cho tinh thần Khai Sáng. Ông bị bắt giam gần một năm, và mất trong tù. Nhiều khả năng là do tự uống thuốc độc.

Ông khám phá ra "nghịch lý Condorcet". Đại để cái nghịch lý này như sau. Giả sử nhà nước cần đầu tư vào ngành giao thông (GT), y tế (YT), hoặc giáo dục (GD). Nhà nước làm trưng cầu dân ý. Mỗi người dân bỏ phiếu xếp hạng của riêng mình về tầm quan trọng của ba ngành này. Ví dụ, anh A bảo tôi nghĩ GD trước, rồi đến GT, rồi đến YT. Anh B chọn YT > GD > GT, vân vân. Thì khả năng sau đây có thể xảy ra: đa số mọi người xếp GD trên YT, đa số xếp YT trên GT, **và** đa số xếp GT trên GD. Đó là tính phi lý của chọn lựa xã hội. Khi biết cái nghịch lý Condorcet rồi, chúng ta đọc các thống kê xã hội cẩn thận hơn. Obama với McCain cãi nhau, đều lôi thống kê ra. Một ông bảo phải đầu tư cái này do đa số dân chúng ủng hộ cái này hơn cái kia, McCain bảo cái kia hơn cái nọ. Chúng ta nên nghĩ ngay đến khả năng vô lý của chọn lựa xã hội. Có khả năng cả Obama lẫn McCain đều đúng, nhưng đều ... vô lý.

Đến năm 1950, Kenneth Arrow (giải Nobel kinh tế 1972) viết một bài báo rất nổi tiếng về các luật bầu cử [1], trong đó ông chứng minh một định lý nay ta gọi là định lý bất khả thi Arrow[1]. Định lý Arrow nói rằng "hàm độc tài" là luật bầu cử duy nhất có tính "duy lý" tuyệt đối. Để phát biểu định lý này, ta định nghĩa thế nào là "độc tài", và thế nào là "duy lý".

Để đơn giản (nhưng không mất tính tổng quát) ta giả sử xã hội có 3 chọn lựa A-B-C cần xếp hạng bằng bầu cử (GD-YT-GT, hoặc anh Ba-anh Tư-anh Sáu, hoặc bánh mì-sữa-bia). Mỗi phiếu bầu gồm ba đề mục. Đề mục thứ nhất xếp hạng A hơn B hoặc B hơn A. Đề mục thứ hai xếp hạng cặp B, C; và đề mục thứ ba xếp hạng cặp A và C. Nếu anh nào xếp hạng vòng tròn (A hơn B, B hơn C, và C hơn A) thì anh ấy bị chập cheng, không cho bầu. Nói cách khác, ta giả sử tất cả các phiếu bầu đều hợp lệ, nghĩa là không phiếu nào xếp hạng vòng tròn.

[1] Arrow's impossibility theorem

Sau khi có tất cả các phiếu bầu thì xã hội sẽ dựa trên một *luật bầu cử* để có *xếp hạng toàn xã hội* của bộ ba A, B, và C, nghĩa là quyết định xem xã hội thích chọn lựa nào hơn giữa A và B, giữa B và C, và giữa C và A. Luật bầu cử sẽ phải thỏa mãn một số tiên đề nhất định:

1. *Tính độc lập của các chọn lựa không liên quan*[2] (IIA): việc xã hội xếp hạng A hơn B hay B hơn A thì độc lập với việc mọi người xếp C cao thấp thế nào.

2. *Tính nhất trí* (còn gọi là *hiệu suất Pareto*): nếu mọi người đều thích A hơn B thì xã hội cũng phải chọn A hơn B.

3. *Tính duy lý*: xã hội không thể xếp hạng quẩn quanh theo vòng tròn (A hơn B, B hơn C, và C hơn A).

4. *Không độc tài*: xếp hạng của xã hội không thể luôn giống hệt như xếp hạng của một anh Tám Tàng nào đó mà không đếm xỉa gì đến phần còn lại của xã hội.

Arrow chứng minh rằng không có luật bầu cử nào thỏa cả bốn điều kiện trên, nếu như tất cả các phiếu cá nhân đều hợp lệ. (Bài báo của Arrow khá là dài dòng văn tự. Với mỗi giả thuyết, tiên đề, ông lại đá sang triết lý và vài kết quả trước đó.) Định lý của Arrow thật sự là một định lý mang tính tổ hợp, và có các chứng minh tổ hợp ngắn gọn.

Phần mô tả ở trên không đủ cụ thể về mặt Toán học để ta chứng minh. Một kỹ năng quan trọng mà người làm Toán ứng dụng cần có là khả năng "Toán học hoá" đối tượng được nghiên cứu trong ngành ứng dụng. Bước "Toán học hoá" vấn đề này đôi khi quan trọng không kém bước giải quyết vấn đề.

Một mô hình Toán học của vấn đề chọn lựa xã hội này như sau. Giả sử có n phiếu bầu. Phiếu bầu thứ i được đại diện bằng một bộ ba $(x_i, y_i, z_i) \in \{-1, 1\}^3$, trong đó

$$
\begin{aligned}
x_i &= \begin{cases} 1 & \text{nếu phiếu } i \text{ chọn } A > B \\ -1 & \text{nếu phiếu } i \text{ chọn } B > A \end{cases} \\
y_i &= \begin{cases} 1 & \text{nếu phiếu } i \text{ chọn } B > C \\ -1 & \text{nếu phiếu } i \text{ chọn } C > B \end{cases} \\
z_i &= \begin{cases} 1 & \text{nếu phiếu } i \text{ chọn } C > A \\ -1 & \text{nếu phiếu } i \text{ chọn } A > C \end{cases}
\end{aligned}
$$

(Lý do ta chọn $\{-1, 1\}$ thay vì $\{0, 1\}$, $\{\mathsf{true}, \mathsf{false}\}$ sẽ trở nên rõ ràng hơn dưới đây.) Định nghĩa hàm $\mathsf{NAE} : \{-1, 1\}^3 \to \{0, 1\}$ như sau[3]: $\mathsf{NAE}(a, b, c) = 0$ nếu và chỉ nếu $a = b = c$. Khi đó, phiếu (x_i, y_i, z_i) là phiếu hợp lệ nếu $\mathsf{NAE}(x_i, y_i, z_i) = 1$. Với n phiếu bầu thì ta có ba vectors $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^n$, $\mathbf{y} = (y_i)_{i=1}^n$, $\mathbf{z} = (z_i)_{i=1}^n \in \{-1, 1\}^n$. Bây giờ ta mô hình xem bốn tính chất trên phát biểu về mặt toán học như thế nào:

[2] Independence of irrelevant alternatives

[3] NAE là viết tắt của "not all equal".

1. Tính chất IIA nói rằng chọn lựa của xã hội có thể đúc kết bằng ba hàm số $f, g, h : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, trong đó

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= \begin{cases} 1 & \text{nếu xã hội chọn } A > B \\ -1 & \text{nếu xã hội chọn } B > A \end{cases} \\
g(\mathbf{y}) &= \begin{cases} 1 & \text{nếu xã hội chọn } B > C \\ -1 & \text{nếu xã hội chọn } C > B \end{cases} \\
h(\mathbf{z}) &= \begin{cases} 1 & \text{nếu xã hội chọn } C > A \\ -1 & \text{nếu xã hội chọn } A > C \end{cases}
\end{aligned}
$$

2. Tính nhất trí nói là với mọi $x \in \{-1,1\}$, thì $f(x,\dots,x) = x$, $g(x,\dots,x) = x$ và $h(x,\dots,x) = x$.

3. Tính duy lý nói là không tồn tại bộ phiếu hợp lệ $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ mà lại cho ra chọn lựa xã hội không hợp lệ $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{y}) = h(\mathbf{z})$.

4. Tính không độc tài mô hình hoá như sau. Với $i \in [n]$, gọi Dict_i là hàm độc tài[4] thứ i, trả về phiếu bầu của x_i, nghĩa là $\mathsf{Dict}_i(\mathbf{x}) = x_i$. Tính không độc tài nói rằng $f, g, h \neq \mathsf{Dict}_i$, với mọi $i \in [n]$.

Từ tính nhất trí và tính duy lý có thể suy ra rằng $f \equiv g \equiv h$. Ta lập luận như sau. Xét bộ ba $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$, và $\mathbf{z} = (f(\mathbf{x}), \cdots, f(\mathbf{x}))$. Do tính nhất trí ta có $h(\mathbf{z}) = f(\mathbf{x})$. Như vậy để cho chọn lựa xã hội có tính duy lý thì $g(\mathbf{y}) \neq f(\mathbf{x})$; nghĩa là $g(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ với mọi $\mathbf{x}$. Tương tự ta có $g(-\mathbf{x}) = -h(\mathbf{x})$ với mọi $\mathbf{x}$. Do đó $f \equiv h$. Lập luận đối xứng dẫn đến $f \equiv g \equiv h$.
Tóm lại, chọn lựa của toàn xã hội có thể được mô tả bằng **một** hàm số $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$. Và ta cần tìm một hàm f sao cho

- Nếu $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ là bộ phiếu hợp lệ thì $\mathsf{NAE}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}), f(\mathbf{z})) = 1$. (Đây là tính duy lý chủa chọn lựa xã hội.)

- $f \neq \mathsf{Dict}_i$ với mọi $i \in [n]$. (Hàm chọn lựa xã hội không nên là hàm độc tài.)

Định lý Arrow nói rằng không có hàm f nào thoả hai tính chất trên cùng một lúc. (Lưu ý rằng tất cả các hàm độc tài đều là các hàm duy lý!) Chúng ta sẽ chứng minh định lý Arrow bằng phân tích Fourier của các hàm nhị phân. Chứng minh này là phát kiến tuyệt vời của Gil Kalai [2]. Việc nghiên cứu các hàm nhị phân (còn gọi là hàm Bool[5]) là một đề tài quan trọng trong lý thuyết máy tính. Nó quan trọng một cách hiển nhiên vì máy tính xử lý các bít nhị phân $\{0,1\}$. Nhưng cụ thể hơn, môn giải tích các hàm nhị phân có ứng dụng rất cụ thể trong lý tuyết tính toán hiện đại. Phương pháp giải tích để nghiên cứu các hàm nhị phân là ta tìm cách viết chúng thành tổ hợp tuyến tính của các hàm đơn giản hơn. Để làm được điều này ta cần biến đổi Fourier rời rạc (DFT). Để mô tả DFT một cách tổng quát ta cần lý thuyết biểu diễn nhóm. Do đó ta bắt đầu với lý thuyết biểu diễn.

[4] Dictator
[5] Boolean functions

2. Sơ lược lý tuyết biểu diễn nhóm

Lý thuyết biểu diễn nhóm cho phép ta nghiên cứu các nhóm (trong đại số trừu tượng) dùng đại số tuyến tính. (Đại số tuyến tính vạn tuế!) Bằng cách này, một số vấn đề, đặc tính của các nhóm trừu tượng có thể được giải quyết và tìm hiểu dùng các công cụ của đại số tuyến tính. Từ góc nhìn tổ hợp, quyển "Nhóm đối xứng" của Bruce Sagan rất thú vị [3].

Trước hết ta định nghĩa *biểu diễn ma trận*[6] của một nhóm. Một biểu diễn ma trận n chiều của một nhóm G là một phép đồng cấu[7] $\rho : G \to \mathsf{GL}_n(\mathbb{F})$ trong đó $\mathbb{F}$ là một trường đại số, ví dụ như trường số phức, còn $\mathsf{GL}_n(\mathbb{F})$ là nhóm tuyến tính tổng quát[8] bậc n trên trường $\mathbb{F}$. Tổng quát hơn, ta không nhất thiết phải biểu diễn nhóm bằng các ma trận. Gọi V là một không gian vector có số chiều hữu hạn. Gọi $\mathsf{GL}(V)$ là nhóm các biến đổi tuyến tính trên V (nghĩa là $\mathsf{GL}(V)$ là tập hợp các ánh xạ tuyến tính khả nghịch). Một phép biểu diễn của nhóm G trên không gian V là phép đồng cấu

$$\rho : G \to \mathsf{GL}(V).$$

Nói cách khác, một biểu diễn là một luật gán: ta gán cho mỗi phần tử g của nhóm G một ánh xạ $\rho(g) \in \mathsf{GL}(V)$ sao cho phép gán này tương thích với các hoạt động của nhóm G. Nếu có một bộ vector cơ sở của V thì ta có thể dễ dàng chuyển ρ thành một phép biểu diễn ma trận. (Trong trường hợp đó, mỗi phần tử $g \in G$ sẽ có tương ứng một ma trận khả nghịch $\rho(g)$.)

Ví dụ 1. *Xét nhóm $G = \mathbb{Z}_n$. Ánh xạ $\rho : G \to \mathsf{GL}_m(\mathbb{R})$ gán mỗi phần tử $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ một ma trận $\rho(k)$ khả nghịch $m \times m$, sao cho, với mọi $j, k \in \mathbb{Z}_n$, ta có*

$$\rho(j + k) = \rho(j)\rho(k).$$

(Đây là định nghĩa của phép đồng cấu.) Do đó, $\rho(0)$ phải là ma trận đơn vị. Và, với mọi k ta có $\rho(k) = \rho(1)^k$. Nghĩa là, sau khi đã chọn ma trận khả nghịch $\rho(1)$ sao cho $\rho(1)^n = \rho(0) = \mathbf{I}_m$ (nếu được) thì phần còn lại của ρ là hoàn toàn xác định.

Trong phần còn lại của bài này, để đơn giản vấn đề ta chỉ xét V là một không gian tuyến tính m chiều trên trường số phức (hiểu là $V = \mathbb{C}^m$). Như hầu hết các đối tượng trừu tượng khác trong toán học, ta tìm cách chia một phép biểu diễn nhóm thành các thành phần nhỏ hơn, cho đến khi "tối giản". Từ đó, ta có thể nghiên cứu một cấu trúc lớn bằng các cấu trúc tối giản, với hy vọng là nhiều câu hỏi dễ trả lời hơn.

Một không gian con W của V được gọi là *G-bất biến* nếu các phần tử gủa G tương ứng với các ánh xạ từ W vào W. Cụ thể hơn, nếu với mọi $\mathbf{w} \in W$ và $g \in G$ ta có $\rho(g)\mathbf{w} \in W$ thì W được gọi là G-bất biến. Tất nhiên, nếu W là G-bất biến thì ánh xạ thu hẹp của ρ trên W cũng là một biểu diễn của G.

Hai không gian bất biến tầm thường là V và $\{\vec{0}\}$. Nếu ngoài hai không gian tầm thường này ra, V không còn không gian con G-bất biến nào khác, thì ρ được gọi là một *biểu diễn tối giản* của G.

Nếu V là tổng trực tiếp[9] của hai không gian con G-bất biến W_1 và W_2, ký hiệu là $V = W_1 \oplus W_2$, thì phép biểu diễn ρ trên V là tổng trực tiếp của ρ_1 và ρ_2, viết là $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$, trong đó ρ_1 và ρ_2

[6] Matrix representation
[7] Homomorphism
[8] General linear group
[9] Direct sum

là các thu hẹp của ρ trên W_1 và W_2, theo thứ tự. Nếu ρ là phép biểu diễn tối giản ρ không phải là tổng trực tiếp của các phép biểu diễn khác, ngoại trừ cái tổng tầm thường $V \oplus \{\vec{O}\}$.

Ví dụ 2. *Xét nhóm $G = \mathbb{Z}_{2n}$, và ánh xạ $\rho : G \to \mathsf{GL}_2(\mathbb{C})$ định nghĩa như sau:*

$$\begin{aligned}\rho(0) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2 \\ \rho(1) &= \begin{bmatrix} e^{\pi i/n} & 0 \\ 0 & -e^{\pi i/n} \end{bmatrix} \\ \rho(k) &= \rho(1)^k,\ k \in \mathbb{Z}_{2n}.\end{aligned}$$

(Lưu ý rằng i là số phức và $\rho(1)^{2n} = \rho(0)$ như ý.) Trong ví dụ này thì $V = \mathbb{C}^2$. Xét

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{C} \right\} \qquad\qquad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} : b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Dễ thấy W_1 là một không gian G-bất biến, tại vì với mọi $k \in \mathbb{Z}_{2n}$ và mọi $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \in W_1$, ta có

$$\rho(k)\mathbf{w} = \begin{bmatrix} e^{k\pi i/n} & 0 \\ 0 & -e^{k\pi i/n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{k\pi i/n} \\ 0 \end{bmatrix} \in W_1.$$

Tương tự, W_2 cũng bất biến. Ngoài ra $\mathbb{C}^2 = W_1 \oplus W_2$ vì

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

với mọi vector $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$. Vì thế, ρ không phải là biểu diễn tối giản. Hai thu hẹp ρ_1 và ρ_2 của ρ định nghĩa như sau:

$$\rho_1(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad \rho_2(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho_1(k) = \begin{bmatrix} e^{\pi i k/n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad \rho_2(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -e^{\pi i k/n} \end{bmatrix}$$

là các biểu biễn tối giản có số chiều bằng 1.

Đến đây ta có đủ kiến thức để phát biểu một định lý cực kỳ đơn giản và quan trọng của lý thuyết biểu diễn: định lý Maschke. Định lý này tương tự như định lý "phân tích ra thừa số nguyên tố", hoặc định lý cơ bản của đại số rằng các đa thức đều là tích của đơn thức tuyến tính. Heinrich Maschke (1853–1908) là một nhà Toán học người Đức. Ông từng theo học các người khổng lồ Weierstrass, Kummer và Kronecker. Tốt nghiệp năm 1880, không tìm được vị trí ở Đức, ông di cư sang Mỹ, nhận được một vị trí trong khoa Toán mới mở của Đại Học Chicago, nơi một nhà Toán học lừng danh của Việt Nam hiện nay đang làm việc; anh cũng là một chuyên gia về lý thuyết biểu diễn.

Định lý 2.1 (Định lý Maschke). *Bất kỳ phép biểu diễn (phức) nào trên một nhóm hữu hạn G đều là tổng của các phép biểu diễn tối giản.*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh rằng, nếu ρ chưa tối giản thì $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ và ρ_1, ρ_2 có số chiều nhỏ hơn. Giả sử $W \subseteq V$ là một không gian con G-bất biến không tầm thường. Ta chứng minh rằng tồn tại $W^\perp$ sao cho $W \oplus W^\perp = V$ và $W^\perp$ cũng G-bất biến. Gọi $\{\cdot,\cdot\}$ là một dạng Hermit[10] tuỳ ý trên không gian V, dễ chứng minh rằng dạng song tuyến sau đây sau đây

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \{\rho(g)\mathbf{v}, \rho(g)\mathbf{w}\}$$

là G-bất biến: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \rho(g)\mathbf{v}, \rho(g)\mathbf{w} \rangle$, $\forall g \in G, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. Từ đó, không gian trực giao $W^\perp$ của W định nghĩa theo dạng song tuyến này[11] cũng là G-bất biến. □

Như vậy, ta có thể nghiên cứu các phép biểu diễn dùng các phép biểu diễn "đơn giản hơn" một chút. Tuy nhiên, một phép biểu diễn vẫn là một đối tượng rất phức tạp để mô tả (nó là một phép đồng cấu thỏa mãn một số tính chất đại số, hoặc cũng có thể xem nó là một ma trận nếu ta chọn trước một hệ cơ sở trên không gian V). Thậm chí, có bao nhiêu phép biểu diễn (không đẳng cấu[12] với nhau) ta cũng không biết. Có thể có vô hạn các phép biểu diễn không? Làm thế nào để phân loại chúng?

Để phân loại các phép biểu diễn, có một cách để loại bỏ đa số thông tin về phép biểu diễn, chỉ giữ lại một vài con số! Các con số này chứa rất nhiều thông tin về phép biểu diễn, và ta có thể dùng chúng để phân loại các phép biểu diễn. Kết quả này là một trong những định lý đẹp nhất trong đại số.

Các con số "kỳ diệu" này được chứa trong một hàm gọi là *hàm đặc trưng*[13] của phép biểu diễn. Hàm đặc trưng χ của phép biểu diễn ρ trên nhóm G là một hàm $\chi : G \to \mathbb{C}$ định nghĩa như sau

$$\chi(g) = \mathsf{trace}(\rho(g)).$$

(Nhớ rằng $\rho(g)$ là một toán tử tuyến tính khả nghịch trên không gian phức V, cái *vết*[14] $\mathsf{trace}(\rho(g))$ của $\rho(g)$ là tổng các trị đặc trưng của nó. Hàm đặc trưng χ cũng là một vector mà các tọa độ được đánh chỉ số bởi các thành viên của nhóm G.

Ví dụ 3. *Lại xét nhóm $G = \mathbb{Z}_n$ và một biểu diễn $\rho : G \to \mathsf{GL}_m(\mathbb{C})$. Gọi χ là hàm đặc trưng của biểu diễn này, thì*

$$\chi(0) = \mathsf{trace}(\rho(0)) = \mathsf{trace}(\mathbf{I}_m) = m.$$

Và với mọi $k \in \mathbb{Z}_n$ ta có

$$\chi(k) = \mathsf{trace}(\rho(k)) = \mathsf{trace}(\rho(1)^k) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k$$

trong đó λ_i là các trị đặc trưng của $\rho(1)$. Xét vector đặc trưng $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^m$ tương ứng với λ_i, thì $\rho(1)\mathbf{v} = \lambda_i\mathbf{v}$. Do đó, $\rho(1)^n\mathbf{v} = \lambda_i^n\mathbf{v}$. Mà $\rho(1)^n = \mathbf{I}_m$. Do đó, λ_i là một trong các căn bậc n của 1.

[10] Hermitian form
[11] $W^\perp := \{\mathbf{v} \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0, \forall \mathbf{w} \in W\}$
[12] Isomorphic
[13] Character
[14] Trace

Tổng quát hơn, định nghĩa số chiều của một hàm đặc trưng là số chiều của không gian V của phép biểu diễn. Định nghĩa một tích vô hướng Hermit giữa các hàm đặc trưng như sau:

$$\langle \chi, \chi' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \chi'(g). \tag{2.1}$$

($\overline{a}$ là liên hợp phức của a.) Hàm đặc trưng của phép biểu diễn chứa *cực kỳ nhiều* thông tin về phép biểu diễn. Sau đây là vài kết luận quan trọng:

- $\chi(\mathbf{1})$ chính là số chiều của phép biểu diễn. (Lưu ý rằng $\mathbf{1}$ là phần tử đơn vị của nhóm G. Nếu $G = \mathbb{Z}_n$ thì $\mathbf{1}$ là số nguyên 0.)
- $\chi(g) = \chi(hgh^{-1})$, với mọi phần tử $g, h \in G$, nghĩa là hàm đặc trưng có giá trị như nhau trên mỗi lớp liên hợp[15] của nhóm.
- $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$
- Hàm đặc trưng của $\rho \oplus \rho'$ là tổng $\chi + \chi'$ của các hàm đặc trưng thành phần χ, χ'.
- Gọi $N = |G|$, và $\rho_1, \rho_2, \ldots$ là các đại diện của các lớp đẳng cấu của các phép biểu diễn tối giản trên G, và gọi χ_i là hàm đặc trưng của ρ_i. Ta có:
  - Các vectors χ_i vuông góc với nhau và có chiều dài đơn vị. Gọi c là tổng số các lớp liên hợp của nhóm. Gọi $\mathcal{C}$ là không gian vector của các hàm $f : G \to \mathbb{C}$ sao cho f có giá trị như nhau trên mỗi lớp liên hợp của G. Ta có, các hàm đặc trưng χ_i tạo thành một hệ cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{C}$. (Ta sẽ dùng tính chất này để nói thêm về biến đổi Fourier rời rạc trên các nhóm Abel trong đề mục tới.)
  - Tổng số các lớp đẳng cấu của các phép biểu diễn tối giản bằng với tổng số các lớp liên hợp của nhóm G. Gọi r là tổng số này.
  - Gọi d_i là số chiều của ρ_i, ta có d_i chia hết cho N, và

    $$N = d_1^2 + \cdots + d_r^2.$$
- Một hàm đặc trưng bất kỳ của nhóm đều có thể biểu diễn (theo một cách duy nhất) thành tổ hợp tuyến tính của các hàm đặc trưng tối giản.
- Hai phép biểu diễn có hàm đặc trưng giống nhau thì đẳng cấu với nhau
- Một hàm đặc trưng χ là tối giản nếu và chỉ nếu nó có chiều dài đơn vị (nghĩa là $\langle \chi, \chi \rangle = 1$)
- Nếu G là một nhóm Abel thì các biểu diễn tối giản của nó đều có số chiều bằng 1.

Có một hệ quả tuyệt đẹp của lý thuyết biểu diễn nhóm khi G là nhóm các hoán vị của n phần tử. Gọi f^λ là số các *standard Young tableaux* dạng λ. Ta có:

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$$

Định lý này cũng có thể chứng minh bằng giải thuật Robinson-Schensted.

[15] Conjugacy class

3. Biến đổi Fourier rời rạc

Tôi học về biến đổi Fourier rời rạc (DFT) lần đầu tiên vào khoảng năm 1993. Học xong thấy rất hoang mang, theo kiểu: nếu lấy vector này, tính toán thế này, thì ra các hệ số thế kia, nhưng không hiểu ý tưởng nằm sau các công thức đó. Sau khám phá ra là DFT chẳng qua là một phép thay đổi cơ sở trong không gian tuyến tính. Từ đó thấy mọi thứ rõ ràng, dễ hiểu hẳn ra.

3.1. Biểu diễn nhóm Abel hữu hạn

Các biểu diễn tối giản của một nhóm Abel bất kỳ đều là các biểu diễn với số chiều bằng một. Nếu nhóm có n phần tử thì có n hàm đặc trưng trực giao. Nhóm tuần toàn là một nhóm Abel. Nhóm tuần hoàn $\mathbb{Z}_n$ có đúng n hàm đặc trưng tối giản $\chi_a, a \in \mathbb{Z}_n$. Mỗi hàm đặc trưng χ_a là một vector trong trường vector phức $\mathbb{C}^n$, định nghĩa là $\chi_a(b) = \omega_n^{ab}$, trong đó $\omega_n = e^{2\pi i/n}$ là căn nguyên thuỷ. Các hàm đặc trưng này là một hệ trực chuẩn theo tích Hermit (2.1):

$$\langle \chi_a, \chi_b \rangle = \frac{1}{n} \sum_{c \in \mathbb{Z}_n} \overline{\chi_a(c)} \chi_b(c) = \delta_{ab}.$$

($\delta_{ab} = 1$ nếu $a = b$ và 0 nếu $a \neq b$.)
Định lý cơ bản của các nhóm Abel hữu hạn nói rằng các nhóm Abel hữu hạn G đều có thể viết dưới dạng tổng trực tiếp của các nhóm tuần hoàn: $G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$. Các biểu diễn tối giản của nhóm G là tăng sờ của các biểu diễn tối giản của các nhóm tuần hoàn $\mathbb{Z}_{m_i}$. Các hàm đặc trưng tối giản của nhóm G là tích tăng sờ của các hàm đặc trưng tối giản của các nhóm tuần hoàn $\mathbb{Z}_{m_i}$. Với mỗi phần tử $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_k) \in Z_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$, ta có một hàm đặc trưng tối giản $\chi_{\mathbf{a}}$ của nhóm G định nghĩa như sau: với một “tọa độ" $\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_k) \in Z_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$ thì

$$\chi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \prod_{i=1}^{k} \omega_{m_i}^{a_i b_i} = \omega_{m_1}^{a_1 b_1} \cdots \omega_{m_k}^{a_k b_k}.$$

Một trường hợp đặc biệt của nhóm Abel hữu hạn rất quan trọng trong bài này và trong khoa học Máy Tính nói chung là là $G = \mathbb{Z}_2^n = \{0,1\}^n$. Mỗi phần tử của G là một đỉnh của khối lập phương n-chiều, là một phép gán sự thật[16] vào n biến nhị phân, hoặc là một tập con $S \subseteq [n]$ trong đó S là tập các tọa độ bằng 1 của phần tử. Ở đây, nhóm G có $N = 2^n$ phần tử, và vì thế N hàm đặc trưng. Do $\omega_2 = -1$, với mỗi cặp $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}_2^n$ ta có $\chi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = (-1)^{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}$.

Thay vì dùng $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ để đánh số các hàm đặc trưng và các tọa độ của chúng, ta có thể dùng các tập con A, B của $[n]$ để đánh chỉ số, trong đó $A = \{i \mid a_i = 1\}$, và $B = \{i \mid b_i = 1\}$. Theo cách này, bộ các hàm đặc trưng có thể định nghĩa bằng $\chi_A(B) = (-1)^{|A \cap B|}$. Còn nếu chúng ta dùng $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}_2^n$ làm tham số thì $\chi_A(\mathbf{b}) = (-1)^{\sum_{i \in A} b_i}$. Bạn nên làm quen với việc chuyển qua lại giữa các tập con và các vectors của $\mathbb{Z}_2^n$.

Lý do chính chúng ta quan tâm đến các hàm đặc trưng tối giản của nhóm $\mathbb{Z}_2^n$ là như sau. Ta cần nghiên cứu các hàm nhị phân gồm n biến nhị phân kiểu như $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Mỗi hàm loại này có thể xem là một vector trong không gian $\{0,1\}^N$. Dĩ nhiên, chúng cũng là các vectors trong không gian $\mathbb{R}^N$ và $\mathbb{C}^N$. Như đã phân tích ở trên, các hàm đặc trưng tối giản là một cơ sở trực

[16] Truth assignment

chuẩn của không gian $\mathbb{C}^N$. Vì thế, một hàm nhị phân n biến bất kỳ, nếu viết thành một vector trong không gian $\mathbb{C}^N$, đều là tổ hợp tuyến tính của các hàm đặc trưng tối giản.

Thay vì làm việc trên không gian vector $\mathbb{C}^N$, một cách tương đương chúng ta cũng có thể làm việc trên không gian (tuyến tính) của hàm số $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{C}$. Hàm $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{C}$ bất kỳ đều có thể biểu diễn dưới dạng

$$f(\mathbf{y}) = \sum_{S \subseteq [n]} \hat{f}_S \chi_S(\mathbf{y}) = \sum_{S \subseteq [n]} \hat{f}_S (-1)^{\sum_{i \in S} y_i}.$$

Để cái đám y_i trên số mũ thì hơi khó chịu. Chúng ta đổi biến. Đặt $x_i = (-1)^{y_i}$. Nghĩa là nếu $y_i = 0$ (FALSE) thì $x_i = 1$, còn $y_i = 1$ (TRUE) thì $x_i = -1$. Thì ta có phát biểu sau đây:

Bổ đề 1. *Mọi hàm $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{C}$ đều có thể viết dưới dạng*

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{S \subseteq [n]} \hat{f}_S \chi_S(\mathbf{x}),$$

trong đó (lạm dụng ký hiệu một chút) $\chi_S : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ là một hàm đơn thức[17]

$$\chi_S(\mathbf{x}) = \chi_S(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i \in S} x_i.$$

Đám hàm χ_S bây giờ gọi là *hệ cơ sở đơn thức* của các hàm $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{C}$. Nhớ rằng cái hệ cơ sở đơn thức này là một hệ cơ sở trực chuẩn của không gian các hàm $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{C}$. Trong đó, "tích vô hướng" của hai hàm f, g bất kỳ được định nghĩa là

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{\mathbf{x} \in \{-1,1\}^n} f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} = \mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{x}} \left[f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} \right],$$

trong đó trị kỳ vọng ở vế phải tính trên phân bố đều của các vectors $\mathbf{x} \in \{-1,1\}^n$. Chúng ta sẽ thấy rằng hiểu tích vô hướng của hai hàm là trị kỳ vọng của tích như trên rất hữu dụng về sau.

3.2. Biến đổi Fourier rời rạc

Ý tưởng chính của biến đổi Fourier rời rạc chỉ là một phát biểu cơ bản của đại số tuyến tính: các vector trong một không gian vector đều là tổ hợp tuyến tính của một hệ cơ sở bất kỳ của không gian đó. (Xem thêm bài của Terry Tao giới thiệu về biến đổi Fourier nói chung, và quyển sách tuyệt vời của anh Vũ Hà Văn và Terry Tao có các ứng dụng của giải tích đồng điều trong toán tổ hợp [4]).

Trong ngữ cảnh của chúng ta, mỗi hàm $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ đều là tổ hợp tuyến tính của các hàm đơn thức:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{S \subseteq [n]} \hat{f}_S \chi_S(\mathbf{x}),$$

Tổ hợp này là duy nhất. Các hệ số $\hat{f}_S = \langle f, \chi_S \rangle$ gọi là các *hệ số Fourier* của f. Chúng là các số thực vì f và χ_S là các vectors thực. Từ giờ trở đi chúng ta có thểm làm việc luôn trên không gian $\mathbb{R}^N$ thay vì $\mathbb{C}^N$ và không cần cái liên hợp khi tính tích vô hướng của hai vectors nữa. Hệ cơ sở đơn thức χ_S cũng được gọi là *hệ cơ sở Fourier*.

Hai đẳng thức cơ bản nhất của biến đổi Fourier là

[17] Monomial

- đẳng thức Plancherel

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})] = \langle f, g\rangle = \sum_{S\subseteq[n]} \hat{f}_S \hat{g}_S = N\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$$

- và trường hợp đặc biệt là đẳng thức Paserval

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{x}}\left[f^2(\mathbf{x})\right] = \langle f, f\rangle = \sum_{S\subseteq[n]} \hat{f}_S^2.$$

Dễ chứng minh hai đẳng thức trên từ định nghĩa và tính trực chuẩn của các χ_S. (Đôi khi, để đảm bảo tính đối xứng người ta định nghĩa tích vô hướng như trên nhưng chia cho căn bậc hai của N.)

4. Luật bầu cử và biến đổi Fourier cho các hàm nhị phân

4.1. Luật bầu cử nói chung

Trong trường hợp hàm nhị phân $f : \{-1, 1\}^n \to \{-1, 1\}$ thì $f^2(\mathbf{x}) = 1$ với mọi $\mathbf{x}$, vì thế đẳng thức Parseval nói rằng

$$\sum_{S\subseteq[n]} \hat{f}_S^2 = 1.$$

Một hàm nhị phân như một "luật" bầu cử. Có n phiếu bầu x_i cho hai ứng cử viên 1 và -1. Hàm f trả về người thắng cử. Sau đây là một số hàm (luật) bầu cử hay thấy trên thực tế:

- Maj_n là hàm bầu đa số, chỉ định nghĩa với n lẻ, trả về 1 nếu đa số các "phiếu" là 1, và trả về -1 nếu đa số các phiếu là -1.

- Dict_i là hàm độc tài (đã định nghĩa), trả về phiếu bầu của x_i, nghĩa là $\mathrm{Dict}_i(\mathbf{x}) = x_i$.

- Const_1 và Const_{-1} là các hàm hằng số (hay hàm "đảng cử, dân bầu"), luôn trả về giá trị đảng cử 1 hoặc -1.

Ta cũng có thể định nghĩa một số hàm khác như hàm chẵn lẻ, hàm "electoral college" (như trong luật bầu cử của Mỹ), vân vân. Xem bài này của Ryan O'Donnell để thêm một số ví dụ.

Với một luật bầu cử nhất định, chúng ta muốn biết nhiều thuộc tính của nó.

- *Nó có thiên vị không?* Thiên vị ở đây được hiểu như sau, nếu ta lấy một bộ n phiếu bầu ngẫu nhiên thì xác suất mà kết quả là 1 hoặc -1 khác nhau cỡ nào. Một luật bầu là "công bằng" nếu hai xác suất này bằng nhau. Do đó, ta định nghĩa sự thiên vị của hàm f bằng

  $$\mathop{\mathsf{P}}_{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x}) = 1] - \mathop{\mathsf{P}}_{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x}) = -1] = \mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x})].$$

  Đến đây thì ta thấy phân tích Fourier có lợi thế nào. Do hàm $\chi_\emptyset = 1$, độ thiên vị của f là

  $$\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x})] = \mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x})\chi_\emptyset(\mathbf{x})] = \hat{f}_\emptyset.$$

  Độ thiên vị của f chính bằng với hệ số Fourier thứ nhất! Dễ thấy rằng các hàm đảng cử/dân bầu có thiên vị là ± 1. Các hàm độc tài và hàm đa số có độ thiên vị bằng 0.

- *Ảnh hưởng của một phiếu nào đó ra sao?* Nếu Tám Tàng đổi phiếu từ -1 sang 1 thì kết quả bị đổi thế nào? Với bộ phiếu $\mathbf{x}$, gọi $\mathbf{x}^{\oplus i}$ là bộ phiếu mà ta đổi phiếu x_i lại. Thì tầm ảnh hưởng (Influence) của phiếu thứ i trên kết quả được định nghĩa là

$$\mathsf{Inf}_i(f) := \underset{\mathbf{x}}{\mathsf{P}}[f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x}^{\oplus i})].$$

Trong lý thuyết chọn lựa xã hội thì tầm ảnh hưởng này còn được gọi là chỉ số sức mạnh Banzhaf hoặc chỉ số Banzhaf-Penrose index. Chỉ số này đã có một ít ảnh hưởng trong một vài phiên tòa về bầu cử.

Bài tập 1. *Chứng minh rằng* $\mathsf{Inf}_i(f) = \sum_{i \in S} \hat{f}_S^2$.

Dễ thấy rằng tầm ảnh hưởng của các hàm đảng cử là 0, tầm ảnh hưởng của hàm độc tài là 0 cho tất cả trừ anh độc tài có ảnh hưởng bằng 1. Tầm ảnh hưởng của hàm đa số thì mất công hơn một chút. Dùng xấp xỉ Stirling ta cũng tính được nó bằng khoảng $\sqrt{\frac{2}{\pi n}}$.

- *Ảnh hưởng của nhiễu ra sao?* Khi ghi lại cả triệu phiếu bầu thì xác suất mà một phiếu bị ghi sai không bỏ qua được. Gọi xác suất này là ϵ chẳng hạn. Giả sử ta lấy một bộ phiếu bầu $\mathbf{x}$ hoàn toàn ngẫu nhiên. Gọi $\mathbf{y}$ là bộ phiếu đạt được bằng cách lật mỗi phiếu x_i với xác suất ϵ. Dễ thấy, với mọi i,

$$\underset{\mathbf{x}}{\mathbb{E}}[x_i y_i] = 1 - 2\epsilon.$$

Do đó cặp $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ được gọi là $(1-2\epsilon)$-correlated. *Độ ổn định nhiễu* của f tại $(1-2\epsilon)$ được định nghĩa là

$$\mathrm{Stab}_{1-2\epsilon}(f) = \underset{\substack{\mathbf{x},\mathbf{y} \\ (1-2\epsilon)-\mathrm{cor}}}{\mathbb{E}}[f(\mathbf{x})f(\mathbf{y})] = \underset{\mathbf{x}}{\mathbb{E}}[f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})] - \underset{\mathbf{x}}{\mathbb{E}}[f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{y})].$$

Ngược lại:

$$\underset{\mathbf{x}}{\mathbb{E}}[f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Stab}_{1-2\epsilon}(f).$$

Bài tập 2. *Chứng minh rằng:*

$$Stab_{1-2\epsilon}(f) = \sum_{S \subseteq [n]} (1-2\epsilon)^{|S|} \hat{f}_S^2.$$

Độ ổn định nhiễu của các hàm đảng cử là 1, của hàm độc tài thứ i là $1-2\epsilon$. Độ ổn định nhiễu của hàm đa số là thú vị nhất. Có thể chứng minh được điều sau đây:

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{Stab}_{1-2\epsilon}(\mathrm{Maj}_n) = 1 - \frac{2}{\pi}\arccos(1-2\epsilon).$$

Nếu ta dùng xấp xỉ $\arccos(1-2\epsilon) \approx 2\sqrt{\epsilon}$ (khá tốt khi ϵ nhỏ) thì ta thấy rằng cái nhiễu ϵ dẫn đến xác suất khoảng $\frac{2}{\pi}\sqrt{\epsilon}$ là kết quả bầu cử bị thay đổi.

4.2. Chứng minh định lý Arrow

Giả sử tồn tại hàm f sao cho, với bất kỳ bộ phiếu hợp lệ nào $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ nào, cái chọn lựa xã hội $(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}), f(\mathbf{z}))$ cũng duy lý. Ta sẽ chứng minh rằng f phải là hàm độc tài.
Với mỗi cá nhân i, chọn bộ ba (x_i, y_i, z_i) ngẫu nhiên từ một trong 6 bộ ba hợp lệ $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1)$, và $(-1, 1, -1)$. Ta sẽ có một bộ ba vectors $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ hợp lệ. Xác suất mà $(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}), f(\mathbf{z}))$ là duy lý phải bằng 1.
Khai triển Fourier của hàm NAE là

$$\mathrm{NAE}(a, b, c) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}ab - \frac{1}{4}bc - \frac{1}{4}ca.$$

Như vậy, xác suất mà $(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}), f(\mathbf{z}))$ là duy lý sẽ bằng

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}}[\mathrm{NAE}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}), f(\mathbf{z})] = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\mathbb{E}[f(\mathbf{x})f(\mathbf{y})] - \frac{1}{4}\mathbb{E}[f(\mathbf{y})f(\mathbf{z})] - \frac{1}{4}\mathbb{E}[f(\mathbf{z})f(\mathbf{x})].$$

Do $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ có vai trò như nhau, ta kết luận

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}}[\mathrm{NAE}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}), f(\mathbf{z})] = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\mathbb{E}[f(\mathbf{x})f(\mathbf{y})].$$

Nhớ rằng trị kỳ vọng được tính từ cách lấy các bộ ba duy lý $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ như mô tả ở trên. Từ đó dễ thấy rằng $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ là một cặp $(-1/3)$-correlated. Do đó

$$\mathbb{E}[f(\mathbf{x})f(\mathbf{y})] = \mathrm{Stab}_{-1/3}(f) = \sum_{S \subseteq [n]} (-1/3)^{|S|} \hat{f}_S^2.$$

Để cho gọn, ta định nghĩa $W_k(f) = \sum_{|S|=k} \hat{f}_S^2$. Nhớ rằng $\sum_S \hat{f}_S^2 = 1$, do đó $\sum_k W_k(f) = 1$. Do đó, xác suất mà $(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}), f(\mathbf{z}))$ là duy lý bằng

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1/3)^k W_k(f) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}W_0(f) + \frac{1}{4}W_1(f) - \frac{1}{36}W_2(f) + \cdots$$

Xác suất này chỉ có thể bằng 1 nếu $W_1(f) = 1$ và $W_k(f) = 0$ với mọi $k \neq 1$. Nhưng $W_1(f) = 1$ nếu và chỉ nếu $f = \mathrm{Dict}_i$ hoặc $f = -\mathrm{Dict}_i$ với i nào đó. Nhưng f phải thỏa tính nhất trí, do đó $f = \mathrm{Dict}_i$. Và đó là tính duy lý của sự độc tài.

Chứng minh định lý Arrow bằng phương pháp này không chỉ để cho vui. Chứng minh cũ của Arrow không cho chúng ta biết xác suất sự phí lý của chọn lựa xã hội là bao nhiêu. Phân tích Fourier cho chúng ta biết, nếu ta dùng hàm đa số, khi n tiến đến vô cùng thì xác suất có chọn lựa xã hội duy lý là

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{2}{\pi}\arccos(-1/3)\right) \approx .912.$$

Con số này gọi là *số Guilbaud*. Chúng ta không những biết nghịch lý Condorcet có thể xảy ra mà còn biết cả xác suất của nó (giả sử ai cũng chọn phiếu bầu hợp lệ ngẫu nhiên, không suy nghĩ).

Tài liệu tham khảo

[1] ARROW, K. J. A Difficulty in the Concept of Social Welfare. *Journal of Political Economy 58* (1950), 328.

[2] KALAI, G. A Fourier-theoretic perspective on the Condorcet paradox and Arrow's theorem. *Adv. in Appl. Math. 29*, 3 (2002), 412–426.

[3] SAGAN, B. E. *The symmetric group*, second ed., vol. 203 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2001. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions.

[4] TAO, T., AND VU, V. H. *Additive combinatorics*, vol. 105 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010. Paperback edition [of MR2289012].

XẤP XỈ DIOPHANTINE VỚI ĐỘ ĐO ĐỊNH LÝ KHINTCHINE

Lý Ngọc Tuệ
(Đại học Brandeis, Massachusetts, Mỹ)

1. Giới thiệu

Trong phần 1 [5], chúng ta đã có được câu trả lời cho câu hỏi về khả năng xấp xỉ số thực bởi số hữu tỉ qua Định lý Dirichlet:

Định lý 1.1 (Dirichlet 1948)**.** *Với mọi số vô tỉ $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tồn tại vô số số hữu tỉ $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ sao cho:*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}, \tag{1.1}$$

và mở rộng kết quả này ra không gian véc tơ $\mathbb{R}^n$ trong phần 2 [6]. Mặt khác, Định lý Dirichlet được chứng minh là tối ưu qua sự tồn tại của các số/véc tơ xấp xỉ kém. Nói một cách khác, với mọi số vô tỉ x, ta có thể tìm được vô số nghiệm hữu tỉ $\frac{p}{q}$ cho bất đẳng thức (1.1). Tuy nhiên, Định lý Dirichlet xét chung tất cả các số vô tỉ, nếu như xét riêng biệt từng số vô tỉ x thì hàm xấp xỉ $\frac{1}{q^2}$ có thể không phải là tối ưu. Chẳng hạn như các *số Liouville* $\mathcal{L}$ được định nghĩa như sau: một số vô tỉ x được gọi là một số Liouville $x \in \mathcal{L}$ nếu như với mọi $n \geq 1$, tồn tại một số hữu tỉ $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ sao cho:

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}. \tag{1.2}$$

Vào năm 1844, nhà toán học Joseph Liouville đã chứng minh rằng tập $\mathcal{L}$ không rỗng, và là ví dụ đầu tiên về số siêu việt (transcendental numbers). Lưu ý rằng nếu như $x \in \mathcal{L}$ là một số Liouville thì với mọi $n \geq 1$, bất đẳng thức (1.2) có vô số nghiệm $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Trong phần này, chúng ta sẽ đưa thêm yếu tố độ đo vào vấn đề về khả năng xấp xỉ số thực bởi số hữu tỉ. Nói một cách cụ thể hơn, nếu như ta thay "Với mọi số" trong Định lý Dirichlet bằng "Với hầu hết mọi số (theo độ đo Lebesgue)" thì ta có thể thay hàm số xấp xỉ $\frac{1}{q^2}$ bằng hàm số nào?

Câu hỏi này đã được A. Y. Khintchine trả lời hoàn toàn vào năm 1924 [1] và mở rộng ra cho không gian véc tơ $\mathbb{R}^n$ vào năm 1926 [2]. Kết quả này sau đấy đã được A. V. Groshev chứng minh cho không gian ma trận $M_{m,n}(\mathbb{R})$ vào năm 1938.

Để giới thiệu kết quả của Khintchine, chúng ta cần một số ký hiệu sau: Hàm số ψ được gọi là một *hàm xấp xỉ* nếu như $\psi : [1, \infty) \to (0, \infty)$ là một hàm không tăng. Ta gọi số thực $x \in \mathbb{R}$ là một số ψ*-xấp xỉ được* (ψ-approximable) nếu như tồn tại vô số số hữu tỉ $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ với $q > 0$ sao cho:

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{\psi(q)}{q}. \tag{1.3}$$

Tập các số ψ-xấp xỉ được được ký hiệu là $\mathbf{WA}(\psi)$.

Định lý Dirichlet trên $\mathbb{R}$ có thể được viết lại theo ký hiệu mới này như sau:

$$\text{Nếu như } \psi(q) = \frac{1}{q} \text{ thì } \mathbf{WA}(\psi) = \mathbb{R}.$$

Định lý Khintchine cho tập số thực $\mathbb{R}$ được phát biểu như sau:

Định lý 1.2 (Khintchine 1924). *Giả sử như ψ là một hàm xấp xỉ sao cho $q\psi(q)$ là một hàm không tăng, và ký hiệu $\lambda(E)$ là độ đo Lebesgue của tập E.*

(i) *Nếu như chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)$ hội tụ thì $\lambda(\mathbf{WA}(\psi)) = 0$.*

(ii) *Nếu như chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)$ phân kỳ thì $\lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbf{WA}(\psi)) = 0$.*

Nói một cách khác, nếu như chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}$ hội tụ thì với hầu hết tất cả các số thực, bất đẳng thức (1.3) có vô số nghiệm hữu tỉ; còn nếu như chuỗi này phân kỳ, với hầu hết tất cả các số thực, bất đẳng thức (1.3) chỉ có hữu hạn nghiệm hữu tỉ.

Lưu ý 1.3. Các kết quả dạng như Định lý 1.2 trong lý thuyết xấp xỉ Diophantine thường được gọi là các *Định luật 0-1* .

Lưu ý 1.4. Một số hệ quả trực tiếp thú vị của Định lý Khintchine như sau:

(i) Tập các số xấp xỉ kém **BA** có độ đo Lebesgue bằng 0.

(ii) Với hầu hết mọi số thực x, bất phương trình:

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2 \log q}$$

có vô số nghiệm hữu tỉ.

(iii) Với $\epsilon > 0$ bất kỳ và với hầu hết mọi số thực x, bất phương trình:

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2 (\log q)^{1+\epsilon}}$$

chỉ có hữu hạn nghiệm hữu tỉ.

Trong phần còn lại của bài này, chúng ta sẽ giới thiệu tóm tắt về độ đo Lebesgue, và công cụ chính để chứng minh Định lý 1.2: Bổ đề Borel-Cantelli trong lý thuyết xác suất và liên phân số.

2. Phần hội tụ của Định lý Khintchine

Có rất nhiều tài liệu tham khảo cho phần này. Ở đây chúng tôi chỉ giới thiệu một số định nghĩa và tính chất cơ bản để dẫn đến Bổ đề Borel-Cantelli.

2.1. Độ đo Lebesgue

Độ đo Lebesgue trên không gian $\mathbb{R}^n$ là mở rộng của khái niệm độ dài ($n = 1$), diện tích ($n = 2$), và thể tích ($n \geq 3$). Trên $\mathbb{R}$, các đoạn thẳng (a, b) là thước đo cơ bản để đo độ dài của một tập hợp, và độ đo đoạn (a, b) được định nghĩa bởi: $\lambda((a, b)) := b - a$. Độ đo (ngoài) của một tập $E \subseteq \mathbb{R}$ bất kỳ được xây dựng bằng cách sử dụng một số đếm được các đoạn thẳng để phủ lên tập E với tổng độ dài càng nhỏ càng tốt:

$$\lambda(E) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ với } I_i \text{ là các đoạn thẳng}\right\}.$$

Một tập con $E \subseteq \mathbb{R}$ được gọi là một *tập đo được* nếu như với mọi $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\lambda(A) = \lambda(A \cap E) + \lambda(A \cap (\mathbb{R} \setminus E)).$$

Tập các tập đo được tạo thành một *σ-đại số* thỏa mãn các tính chất sau:

(σ1) Tập rỗng $\emptyset$ và $\mathbb{R}$ là các tập đo được.

(σ2) Nếu như E là một tập đo được thì phần bù $\mathbb{R} \setminus E$ cũng là một tập đo được.

(σ3) Nếu như $A_1, A_2, \ldots$ là các tập đo được thì $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ cũng là một tập đo được.

Độ đo Lebesgue trên các tập đo được thỏa mãn các tính chất sau:

(M0) $\lambda(\emptyset) = 0$.

(M1) Nếu như $A \subseteq B$ là 2 tập đo được thì $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.

(M2) Nếu như $A_1, A_2, \ldots$ là một dãy các tập đo được rời nhau từng cặp thì:

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i).$$

Lưu ý 2.1. Áp dụng Tiên đề chọn (Axiom of Choice), ta có thể xây dựng được tập con của $\mathbb{R}$ không đo được chẳng hạn như tập Vitaly hoặc tập Bernstein. Tập không đo được dẫn đến một số nghịch lý như nghịch lý Banach-Tarski. Mặt khác, nếu như ta bỏ Tiên đề chọn, Solovay [4] chứng minh rằng tồn tại một mô hình của tập số thực mà trong đó, mọi tập con đều là tập đo được.

Lưu ý 2.2. Ta nói một tính chất P thỏa mãn với hầu hết mọi số x, nếu như tập $\{x \in \mathbb{R} : x \text{ không thỏa mãn tính chất } P\}$ có độ đo Lebesgue bằng 0.

Bài tập 2.3. Chứng minh rằng $\lambda([a, b]) = b - a$.

Bài tập 2.4. Chứng minh rằng nếu $E \subseteq \mathbb{R}$ là một tập đến được thì $\lambda(E) = 0$.

Bài tập 2.5. Tìm độ đo Lebesgue của tập Cantor:

$$\mathcal{C} := \left\{ x \in [0,1] : x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, a_i \in \{0,2\} \right\}.$$

Bài tập 2.6. Tìm độ đo Lebesgue của tập Liouville $\mathcal{L}$.

2.2. Tập limsup và Bổ đề Borel-Cantelli

Gọi X là một không gian bất kỳ. Một họ $\mathscr{B}$ các tập con của X thỏa mãn các tính chất tương tự như $(\sigma 1)$–$(\sigma 3)$ được gọi là một *σ-đại số của các tập đo được trên X*. Một hàm không âm $\mu : \mathscr{B} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ thỏa mãn các tính chất như M(0)–M(2) được gọi là một *độ đo trên X*. Bộ 3 $(X, \mathscr{B}, \mu)$ được gọi là một *không gian đo*.

Nếu như $0 < \mu(X) < \infty$, ta có thể thay độ đo μ bằng độ đo $\mu'(E) = \dfrac{\mu(E)}{\mu(X)}$ để cho $\mu'(X) = 1$. Không gian đo $(X, \mathscr{B}, \mu)$ với $\mu(X) = 1$ được gọi là một *không gian xác suất*. Trong lý thuyết xác suất, các tập đo được $E \in \mathscr{B}$ tương ứng với các sự kiện, và độ đo $\mu(E)$ của E tương ứng với xác suất để sự kiện E xảy ra.

Với một dãy các tập con $E_1, E_2, \ldots$ của X, ta định nghĩa tập limsup của dãy này như sau:

$$\limsup_{n\to\infty} E_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = \{x \in X : \text{ có vô số i's sao cho } x \in E_i\}.$$

Nói cách khác, nếu như $E = \limsup_{n\to\infty} E_n$ là sự kiện "có vô số sự kiện E_n xảy ra". Bổ đề Borel–Cantelli có thể được phát biểu như sau:

Bổ đề 2.7 (Bổ đề Borel-Cantelli)**.** *Cho $(X, \mathscr{B}, \mu)$ là một không gian xác suất, và $E_1, E_2, \ldots, \in \mathscr{B}$ là các sự kiện. Nếu như chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ hội tụ, thì:*

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) = 0.$$

Bài tập 2.8. Chứng minh Bổ đề 2.7.

Bài tập 2.9. Tìm phản ví dụ cho mệnh đề đảo của Bổ đề 2.7.

Trở lại với Định lý Khintchine, để áp dụng được Bổ đề Borel-Cantelli, ta cần có một không gian xác suất, và biểu diễn tập có số ψ-xấp xỉ được $\mathbf{WA}(\psi)$ dưới dạng một tập limsup.

Bài tập 2.10. Chứng minh rằng $x \in \mathbf{WA}(\psi)$ khi và chỉ khi $x + 1 \in \mathbf{WA}(\psi)$.

Áp dụng bài tập trên, để chứng minh Định lý Khintchine, ta chỉ cần tập trung vào các số nằm trong đoạn $[0, 1)$. Giới hạn độ đo Lebesgue trên đoạn $[0, 1)$ sẽ cho ta một không gian xác suất.

Đặt
$$E_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{p}{n}\right| < \frac{\psi(n)}{n}\right\},$$
ta có thể biểu diễn tập $\mathbf{WA}(\psi)$ dưới dạng một tập limsup như sau:
$$\mathbf{WA}(\psi) = \limsup_{n\to\infty} E_n.$$

Bài tập 2.11. Tìm độ đo Lebesgue của $E_n \cap [0, 1]$ (tập này chỉ bao gồm hữu hạn các đoạn thẳng).

Bài tập 2.12. Chứng minh rằng nếu như chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n \cap [0, 1))$ hội tụ.

Áp dụng Bài tập 2.10 và Bổ đề Borel-Cantelli, ta có được phần hội tụ của Định lý Khintchine.

3. Phần phân kỳ của Định lý Khintchine

Để chứng minh phần phân kỳ của Định lý 1.2, chúng ta sẽ sử dụng công cụ tốt nhất cho xấp xỉ mà ta có được trên tập số thực: liên phân số.

3.1. Một số điều cơ bản của Liên phân số

Nhắc lại trong phần 1 [5], chúng ta gọi một liên phân số hữu hạn có độ dài $(n+1)$ là một biểu thức có dạng:
$$[a_o; a_1, ..., a_n] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$
với một dãy số thực hữu hạn $a_0 \in \mathbb{R}, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Khi $a_0 \in \mathbb{Z}, a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$, ta gọi biểu thức trên là một *liên phân số đơn hữu hạn*. Với mọi dãy $a_0 \in \mathbb{Z}, a_1, a_2, ... \in \mathbb{N}$, dãy các liên phân số đơn hữu hạn $[a_0; a_1, ..., a_n]$ là một dãy hội tụ khi $n \to \infty$, và ta ký hiệu giới hạn này là:
$$[a_0; a_1, ...] := \lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, ..., a_n].$$

Mỗi số vô tỉ $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ có thể được biểu diễn duy nhất dưới dạng một liên phân số đơn vô hạn:
$$x = [a_0; a_1, ...].$$

Với cách biểu diễn như trên, phân số hội tụ thứ n của x là:
$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} = [a_0; a_1, ..., a_n],$$

với $\dfrac{p_n}{q_n}$ ở dạng tối giản.

Đặt $x_{n+1} = [a_{n+1}; a_{n+2}, ...]$, chúng ta có được công thức sau:

Bổ đề 3.1. *Với mọi $n \geq 0$:*

$$x = \frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}}.$$

Tuy trông có vẻ phức tạp, nhưng biểu diễn số thực bằng liên phân số có tính chất sau giống với biểu diễn các số trong hệ thập phân:

Bổ đề 3.2. *Giả sử như $x = [a_0; a_1, ...]$ và $y = [b_0; b_1, ...]$.*

$$\frac{p_n}{q_n} < y < \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \text{ khi và chỉ khi } b_0 = a_0, ..., b_n = a_n.$$

Hay nói một cách khác, tập các số có biểu diễn liên phân số có phần đầu cố định

$$J(a_0, a_1, ..., a_n) := \{y = [a_0; a_1, ..., a_n, r] : r \in \mathbb{R}, r \geq 1\}$$

là một đoạn thẳng:

$$J(a_0, a_1, ..., a_n) = \left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right),$$

và $J(a_0, ..., a_n) \cap J(b_0, ..., b_n) \neq \emptyset$ khi và chỉ khi $b_0 = a_0, ..., b_n = a_n$.

Bài tập 3.3. Chứng minh Bổ đề 3.2.

Bổ đề 3.4. *Với ký hiệu như trên, với mọi $a_0 \in \mathbb{Z}, a_1, ..., a_n, k \in \mathbb{N}$:*

$$\frac{1}{3k^2} < \frac{\lambda(J(a_0, ..., a_n, k))}{\lambda(J(a_0, ..., a_n))} < \frac{2}{k^2}.$$

Chứng minh. Áp dụng Bổ đề 3.1 và 3.2, và đẳng thức:

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n,$$

ta có được:

$$\begin{aligned}\lambda(J(a_0, ..., a_n)) &= \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right| \\ &= \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} \\ &= \frac{1}{q_n^2\left(1 + \dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda(J(a_0, ..., a_n, k)) &= \left|\frac{p_n k + p_{n-1}}{q_n k + q_{n-1}} - \frac{p_n(k+1) + p_{n-1}}{q_n(k+1) + q_{n-1}}\right| \\ &= \frac{1}{(q_n k + q_{n-1})(q_n(k+1) + q_{n-1})} \\ &= \frac{1}{q_n^2 k^2\left(1 + \dfrac{q_{n-1}}{kq_n}\right)\left(1 + \dfrac{1}{k} + \dfrac{q_{n-1}}{kq_n}\right)}.\end{aligned}$$

Lưu ý rằng $\dfrac{q_{n-1}}{kq_k} \leq \dfrac{q_{n-1}}{q_k} < 1$. □

3.2. Định luật 0-1 của Liên phân số

Vận dụng một số tính chất cơ bản của liên phân số ở trên, chúng ta sẽ chứng minh một Định luật 0-1 của Liên phân số. Định luật này là một trong 2 bổ đề quan trọng dùng để chứng minh phần phân kỳ của Định lý Khintchine.

Định lý 3.5. *Giả sử như $f(n)$ là một hàm số dương bất kỳ, đặt:*

$$F_n = \{x = [a_0; a_1, ...] : a_n \geq f(n)\}.$$

(i) Nếu như chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ *hội tụ thì* $\lambda\left(\limsup_{n\to\infty} F_n\right) = 0.$

(ii) Nếu như chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ *phân kỳ thì* $\lambda\left(\mathbb{R} \setminus \limsup_{n\to\infty} F_n\right) = 0.$

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh phần phân kỳ, còn phần hội tụ để dành làm bài tập dành cho độc giả. Lưu ý rằng trong cả 2 trường hợp, chúng ta có thể giới hạn các số $x \in [0, 1)$.

Xét một dãy $a_1, ..., a_{m+n}$ bất kỳ sao cho với $1 \leq i \leq n$:

$$a_{m+i} \leq f(m+i).$$

Ta có được:

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\bigcup_{k\geq f(m+n+1)} J(0, a_1, ..., a_{m+n}, k)\right) &= \sum_{k\geq f(m+n+1)} \lambda(J(0, a_1, ..., a_{m+n}) && \text{(Bổ đề 3.2)}\\
&> \frac{1}{3}\lambda(J(0, a_1, ..., a_{m+n}) \sum_{k\geq f(m+n+1)} \frac{1}{k^2} && \text{(Bổ đề 3.9)}\\
&> \frac{1}{3}\lambda(J(0, a_1, ..., a_{m+n}) \int_{f(m+n+1)+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2}\\
&= \frac{1}{3(f(m+n+1)+1)}\lambda(J(0, a_1, ..., a_{m+n}).
\end{aligned}$$

Mặt khác,

$$J(0, a_1, ..., a_{m+n}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} J(0, a_1, ..., a_{m+n}, k).$$

Từ đó ta suy ra:

$$\lambda\left(\bigcup_{k<f(m+n+1)} J(0, a_1, ..., a_{m+n}, k)\right) < \left(1 - \frac{1}{3(f(m+n+1)+1)}\right)\lambda(J(0, a_1, ..., a_{m+n}).$$

Đặt

$$E_{m,n} = \bigcup_{\substack{(a_1,...,a_{m+n})\in\mathbb{N}^{m+n}\\ a_{m+i}<f(m+i), 1\leq i\leq n}} J(0, a_1, ..., a_{m+n}),$$

bất đẳng thức trên cho ta:

$$\lambda(E_{m,n+1}) < \left(1 - \frac{1}{3(f(m+n+1)+1)}\right)\lambda(E_{m,n}).$$

Lần lượt áp dụng bất đẳng thức này, ta có được:

$$\begin{aligned}
\lambda(E_{m,n}) &< E_{m,1}\prod_{i=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{3(f(m+i)+1)}\right) \\
&< E_{m,1}\exp\left(-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{3(f(m+i)+1)}\right) \qquad\qquad (1+x<e^x)
\end{aligned}$$

Bài tập 3.6. Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$ phân kỳ ($\to\infty$) dẫn đến chuỗi

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{3(f(m+i)+1)}$$

phân kỳ ($\to\infty$) với mọi m.

Vì vậy, vế phải hội tụ về 0 khi n tiến đến $+\infty$, và với mọi m, n, ta có được:

$$\lambda(E_{m,n}) = 0.$$

Lưu ý rằng $[0,1)\setminus\bigcup_{n=m+1}^{\infty}F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}E_{m,n}$,

$$\begin{aligned}
\lambda\left([0,1)\setminus\limsup_{m\to\infty}F_m\right) &= \lambda\left([0,1)\setminus\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}F_n\right) \\
&= \lambda\left(\bigcup_{m=0}^{\infty}\left([0,1)\setminus\bigcup_{n=m+1}^{\infty}F_n\right)\right) \\
&= \lambda\left(\bigcup_{m=0}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{m,n}\right) \\
&\le \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(E_{m,n}) = 0.
\end{aligned}$$

□

Bài tập 3.7. Chứng minh rằng:

$$\lambda\left(\bigcup_{k\ge f(n+1)}J(a_0,\dots,a_n,k)\right) < \frac{4}{f(n+1)}\lambda(J(a_0,\dots,a_n)).$$

Bài tập 3.8. Áp dụng bài tập 3.7 để chứng minh rằng

$$\lambda(F_{n+1}\cap[0,1)) < \frac{4}{f(n+1)}.$$

Và từ đó suy ra phần hội tụ của Định lý 3.5.

3.3. Chứng minh phần phân kỳ của Định lý Khintchine

Bổ đề 3.9. *Tồn tại một hằng số tuyệt đối $C > 0$ sao cho với hầu hết mọi số $x = [a_0; a_1, ...]$, tồn tại $N > 0$ sao cho với mọi $n \geq N$,*

$$q_n < e^{Cn}.$$

Chứng minh. Đặt

$$E_n(g) = \bigcup_{a_1 a_2 ... a_n \geq g} J(0, a_1, ..., a_n).$$

Vì

$$\lambda(J(0, a_1, ..., a_n)) = \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n^2} < \frac{1}{(a_1 a_2 ... a_n)^2}$$

ta có được cận trên cho độ đo của $E_n(g)$:

$$\lambda(E_n(g)) < \sum_{a_1 a_2 ... a_n \geq g} \frac{1}{(a_1 a_2 ... a_n)^2}.$$

Tích ở bên tay phải có thể bị chặn bởi tích phân như sau:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} &= \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_i}\right) \frac{1}{a_i(a_i + 1)} \\
&\leq 2^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i(a_i + 1)} \\
&= 2^n \prod_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{a_i + 1} \frac{dx_i}{x_i^2} \\
&= 2^n \int_{a_1}^{a_1 + 1} \int_{a_2}^{a_2 + 1} \cdots \int_{a_n}^{a_n + 1} \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_n}{x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2}
\end{aligned}$$

Gọi $I_n(g)$ là tích phân:

$$\int \int \cdots \int \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_n}{x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2}$$

trên miền:

$$x_1, ..., x_n \geq 1, \quad \text{và} \quad x_1 x_2 \dots x_n \geq g,$$

ta có được:

$$\lambda(E_n(g)) < 2^n I_n(g).$$

Bài tập 3.10. Chứng minh rằng khi $g \leq 1$, $I_n(g) = 1$.

Bài tập 3.11. Chứng minh rằng khi $g > 1$,

$$I_n(g) = \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ln g)^i}{i!}.$$

Đặt $g = e^{An}$, với một hằng số $A > 1$ bất kì, ta có được:

$$\begin{aligned}
\lambda\big(E_n\big(e^{An}\big)\big) &< e^{n(\ln 2 - A)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(An)^i}{i!} \\
&< e^{n(\ln 2 - A)} n \frac{(An)^n}{n!} \\
&< B e^{n(\ln 2 - A)} \frac{n(An)^n}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} && \text{(công thức Stirling)} \\
&< B' \sqrt{n} e^{-n(A - \ln A - \ln 2 - 1)}.
\end{aligned}$$

Với A đủ lớn,

$$A - \ln A - \ln 2 - 1 > 0,$$

và khi đó, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda\big(E_n\big(e^{An}\big)\big)$ hội tụ. Theo Bổ đề Borel-Cantelli, với hầu hết mọi số x trong đoạn $[0, 1)$, x chỉ nằm trong hữu hạn các tập $E_n\big(e^{An}\big)$. Hay nói một cách khác, với hầu hết mọi số trong khoảng $[0, 1)$, với mọi n đủ lớn,

$$a_1 a_2 \ldots a_n < e^{An}.$$

Khi đó,

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} < 2a_n q_{n-1} < \ldots < 2^n a_n a_{n-1} \ldots a_1 < 2^n e^{An} = e^{Cn}$$

với $C = A + \ln 2$. □

Chứng minh Định lý Khintchine. Giả sử như chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi(n)$ phân kỳ, đặt:

$$f(x) = e^{Cx} \psi\big(e^{Cx}\big),$$

với C là hằng số có được từ Bổ đề 3.9. Tích phân:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{C} \int_{Ca}^{Cb} \psi(u)du$$

với $0 < a < b$ tiến đến vô cùng khi $b \to \infty$, và vì hàm $f(x)$ không tăng theo giả thuyết, ta có được chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ phân kỳ.

Áp dụng Định lý 3.5, với hầu hết mọi số $x = [a_0; a_1, \ldots]$, tồn tại vô số chỉ số n sao cho:

$$a_{n+1} \geq \frac{1}{f(n)}.$$

Từ đó suy ra:

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{a_{n+1} q_n^2} \leq \frac{f(n)}{q_n^2}$$

Theo Bổ đề 3.9, với hầu hết mọi số $x = [a_0; a_1, ...]$ và với mọi n đủ lớn,

$$q_n < e^{Cn} \iff n > \frac{\ln q_n}{C}.$$

Vì vậy, ta có được, hầu hết mọi $x = [a_0; a_1, ...]$, tồn tại vô số chỉ số n sao cho:

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{f(n)}{q_n^2} \leq \frac{f\left(\frac{\ln q_n}{C}\right)}{q_n^2} = \frac{\psi(q_n)}{q_n},$$

tức là $x \in \mathbf{WA}(\psi)$. □

Tài liệu tham khảo

[1] A. Y. Khintchine, *Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen*, Math. Ann. **92** (1924), pp. 115–125.

[2] A. Y. Khintchine, *Zur metrischen Theorie der Diophantischen Approximationen*, Math. Zeitschrift **24** (1926), pp. 706–713.

[3] A. Y. Khintchine, *Continued Fractions* (1935).

[4] R. M. Solovay, *A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Ann. of Math. **92** (1970), pp. 1–56.

[5] Lý Ngọc Tuệ, *Xấp xỉ Diophantine trên $\mathbb{R}$ và Liên phân số*, Epsilon **4**, (2015).

[6] Lý Ngọc Tuệ, *Xấp xỉ Diophantine trên $\mathbb{R}^n$ - Quy tắc Dirichlet và Hình học của số*, Epsilon **5**, (2015).

HÌNH HỌC RỐI LƯỢNG TỬ

Đàm Thanh Sơn

Được sự đồng ý của giáo sư Đàm Thanh Sơn, trong số này Epsilon trân trọng gửi đến độc giả bản dịch của giáo sư từ bài *Geometría y entrelazamiento cuántico* của Juan Maldacena, *Investigación y Ciencia*, số 11/2015. Bản gốc độc giả có thể xem tại trang nhà của giáo sư ở đây.

1. Giới thiệu

Vào đầu thế kỷ XX đã có hai cuộc cách mạng trong vật lý: Cơ học lượng tử và thuyết tương đối rộng. Cơ học lượng tử cho ta biết các định luật chi phối thế giới vi mô, còn thuyết tương đối rộng, được Einstein xây dựng năm 1915, là một lý thuyết về không gian và thời gian. Theo thuyết tương đối rộng, không-thời gian có độ cong và không phải tĩnh, mà là động.

Tới nay các tiên đoán của cả hai lý thuyết đều đã được thực nghiệm xác nhận. Tuy nhiên hai lý thuyết thường được áp dụng vào những hiện tượng rất khác nhau. Ta thường dùng cơ học lượng tử để mô tả các vật rất nhỏ (như nguyên tử hay photon), và dùng thuyết tương đối rộng để nghiên cứu sự thay đổi của không thời gian ở gần các vật nặng (ví dụ các ngôi sao hay các thiên hà). Để nghiên cứu các hệ vật lý vừa nặng vừa nhỏ, như vũ trụ ngay sau vụ nổ lớn, ta cần một cách miêu tả lượng tử cho không thời gian. Điều này, một trăm năm sau ngày Einstein xây dựng được thuyết của mình. vẫn còn là một thách thức lớn cho vật lý cơ bản.

Hai năm trước, được khích lệ bởi một cuộc tranh luận về các tính chất của lỗ đen, nhà vật lý Leonard Susskind của đại học Stanford và tác giả đã đề xuất ra một mối liên hệ giữa hai hiện tượng có vẻ nghịch lý trong cơ học lượng tử và thuyết tương đối rộng: Hiện tượng rối lượng tử (quantum entanglement) và lỗ giun (wormholes). Rối lượng tử là một dạng tương quan lượng tử có thể tồn tại giữa những hệ vật lý cách xa nhau. Lỗ giun là những đường tắt xuất hiện trong một số nghiệm của phương trình Einstein và nối những vùng rất xa nhau của không gian.

Dưới đây chúng ta sẽ thấy hai hiện tượng này có liên quan với nhau. Sự tương đương này tạm thời chỉ có có thể chứng minh chặt chẽ trong một vài trường hợp cụ thể, nhưng có lẽ đúng trong trường hợp tổng quát. Ý tưởng của chúng tôi về mối liên hệ giữa hình học và rối lượng tử có thể là một nguyên tắc mà tất cả lý thuyết lượng tử của không-thời gian, hay hấp dẫn lượng tử, phải tuân theo. Nguyên tắc này có những hệ quả quan trọng. Thậm chí, một cách nào đó, có thể chính không-thời gian cũng xuất hiện ra từ sự rối lượng tử của những thành phần vi mô cơ bản nhất của thế giới.

Một điều thú vị là cả hai khái niệm, rối lượng tử và lỗ giun, đều xuất phái từ hai bài báo mà bản thân Einstein viết vào năm 1935. Hai công trình dường như liên quan đến hai hiện tượng rất khác nhau, và sau này Einstein cũng không bao giờ nghĩ là chúng có thể có liên hệ gì với nhau. Thực sự mà nói, rối lượng tử là một hiện tượng làm cho Einstein hết sức bức bối. Dưới đây chúng ta sẽ xem lại hai bài báo và giải thích mội liên hệ của chúng từ quan điểm hiện đại.

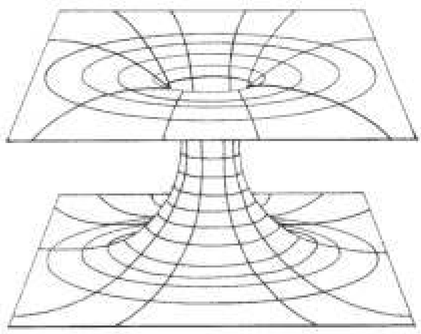
2. Lỗ đen và lỗ giun

Một tiên đoán đáng kinh ngạc của lý thuyết Einstein là lỗ đen. Lỗ đen được nhình thành khi ta gom một khối lượng vật chất lớn vào một vùng nhỏ của không gian. Vật chất này không cần là gì đặc biệt, ví dụ từ không khí ta cũng có thể tạo ra một lỗ đen. Chỉ có điều là cần rất nhiều không khí: Ta cần phải làm đầy một hình cầu có kích thước bằng kích thước của hệ mặt trời. Nếu ta làm được như vậy thì khối khí này sẽ suy sụp dưới sức nặng của mình và nén lại cho tới khi trở thành lỗ đen.

Tất cả các lỗ đen đều được bao bọc bởi một mặt cầu giả tưởng gọi là chân trời sự kiện. Ta gọi mặt cầu này là giả tưởng vì một nhà du hành vũ trụ rơi tự do vào lỗ đen sẽ không thấy gì ở chỗ này. Tuy nhiên, một khi vượt qua mặt cầu này, người đó sẽ không quay trở lại được. Người đó sẽ đi vào một vùng mà không gian suy sụp vào một "*kỳ dị*", chỗ mà hình học co lại hoàn toàn. Tới gần điểm kỳ dị nhà du hành vũ trụ sẽ chết bẹp dưới lực hấp dẫn.

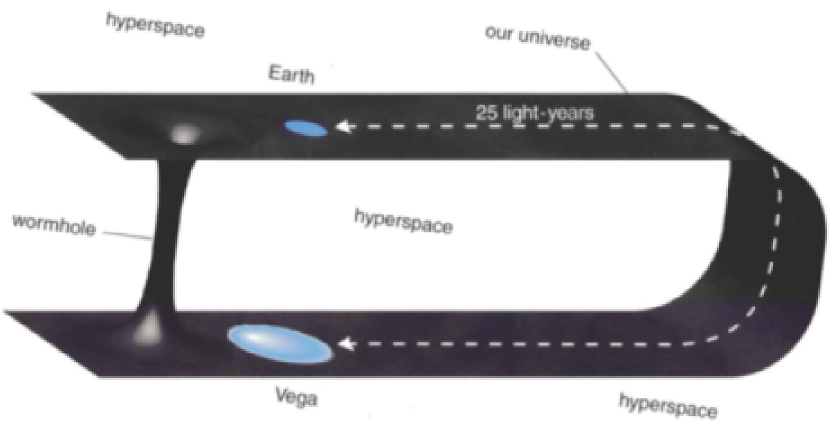
Bên ngoài vùng chứa vật chất, lỗ đen được mô tả bằng một nghiệm của phương trình Einstein mà nhà vật lý Karl Schwarzschild tìm ra năm 1916. Mục tiêu ban đầu của Schwarzschild là tìm trường hấp dẫn của một chất điểm. Trên thực tế, nghiệm của ông ta không có vật chất: Nó mô tả một trường hấp dẫn thuần tuý với đối xứng cầu, không hơn không kém. Tuy trông có vẻ đơn giản, các tính chất của không-thời gian này khá khó diễn giải. Chỉ đến những năm 1960 người ta mới hiểu được tương đối cấu trúc toàn cục của nghiệm này.

Năm 1935, ở một trong hai bài báo đã nói đến ở trên, Einstein và Nathan Rosen, một cộng tác viên của Einstein ở Viện Nghiên cứu Cao cấp ở Princeton, tìm ra một khía cạnh rất thú vị của nghiệm Schwarzschild. Họ tìm ra rằng nghiệm này chứa hai không gian độc lập nối với nhà bằng một cái "*ống*". Tại một thời điểm nhất định, ta có thể hìng dung ra hình học của nghiệm như sau: Ở xa vùng trung tâm, không gian là phẳng (không có độ cong đáng kể), nhưng khi vào gần trung tâm, hình học bị méo đi và nối vào một không gian thứ hai, một không gian cũng tiệm cận phẳng.



Sự kết nối hình học mà Einstein và Rosen tìm ra được gọi là "*cầu Einstein-Rosen*" (ER), hay lỗ giun. Einstein và Rosen phân tích cấu trúc hình học của một siêu diện tại một thời điểm cố định (nói cách khác, một không gian cong ba chiều) nhiều năm trước khi ta hiểu được cấu trúc toàn cục của nghiệm Schwarzschild. Mục tiêu của Einstein và Rosen là tìm một miêu tả hình học cho một hạt cơ bản không có kỳ dị. Ngày nay chúng ta biết rằng diễn giải của họ là sai lầm.

Chiếc cầu nguyên thuỷ của ER nối hai không gian độc lập. Tuy nhiên, ta có thể có những nghiệm giống như vậy nhưng hai vùng được nối cùng thuộc về một không gian. Chỉ cần thay đổi một chút, nghiệm Schwarzchild có thể được diễn giải như là một nghiệm chứa hai lỗ đen ở rất xa nhau nhưng bên trong lại nối với nhau. Ta tưởng tượng là có một lỗ đen ở tại nơi ta đang sống và một lỗ đen ở một ngân hà khác. Một người quan sát mà ta sẽ gọi là Romeo đứng cách chân trời sự kiện của lỗ đen thứ nhất 1 mét, trong lúc Juliet đứng cách đứng cách chân trời sự kiện của lỗ đen thứ hai cũng 1 mét. Nếu ruột của hai lỗ đen được nối với nhau bằng một chiếc cầu ER, khoảng cách giữa Romeo và Juliet qua lỗ giun sẽ là 2 mét, bất kể hai vùng không gian xung quanh hai lỗ đen xa nhau đến mức nào.



Những kiểu hình học này có vẻ có vấn đề. Ta nhớ lại là một trong những nguyên lý cơ bản của thuyết tương đối hẹp là ta không thể gửi tín hiệu đi nhanh hơn tốc độ ánh sáng. Thế nhưng có vẻ là lỗ giun cho phép vi phạm nguyên lý này vì ta có thể gửi tín nhiệu qua nó. Tuy nhiên, năm 1963, Robert W. Fuller ở đại học Columbia và John A. Wheeler ở đại học Princeton đã chứng minh rằng không thể dùng cầu ER để gửi bất kỳ loại tín hiệu nào. Để thấy điều này ta phải xem xét tính chất động của hình học trong đó thời gian đóng một vai trò quan trọng. Lỗ giun của chúng ta mô tả hình học của không gian tại một thời điểm cố định. Nhưng hình học này tiến hoá theo thời gian. Fuller và Wheeler chứng minh được rằng chiếc cầu ER giãn ra – độ dài của cầu trở thành vô cùng – trước khi người quan sát kịp vượt nó. Điều này có thể sẽ làm các nhân vật trong các phim khoa học viễn tưởng thất vọng, vì họ vẫn hay dùng lỗ giun để du hành trong vũ trụ với tốc độ lớn hơn tốc độ ánh sáng.

Trong trường hợp hai lỗ đen nối với nhau ở bên trong bằng một lỗ giun, chân trời của hai lỗ đen chạm vào nhau tại một khoảnh khắc, nhưng sau đó rời nhau ra quá nhanh để cho ai đó có thể kịp vượt cầu sang bên kia. Như thế nếu Romeo muốn gửi một thông điệp nhanh hơn tốc độ ánh sáng cho Juliet, anh ta sẽ không thể làm được. Romeo có thể phóng một tên lửa mang thông điệp vào lỗ đen bên anh ta và tên lửa sẽ rơi vào bên trong lỗ đen. Thuy nhiên, khi đã ở bên trong, hai chân trời chạy khỏi nhau với tốc độ rất nhanh, và không gian suy sụp trước khi thông điệp có thể tới chân trời của Juliet.

Tuy nhiên, Romeo và Juliet vẫn có cơ hội gặp nhau. Họ có thể nhảy, người nào vào những lỗ đen của người đấy, và gặp nhau ở bên trong lỗ đen. Tuy nhiên có một vấn đề: Một khi đã vào trong, họ không thể ra ngoài nữa. Đây là một trường hợp của "*sự cuốn hút chết người*". Cái lạ của hình học này là nó mô tả hai lỗ đen có cùng chung một ruột. Vì thế mà Romeo và Juliet có thể gặp nhau ở trong lỗ đen.

Ta phải nhấn mạnh là những lỗ giun của chúng ta rất khác những lỗ giun thường gặp trong các phim khoa học viễn tưởng. Những lỗ giun trong phim (những lỗ giun ta có thể đi qua được) đòi hỏi một loại vật chất có năng lượng âm, có lẽ không tương thích với các định luật vật lý ta biết. Vì vậy nhiều nhà vật lý tin rằng loại lỗ giun trong các phim khoa học viễn tưởng không thể tồn tại trong tự nhiên. Các lỗ đen ta xét ở đây còn có một khía cạnh khác đáng nhắc đến. Các lỗ đen được tạo ra do vật chất suy sụp chỉ tương ứng với một phần của hình học Schwarzchild, bởi vì sự có mặt của vật chất làm nghiệm thay đổi. Các lỗ đen loại này đã được nghiên cứu rất rõ; trong trường hợp này không có lỗ giun nào hết. Loại lỗ đen được tạo ra qua các quá trình vật lý thiên văn, ví dụ như khi một ngôi sao suy sụp, là loại không có lỗ giun nối với một vùng khác của không gian hay nối chúng với nhau, khác với nghiệm đầy đủ của Schwarzschild. Tuy vậy chúng ta vẫn muốn hiểu rõ hơn diễn giải vật lý của không-thời gian Schwarzschild. Dù sao, đây cũng là một trong những nghiệm đơn giản nhất của phương trình Einstein.

3. Tương quan lượng tử

Đáng ngạc nhiên là sự giải thích cho nghiệm Schwarzschild lại liên quan đến bài báo thứ hai của Einstein ta đã nhắc tới ở trên. Công trình này ngày nay rất nổi tiếng và có ảnh hưởng. Bài này được viết cùng năm, với đồng tác giả là Rosen và Boris Podolsky, cũng là nhà nghiên cứu của Viện Nghiên cứu Cao cấp. Các tác giả (ngày nay được biết đến bởi tên viết tắt EPR) chỉ ra là cơ học lượng tử cho phép một loại tương quan (correlation) rất lạ giữa các hệ vật lý xa nhau, một mối tương quan mà sau này được gọi là "*rối lượng tử*".

Sự tương quan giữa các vật xa nhau có thể xảy ra ngay trong vật lý cổ điển. Giả sử bạn đi ra khỏi nhà mà chỉ mang theo một chiếc găng tay vì bạn quên chiếc kia ở nhà. Trước khi nhìn vào túi, bạn không biết mình mang chiếc nào đi. Tuy nhiên, một khi bạn nhìn vào túi và thấy mình mang chiếc găng phải, bạn biết ngay chiếc ở nhà là găng trái.

Tuy nhiên, rối lượng tử liên quan đến tương quan giữa các đại lượng lượng tử, những đại lượng có thể phải tuân thủ nguyên lý bất định của Heisenberg. Nguyên lý này nói rằng có những cặp biến số mà ta không thể biết hoàn toàn chính xác cùng một lúc. Thí dụ nổi tiếng nhất là vị trí và vận tốc của một hạt: Nếu ta đo chính xác vị trí thì vận tốc trở thành không xác định và ngược lại. Trong bài báo của mình, EPR hỏi cái gì sẽ xảy ra nếu ta có hai hệ ở xa nhau và trong mỗi hệ ta quyết định đo một cặp biến chịu nguyên lý bất định.

Trong ví dụ mà EPR phân tích, ta xét hai hạt có cùng khối lượng và chỉ chuyển động trong một chiều. Ta gọi hai hạt đó là R và J và ta chuẩn bị hai hạt đó sao cho trọng tâm của chúng có toạ độ xác định, tức là $X_{cm} = x_R + x_J = 0$. Ngoài ra ta có thể làm cho vận tốc tương đối giữa hai hạt $v_{rel} = v_R - v_l$, có một giá trị chính xác, ví dụ $v_{rel} = v_0$. Trước khi tiếp tục, ta phải làm rõ một điều. Ta vừa đặt giá trị chính xác cho cả vị trí và vận tốc. Điều này có vi phạm nguyên lý bất định của Heisenberg không? Ta nhớ lại là nguyên lý bất định nói đến vị trí của một hệ và vật tốc liên quan đến vị trí đó. Tuy nhiên, nếu có hai hệ, không gì cấm ta biết vị trí của hệ thứ nhất và vận tốc của hệ thứ hai. Trong trường hợp đang xét, chúng ta không xác định vị trí và vận tốc của trọng tâm, mà là vị trí của trọng tâm và vận tốc tương đối của hai hạt. Do đây là hai đại lượng độc lập, không có vấn đề gì khi ta xét trạng thái ban đầu như EPR muốn.

Bây giờ ta gặp một điều rất bất ngờ. Giả sử hai hạt của chúng ta đã đi ra khỏi nhau rất xa và hai người quan sát xa nhau, Romeo và Juliet, quyết định đo vị trí của chúng. Do cách những hạt này được chuẩn bị, nếu Juliet nhận được giá trị x_J thì Romeo sẽ tìm được hạt của mình ở vị trí $x_R = -x_J$. Mặt khác, nếu họ đo vận tốc và Juliet nhận được kết quả x_J thì Romeo chắc chắn sẽ tìm được giá trị $v_R = v_0 + v_J$. Tất nhiên Romeo và Juliet muốn chọn đo đại lượng nào cũng được. Nhưng nếu Juliet đo vị trí và Romeo đo vận tốc, kết quả của họ sẽ hoàn toàn ngẫu nhiên và không có tương quan gì hết.

Cái lạ là nếu Juliet quyết định đo vị trí của hạt của mình thì hạt của Romeo sẽ có một vị trí hoàn toàn xác định một khi ta biết kết quả đo của Juliet. Cũng vậy nếu hai người đo vận tốc. Ta có thể nghĩ là khi Juliet đo vị trí, hạt của Romeo "*biết*" ngay lập tức là phải chiếm một vị trí xác định. Mới nhìn thì điều này có vẻ là một sự truyền thông tin tức thì: Lặp đi lặp lại thí nghiệm nhiều lầm, Juliet có thể gửi cho Romeo một thông điệp gồm số 0 và 1 bằng cách chọn đo vị trí hay tốc độ của hạt. Tuy vậy, Romeo không thể đọc được thông điệp nếu không biết kết quả đo của Juliet. Do đó ta không thể dùng tương quan do rối lượng tử để gửi tín hiệu nhanh hơn ánh sáng.

Rối lượng tử có thể là một tính chất bí mật nhất của các hệ lượng tử, tuy nhiên qua nhiều năm tháng đã được kiểm chứng bằng thực nghiệm. Trong hai mươi năm trở lại đây, các tương quan lượng tử đã đưa đến những ứng dụng thực tế và những tiến bộ lớn trong các ngành như mật mã và thông tin lượng tử.

4. ER = EPR

Ta quay lại các lỗ đen. Năm 1974 Stephen Hawking chứng minh rằng các hiệu ứng lượng tử làm cho các lỗ đen phát ra bức xạ giống như một vật nóng. Điều này chứng tỏ các lỗ đen có nhiệt độ. Nhiệt độ này càng cao nếu vật càng nhỏ. Thật sự ra một lỗ đen có thể trắng. Cụ thể, một lỗ đen với kích thước bằng một vi khuẩn, với bức xạ có bước sóng giống như bước sóng của ánh sáng nhìn thấy, sẽ có màu trắng do bức xạ Hawking. Lỗ đen này không phát ra nhiều ánh sáng, nhưng đến gần nó ta sẽ thấy một điểm sáng chói. Nhưng một lỗ đen kích thước này có một khối lượng khổng lồ, do đó ta không thể sử dụng nó như một nguồn năng lượng.

Đối với những lỗ đen được tạo ra một cách tự nhiên từ sự suy sụp của một ngôi sao, bức xạ Hawking yếu đến mức trên thực tế không thể quan sát được. Những vật thể này quá to và quá lạnh để có thể cảm nhận được hiệu ứng này. Tuy nhiên, việc các lỗ đen có nhiệt độ có những hệ quả quan trọng.

Chúng ta biết từ thế kỷ XIX là nhiệt độ có được là do chuyển động của các phần tử vi mô trong hệ. Ví dụ, trong chất khí, nhiệt độ nảy sinh do chuyển động của các phân tử khí. Vì thế ta có thể chờ đợi là một lỗ đen có chứa những thành phần vi mô có khả năng tạo ra vô số các cấu hình, hay là "*trạng thái vi mô*". Chúng ta cũng tin rằng, ít nhất nhìn từ bên ngoài, các lỗ đen cũng phải hành xử như những hệ lượng tử bình thường, chịu tất cả các định luật cơ học và nhiệt động học.

Xem xét từ bên trong, không có gì cấm ta xét các trạng thái rối lượng tử của các lỗ đen. Ta tưởng tượng hai lỗ đen cách xa nhau, mỗi lỗ đen có một số lớn các trạng thái vi mô. Ta có thể nghĩ ra một cấu hình trong đó mỗi trạng thái vi mô của lỗ đen thứ nhất có tương quan với trạng thái vi mô tương ứng của lỗ den thứ hai. Cụ thể là nếu ta quan sát được lỗ đen thứ nhất ở một trạng thái vi mô nhất định, thì lỗ đen thứ hai cũng ở đúng trạng thái này.

Điều hay là, xuất phát từ một số xem xét nhất định liên quan đến lý thuyết dây và lý thuyết trường lượng tử, ta có thể chứng minh rằng hai lỗ đen với các trạng thái vi mô rối với nhau như mô tả ở trên – tức là ở trạng thái EPR – sẽ cho ta một không thời gian trong đó có một chiếc cầu ER nối hai lỗ đen với nhau. Nói cách khác là rối lượng tử gây ra một liên kết hình học giữa hai lỗ đen.

Chúng tôi gọi cái này là sư tương đương giữa ER và EPR, hày $ER = EPR$, vì nó liên hệ hai bài báo của Einstein và cộng sự viết năm 1935. Từ quan điểm của EPR, các quan sát gần chân trời của hai lỗ đen có tương quan với nhau vì rối lượng tử. Từ quan điểm của ER, các đo đạc có tương quan với nhau do khoảng cách giữa hai hệ qua lỗ giun là rất nhỏ. Để xác lập sự tương đương, điều quan trọng là ta không thể gửi thông tin qua lỗ giun, cũng như ta không thể gửi thông tin dùng rối lượng tử.

Ta có thể nghĩ tới một tương lai xa khi hai gia đình thù địch muốn giữ Romeo và Juliet ở xa nhau. Họ gửi Romeo đến Tinh vân Tiên nữ và giữ Juliet ở dải Ngân hà. Tuy nhiên họ cho phép hai người trao đổi thông điệp và các cặp hệ lượng tử rối với nhau. Việc này sẽ đòi hỏi rấtt nhiều thời gian, nhưng chúng ta đang ở một tương lai mà tuổi thọ cao hơn hiện nay rất nhiều. Với sự kiên nhẫn, Romeo và Juliet có thể làm ra hai lỗ đen rối với nhau. Những lỗ đen này nhìn từ ngoài thì hoàn toàn bình thường, do đó hai gia đình không nghi ngờ gì. Tuy nhiên, sau khi làm ra hai lỗ đen, Romeo và Juliet có thể nhảy và bên trong và gặp nhau trong đó lần cuối cùng trước khi chết ở điểm kỳ dị.

5. Một nguyên lý phổ quát?

Những ý tưởng dẫn ta tới đây được nhiều nhà nghiên cứu phát triển qua nhiều năm, bắt đầu từ một nghiên cứu của Werner Israel của đại học Alberta. Công trình của tôi và Susskind được khích lệ bởi một nghịch lý được Ahmed Almheiri, Donald Marolf, Joseph Polchinski và James Sully, tất cả lúc đó đều ở đại học California ở Santa Barbara, phát biểu năm 2012. Ngược lại với những gì mọi người nghĩ trước đó, những nhà nghiên cứu này đưa ra ý kiến rằng hiện tượng rối lượng tử buộc ta phải thay thế chân trời sự kiện của một lỗ đen (một mặt cầu rất êm, theo lý thuyết của Einstein), bằng một rào chắn năng lượng cao không thể vượt qua. Từ quan điểm của mối liên hệ $ER = EPR$ ta có thể giải quyết được nghịch lý này.

Sự tương đương $ER = EPR$ gợi ý là bất cứ khi nào có rối lượng tử ta cũng có mối liên kết hình học. Điều này phải đúng kể cả trong trường hợp đơn giản nhất khi ta có hai hạt rối với nhau. Tuy nhiên trong trường hợp này mối liên kết hình học phải có cấu trúc rất nhỏ và rất lượng tử, rất không giống khái niệm hình học bình thường của chúng ta. Dù chúng ta còn chưa biết mô tả những hình học vi mô đó như thế nào, ý tưởng của chúng tôi là mối liên hệ $ER = EPR$ cho ta một nguyên lý mà tất cả các lý thuyết hấp dẫn lượng tử phải tuân theo. Lý thuyết lượng tử hấp dẫn được nghiên cứu nhiều nhất là lý thuyết dây. Trong lý thuyết dây, mối liên hệ $ER = EPR$ có thể được chứng minh một cách chặt chẽ trong một số trường hợp mà sự rối lượng tử có một dạng nhất định, tuy nhiên hiện nay không có sự đồng thuận là mội liên hệ này được thoả mãn trong tất cả các trường hợp.

Chúng ta đã thấy là sự rối lượng tử có thể, đúng nghĩa đen, kéo hai hệ xa nhau lại gần nhau. Ta cũng biết là hai vùng gần nhau của không gian có rối với nhau. Một cách tự nhiên, ta có thể nghĩ là không-thời gian, một cấu trúc liên tục, có thể bắt nguồn từ rối lượng tử, một tính chất rất lượng tử. Ý tưởng này đang là tiêu điểm của nhiều nhà nghiên cứu, nhưng còn chưa được tổng hợp lại thành một phát biểu chính xác.

LOGIC CỦA TOÁN HỌC ỨNG DỤNG

I. I. Blekman, A. D. Myshkis, Ya. G. Panovko

Bài viết này được chúng tôi trích từ "Toán học Ứng dụng", nhà xuất bản Khoa học Kĩ thuật Hà Nội, 1985. Đây là bản dịch Việt ngữ của Trần Tất Thắng từ bản gốc ở tiếng Nga của ba tác giả I. I. Blekman, A. D. Myshkis, và Ya. G. Panovko (độc giả có thể đối chiếu thêm với tựa tiếng Anh của sách là “Mechanics and Applied Mathematics: Logics and Special Features of the Applications of Mathematics").

Phương hướng ứng dụng và lý thuyết trong phát triển toán học

Hai nguồn toán học cơ bản

Phương hướng ứng dụng và lý thuyết: Vị trí hiện nay của toán học ứng dụng sẽ trở nên rõ ràng hơn nếu như theo dõi sơ bộ con đường phát triển của bản thân toán học. Rõ ràng là động lực phát triển của toán học có hai nguồn cơ bản tồn tại một cách khách quan. Một là nguồn bên ngoài do việc cần thiết phải dùng các phương tiện toán học để giải những bài toán nằm ngoài phạm vi toán học, các bài toán của các khoa học khác, cả kỹ thuật, kinh tế, ... chính đây là nguồn đầu tiên về mặt lịch sử. Nguồn thứ hai là nguồn bên trong do việc cần thiết phải hệ thống hóa các sự kiện toán học đã khám phá được, giải thích các mối liên hệ giữa chúng với nhau, hợp nhất chúng lại bằng các quan niệm khái quát lý luận, phát triển lý luận đó theo các quy luật bên trong nó, chính nguồn này ở thời điểm đó đã dẫn tới chỗ tách toán học thành một khoa học. [1]

Tất nhiên đôi khi cũng khó phân giới các nguồn này. Ví dụ những nguồn thúc đẩy nảy sinh do việc áp dụng các phương pháp của một lĩnh vực toán học và một lĩnh vực khác [2] đôi khi lại rất giống các nguồn thúc đẩy thâu nhận được khi áp dụng các phương tiện toán học ở ngoài phạm vi của toán học. Mặt khác, việc hệ thống hóa có thể là do có những nhu cầu thực tiễn trực tiếp.

Vì vậy có thể là mạo hiểm nếu xác định quá chi tiết về ranh giới giữa hai nguồn đó. Tuy nhiên những đặc điểm của các nguồn đó và ảnh hưởng của chúng trong đại bộ phận các trường hợp vẫn dễ dàng nhận thấy được. Hai phương hướng phát triển của toán học ứng với hai nguồn đó được gọi là phương hướng ứng dụng và phương hướng lý thuyết (thuần túy).

Xin nhấn mạnh là ở đây muốn nói về những ảnh hưởng chiếm ưu thế trong việc xây dựng và phát triển của các phương pháp toán học, của các khái niệm và những khẳng định. Còn đối với bất kỳ

[1] Trong lời giới thiệu cho một cuốn sách phổ biến nổi tiếng của R.Courant và G.Robbins [28] đã nói: “Rõ ràng là sự vận động đi lên trong lĩnh vực toán học là do sự xuất hiện những nhu cầu mà ở mức độ nhiều hay ít đều có mang một tính chất thực tiễn. Nhưng một khi đã xuất hiện thì sự vẫn động ắt phải có những khuôn khổ nội tại của nó và vượt ra ngoài phạm vi của tính hữu ích trực tiếp. Chính vì vậy sự biến đổi hoàn toàn một khoa học ứng dụng thành khoa học lý thuyết đã thấy trong lịch sử cổ đại và ở ngày nay cũng không phải ở mức độ kém hơn: Người ta đã thừa nhận sự đồng góp của các kỹ sư và các nhà vật lý vào toán học hiện đại.”

[2] Ví dụ áp dụng giải tích và toán học

bản chất toán học nào đã được xây dựng thì vấn đề nó thuộc phương hướng nào - lý thuyết hay ứng dụng - thường là vô nghĩa. Nên quy phương pháp Bubnov - Galeckin hoặc khái niệm hàm delta của Dirac, hoặc công thức của Taylor thuộc về phương hướng nào? Chỉ có thể trả lời được những câu hỏi đó nếu muốn nói về lịch sử phát sinh các khái niệm đó hoặc về nhưng hoàn cảnh cụ thể trong đó đã bắt gặp chúng. Đúng là một số chương như đại số đồng điều chẳng hạn thì hiện nay hoàn toàn thuộc về phương hướng lý thuyết và một ít vấn đề như phương pháp chọn xác suất xác định khả năng thực tiễn của sự kiện, khái niệm về tính hội tụ thực tiễn hay vô hạn thực tiễn thì hiện thời hoàn toàn thuộc về phương hướng ứng dụng (ở đây không phải ngẫu nhiên mà có các từ "*hiện nay, hiện thời*").

Giai đoạn đầu của phát triển toán học

Ở những giai đoạn phát triển sớm của toán học thì hai phương hướng này có thể thấy được đặc biệt rõ nét. Bởi vì lúc đấy các phương hướng này tác động lẫn nhau tương đối yếu nên thậm chí còn có thể nói được đó là hai ngành toán học hầu như tách biệt nhau - toán học ứng dụng và toán học lý thuyết (thuần túy).

Ví dụ toán học cổ Ai Cập công nhiên là toán học ứng dụng, nó liên hệ trực tiếp với việc đo đạc ruộng đất, tính toán thể tích các bình, tính đếm thực tiễn, tính thời gian (nói riêng là để dự đoán nhật thực và nguyệt thực), ... Toán học ở Mehico cổ đại và ở một số các dân tộc khác cũng có tính chất ấy. Toán học thuần túy có lẽ phát sinh lần đầu tiên ở Cổ Hy Lạp liên hệ với khoa học ngụy biện và tách hẳng khỏi toán học ứng dụng. [3] Chính khoa học Cổ Hy Lạp đã đề ra phương pháp suy diễn trong việc xây dựng lý thuyết. Theo phương pháp này thì mọi khẳng định trong lĩnh vực này hay khác đều có thể bằng những phương pháp khác của logic hình thức mà suy ra từ một số những khẳng định không chứng minh được gọi là tiên đề (chẳng hạn xem [30]). Kể từ đó phương pháp trình bày này được gọi là một trong những nét tiêu biểu quan trọng nhất của toán học (nếu không phải là một nét duy nhất). Tính chặt chẽ của phương pháp suy diễn đã gây được một số ấn tượng mạnh mẽ cho những thế hệ sau đến nỗi đã có những ý đồ (nói thêm là không thành) gắn hình thái suy diễn chặt chẽ cho các lĩnh vực tri thức khác. Ý đồ ấy thậm chí đã có cả triết học ("*Đạo đức học*" của B.Spinoza).

Xin lưu ý một tình tiết đáng chú ý là từ đó khoa học cổ Hy Lạp đã tiếp cận khái niệm vô hạn, tình tiết đó về sau đã được xóa bỏ và rồi lại được tái sinh ở mức cao hơn chỉ ở các công trình về logic toán học của thế kỷ XX. Khoa học cổ Hy Lạp không thừa nhận tính vô hạn thực tại và không thể tìm thấy ở một phát biểu toán học nào thời đó điều mà hiện nay được gọi là một tập hợp vô hạn hoặc một quá trình vô hạn. Một ví dụ tiêu biểu mệnh đề mà hiện nay được phát biểu là: "*Tập hợp các số nguyên tố là vô hạn*" thì Euclide phát biểu đại để là: "*Nếu cho một tập hợp nào đó (hiểu ngầm là hữu hạn) các số nguyên tố thì còn ít nhất một số nguyên tố nữa*" . Ở đây có

[3] Về điểm này F.Klein [29, tr. $146-147$] đã viết rõ "Nếu bắt đầu từ những người Hy Lạp cổ thời ta sẽ thấy có sự phân giới rõ rệt giữa toán học thuần túy và toán học ứng dụng từ thời Paton và Aristotel. Thuộc toán học thuần túy trước hết có phép dựng hình Euclide quen thuộc. Thuộc toán học ứng dụng đặc biệt có các phép toán về số gọi là logictic ($\lambda\gamma\delta$ là số chung nhất). Ở đây toán học ứng dụng khá bị thành kiến coi thường và trong nhiều trường hợp vẫn còn đến tận ngày nay, nhưng đại bộ phận chỉ thấy ở những người tự mình không biết tính toán. Tình hình này của logictic có thể phần nào do nó được phát triển trong mối liên hệ với lượng giác và với những nhu cầu đo đạc thực tiễn ruộng đất mà thời xưa là do những người làm những nghề không được cao quý lắm thực hiện. Tất nhiên nó lại đã được phục hồi một phần nào là do nếu thiếu nó thì không thể làm được khoa học khác, tuy có giống như trắc địa nhưng lại ngược với nó ở chỗ luôn luôn được coi là một trong những khoa học cao quý nhất: Đó là thiên văn học".

thể thấy có sự tương tự trực tiếp với khái niệm tính tiếp tục được không hạn chế là khái niệm mà một trong những phương hướng hiện đại của logic toán đã được thừa nhận là thay thế khái niệm tính vô hạn thực tại.

Mọi người đều biết rằng không thừa nhận tính vô hạn thực tại sẽ kéo theo những khó khắn nhất định về mặt logic (về điểm này ta nhớ lại những ngụy biện của Zenon) mà người Hy Lạp nói chung đã thấy rõ khi họ nhận xét rằng không gian và thời gian có thể phân chia được vô hạn nhưng về mặt hiện thực thì không thể phân chia được vô hạn như vậy. Dưới đây sẽ còn thấy rằng thừa nhận vô hạn thực tại còn kéo theo những khó khăn không những lớn hơn về mặt logic mà còn cả những khó khăn thực tiễn nữa.

Những biểu hiện cao nhất về tính chặt chẽ trong toán học cổ Hy Lạp là lý thuyết các tỷ lệ và phương pháp vét cạn của Evdocs tương tự như lý thuyết tương tự như lý thuyết hiện đại về số thực và phương pháp chuyển qua giới hạn nhưng khác ở chỗ là ở người Hy Lạp không thấy nói đến những tập hợp vô hạn các quá trình vô hạn. [4]

Tuy nhiên cùng với những kiệt tác này về tính chặt chẽ, trong logic của toán học Hy Lạp còn có cả những lỗ hổng mà theo quan điểm hiện nay thì quá rõ ràng. Ví dụ những định nghĩa ban đầu về các khái niệm điểm, đường thẳng, ... thực chất không phải là các định nghĩa ("*điểm là cái không có bộ phận, ...*") và về sau đã không được nhắc tới nữa. Các tiền đề chỉ bao hàm các mối tương quan giữa các đại lượng nhưng không phải tất cả các mối quan hệ đã được dùng đến. Hoàn toàn không có những định nghĩa và các tiên đề liên quan tới khái niệm thứ tự các điểm trên một đường thẳng hoặc trên một đường tròn, tức là khái niệm này dường như thuộc về số các từ (giống như "*cho trước*", "*người ta cho*" , ...) được ngầm hiểu khi xây dựng lý thuyết. Ngoài ra điều đáng chú ý là những người Hy Lạp đã tính toán chiều dài, diện tích, thể tích của các đường thẳng, các hình, các vật thể khác nhau và đôi khi khá phức tạp những vấn đề về bản thân sự tồn tại độ đo ấy thì lại không được đặt ra, ...

Trong khi đó người Hy Lạp (Archimede nói riêng) đã dùng cả các phép chứng minh dựa trên những tương tự một cách máy móc, song những phép chứng minh ấy bị coi là không chặt chẽ, chỉ có tính chất chuẩn bị, và những khẳng định thu nhận được nhất thiết về sau phải được chứng minh một cách chặt chẽ (chúng tôi sẽ còn quay lại khái niệm tính chặt chẽ trong toán học).

Có lẽ sự tách biệt rõ nét giữa toán học thuần túy và toán học ứng dụng cũng là nét tiêu biểu cho các nước đạo Hồi thời Trung cổ. Ở đây lý thuyết và thực tiễn giải các phương trình đại số cũng như giải tích tổ hợp ngày càng ăn nhập sâu vào toán học thuần túy, nói riêng, những phát minh toán học lớn hồi đó như các hệ số nhị thức, các công thức giải phương trình bậc 3 và bậc 4 thì hoàn toàn thuộc về toán học thuần túy.

[4] Không loại trừ một việc là do chính đã phát hiện được rất sớm những khó khắn liên quan tới những đại lượng vô ước nên đã khiến người Hy Lạp không phát triển nghiên cứu các phép toán về số mà trong những thời đại trước đã đạt được những thành tựu đáng kể ở Phương Đông. Thay vào đó họ đã đi tìm phương hướng trong con đường rối ren của hình học tiên đề thuần túy. Thế là bắt đầu một trong những nỗ lực mò mẫn kỳ lạ trong lịch sử khoa học và có thể ở đây những khả năng sáng chói đã bị nhỡ nhằng. Hầu như trong hai thiên niên kỷ ảnh hưởng của truyền thống hình học Hy Lạp đã kìm hãm sự tiến hóa tất yếu của quan niệm về số và về phép tính bằng chữ mà sau này đã trở thành nền tảng của khoa các học chính xác [28, Lời giới thiệu]

Phục hưng khoa học

Với giai đoạn đầu của thời kỳ Phục hưng khoa học, tình hình đã thay đổi về cơ bản, từ những công trình của G.Galilei, I.Kepler và của các nhà khoa học khác. Đối với họ, toán học là phương tiện tư duy toán học đã trở thành một trong những vũ khí chính của khoa học tự nhiên. Áp lực mạnh mẽ của khoa học tự nhiên đã có tác dụng rất tốt đối với sự phát triển của toán học. Trong những thế kỷ XVI - XVIII cả hai phương hướng ứng dụng và lý thuyết đã liên tục tác động lẫn nhau. Một khung cảnh điển hình là sự ra đời và phát triển của khái niệm toán học phục thuộc vào những bài toán của khoa học tự nhiên hay của hình học (lúc đó những ứng dụng vào hình học ít được phân biệt với những ứng dụng vào cơ học hay quang học), và sau khi khái niệm đó đã được xây dựng thì chẳng bao lâu nó đã có một cuộc sống độc lập và tiếp tục được phát triển theo những quy luật nội tại của toán học. Một số những kết quả của sự phát triển "*thuần túy*" đó lại được áp dụng vào khoa học tự nhiên và điều này lại làm xuất hiện những khái niệm và bài toán toán học nữa. Ví dụ rõ ràng và mọi người đều biết về sự phát triển ấy là việc hình thành các phép tính vi phân và tích phân.

Trong thời "*hoàng kim*" này của phát triển toán học một cách hài hòa thì sự tách biệt và hơn nữa, sự đối lập giữa toán học thuần túy và toán học ứng dụng trở nên mất hết cả ý nghĩa. Có được điều đó cũng còn là do các nhà khoa học lớn thời kỳ đó như N.Newton, L.Euler, J.Lagrange và những người khác không chỉ là các nhà toán học mà còn là nhà vật lý, các nhà cơ học nữa. Trong các công trình của mỗi nhà khoa học đó đã phát triển cả phương hướng lý thuyết lẫn phương hướng ứng dụng của toán học.

Thời kỳ thống trị của phương hướng lý thuyết tập hợp

Thời kỳ quá độ sang giai đoạn tiếp sau đã kéo dài nhiều thập niên và vì vậy chỉ có thể quy ước cho rằng thời gian bắt đầu thời kỳ đó là thế kỷ XIX. Nó liên hệ với hàng loạt các công trình xuất sắc nhất về lý thuyết tập hợp (G.Cantor) và lý thuyết hàm (K.Weierstrass), về xây dựng các cấu trúc đại số trừ tượng đầu tiên và phân tích các tiên đề hình học. Các công trình nổi tiếng và tiến bộ sâu sắc thời kỳ đó đã biến một bộ phận đáng kể của toán học thành một khoa học thống nhất có những yêu cầu thống nhất về các định nghĩa, các khẳng định và các phép chứng minh và có những tiêu chuẩn thống nhất về tính chặt chẽ.

Nguyên nhân chủ yếu của giai đoạn quá độ này là do cuối thời kỳ trước trong toán học đã tích lũy nhiều sự kiện, đã ra đời hàng loạt các lý thuyết không thống nhất với nhau và không có những cơ sở lập luận vững chắc là điều có thể phát triển những lý thuyết đó một cách tin tưởng. Sự phát triển tiếp sau của các bộ môn giải tích trong đó đã tự phát ra đời phương pháp dựa trên việc áp dụng vô hạn thực tại - các chuỗi vô hạn, những đại lượng vô cùng bé - đã đòi hỏi phải xác định rõ ràng những khái niệm về hàm số và về việc chuyển qua giới hạn, điều đó tất nhiên đã kéo theo sự ra đời của lý thuyết số thực và lý thuyết các tập hợp số, ... Quan điểm lý thuyết tập hợp đã cho phép phát biểu được rõ nét khái niệm nhóm, môt khái niệm quan trọng nhất trong đại số học và đã dẫn tới một kết cấu logic của hình học thỏa mãn những người đương thời. [5]

[5] Như P.S.Aleksandrov đã viết trong lời nói đầu của cuốn sách [31]: "*Lý thuyết tập hợp và những ứng dụng gần gũi nhất của nó không những chỉ hình thành một đối tượng nghiên cứu mới của toán học, ý nghĩa của lý thuyết tập hợp dường như vô cùng to lớn vì nó đưa ra một phương pháp tổng hợp mới bao trùm nhanh chóng toàn bộ toán học*". Tất nhiên ở đây là nói về toán học thuần túy.

Như vậy bước chuyển tiếp trong toán học sang quan điểm lý thuyết tập hợp dựa trên cơ sở, như hiện nay vẫn nói một cách khoan dung của lý thuyết tập hợp ngây thơ [6] là sự cần thiết và vì vậy là tiến bộ. Trong khi đó việc sắp xếp thứ tự các cơ sở của khoa học, những khả năng mới và to lớn đã khám phá được qua việc đó, nói riêng những khả năng khá mạnh mẽ của sự tương tác giữa các bộ môn khoa học khác nhau [7] đã thực sự nâng cao vai trò của phương hướng lý thuyết trong toán học mà trong giai đoạn này (kéo dài mãi tới chiến tranh thế giới thứ hai) đã chiếm ưu thế và quyết định phong cách của toàn bộ toán học nói chung.

Còn đối với phương hướng ứng dụng thì nó tiếp tục được phát triển trước hết trong mối liên hệ với sự phát triển của vật lý học và cơ học thiên thể song có lẽ ở đây không có một bước ngoặt nào cả. Thời kỳ này đã mở ra những con đường ứng dụng mới, chẳng hạn như đại số vector và giải tích, đại số tenxơ và giải tích và về sau còn có cả phép tính toán tử, lý thuyết hàm suy rộng, ... nhưng bản thân tính chất của những ứng dụng thì trong một thời gian nào đó về nguyên tắc vẫn như cũ. Bộ máy toán học cổ điển kết hợp với những quan niệm sâu xa về mặt vật lý đã dẫn tới chỗ thực hiện được nhiều khám phá nổi tiếng, như người ta vẫn viết trong các sách phổ biến rằng "*đầu nhọn của ngòi bút*" những ví dụ loại này được mọi người biết đến rộng rãi là sự tiên đoán về các sóng điện từ của C.Maxwell, việc khám phá ra các hành tin Neptun và Pluton, sự tiên đoán của P.Dirac về Positron, ... Trên cơ sở này đã ra đời một trong những lĩnh vực quan trọng nhất của khoa học ngày nay là vật lý lý thuyết.

Những thành tựu của phương hướng lý thuyết, việc xây dựng một mức chặt chẽ thống nhất cho toàn bộ toán học đã dẫn tới phương hướng giải các bài toán toán học ra đời trong những ứng dụng cũng ở mức chặt chẽ của phương hướng lý thuyết. Biểu hiện rõ nhất của khuynh hướng này thấy ở D.Holbert và A.M.Liapunov mà chúng tôi sẽ nói chi tiết sau. Trong một số các trường hợp, khuynh hướng này đã tỏ ra có thể thực hiện được và ngoài ra điều đó đã dẫn tới tính đối ngẫu khi giải một bài toán ứng dụng nói chung bởi vì việc đặt bài toán và biểu thị phép giải được tiến hành ở mức chặt chẽ vật lý (những cố gắng trong việc tiên đề hóa từng chương riêng lẻ của vật lý trên cơ sở lý thuyết tập hợp dường như không thành công cho nên ở đây không thể tránh khỏi mực chặt chẽ vật lý) những phép giải toán học lại được thực hiện ở mức chặt chẽ toán học (sự phân biệt này chính là đặc trưng cho thời kỳ này bởi vì ở thời kỳ "*hoàng kim*" thì các mức chặt chẽ rất gần nhau nếu không phải trùng nhau). Trong những trường hợp phức tạp hơn cũng như khi các nhà vật lý giải những bài toán toán học ứng dụng thì trong phép giải thường có những luận cứ về vật lý, song các nhà toán học thì coi phép giải như vậy là không được đầy đủ và tìm cách thay nó bằng phép giải hoàn toàn đạt mức chặt chẽ "*Weierstrass*". Thế là có một sự phân đôi nữa về "*nghề nghiệp*" giữa những yêu cầu về mức chặt chẽ của phép giải một bài toán ứng dụng của các nhà toán học và các nhà ứng dụng.

Góp phần vào việc phân đôi này còn có thể có mặt các phép tính toán mà mọi người đều biết là hầu như không bao giờ thực hiện được đầy đủ ở mức chặt chẽ "*Weierstrass*". Song rút ra khỏi những ứng dụng truyền thống của Euler và của những nhạc trưởng khác trong thời kỳ "*hoàng kim*" các nhà toán học của phương hướng lý thuyết tập hợp đã ngừng việc tính toán và hoạt động này được đặt ra các nhà thiên văn học, các nhà pháo binh, ... cũng như cho một nhóm không lớn

[6] Nó đối lập với một quan điểm hiện đại hơn dựa hoàn toàn vào các phương pháp của logic toán.

[7] Ví dụ chỉ dựa trên cơ sở lý thuyết tập hợp mà đã đưa ra cách lập luận theo tiên đề cho lý thuyết xác suất ở mức các lĩnh vực khác của toán học thuần túy. Những thành tự này đã dẫn tới một số các quan điểm cực đoan, ví dụ F.Doob [32, tr.7] đã viết: "*Lý thuyết xác suất chỉ là một ngành của lý thuyết độ đo và khác ở chỗ nó đặc biệt chú ý tới một số các khái niệm chuyên môn của lý thuyết ấy và ở lĩnh vực ứng dụng đặc biệt của nó*". *Có lẽ trên cơ sở đó cũng có thể nói được rằng văn học là một ngành ngôn ngữ học "khác ở chỗ nó đặc biệt chú ý tới, ...*"

các chuyên gia tính toán là những người được coi là đứng ở một chỗ nào đó giữa các nhà khoa học và các kỹ sư. Những thành tựu mà đại bộ phận các nhà toán học đạt được trong lĩnh vực này đã không được coi trọng và trong mọi trường hợp chúng bị coi là hoàn toàn không so sánh được với những thành tựu đáng ngạc nhiên của phương hướng mới.

Hoàn toàn mới gần đây, trong những bài giảng của một trong những nhà đại số học nổi tiếng đã có nhấn mạnh một cách hệ thống đến sự khác nhau chủ yếu giữa khoa học và "*tính toán*" [8].

Xin lưu ý là về sau, khi toán học tính toán đã trở thành mốt rồi thì lại diễn ra sự phân tầng tiếp sau: Theo cách diễn tả hóm hỉnh của R.S.Guter [1, tr.13] thì "*những người làm việc trong lĩnh vực toán học tính toán chia thành những người chứng minh tính hội tụ của các quá trình tính toán và sự tồn tại của nghiệm và những người áp dụng các quá trình tính toán và tìm lời giải*". Chính những người sau đã trực tiếp phục vụ hữu ích cho các khoa học ứng dụng.

Còn đối với mức chặt chẽ đạt được dựa trên cơ sở lý thuyết tập hợp ngây thơ và trong giải tích toán thì dựa trên lý thuyết giới hạn mô tả bằng cái gọi là ngôn ngữ - ϵ [9] thì dường như nó thực tiễn đã thu hút được tất cả các nhà toán học. Đúng là cũng có những người "*không hài lòng*" (ví dụ L.Brauer, G.Weyl, ...) nhưng trong hoạt động thực tiễn thì họ cũng sử dụng mức chặt chẽ ấy. Ở chỗ này chỗ khác nơi chân trời cũng đã có thấy những mâu thuẫn trong lý thuyết tập hợp nhưng đại bộ phận các nhà toán học chỉ thấy đó chỉ là chuyện buồn cười không đáng khó chịu bởi vì nó chỉ đụng đến những con ngáo ộp không ai cần đến như tập hợp của tất cả các tập hợp, hoặc tập hợp của tất cả các tập hợp không chứa chính nó, ... Cuộc thảo luận về tiền đề chọn (tiên đề Zermelo) đã kết thúc với thỏa thuận rằng để tránh được nó, nếu có thể, thì trong trường hợp ngược lại phải chỉ ra rõ ràng việc áp dụng nó, tất nhiên nếu nghĩ cẩn thận thì sự thỏa thuận đó quả là có ngây thơ vì dường như những chỉ dẫn như vậy có làm thay đổi một cái gì đó. Trong những năm gần đây trong những công trình về toán học thuần túy, tiên đề chọn có được sử dụng quá rộng rãi, thậm chí những mệnh đề được chứng minh bằng tiên đề đó đã được ứng dụng một cách có hệ thống, điều đó khiến người ta có ấn tượng khá rõ ràng là có sự tùy tiện đối với tiên đề đó.

Những thành tựu của những phương hướng lý thuyết tập hợp, ngôn ngữ và phương pháp của nó đã trở thành quen thuộc đối với một vài thế hệ các nhà toán học và đã tạo ra một quan niệm về mức chặt chẽ đạt được dường như tuyệt đối. Nhiều nhà toán học (và nhất là những người không phải là toán học) hiện nay vẫn có thói quen tin tưởng vào tuyệt đối và chỉ đưa vào toán học những mệnh đề được chứng minh "*chặt chẽ tuyệt đối*", những bài toán được đặt ra một cách "*chặt chẽ tuyệt đối*", ...

[8] Cuốn sách hữu ích của C.Lanczos [33] đã bắt đầu bằng những lời như sau: "*Trong nhiều năm tác giả đã nghiên cứu các lĩnh vực của giải tích toán là những lĩnh vực trước hết được sự quan tâm của các kỹ sư và các nhà vật lý học. Việc lĩnh vực này của toán học làm việc trong suốt thế kỷ XIX không được chú ý như những công trình cổ điển của giải tích có lẽ là kết quả của một quan niệm sai lầm về mặt lịch sử. Cho mãi tới thời Gauss và Legendre, các phương pháp làm việc của giải tích mới thu hút được sự chú ý của các nhà toán học nổi tiếng. Phát minh về lý thuyết giới hạn đã làm thay đổi tình hình. Kể từ thời gian đó việc đưa ra một quá trình xấp xỉ vô hạn để có thể xác lập được tính đúng đắn của các kết quả giải tích xác định độc lập với việc quá trình áp dụng đó có được thực hiện trong bài toán hay không, đã được coi là thỏa đáng. Kết quả là đã dần dần phân cách toán học thuần túy và toán học ứng dụng và như vậy là ta có các nhà giải tích thuần túy phát triển tư tưởng của họ trong thế giới trong thế giới kết cấu thuần túy lý thuyết và các nhà giải tích số là những người chuyển các quá trình giải tích thành các phép tính toán trên máy.*"

[9] Cách nói "*Đối với một $\epsilon > 0$ bất kỳ tìm được số n*", "*với bất kỳ $\epsilon > 0$, tìm được δ*" đã trở thành quá quen thuộc đến nỗi chữ ϵ biến thành dấu hiệu dường như chỉ mức chặt chẽ "*Weierstrass*".

Quan điểm về hiện đại

Trong lời giới thiệu đã có nói về nét "*đặc thù toán học*" trong giai đoạn hiện nay, một giai đoạn có liên hệ với sự mở rộng một cách mạnh mẽ ngoại vi và khối lượng của những ứng dụng toán học và mặt khác với sự xuất hiện và phát triển kỹ thuật tính toán điện tử là cái đã làm tăng nhiều lần tính hiệu lực của các ứng dụng đó. Rõ ràng là ngay cả bên trong toán học trong những năm gần đây cũng đã có những thành tựu xuất sắc, về sau chúng tôi sẽ nói tới một số những thành tựu đó. Song nếu xét sự phát triển của khoa học chẳng hạn như trong 30 năm lại đây theo lập trường của nền văn minh nói chung thì những thành tựu "*bên ngoài*" của toán học sẽ thấy là lớn hơn nhiều. Nói cách khác, hiện nay chính sự phát triển của phương hướng ứng dụng trong toán học (xét trong tất cả những biểu hiện của nó) đã trở nên trội hơn. Rõ ràng là trong thập niên tới đây, ưu thế này sẽ được bảo đảm và thậm chí sẽ còn được đẩy mạnh nữa.

Điều đó cho phép nói được rằng sau những giai đoạn phát triển của toán học mà đã có thể quy ước gọi được là giai đoạn tiền hy Lạp, giai đoạn Hy Lạp, phục hưng và giai đoạn lý thuyết tập hợp, ta đã bước sang một giai đoạn mới về chất của việc "*toán học hoá tổng quát*". Có thể quy ước đánh dấu giai đoạn đầu của thời kỳ này là từ những năm 40 của thế kỷ XX (thời gian xây dựng những máy tính điện tử đầu tiên). Bước chuyển mình về chất trong toán học đã và đang kéo theo những biến đổi về chất trong nhiều lĩnh vực của khoa học tự nhiên, kỹ thuật, của các khoa học và đời sống xã hội.

Nếu dùng các thuật ngữ trong lịch sử phát triển xã hội thì có thể gọi giai đoạn hiện nay là giai đoạn "*lưỡng quyền*" (trong thời kỳ quá độ sang giai đoạn dân chủ).

Một mặt toán học của phương pháp lý thuyết tập hợp vẫn tiếp tục phát triển. Sự kết hợp, phát triển và hình thành những quan niệm mới của đại số học, của tôpô đại cương và tôpô đại số, của giải tích cổ điển và giải tích hàm, của lý thuyết hàm và hình học đã cho phép xây dựng được những chương mới, chín muồi của toán học, cho phép tiến hành những khái quát suy rộng và tìm ra những phương pháp mới cho các bài toán cũ và đã giải được nhiều những bài toán đó, cho phép nêu lên các lớp những bài toán mới đáng chú ý. Một sự kiện nổi bật là việc xây dựng giáo trình "*Cơ sở toán học*" gồm nhiều tập của N. Bourbaki, mục đích của giáo trình này là xây dựng một cơ sở tổng quát, một nguồn tư liệu bằng một ngôn ngữ thống nhất để có thể tiếp tục phát triển được toán học theo lý thuyết tập hợp. [10] N. Bourbaki còn chưa đề cập đến nhiều chương của toán học (nhưng thật đã vĩ đại!) và rất có thể cả những chương ấy sẽ không tránh được sự "*Bourbaki hoá*". Hiện nay khuynh hướng này của toán học thuần tuý đang vang lên một thanh điệu lất át các thanh điệu khác.

Tuy nhiên trong những thập niên gần đây người ta còn thấy cả những mặt yếu của khuynh hướng này. [11] Điều đó biểu thị theo hai tuyến – logic toán và những ứng dụng. Tuy nhiên , như đã thấy, chúng lại có liên hệ với nhau. Trước hết, tính chặt chẽ "*tuyệt đối*" của lý thuyết tập hợp ngây thơ và những lý thuyết lấy nó làm cơ sở dường như không hoàn toàn là tuyệt đối và điều này có thể thấy được từ những luận cứ chung nhất vì nó không thể không cần đến các nhà logic học. Không phải mọi người đều nghĩ rằng ở lý thuyết tập hợp ngây thơ không có một hệ thống hợp lý các tiên

[10] Chi tiết xem [34].

[11] W.Spohn đã nói về sự nguy hiểm đối với toán học hiện đại và xu hướng nghiêng về phía các chương trừu tượng nhất và kết luận rằng : "*Hãy để cho toán học quay về hướng phát triển chính của nó để nó có thể trở thành của cải chung của mọi người và chiếm một vị trí thích đáng với nó với tinh cách một lực lượng thống trị trong xã hội của chúng ta*".

đề làm cơ sở và nó chỉ dựa vào sự "*dễ thấy*" và những đường ngăn cấm tuỳ tiện, ví dụ được phép coi tập hợp tất cả các số tự nhiên là có lực lượng nhưng cấm không được coi tập hợp tất cả các số thứ tự (siêu hạn) hay tập hợp tất cả các bản số là có lực lượng. Việc phân tích của các nhà logic về hệ thống các tiên đề của lý thuyết tập hợp, một hệ thống đã đưa ra một thứ tự nào đó, đã chứng minh rằng một số các lập trường quan trọng nhất "*tự nó đã được giải quyết*" (ví dụ tiên đề chọn) mà thực ra có thể hoặc chấp nhận hoặc không và điều đó có thể dẫn tới sự cùng tồn tại bình đẳng các "*môn toán học lý thuyết tổng hợp*" khác nhau, không tương đương với nhau tựa như các môn hình học khác nhau vậy. Sự độc lập của giả thiết continum với các tiên đề khác của lý thuyết tập hợp được phát hiện tròn các công trình của K. Gidel và P. Cohen (1960) cond có hiệu lực hơn : nó có nghĩa là khi xây dựng một lý thuyết như vậy thì hoặc có thể chấp nhận giả thiết này như là một tiên đề bổ sung, hoặc chấp nhận một khẳng định trái ngược như một tiên đề, nhưng từ đó suy ra rằng vấn đề giả thiết continum "*thực ra*" có đúng hay không lại là vô nghĩa ! (xem vấn đề này ở [39]). Nói riêng, phát kiến nổi tiếng này đã chứng minh rằng khái niệm tồn tại mà lý thuyết tập hợp ngây thơ bám chắc vào thực ra không phải tự nó đã được giải quyết.

Song theo quan điểm đang được phát triển thì điều còn quan trọng hơn là mặt yếu ớt của toán học lý thuyết tập hợp đối với những ứng dụng. Chúng ta sẽ không than phiền rằng tất cả những khẳng định của nó đều thuộc cái ngẫu nhiên khi một bài toán ứng dụng đã được chuyển hoàn toàn sang ngôn ngữ toán học. Điều tồi hơn là trong nhiều trường hợp, điều khẳng định về nghiệm chỉ có tính chất thuần tuý về tồn tại, tức là chứng minh được định lý về sự tồn tại của nghiệm chứ trong định lý đó không hề nói gì đến việc nghiệm đó có thể tìm thấy một cách chính xác hay xấp xỉ.

Mặc dầu đôi khi kết cấu của nghiệm có thể suy ra được từ phép chứng minh định lý nhưng điều này thường gây thất bại, cho nên, nói vui một chút thì người ứng dụng giống như ở vào hoàn cảnh của một người đàn ông đã đăng ký kết hôn với một người phụ nữ mà anh ta chưa hề được trông thấy và cũng không biết nàng ở đâu nữa. Theo cách nói rất đúng của H. Weyl thì "*Toán học là một kho tàng khổng lồ trong bản vị tiền giấy*". [40, tr. 106]. Trong nhiều trường hợp, kết cấu được coi là kết quả thực hiện một quá trình vô hạn này hay khác mà không phân tích phép xấp xỉ hữu hạn của nó. Nếu như công thức xấp xỉ dùng để giải có kèm theo sự đánh giá về sai số thì, trừ những trường hợp quá giản đơn hoặc những ví dụ được lựa chọn đặc biệt để giảng dạy, sự đánh giá ấy thường không áp dụng được hữu hiệu trong những ví dụ cụ thể hiện thực (ấy là chưa nói rằng trong đại bộ phận các đánh giá lại có tính chất gần đúng và bao gồm cả những nhân tử hằng số chưa biết). Những tính toán hằng số, nhất là trên máy tính điện tử có phần đóng góp của nó bởi vì thực hiện sự đánh giá "*tuyệt đối chặt chẽ*" về ảnh hưởng của việc làm tròn số trong những phép tính cồng kềnh tỏ ra lại rất khó khăn và vì vậy sự đánh giá này thực tế chưa hề bao giờ được làm cả.

Những tiêu chuẩn cứng ngắc về mức độ chặt chẽ của toán học lý thuyết hiện đại đã dẫn tới chỗ làm trì trệ không đáng mong muốn đối với việc nghiên cứu các khái niệm toán học mà thoạt đầu không thoả mãn những tiêu chuẩn đó, ví dụ như hàm denta, entropi, ...

Tất cả những điều kiện nhận xét trên đây dẫn tới một tình hình là trong đại bộ phận những nghiên cứu ứng dụng thì những lập luận toán học tuyệt nhiên không ở mức suy diễn thuần tuý mà toán học thuần tuý đòi hỏi, chúng không thể và không cần phải ở mức đó như chúng tôi sẽ nói chi tiết ở dưới đây về vấn đề này. Có thể nói rằng những kết cấu suy diễn không theo kịp nhịp điệu của cuộc sống hiện nay [12] và trong quá trình tiếp cận đến chân lý thì chúng thường có một hiệu suất

[12]"*Nếu như ngay từ đầu khoa học đã được phát triển bởi những bộ óc chặt chẽ và tinh vi có ở một số các nhà toán*

quá thấp đến nỗi những nhà ứng dụng đã tự phát tìm ra một biện pháp hữu hiệu hơn nhiều cho các lập luận toán học [13] mà chúng tôi sẽ nói chi tiết ở dưới. Những biện pháp lập luận ở mức chặt chẽ "*vật lý*", "*ứng dụng*" đối với các nhà ứng dụng thuộc các phương hướng khác nhau là khá giống nhau. Những biện pháp ấy cũng đặc trưng cho phong cách lập luận của toán học ứng dụng, nó cũng phổ biến trong các nhà ứng dụng như là phong cách suy diễn phổ biến trong các nhà toán học thuần tuý. Đó chính là điều đã đề cập tới ở phần trên khi nói về sự "*lưỡng quyền*". [14]

Cần phải đặc biệt lưu ý rằng các phương hướng ứng dụng đã ảnh hưởng đáng kể đến toàn bộ toán học hiện đại nói chung kể cả phương hướng lý thuyết của nó. Nói riêng chính điều này đã giải thích sự đặc biệt chú ý đến vấn đề thuật toán hoá cũng như vấn đề tối ưu hoá đặc trưng cho toán học hiện đại và đã có vết tích biểu hiện ở lĩnh vực đa dạng của nó.

Để kết luận chúng tôi xin đưa ra một đặc trưng nổi bật của phát triển toán học bắt đầu từ thời kỳ phục hưng trong lời nói đầu của cuốn sách R. Courout và G. Robin. [28] "*Sau thời kỳ tích luỹ lực lượng một cách chậm chạp – vào thế kỷ 17 cùng với sự ra đời của hình học giải tích và phép tính vi tích phân – đã mở ra một thời kỳ cách mạng như vũ bão trong phát triển của toán học và vật lý. Trong những thế kỷ XVII và XVIII, tư tưởng của người Hy Lạp về sự kết tinh theo tiên đề và sự suy diễn một cách có hệ thống đã mờ dần và mất ảnh hưởng của nó dù rằng hình học cổ đại vẫn tiếp tục có những bông hoa nở rộ. Tư tưởng tuyệt vời về logic xuất phát từ những định nghĩa rõ nét và những tiên đề "hiển nhiên*" không mâu thuẫn gì nhau đã ngừng nhập cảng vào những người khai phá mới những tri thức toán học. Ham mê cuộc say sưa chân chính với những thông đoán trực quan, chuyển dịch những kết luận bất khả xâm phạm với những lời khẳng định nửa huyền bí và vô nghĩa, tin tưởng mù quáng vào lực lượng siêu nhân của các thủ tục hình thức, họ đã khám phá được một thế giới toán học mới vô cùng phong phú. Nhưng rồi ít một, trạng thái nhập định của tư tưởng bị ham mê bởi những thành tựu làm chóng mặt đã nhường chỗ cho tinh thần nhẫn nại và phê phán. Trong thế kỷ XIX, ý thức về sự cần thiết phải củng cố khoa học, nhất là trong mối liên hệ với những yêu cầu của nền giáo dục cao đẳng phổ biến rộng sau cách mạng Pháp đã dẫn đến việc xét lại những cơ sở của môn toán học mới, nói riêng, sự chú ý đã hướng về các phép tính vi tích phân và tích phân nhằm làm sáng tỏ khái niệm giới hạn đã ngầm hiểu trong giải tích. Như vậy thế kỷ XIX không những chỉ là một thời đại của các thành tựu mới mà còn là thời đại chứng kiến sự hoàn lại tính chính xác và độ chặt chẽ của các phép chứng minh lý tưởng

học hiện nay mà tôi rất ngưỡng mộ thì độ chính xác sẽ không cho phép được đẩy mạnh lên" L.J.Mandeishtam đã nói như vậy. [42, tr. 51] Phụ hoạ thêm là lời phát biểu của Kapys.P.L [40, tr. 30] : "*Tư duy logic sắc bén, thuộc tính của các nhà toán học, khi tiền đề hoá những cơ sở mới thì lập tức gây nên phiền toái vì nó đã làm te liệt óc tưởng tượng*".

[13]Và thậm chí đã có một ngôn ngữ riêng, trong đó các thuật ngữ "*Sự hội tụ thực tiễn*", "*chất lượng của phương pháp tính*", "*chất lượng của mô hình toán học*", ...

[14]V.V.Novozhilov [44] viết : Hiện nay ngày càng thấy rõ khuynh hướng phân công lao động: Có những nhà bác học đang hoàn thiện toán học theo hướng logic phát triển nội tại của nó, có các nhà khoa học khác lại nghiên cứu các phương pháp toán học và được áp dụng một cách mau chóng. Những đại biểu của hai phương hướng này rõ ràng khác nhau không những chỉ ở nhóm các vấn đề "*của họ*" mà còn ở tư chất của tư duy.

Nhà toán học lý thuyết tìm mọi cách lập luận một cách chặt chẽ nhất cho mỗi một hành động và luôn luôn bó tròn trong khuôn khổ khoa học của mình trong khi các nhà toán học ứng dụng lại dùng các phương pháp mà tính chặt chẽ và độ sai còn chưa được đánh giá. Khả năng tránh sai sót của anh ta là dựa vào kinh nghiệm, so sánh các két quả tính toán với thực nghiệm. Anh ta cần làm như vậy vì đại bộ phận các bài toán hiện nay trong vật lý và kỹ thuật đều không được giải quyết một cách chặt chẽ. Về những bài toán học đa dạng nảy sinh trong công tác thực tiễn của người kỹ sư hiện nay, cũng như về đặc điểm của các phương pháp toán học tương ứng có được nói đến trong tuyển tập [45], nói riêng xin lưu ý những bài báo có tính chất tổng hợp của N.F.Garasjuta. Ju.A.Mitropolski và A.V.Skorokhod. Về mối tương quan giữa toán học và kỹ thuật, xem thêm [46]. Về mối tương quan giữa toán học và vật lý hiện nay, xem thêm [47-49]. Về triển vọng phát triển của toán học, xem thêm [50].

cổ điển. Về mặt này thì hình ảnh Hy Lạp quả là có trội hẳn lên. Lại một lần nữa con lắc lại đưa về phía tính tuyệt vời logic và tính trừu tượng. Có lẽ hiện nay chúng ta chưa bước ra khỏi thời kỳ đó dù rằng được phép hy vọng là sự gián đoạn đáng tiếc giữa toán học thuần tuý và những ứng dụng sinh động của nó sẽ được thay thế bởi một kỷ nguyên hợp nhất chặt chẽ hơn. Phần dự trữ đã có của các lực lượng bên trong và cùng với sự cực kỳ giản lược khác đạt được trên cơ sở những quan niệm rõ ràng cho phép ngày nay nghiên cứu được lý thuyết toán học mà không tách rời khỏi những ứng dụng. Xác lập một lần nữa mối liên hệ hữu cơ giữa tri thức thuần tuý và tri thức ứng dụng, sự cân bằng lành mạnh giữa tính tổng quát trừu tượng và tính cụ thể sinh động – đó là điều chúng tôi thấy ở nhiệm vụ của toán học trong một tương lai không xa". [15]

Trong toán học gồm có những gì?

Toán học ứng dụng là cái gì? và nói chung nó có tồn tại hay không? Những vấn đề này đã đến lúc cần phải thảo luận một cách triệt để. Đáng chú ý là thuật ngữ "*toán học ứng dụng*" hiện nay đã trở thành một thuật ngữ rất mốt (nhất là ở những người không phải chuyên gia).

Có lẽ quan điểm phổ biến nhất đối với khái niệm "*toán học ứng dung*" trong hàng ngũ các nhà toán học là quan điểm cho rằng nói chung không có toán học ứng dụng. Ngoài ra, các nhà toán học khác nhau lại cho những từ này một nội dung hoàn toàn khác tuỳ theo các nhà toán học ấy có gia nhập vào bản thân môn toán học hay không. [16]

Có những người cho rằng chỉ những kết cấu thuần tuý suy diễn mới được gọi là toán học. Tất cả những gì nằm ngoài kết cấu đó, không có quan hệ với toán học hoặc những bộ môn của toán học thì cũng không được gọi là toán học. [17] Hiện nay quan điểm này ít được phát biểu ầm ĩ song một cách "*không chính thức*" nó vẫn còn khá phổ biến, bên cạnh những việc khác, quan điểm này tỏ ra "*thuận tiện*" cho nhiều người dạy toán với những người không phải các nhà toán học.

Thực tế quan điểm này đã thu hẹp một cách vô lý và đáng kể ranh giới của Khoa học Toán học vĩ đại và trước hết mang lại cái bất lợi cho chính môn Toán học (và tất nhiên cho chính sự nghiệp đào tạo các nhà bác học trẻ). Về vấn đề này M. Las và S. Ulam đã viết : "*Những cố gắng – tiếc rằng lại khá phổ biến – nhằm tách rời toán học "thuần tuý" khỏi toàn bộ phần hoạt động khoa học còn lại và nhằm chắt nó lại để nấu thành một loại nước cốt đặc biệt chỉ làm nghèo nàn cả toán học lẫn các môn khoa học khác*". [13, tr. 234].

F. Klein cũng đã phát biểu một tư tưởng như vậy : "*Những quan niệm logic thuần tuý phải tạo ra, như người ta vẫn nói, một bộ xương rắn chắc của cơ thể toán học, đảm bảo cho nó độ ổn định*

[15] A.N.Kolmorokov đã có nói rằng ước mơ mà ông theo đuổi từ lâu là thanh toán phân cách giữa những phương pháp "*chặt chẽ*" của các nhà toán học thuần tuý và những biện pháp "*không chặt chẽ*" của những lập luận toán học của các nhà toán học ứng dụng, các nhà vật lý và các kỹ thuật (dẫn theo [51]).

[16] Khi liệt kê các quan điểm ở các phần 6 và 7 nói riêng đã dùng những ý kiến nói miệng của M.A.Krasnoselski.

[17] Đây là một câu nói cực đoan nhất của lập trường này "*Toán học là sự xây dựng một lý trí thuần tuý và vì vậy nó không cần các mối liên hệ với những lĩnh vực hoạt động khác của con người*" (L.Mordell [52, tr. 28]). Xin dẫn thêm lời phát biểu của J.Diendonne về vấn đề này (dẫn theo [53, tr. 18]) : "... về nguyên tắc, trong cơ sở toán học hiện đại không có một mục đích hữu dụng nào và là một bộ môn trí lực mà lợi ích thực tiễn quy về số khôn, nhà toán học trong các công trình nghiên cứu của mình không hề vương vấn tư tưởng về mức hữu ích của các kết quả đạt được trong tương lai (hơn nữa điều đó cũng không thể thấy trước được) mà chỉ theo đuổi ước muốn hiểu được hiện tượng toán học, một hiện tượng tự kết thúc ở chính nó, toán học không hơn gì sự "xa xỉ" mà một nền văn minh có thể tự cho phép mình". Rất tiếc rằng điều đó lại được nói ra ở một người, một trong những người lãnh đạo nhóm "*Bourbaki*" và có ảnh hưởng đáng kể đến bộ mặt của toàn bộ toán học hiện đại.

và đáng tin cậy. Nhưng bản thân cuộc sống của toán học, những quy nạp quan trọng nhất và tính tích cực của nó lại là chủ yếu liên hệ với những ứng dụng của nó, tức là với mối tương quan giữa những khách thể trừu tượng với toàn bộ các lĩnh vực khác. Loại trừ những ứng dụng khỏi toán học chẳng khác gì đi tìm một thực thể sống chỉ từ một hài cốt, không bắp thịt, không thần kinh, không mạch máu". [29, tr.46].

Cuối cùng chúng tôi xin dẫn lời của A. Poincaré: "*Vật lý học không những chỉ cho chúng ta (các nhà toán học – tác giả) cái lý để giải quyết vấn đề, nó còn giúp chúng ta tìm thấy các phương tiện để giải quyết vấn đề nữa. Điều này xảy ra theo hai con đường. Một là nó cho ta linh cảm của phép giải, hai là gợi ý cho ta tiến trình của các lập luận*". [54, tr.108].

Thực chất ở đây đã biểu thị một quan điểm thứ hai mà chúng tôi cho rằng dễ dàng chấp nhận được hơn, quan điểm đó cho rằng gia nhập vào lĩnh vực hoạt động của toán học còn có cả các phương pháp giải thực tiễn đối với các bài toán bắt nguồn từ bên ngoài toán học.

Song chúng ta còn phấn khởi hơn với một quan điểm thứ ba, rộng nhất, cho rằng toán học không những chỉ bao hàm các lĩnh vực suy diễn mà còn bao hàm toàn bộ những thực chất toán học – các khách thể toán học, các phương pháp và tư tưởng gặp trong toán học lý thuyết cũng như trong các ứng dụng : tức là kết cấu các mô hình toán học, thực nghiệm toán học, những lập luận quy nạp hay những lập luận hợp lý khác có tính chất toán học, ...

Trong cuốn sách rất hay của G. Polya [56, tr.309] có nói rằng : "*Giới hạn của toán học là miền những lập luận chứng minh thuộc bất kỳ khoa học nào đã đạt mức phát triển là những khái niệm thuộc khoa học ấy có thể biểu thị được dưới dạng logic toán trừu tượng*". Chúng tôi muốn thêm vào ở đây là trong khái niệm chứng minh không nên gắn cho nó một nội dung giáo điều, hẹp hòi.

Tất nhiên những môn sinh của quan niệm này, một quan niệm mà chúng tôi cho rằng tiến bộ và chín muồi hơn cả đối với toán học (và điều đó cũng khá cơ bản đối với các nhà toán học) phải khước từ "*tính thống nhất lý thuyết tập hợp*" của toán học mà chỉ coi nó như một "*hạt nhân*" nào đó của toán học mà thôi.

Các quan điểm về toán học ứng dụng

Trước hết chúng tôi lấy làm buồn rầu mà lưu ý rằng theo ý kiến của một số nhà toán học thì nghiên cứu những ứng dụng nói chung là một điều hổ thẹn.

Về vấn đề này F. Klein đã viết : "*Rất tiếc rằng ... vẫn còn gặp những giáo viên đại học đã không che dấu những lời lẽ quá ngạo mạn đối với những người làm về ứng dụng. Cần phải đấu tranh quyết liệt nhất với cái tính kiêu căng thể hiện trong những quan điểm đó. Mọi thành tựu xác đáng, cho dù nó thuộc lĩnh vực lý thuyết hay ứng dụng, đều phải được đánh giá cao như nhau vì nó tạo cho mỗi người khả năng nghiên cứu những vật mà mình cảm thấy gần gũi hơn cả. Khi đó mỗi người sẽ biểu hiện đa dạng hơn số lớn những tài năng mình có : vì những thiên tài vĩ đại như Aschimede, Newton, Gauss là những người luôn luôn chiếm lĩnh cả lý thuyết lẫn thực tiễn như nhau*". [57, tr.314].

Xin dẫn thêm lời của R. Courant : "*Thực ra giữa toán học "thuần tuý" và toán học "ứng dụng" không thể vạch ra một ranh giới rõ rệt được. Vì vậy trong toán học không thể phân ra một lớp người thầy tú tối cao thiên về cái vẻ đẹp hoàn thiện của toán học và chỉ chú ý đến thiên hướng đó* *của mình, và những người phục vụ cho họ. Sự "phân đẳng cấp" đó trong trường hợp tốt nhất cũng chỉ là một triệu chứng của những bộ óc hẹp hòi*". [12, tr.27]. N.Bailey cũng nói về sự bất lợi của sự đua đòi ấy trong cuốn sách hữu ích của ông [58, tr.138] khi nói về những ứng dụng của toán học trong vào sinh vật và y học.

V.V. Novozbilov viết : "*Tiếc rằng nhà lý thuyết cho đến nay vẫn thường coi "nhà ứng dụng" như một nhà toán học loại hai, một nhà khoa học không có khả năng làm việc một cách thật chặt chẽ và lấy cái riêng làm tổn thất cái chung. Dễ dàng phát hiện ở các "nhà ứng dụng" những sai sót trong lập luận xét về tính chặt chẽ, nhà lý thuyết thường tỏ ra thờ ơ với những thành tựu của họ - đó là việc họ biết cách giải những bài toán thực tại với một số chính xác đủ dùng cho những mục đích thực tiễn mà bản thân nhà lý thuyết không thể giải được bằng các phương pháp chặt chẽ*". [44]

Qua những câu trích dẫn trên ta thấy khá nổi bật khía cạnh tâm lý của vấn đề. Nhưng độc lập với điều đó tưởng cần phải nhấn mạnh rằng hiện nay người ta ngày càng thừa nhận sự tồn tại khách quan của toán học ứng dụng. Song đằng sau sự thừa nhận đó còn nhiều quan điểm khác nhau.

Ví dụ một số người cho rằng toán học ứng dụng là một bộ phận toán học "*thường dùng hằng ngày*" với nghĩa xấu của từ đó, tồn tại dưới dạng một số các biện pháp, các đơn thuốc và quy tắc thiếu chặt chẽ và không hoàn thiện về mặt logic (có thể là do trình độ toán học còn thấp của các chuyên gia trong lĩnh vực này). Những thiếu sót đó của toán học ứng dụng có thể khắc phục được và kết quả sẽ là cái "*toán học khuyết*" đó sẽ được nâng lên mức toán học tiêu chuẩn. [18]

Chúng tôi cho rằng quan điểm ngây thơ nhưng phổ biến này, nếu như nó không phải một biểu hiện của sự đua đòi thì cũng là dựa trên một cơ sở không nhận thức được tình hình đúng đắn của vấn đề. Thực ra theo quan điểm này thì làm thế nào có thể giải thích được một sự việc là các nhà vật lý, các kỹ sư nghiên cứu lý thuyết và các chuyên gia khác trong đó rõ ràng có không ít những người khá thông minh khi áp dụng toán học đã cố tình né tránh ngôn ngữ suy diễn chặt chẽ? Và mặc dầu ở các học viện họ đã được học ngôn ngữ đó một cách có hệ thống song họ vẫn muốn (liệu có hại chăng?) được học lại khi chuyển sang ngôn ngữ của toán học ứng dụng và xây dựng lại toàn bộ phong cách tư duy suy diễn thuần tuý đòi hỏi nhất thiết phải có. Chúng tôi nghĩ rằng sự xây dựng lại đó hoàn toàn là tự nhiên và điều giải thích duy nhất cho nó là: Sự xây dựng lại đó là cần thiết. Dưới đây chúng tôi sẽ cố gắng chứng minh rằng sự vắng mặt yêu cầu nhất thiết phải có về sự hoàn thiện logic hình thức trong những ứng dụng của toán học là điều không thể tránh được, và đó không phải là một dấu hiệu của sự thua kém mà là một nguồn sức mạnh đặc biệt của toán học ứng dụng.

Một quan niệm khác đã đồng nhất toán học ứng dụng với toán học tính toán và toán học máy tính. Đây là một quan điểm hẹp hòi và có xu hướng phiến diện.

Bây giờ chúng tôi xin đề cập đến một quan điểm đã được phát biểu trong một bài báo của chúng tôi [2]. Xuất phát điểm của chúng tôi là cho rằng phép giải toán học những bài toán ứng dụng có

[18]Đôi khi quan điểm này thể hiện sự phản đối những công trình, và tuyệt nhiên, không phải là hiếm, trong đó sự nông nỗi về toán học đã dẫn tới nhưng sai lầm trực tiếp (mà dưới đây chúng tôi sẽ nói một cách chi tiết) hoặc còn tồi hơn, những công trình trong đó sự kém cỏi về toán học đã được "*đền bù*" bằng cách dẫn ra các ý nghĩa thực dụng của các kết quả. Tiếc rằng quan điểm này đôi khi cũng có ở ý thức những nhà ứng dụng khi họ dùng một tổng thể nào đó không còn có giá trị đầy đủ. Điều này lại dẫn đến những động tác có vẻ khoa học rất lố lăng mà thường còn là trào phúng nữa.

những nét đặc thù của nó. Ở đây, trước hết về mặt nguyên tắc thì không thể tiến hành phép chứng minh ở mức các công trình nghiên cứu toán học thuần tuý ít ra bởi vì mô hình toán học của một khách thể thực tại chỉ có thể mô tả những nét cơ bản theo nghĩa này hay khác của khách thể ấy chứ không khi nào có ý định và không thể có ý định mô tả nó một cách đầy đủ. Mặt khác trong việc giải những bài toán thực tiễn thì trước hết có những yêu cầu mà trong nghiên cứu toán học thuần tuý chỉ được coi là những yêu cầu thứ cấp: Bởi vì một bài toán ứng dụng phải được giải không những đúng mà còn phải kịp thời, tiết kiệm sức lực, nghiệm phải chấp nhận được đối với các phương tiện tính toán hiện có và phải thuận tiện trong sử dụng thực tiễn và phải có độ chính xác thích hợp với bài toán, ... [19]

Chúng tôi quy định gọi việc thực hiện tốt nhất tất cả những yêu cầu đó mà đôi khi còn mâu thuẫn nhau nữa là tính tối ưu của nghiệm (đối với những ứng dụng) dù phải lưu ý trước rằng trong giai đoạn phát triển hiện nay của khoa học thì khó mà chỉ ra được một chức năng duy nhất về mục đích. Xuất phát từ điều đó đã đề nghị một định nghĩa là: Toán học ứng dụng là khoa học về các phương pháp giải tối ưu, mà về thực tiễn là chấp nhận được, những bài toán học nảy sinh từ bên ngoài toán học. Như vậy, toán học ứng dụng là toán học bị gián tiếp bởi thực tiễn, một bộ phận khoa học hợp thành tựa như sinh hoá hay nhiệt kỹ thuật. Sự phát triển của bộ môn này được xác định bởi sự mở rộng nhóm những ứng dụng cũng như bởi sự thay đổi nội dung cụ thể của khái niệm tính tối ưu của phép giải bài toán, nói riêng, nội dung này hoàn toàn thay đổi do ảnh hưởng của các phương tiện tính toán hiện nay. Tất nhiên nếu chúng ta tìm thấy nghiệm tối ưu thì điều đó không có nghĩa là ta loại bỏ những nghiệm chỉ đáp ứng gần đúng yêu cầu của tính tối ưu. Phần lớn các nghiệm thực tại mà chúng ta dùng thì cũng là những nghiệm mà trong một thời gian nào đó, ở một mức độ nào đó đã thoả mãn yêu cầu đó.

Về vấn đề này ta có thể nhớ đến một câu cách ngôn nổi tiếng : "*Toán học thuần tuý làm cái có thể khi cần còn toán ứng dụng làm cái cần khi có thể*". [20] Câu cách ngôn đó truyền đi một xu hướng nói chung là đúng, dù rằng từ "*cần*" được dùng ở đây theo những nghĩa khác nhau. Chỉ để ý đến ý nghĩa thứ hai, dưới đây chúng tôi sẽ cố gắng chứng minh rằng toán học ứng dụng làm cái cần khi cần làm.

Cũng đáng chú ý đến một quan điểm được L.V. Ovsjannikov phát biểu bằng lời: "*Toán học ứng dụng là khoa học về các mô hình toán học, chi tiết hơn, có thể nói rằng, là khoa học về các kết cấu, nghiên cứu, diễn tả và tối ưu hoá các mô hình toán học. Định nghĩa này nhằm vào đối tượng của khoa học đó và theo chúng tôi thì không mâu thuẫn gì với định nghĩa trên là định nghĩa nặng về tính chất chức năng hơn. Như vậy, nếu muốn so sánh tương tự - nói chung cũng khá xa – giữa toán học và ngôn ngữ thì toán học thuần tuý và toán học ứng dụng có thể sẽ làm người ta lần lượt nhớ đến văn phạm và ngữ nghĩa*".

Bàn về vấn đề toán học ứng dụng có tạo thành một khoa học độc lập không là việc làm có chút ít kinh nghiệm vì do tính nhiều nghĩa của cách nói "*khoa học độc lập*" thì đúng đắn hơn có thể

[19] Với tinh thần này, I.Babuska, E.Vitasek và M.Phager đã viết trong một cuốn sách rất hay [59, tr.9] : "*... ngày nay, một bài toán chỉ được coi là đã giải được khi có một phương pháp hiệu lực cho một kết quả cần thiết với một độ chính xác dủ dùng trong một khoảng thời gian nhất định*". Trong cuốn sách của N.S.Bakhvalov [60, tr.14] được viết với một quan niệm sâu sắc về những tình huống ứng dụng thực tại đã có nói rằng: "*Tìm thấy một nghiệm thoả mãn bài toán mà kịp thời thì tốt hơn là có được nghiệm đầy đủ của bài toán đó vào lúc nó đã mất ý nghĩa*".

[20] Về điểm này xin dẫn lời của J. Dixon: "*Nếu những phương pháp đầy sức mạnh của toán học không cho phép thu được kết quả đôi khi đã xảy ra thì cần phải tiếp tục tìm tòi. Nên nhớ rằng khi phân tích về kỹ thuật thì cần có được một kết quả bằng số bằng bất kỳ phương pháp nào.* [20, tr. 78].

không nên nói về một khoa học mà là về một khía cạnh của toán học ra đời trong những ứng dụng của nó, và nếu có thể, thì nên nói về kết quả của phép "*chiếu*" toán học một cách độc đáo lên nền văn minh, điều quan trọng là với phép chiếu đó thì toán học có những nét mới về chất và phép chiếu ấy, những nét ấy cũng sẽ định nghĩa cho toán học ứng dụng.

Do đó chúng tôi sẽ dùng các từ toán học ứng dụng coi như một thuật ngữ làm việc được xác định bởi quan điểm cuối cùng nêu ở trên và dành vấn đề về tính độc lập của sự tồn tại toán học ứng dụng với tính cách một khoa học cho các nhà triết học. [21] Để phân biệt với điều đó, khi nói về toán học thuần tuý, chúng tôi trước hết sẽ quan niệm rằng đó là toán học chính thống từ Weierstrass đến Bourbaki dựa trên cơ sở lý thuyết tập hợp ngây thơ. [22]

Chúng tôi chủ yếu chú ý đến những vấn đề cụ thể hơn : đó là những nét đặc trưng nảy sinh trong ứng dụng của toán học, đặc điểm của phương pháp lập luận của toán học ứng dụng và nói riêng là những lập luận nào được thừa nhận là đã được chứng minh trong toán học ứng dụng đó, ... Việc thảo luận những vấn đề này có thể là hữu ích, thậm chí khá sôi sôi nổi trong cả các công trình hoàn toàn có tính chất cụ thể.

Để kết luận, chúng tôi đưa ra những lời nói sáng sủa R. Courant nói về sự khác nhau trong phương pháp tiếp cận các vấn đề của toán học thuần tuý và toán học ứng dụng và cũng dùng làm phần giới thiệu độc đáo cho phần trình bày tiếp sau của chúng tôi.

"Cùng một vấn đề toán học có thể được giải quyết khác nhau, người theo quan niệm toán học chặt chẽ (và khuynh hướng này đôi khi còn thấy ở mọi người nghiên về tư duy khoa học) thì đòi hỏi một sự hoàn thiện không nhân nhượng. Anh ta không cho phép có những lỗ hổng trong logic của tư duy và trong cách giải các bài toán được đặt ra, và kết quả đạt được theo ý anh ta phải là một đỉnh cao của một mắt xích liên tục những lập luận toàn thiện. Và nếu như đối phương của quan điểm này mà gặp những khó khăn dường như không khắc phục nổi thì anh ta sẽ mau chóng tìm cách phát biểu lại bài toán hoặc thạm chí đặt nó khác đi nhưng cùng loại với bài toán cũ, trong đó có thể khắc phục được những khó khăn ("*cái có thể khi cần*" – tác giả). Còn có một con đường vòng khác nữa, xác định lại xem cái gì được coi là "*nghiệm của bài toán*". Trong thực tế, cách làm này đôi khi là một bước sơ bộ khá được chấp nhận để đi tới nghiệm chân chính của bài toán ban đầu.

Trong các công trình nghiên cứu có tính chất ứng dụng thì mọi thứ đều khác. Trước hết không thể dễ dàng làm thay đổi hoặc lảng tránh bài toán đã được đặt ra. Ở đây đòi hỏi một cái khác là đưa ra một câu trả lời đúng đắn và đáng tin cậy theo quan điểm chung của người ta. Trong trường hợp cần thiết, nhà toán học có thể có nhân nhượng: Anh ta phải sẵn sàng đưa những dự đoán vào

[21] Về điểm này còn có một khó khăn phụ nữa là những khái niệm "*nghiên cứu ứng dụng*", "*chương ứng dụng*", ... chỉ là tương đối, điều đó đôi khi dẫn đến sự hiểu lầm khác nhau. Ví dụ dẫn đến chỗ có những người không hề là như vậy những cũng gọi nhau là những nhà ứng dụng (và tương ứng là những nhà lý thuyết). Có nhiều những công trình nghiên cứu các cuốn sách có thể gọi được là ứng dụng (nếu chúng được xem xét theo những lập trường trừu tượng hơn) cũng như gọi được là toán học thuần tuý (giả sử theo lập trường của một kỹ sư). Tất nhiên tính tương đối của khái niệm "*ứng dụng*" cũng có trong vật lý, cơ học và các bộ môn khoa học khác. Về khái niệm và triển vọng phát triển của toán học ứng dụng xem thêm [61-72].

[22] Cần nhấn mạnh rằng việc tách ra toán học thuần tuý và toán học ứng dụng là không có tính chất tuyệt đối vì thực chất đó là những khía cạnh khác nhau của một khoa học vẫn giữ nguyên các nét quan trọng về sự thống nhất (trước hết chủ yếu ở đối tượng nghiên cứu là các cáu trức, nhưng cũng không phải cũng chỉ có vậy). Trong mỗi một khía cạnh này lại nảy sinh những tư tưởng sâu sắc tác động lẫn nhau một cách tích cực (vì vậy, nói toán học "*thuần tuý*" là không đạt mà nên nói toán học "*lý thuyết*"). Song sự tương tác dó còn lâu mới tối ưu được.

xích các lập luận cũng như cho phép một sai số nhất định trong những giá trị bằng số. Những ngay cả những bài toán chủ yếu theo phương hướng thực tiễn, ví dụ bài toán về các dòng có sóng va chạm, cũng có thể đòi hỏi một công trình nghiên cứu toán học cơ bản để xác định xem bài toán đó được đặt ra có đúng hay không. Trong các công trình nghiên cứu ứng dụng có thể đòi hỏi cả những phép chứng minh những định lý toán học thuần tuý về sự tồn tại bởi vì sự tin tưởng là có nghiệm có thể đảm bảo cho độ tin cậy của mô hình toán học được sử dụng, (thực ra điều này có phức tạp hơn đôi chút và về sau chúng tôi sẽ nói lại vấn đề này – tác giả). Và cuối cùng, chế ngự trong toán học ứng dụng là các phép xấp xỉ vì thiếu chúng thì không thể chuyển được các quá trình vật lý thực tại thành các mô hình toán học.

Việc quay lại với hiện thực đã được biến đổi thành các mô hình toán học trừu tượng và sự đánh giá những sự tương ứng đã đạt được ở đây đòi hỏi phải có những thói quen trực quan hoàn thiện qua kinh nghiệm. Thường cần phải biến đổi như thế nào đó đối với bài toán học lúc đầu tỏ ra rất phức tạp để có thể giải được bằng các phương pháp hiện đại. Điều này phần nào giải thích được tính chất rủi ro về trí óc và sự thoả mãn có ở các nhà toán học làm việc với các kỹ sư và các nhà khoa học tự nhiên để giải các bài toán hiện thực có ở khắp nơi, tại đó con người tìm cách nhận thức thiên nhiên và điều khiển nó”.

CUỘC ĐỜI VÀ SỰ NGHIỆP CỦA GEORGE BOOLE SỰ KHỞI ĐẦU CHO KỶ NGUYÊN KỸ THUẬT SỐ

Desmond MacHale
(Dịch giả: Hoàng Cao Phong, Hà Nội)

Đại học Cork hiện đang kỷ niệm 200 năm ngày sinh nhà toán học và logic học George Boole. Từ tháng 10 năm 2015, Đại học Cork đã lên kế hoạch cho một loạt các sự kiện trong năm dành cho George Boole [1]. Sức ảnh hưởng trong những công trình của Boole đang ngày càng trở nên mãnh liệt trong vài thập niên trở lại đây, từ khoa học máy tính cho đến công nghệ kỹ thuật số.

Cuốn tiểu sử mới của Boole viết bởi Desmond MacHale vừa được xuất bản bởi Nhà xuất bản Đại học Cork. Đây là bản chỉnh sửa của phiên bản năm 1985 xuất bản bởi Nhà xuất bản Boole. Lời tựa của phiên bản trước được viết bởi nhà toán – vật lý học nổi tiếng người Ai-len - John L. Synge. Lần này, cuốn sách có một lời tựa mới được viết bởi Ian Stewart của Đại học Warwick. Ấn bản đầu tiên này đã được biên tập bởi Ivor Grattan-Guinness [2].

Đây là một cuốn tiểu sử rất toàn diện, đóng góp vô cùng to lớn cho sự hiểu biết của chúng ta về một nhà toán học và logic học có tầm ảnh hưởng lớn của thế kỉ XIX. Nó khắc họa một cách đầy đủ bức chân dung của Boole, không chỉ là một con người của khoa học mà còn là một nhà cải cách xã hội, nhà tư tưởng tôn giáo và một người đàn ông của gia đình. Ông cũng là một triết gia tinh túy. Cuốn sách là kết quả của những nghiên cứu và tìm hiểu kĩ lưỡng, công phu, kể lại những câu chuyện về cuộc sống và sự nghiệp của Boole một cách có hệ thống với sự cuốn hút bền bỉ.

1. Thuở thiếu thời

George là con cả trong một gia đình có 4 con, ông là một thanh niên nhút nhát nhưng đặc biệt thông minh. Từ thời niên thiếu, ông đã có thể sử dụng thành thạo tiếng Latin và tiếng Hy Lạp, ngoài ra ông còn tự học tiếng Pháp, tiếng Đức và tiếng Ý. Điều này đã giúp ông sau này có thể dễ

[1] http://www.georgeboole.com
[2] Vol. 14, Sept. 1985, http://www.maths.tcd.ie/pub/ims/nl14

dàng tiếp cận với sự phát triển của nền toán học trên toàn châu lục, cho phép ông tiến xa hơn hầu hết những đồng nghiệp của mình. Ông đã học qua lớp tiểu học, nhưng do quá nghèo nên không thể tiếp tục bậc trung học; chính vì vậy, ông phải tự học những kiến thức toán cao cấp bằng cách nghiên cứu các tác phẩm của những nhà toán học hàng đầu thời gian đó.

Boole bắt đầu nghiên cứu toán học một cách thực sự nghiệm túc khi ông khoảng 16 tuổi. Sau khi thành thạo giải tích, ông nghiên cứu sang các tác phẩm của Newton, Lagrange, Laplace, Jacobi và Poisson. Như là một người tự học, Boole đã tạo ra một phương pháp độc lập khi tiếp cận những vấn đề nghiên cứu. Cảm hứng ban đầu của ông với toán học đến từ ứng dụng của nó nhằm giải quyết những vấn đề khoa học khác, nhưng dần dần, ông bị quyến rũ bởi vẻ đẹp và sự thú vị của toán học thuần túy. Ông đã công bố một số công trình về phương trình vi phân, tích phân, logic, xác suất, hình học và đại số tuyến tính.

Năm 1841, cuốn sách "*Lý thuyết tổng quát về phép biến đổi tuyến tính*" của Boole đặt nền móng cho sự phát triển của một ngành toán học mới - lý thuyết bất biến. Cayley và Sylvester là những người đã phát triển lý thuyết bất biến lên một tầm cao mới, nhưng cả hai đều thừa nhận Boole đã khơi nguồn cảm hứng cho những nỗ lực của họ.

Tài liệu "*Về một phương pháp tổng quát của giải tích*" của ông đã được xuất bản vào năm 1844 trong tuyển tập các công trình triết học của Hội Hoàng gia. Cũng nhờ vậy, ông đã giành được Huy chương vàng của Hội, giải thưởng đầu tiên như vậy trong lĩnh vực toán học. Bài báo giới thiệu một phương pháp tổng quát hóa cách giải quyết một lớp lớn những phương trình vi phân và sai phân với hệ số thay đổi.

2. Đại học Cork Queen

Tháng 10 năm 1846, Boole ứng tuyển cho vị trí giáo sư toán học tại một trong ba trường đại học Queen: Ở Belfast, Galway và Cork. Đơn xin xét tuyển của Boole làm hội động hết sức sửng sốt bởi ông tuyên bố: "*Tôi không phải là thành viên của bất kỳ trường đại học nào và chưa từng học tại một trường đại học nào*". Tuy vậy, đơn của ông nhận được sự ủng hộ rất mạnh mẽ từ các nhà toán học hàng đầu. Sau thời gian trì hoãn, ông được giao phó một vị trí trong Đại học Cork và làm việc ở đó vào tháng 10 năm 1849 với mức lương khởi điểm 250 bảng Anh một năm.

Các đại học Queen đều là những cơ sở đa giáo phái, và do vậy đã gây nên những cuộc tranh cãi từ đầu khi bị hệ thống Công giáo mô tả như là những trường đại học vô thần. Trong một thời gian, Boole cố gắng tránh tham gia trực tiếp vào các cuộc xung đột tôn giáo, tuy nhiên ông không thể không bị ảnh hưởng. Mặc dù bản chất hòa nhã, ông cũng đã dính vào một loạt các cuộc tranh luận gay gắt ở trường đại học. Có lẽ nhiều thông tin chi tiết được cung cấp bởi MacHale hơn là thực sự cần thiết, từ những lá thư dài đến các tờ báo trích dẫn.

Trong những năm đầu ở Cork, Boole rất cô đơn và dường như không mấy hạnh phúc. Tuy nhiên, mọi thứ đã hoàn toàn thay đổi vào năm 1855 khi ông kết hôn với Mary Everest 23 tuổi lúc ở tuổi 40. Mary là cháu gái của vị giáo sư người Hy Lạp tại Đại học Queen và đồng thời là cháu gái của George Everest, nhà tổng trắc địa học của Ấn Độ, cũng là người đã được đặt tên cho ngọn núi cao nhất thế giới. Một cách ngắn gọn, cuộc hôn nhân rất hạnh phúc và họ đã có năm người con gái, cả năm đều tài giỏi hơn người theo một cách nào đó.

3. Các định luật của tư duy

Năm 1833, khi mới 18 tuổi, Boole đã có một ý tưởng thoáng qua rằng tất cả những quan hệ logic đều có thể biểu diễn dưới dạng các công thức. Chính ý tưởng này sau đó đã trở thành cống hiến to lớn của ông đối với ngành khoa học: Giải thích cho quá trình suy nghĩ của con người bằng những ngôn ngữ toán học chính xác. Những nỗ lực để biến logic thành một bộ môn khoa học khởi nguồn từ Aristotle, và Leibniz đã đặt những bước đầu tiên trên con đường thể hiện mối quan hệ logic dưới dạng mặc dù ông chưa tìm ra một ký hiệu phù hợp. Năm 1847, Boole viết cuốn sách "*Phân tích về Logic học*", được miêu tả với tựa đề là "*Phép tính cho các lập luận hợp lý*". Cuốn sách này đánh dấu cho sự khởi đầu của logic hình thức.

Tác phẩm lớn nhất của Boole, "*Các định luật của tư tưởng*", đã được viết trong suốt thời gian ông ở Đại học Queen. Một trong những nhận xét sâu sắc nhất của ông chính là toán học không hề giới hạn bởi con số hay số lượng, mà mang một ý nghĩa lớn hơn về cách biểu diễn vạn vật dưới dạng thức phù hợp với một số quy tắc nhất định. Mục tiêu của ông là chuyển hóa các mệnh đề logic thành dạng công thức và từ đó, những kết luận logic trở thành kết quả của những phép toán với các giả định ban đầu. Việc xem xét các lớp thay vì chỉ tập trung vào những con số đã mở đường cho lý thuyết tập hợp, hiện là tâm điểm của nền tảng toán học.

Boole là người đầu tiên dùng các phép toán đại số để biểu diễn thay cho các mệnh đề logic, từ đó tạo ra một động lực mạnh mẽ cho lĩnh vực logic hình thức. Trước đây, không có ai đánh giá cao bản chất toán học xuất hiện trong ngôn ngữ hàng ngày. Ngành đại số học phát triển bởi Boole hiện nay đã trở thành công cụ lý tưởng trong việc xử lý thông tin và hoạt động máy tính dựa theo các nguyên tắc của nó. Đại số Boolean bao gồm rất nhiều chủ đề, trong đó có lý thuyết tập hợp, số nhị phân, không gian xác suất, cấu trúc mạch điện tử và công nghệ máy tính. Nhiều ý tưởng của Boole hiện giờ được coi như hiển nhiên và được tìm thấy trong lý thuyết tập hợp và xác suất sơ cấp. Nó mang lại những ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực như chẩn đoán y tế, bảo hiểm và chứng cứ pháp lý.

4. Boole và Hamilton

Boole đã từng thử làm thơ, tuy nhiên giống với người bạn của mình - William Rowan Hamilton, những tác phẩm thơ của ông không có gì đặc sắc. Cả một chương được dành riêng để nói về sự thiếu liên lạc đáng ngạc nhiên giữa hai người đàn ông. Boole sinh sau Hamilton 10 năm và cùng qua đời trong một năm. Họ có rất nhiều sở thích chung trong cả toán học lẫn niêm luật thơ, và cũng có rất nhiều cơ hội để có thể cộng tác hay ít nhất là tương tác. Tuy nhiên, sự hạn chế tiếp xúc giữa hai người cho thấy giữa họ có thể có một số khó khăn đáng kể hoặc một sự bất đồng quan điểm, mặc dù không có bằng chứng rõ ràng nào về điều này. Vào năm 1985, MacHale viết rằng những bí mật về mối quan hệ giữa họ vẫn chưa được bật mí. Chương này có tiêu đề "*Một số câu hỏi chưa được trả lời*". Tuy nhiên, điều đáng thất vọng là sau hơn 30 năm, không hề có thêm thông tin nào về điều này.[3]

[3]MacHale đã nói với tôi rằng anh ấy có một suy đoán mới về sự rạn nứt trong mối quan hệ, thế nhưng chúng ta bắt buộc phải kiên nhẫn chờ đợi cho đến khi thông tin về điều này xuất hiện ở đâu đó.

5. Gia đình

Chương cuối cùng khá là thú vị mặc dù là thông tin ngoài lề. George và Mary Boole có 5 người con gái, tất cả đều đặc biệt theo những cách khác nhau. Alicia đã có những khám phá quan trọng trong hình học 4 chiều. Cô đã đưa vào thuật ngữ "*polytope*" chỉ sự tương đương 4 chiều của một khối đa diện. GI Taylor, nhà thủy khí động lực học tiên phong của thế kỉ 20, là con của con gái Boole-Margaret. Một người con gái khác, Ethyl Lilian (Voynich) sống một cuộc đời phiêu lưu và là tác giả cuốn tiểu thuyết "*Ruồi Trâu*" vô cùng phổ biến ở Nga. Câu chuyện về cuộc đời cô cũng rất hấp dẫn.

Kết thúc chương cuối- "*những năm tháng cuối cùng*", MacHale viết về Boole: "*Tên của ông sẽ sống mãi tựa như những máy tính kỹ thuật số luôn phụ thuộc vào đại số Boolean để vận hành, và miễn là khi các sinh viên toán học vẫn còn nghiên cứu lý thuyết vành, phương trình vi phân, lý thuyết xác suất, phương trình sai phân, lý thuyết bất biến, lý thuyết toán tử, lý thuyết tập hợp và tất nhiên, cuốn SÁCH* 101 *logic*". Ông kết bút bằng ghi chú rằng Boole sẽ vô cùng vui mừng khi được biết tất cả các thông tin liên lạc hiện đại, cho dù đó là dữ liệu, văn bản hay hình ảnh, luôn bao gồm các chuỗi dài của những biểu tượng Boolean 0 và 1.

6. Lời kết

Cuốn sách được xuất bản một cách rất kỳ công và dường như không có lỗi. Một vấn đề nhỏ có thể làm người đọc khó hiểu là việc nhắc đi nhắc lại về Lebesgue. Nhà phân tích Henri Lebesgue chưa được sinh ra cho đến năm 1875, rất lâu sau cái chết của Boole. Tài liệu tham khảo lẽ ra thuộc về nhà số học Victor-Am'ed'ee (1791 – 1875) nhưng lại liệt kê Henri trong phần bảng mục lục. Một vấn đề nghiêm trọng hơn là việc bỏ qua phụ lục danh sách 27, phần "*Các tài liệu tham khảo bổ sung*", đã từng xuất hiện trong phiên bản đầu tiên nhưng lại bị bỏ đi từ những phiên bản tiếp theo. Một số trích dẫn quá dài kèm theo một số đoạn lạc đề và tối nghĩa. Ví dụ như việc thêm vào một danh sách dài dặng dặc những nhà tư tưởng tôn giáo cùng thời đại đã ảnh hưởng lớn đến Boole. Việc làm đó có nên hay không là tất nhiên một vấn đề về quan điểm và tôi cảm thấy rằng nó sẽ khiến cho cậu chuyện về Boole của chúng ta bị gián đoạn.

Người đọc tập san đôi khi cảm thấy mức độ chi tiết của toán học là không đầy đủ. Thật sự, với những độc giả toán học có cùng ý tưởng với của công trình của Boole và muốn đào sâu hơn nữa về mảng kiến thức này sẽ không thật sự thấy cuốn sách là lý tưởng cho mục đích đó, và họ sẽ phải đọc lại những ấn phẩm gốc của Boole. Tuy nhiên, có một danh sách khá đầy đủ và giá trị về các vấn đề được nêu trong cuốn sách.

Peter Lynch Peter Lynch là Giáo sư Khoa học Khí tượng tại UCD. Chuyên môn của ông bao gồm khí động học, dự báo thời tiết số, cơ học Hamilton và lịch sử của khí tượng học. Ông viết một số ấn phẩm toán học trong phần "*Đây Toán học*" trong "*Thời báo Ai-len*". Xem blog của ông tại http://thatsmaths.com

Trường Khoa học Toán học, Đại học College Dublin.

E-mail: Peter.Lynch@ucd.ie

NHẬN DẠNG CHÓ MÈO

Bình Nguyễn
(Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG - TP.HCM)

TÓM TẮT

Toán học không khô khan như nhiều người từng nghĩ mà gắn liền mật thiết với cuộc sống xung quanh chúng ta. Đã từ lâu nay, có rất nhiều ứng dụng thiết thực được xây dựng dựa trên các cơ sở toán học bao gồm các phép biến đổi và thuật toán cơ bản như biến đổi Fourier, biến đổi Wavelet, thuật toán SVD (singular value decomposition), thuật toán LDA (Linear Discrimination Analysis), thuật toán phân rã trị riêng (eigen decomposition)... Trong số đó, có thể nói đến các ứng dụng liên quan đến nhận dạng hình ảnh (image recognition) trên điện thoại thông minh (smart phones), nơi người ta có thể quan sát hình ảnh trong ngôi nhà của mình thông qua một camera, tự động nhận được tin nhắn khi có người lạ đột nhập vào nhà, hoặc biết được các thú cưng ở nhà có đang lén lút làm gì không. Trong bài viết này, tác giả sẽ giới thiệu độc giả xây dựng một hệ thống nhận dạng chó mèo đơn giản thông qua các thuật toán cơ bản trong Toán học.

1. Giới thiệu

Bài viết tập trung vào việc xây dựng một hệ thống thông minh có thể phân biệt được chó và mèo. Nếu nhìn bằng mắt thường, không khó để bất cứ ai có thể thực hiện chính xác việc này. Vấn đề đặt ra ở đây là trong trường hợp có một bộ ảnh chó mèo cho trước, làm sao chúng ta tìm ra một phương pháp giúp cho một máy tính có thể nhận biết hình ảnh chó mèo. Hệ thống càng thông minh khi đạt được độ chính xác gần giống như con người.

Để nhận biết được ảnh chó mèo từ một bức ảnh, thông thường chúng ta sẽ dựa vào các đường nét bên trong bức ảnh đó. Ảnh chó sẽ chứa một số nét đặc trưng góc cạnh (edge) riêng biệt giúp chúng ta phân biệt được với ảnh mèo. Trong phân tích thời gian - tần số, biến đổi Wavelet được

Hình 7.1: Chó và mèo

Hình 7.2: Một số ảnh chó mèo trong tập huấn luyện.

biết như là một trong những phương pháp hữu ích để biểu diễn thông tin tín hiệu theo nhiều tỉ lệ khác nhau. Không những thế, biến đổi wavelet còn cực kỳ hữu ích trong việc dò tìm cạnh (edge detection) trong một bức ảnh. Chính vì thế, trong bài toán này, chúng tôi sẽ sử dụng biến đổi wavelet để biểu diễn thông tin trong các ảnh chó mèo.

Như đã đề cập trước đó, bài viết này sẽ giới thiệu một thuật toán đơn giản giúp máy tính có thể phân biệt được giữa chó và mèo. Thuật toán sẽ bao gồm các bước sau đây:

- **Bước 0**: cho trước M ảnh chó và M ảnh mèo trong tập huấn luyện (training set).
- **Bước 1**: Phân rã (decompose) các ảnh chó mèo thông qua các hàm wavelet cơ sở (Wavelet basis functions). Mục đích của bước này là thực hiện thao tác dò tìm cạnh (edge detection) trong bức ảnh.
- **Bước 2**: Từ các ảnh mở rộng wavelet (wavelet expanded images) trong tập huấn luyện, dùng thuật toán SVD để tìm kiếm cách thành phần chính (the principal components) liên quan tương ứng đến chó và mèo.
- **Bước 3**: Tìm kiếm một ngưỡng quyết định để phân biệt giữa chó và mèo bằng thuật toán LDA (liner discrimination analysis).
- **Bước 4**: Kiểm tra tính hiệu quả của thuật toán trên N ảnh chó và N ảnh mèo. Thông thường, người ta chọn tỉ lệ $M : N = 4 : 1$.

Trong những phần tiếp theo, độc giả sẽ được tìm hiểu sâu hơn từng bước trong thuật toán trên.

Hình 7.3: Chó Bull.

2. Xây dựng thuật toán

Để minh hoạ cho thuật toán, chúng ta xét bức ảnh chó Bull trong Hình 7.3. Trong tập huấn luyện, chúng ta có tất cả 98 ảnh chó và 98 ảnh mèo và tất cả các ảnh để được điều chỉnh kích cỡ về kích thước $64x64$. Quá trình tiền xử lý này được mô tả như trong hàm **preprocess.m** dưới đây.

```
function [newImage] = preprocess(imagePath)
    oldImage = imread(imagePath);
    newImage = imresize(oldImage,[64,64]);
end
```

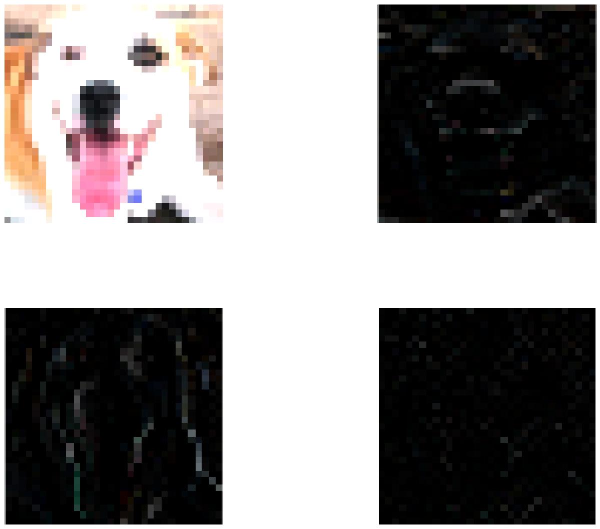
Sau đó, tất cả các ảnh huấn luyện sẽ được phân rã thành các cơ sở wavelet bằng cách sử dụng biến đổi wavelet rời rạc. Trong Matlab, đọc giả có thể sử dụng hàm **dwt2** sau đây để thực hiện phép biến đổi wavelet rời rạc hai chiều cho các ảnh này:

```
[cA, cH, cV, cD] = dwt2(X,wname)
```

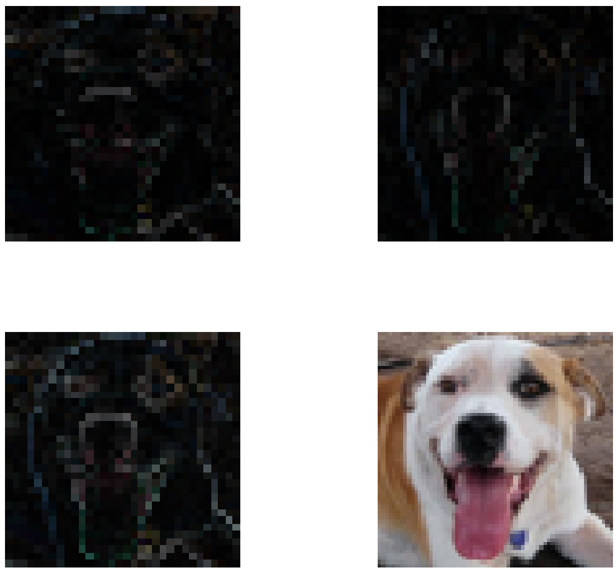
Ở đây, cA là ma trận hệ số thành phần xấp xỉ (the approximation coefficient matrix) còn cH, cV, và cD là ma trận hệ số thành phần chi tiết (the detail coefficient matrix) tính được thông quá việc phân tích ảnh đầu vào X. Tham số $wname$ đại diện cho tên hàm wavelet được sử dụng. Trong ví dụ này, chúng ta sẽ sử dụng bộ lọc Haar để thực hiện quá trình phân rã wavelet.

Trong hình 7.4 và hình 7.5, chúng ta có thể thấy phân rã Wavelet của hình một con chó. Sau khi phân rã ảnh chó mèo bằng biểu diễn wavelet, chúng ta sẽ tìm phương pháp tiếp cận để có thể phân biệt được ảnh chó và mèo. Để thực hiện điều này, một trong những cách chúng ta có thể tiếp cận là phân rã tập ảnh chó mèo bằng thuật toán SVD, nghĩa là chó mèo sẽ được biểu diễn bằng các thành phần chính (principal components). Sau đó, chúng ta sẽ dùng phương pháp LDA để huấn luyện một hệ thống phân biệt được chó mèo.

Nhìn chung, thuật toán chúng ta sẽ tiến hành những bước sau đây:



Hình 7.4: Biến đổi Wavelet trên bức ảnh chó Bull (ảnh 7.3) tạo thành bốn ma trận: cA, cH, cV và cD (từ trái sang phải, từ trên xuống dưới).



Hình 7.5: Trong hình này, từ trái qua phải, từ trên xuống dưới lần lượt biểu diễn theo chiều ngang, chiều dọc, ảnh dò tìm cạnh và hình ảnh tổng hợp lại từ biến đổi Wavelet của ảnh chó Bull ban đầu.

```
dog_folder_path='./training/dog';
cat_folder_path='./training/cat';
dog_wave = dc_wavelet(dog_folder_path);
cat_wave = dc_wavelet(cat_folder_path);
feature=20;
[result,w,U,S,V,th] = dc_trainer(dog_wave,cat_wave,feature);
```

Trong thuật toán trên, các ảnh về chó và mèo sẽ được đưa vào hệ thống và sau đó được đưa vào thuật toán Wavelet được mô tả như sau:

```
function [dcData] = dc_wavelet(dc_folder_path)
    allFiles=dir(dc_folder_path);
    allNames = {allFiles.name};
    nw=32*32;
    index=1;
    for i = 1:length(allNames)
        filename=fullfile(allNames{i});
        filename=fullfile(dc_folder_path,filename);
        display(filename)
        I=imread(filename);
        J=imresize(I,[64,64]);
        J=rgb2gray(J);
        [ ,cH,cV, ] = dwt2(J,'Haar');
        nbcol = size(colormap(gray),1);
        cod_cH1 = wcodemat(cH,nbcol);
        cod_cV1 = wcodemat(cV,nbcol);
        cod_edge=cod_cH1+cod_cV1;
        dcData(:,index)=reshape(cod_edge,nw,1);
    end end
```

Thuật toán huấn luyện được mô tả như trong hàm **dc_trainer.m**.

```
function [result,w,U,Σ,V,threshold]=dc_trainer(dog0,cat0,feature)
    nd=length(dog0(1,:));
    nc=length(cat0(1,:));
    [U,Σ,V] = svd([dog0,cat0],0);
    animals = Σ*V';
    U = U(:,1:feature);
    dogs = animals(1:feature,1:nd);
    cats = animals(1:feature,nd+1:nd+nc);
    md = mean(dogs,2);
    mc = mean(cats,2);
    Sw=0;
    for i=1:nd
        Sw = Sw + (dogs(:,i)-md)*(dogs(:,i)-md)';
    end
```

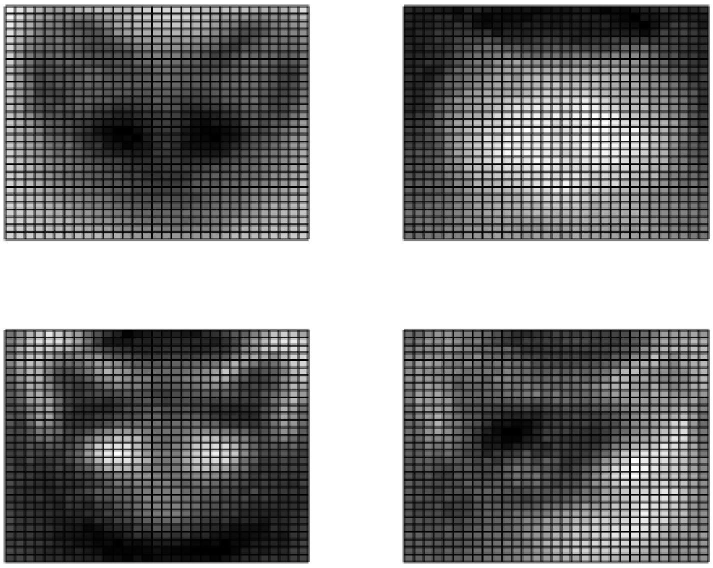
```
    for i=1:nc
        Sw = Sw + (cats(:,i)-mc)*(cats(:,i)-mc)';
    end
    Sb = (md-mc)*(md-mc)';
    [V2,D] = eig(Sb,Sw);
    [lambda,ind] = max(abs(diag(D)));
    w = V2(:,ind); w = w/norm(w,2);
    vdog = w'*dogs; vcat = w'*cats;
    result = [vdog,vcat];
    if mean(vdog)>mean(vcat)
        w = -w;
        vdog = -vdog;
        vcat = -vcat;
    end
    sortdog = sort(vdog);
    sortcat = sort(vcat);
    t1 = length(sortdog);
    t2 = 1;
    while sortdog(t1)>sortcat(t2)
        t1 = t1-1;
        t2 = t2+1;
    end
    threshold = (sortdog(t1)+sortcat(t2))/2;
end
```

Có thể thấy, trong bước đầu tiên của quá trình huấn luyện, chúng ta sử dụng phân rã SVD trên dữ liệu tạo ra từ biến đổi Wavelet cho từng ảnh huấn luyện. Với tập huấn luyện gồm 98 ảnh mèo và 98 ảnh chó, sau khi thực hiện phép biến đổi Wavelet, chúng ta thu được một véc tơ có tổng độ dài $32 * 32 = 1024$. Kết hợp dữ liệu huấn luyện ($98 + 98 = 196$ ảnh), chúng ta sẽ tạo ra được ma trận mới có kích thước 1024×196. Đến bước này, chúng ta sẽ sử dụng thuật toán SVD dạng rút gọn trên ma trận này để có thể trích ra được các thành phần chính U, Σ và V.

Tuy nhiên, chúng ta không nhất thiết phải sử dụng tất cả các thành phần chính (principal components) thu được từ thuật toán SVD để làm đặc trưng cho việc nhận dạng. Ở đây, chúng ta chỉ cần dùng một số lượng vừa đủ các thành phần chính, cái mà được xác định thông qua biến **feature**. Giả sử số lượng thành phần chính chúng ta chọn là 20. Khi đó, từ ma trận U và ΣV^* thu được, chúng ta sẽ trích ra 20 cột đầu tiên của ma trận U và 20 dòng đầu tiên của ma trận ΣV^*. Trong hình 7.6, độc giả có thể thấy các hình ảnh minh họa tương ứng bốn thành phần chính đầu tiên của ảnh chó mèo trích ra từ tập huấn luyện.

Một câu hỏi đặt ra tại sao chúng ta lại sử dụng ma trận ΣV^*? Như đã biết, Σ là ma trận đường chéo mà các thành phần đường chéo của nó chính là singular value của ma trận 1024×196 ban đầu. Chính vì thế, việc chọn ma trận ΣV^* sẽ tạo nên trọng số cho các mode của một ảnh (mèo hoặc chó) cho trước khi chiếu lên ΣV^*.

Sau khi chúng ta thực hiện các bước phân rã Wavelet và SVD cho từng bức ảnh chó mèo trong tập huấn luyện, chúng ta sẽ tìm cách sử dụng những thông tin này để quyết định xem ảnh cho



Hình 7.6: Minh hoạ cho bốn thành phần chính đầu tiên (principal components) của tập ảnh chó mèo. Những thành phần thế này sẽ được sử dụng làm cơ sở để phân loại một ảnh chó hoặc mèo.

trước là ảnh con vật nào. Thuật toán LDA 2-lớp được sử dụng trong bài toán này. Một trong những mục tiêu của thuật toán LDA chính là tìm ra phép chiếu hiệu quả nhất sao cho dữ liệu khi chiều xuống một không gian con cho trước có thể phân chia tốt.
Như trong hình 7.7, với dữ liệu hai lớp cho trước, phép chiếu LDA đã tạo ra một phân bố lý tưởng cho dữ liệu khi giá trung bình của dữ liệu hai lớp trên hệ trục mới μ_1 và μ_2 hoàn toàn tách rời nhau. Nếu xét về khía cạnh toán học, phép chiếu trên thoả mãn:

$$w = \arg\max_{w} \frac{w^T S_B w}{w^T S_W w}, \tag{2.1}$$

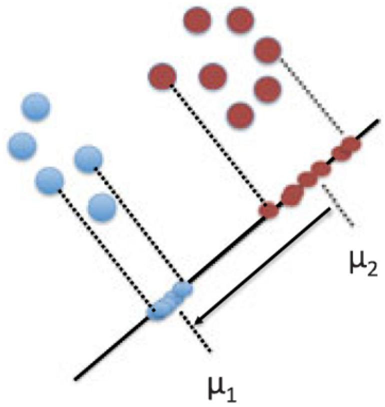
trong đó, các ma trận phân tán giữa các lớp S_B và trong một lớp S_W được tính như sau:

$$\begin{aligned} S_B &= (\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_1)^T & (2.2) \\ S_W &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{x} (x - \mu_i)(x - \mu_i)^T & (2.3) \end{aligned}$$

Dễ thấy, nghiệm của bài toán 2.4 chính là véc tơ riêng tương ứng với trị riêng lớn nhất λ của bài toán trị riêng:

$$S_B w = \lambda S_w w. \tag{2.4}$$

Để giải được bài toán trị riêng trên, chúng ta có thể dùng hàm **eig** trong Matlab để tìm giá trị w tương ứng. Như vậy với các ảnh chó mèo nằm trong tập huấn luyện ban đầu, chúng ta sẽ chiếu xuống cơ sở LDA để thu được phân bố tương ứng. Khi đó, chúng ta cần tìm một ngưỡng (threshold) để giúp phân loại một bức ảnh nằm trong nhóm con vậy nào. Tuy nhiên, thuật toán vẫn không tránh khỏi một số trường hợp ảnh mèo nhận nhầm thành ảnh chó và ngược lại. Càng nhiều đặc trưng sử dụng, chúng ta hi vọng càng giảm số lỗi trong quá trình nhận dạng.



Hình 7.7: Phép chiếu LDA tạo ra một phân bố lý tưởng và dữ liệu thu được trên hệ trục mới hoàn toàn có thể phân chia thành hai lớp khác nhau.

Để kiểm tra chất lượng đạt được của hệ thống vừa xây dựng, chúng ta tiến hành kiểm tra với 16 ảnh mèo và 16 ảnh chó (hoàn toàn độc lập với tập ảnh huấn luyện ban đầu).

```
%Test on the testing dataset:
testing_set='./testing'
% wavelet transformation
testing_wavelet = dc_wavelet(testing_set);
% SVD projection
TestMat = U'*testing_wavelet;
% LDA projection
pval = w'*TestMat;
% 16 cats and 16 dogs
hiddenlabels=[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1
,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0];
TestNum = length(pval);
%cat = 1, dog = 0
ResVec = (pval>threshold)
disp('Number of mistakes');
errNum = sum(abs(ResVec - hiddenlabels))
disp('Rate of success');
sucRate = 1-errNum/TestNum
```

Với bộ dữ liệu chúng tôi đã xét, tỉ lệ nhận dạng đúng đạt được khoảng 72%. Chúng tôi xin nhường lại phần cải tiến cho độc giả của Epsilon trong số báo này. Đoạn codes tham khảo có thể tìm thấy tại: Pet-recognition.

Acknowledgement

Tác giả chân thành cảm ơn TS. Lê Phong và TS. Đặng Nguyễn Đức Tiến đã sửa lỗi và góp ý cho bản thảo.

BÀI TOÁN CÂN TIỀN

Đặng Nguyễn Đức Tiến
(Đại học Trento, Italia)

LỜI GIỚI THIỆU

Tiếp nối những số báo trước, chuyên mục Toán học Giải trí kỳ này giới thiệu với độc giả một bài toán logic kinh điển: Bài toán cân tiền (counterfeit coin problem).

Dạng thức chung của các bài toán cân tiền là có một hoặc một số đồng tiền giả được đặt lẫn lộn với các đồng tiền thật. Các đồng tiền giả có bề ngoài giống hệt tiền thật nhưng khác khối lượng so với tiền thật. Cần sử dụng cân đĩa hoặc cân số với một số lần cân xác định để tìm ra (một hoặc một số) đồng tiền giả này. Ở đây chúng tôi cũng nhắc lại hai khái niệm về hai loại cân được sử dụng. Cân đĩa giúp chúng ta so sánh khối lượng của các vật được đặt ở 2 bên của đĩa cân và kết quả trả về hoặc nặng hơn, hoặc nhẹ hơn, hoặc cân thăng bằng. Cân số cho phép xác định chính xác khối lượng của vật được đặt trên cân. Trong các bài toán được trình bày ở số này, chúng tôi luôn giả sử rằng các cân được sử dụng luôn có độ chính xác tuyệt đối.

Tương tự như bài toán đội nón, bài toán cân tiền đầu tiên theo chúng tôi ra đời từ rất sớm, nhưng mãi đến giữa thế kỷ 20, những lời giải đầu tiên mới chính thức được ghi nhận và công bố. Và cũng tương tự như bài toán anh em của mình, bài toán cân tiền có rất nhiều biến thể khác nhau, mà hiện tại chúng tôi sưu tập được hơn 53 phiên bản của bài toán này.

Trong chuyên mục Toán học Giải trí kỳ này, chúng tôi chọn lọc giới thiệu với bạn đọc 5 bài toán cân tiền sử dụng cân đĩa. Trong số tiếp theo, chúng tôi sẽ giới thiệu những bài toán sử dụng cân số.

Và bây giờ, xin mời bạn đọc hãy sang trang tiếp theo để đến với bài toán cân tiền đầu tiên ...

1. Bài toán cân tiền với 9 đồng xu

Bài toán cân tiền đầu tiên có phát biểu như sau:

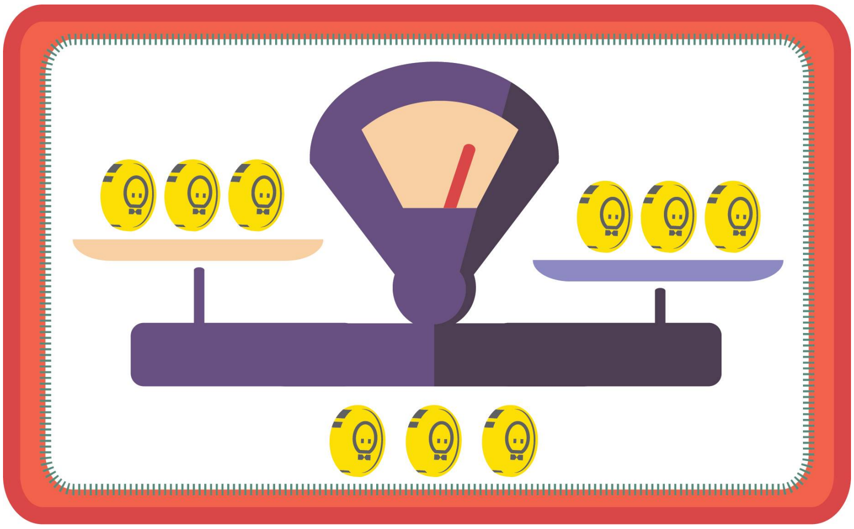
> Có 9 đồng xu giống hệt nhau, trong đó có một đồng giả nặng hơn 8 đồng còn lại. Sử dụng cân đĩa và không sử dụng thêm quả cân, bằng 2 lần cân, hãy chỉ ra đồng giả.

Bài toán này khá đơn giản và xuất hiện trong rất nhiều tạp chí cũng như sách về toán học vui, giải trí... Bạn đọc hẳn sẽ nhanh chóng tìm ra phương án cho bài toán với cách cân như sau:

Lần 1: Đặt mỗi đĩa cân 3 đồng. Ta có 2 trường hợp: cân thăng bằng hoặc cân lệch. Nếu cân thăng bằng, ta suy ra đồng giả thuộc về 3 đồng chưa cân. Nếu cân lệch, ta suy ra đồng giả thuộc về nhóm 3 đồng nặng hơn. Như vậy, ta luôn xác định được nhóm 3 đồng nào có chứa đồng giả.

Lần 2: Chọn 2 đồng trong 3 đồng vừa xác định và đặt ở mỗi đĩa cân 1 đồng. Ta cũng có 2 trường hợp ở đây: Nếu cân thăng bằng, suy ra đồng chưa cân là đồng giả. Nếu cân lệch, thì đồng nặng hơn là đồng giả.

Như vậy, với 2 lần cân, ta xác định được đồng giả (biết trước nặng hơn) trong số 9 đồng.



Ta có thể nâng cấp bài toán lên 27 đồng với 3 lần cân, trong đó lần đầu cân mỗi bên 9 đồng và áp dụng phương pháp tương tự khi đã biết đồng giả ở 9 đồng nào. Tổng quát hóa bài toán với n lần cân, ta có thể xác định được đồng giả (biết trước nặng hơn) trong số 3^n đồng!

Bài toán trên khá đơn giản, nhưng khi thay đổi một ít điều kiện, ta có được những bài toán hóc búa và vô cùng thú vị, mà tiêu biểu là bài toán tiếp theo đây.

2. Bài toán 12 đồng xu

Theo chúng tôi, đây là bài toán kinh điển và nổi tiếng nhất trong số các bài toán cân tiền. Phiên bản đầu tiên mà chúng tôi tìm được xuất phát từ Dyson và Lyness vào năm 1946 [1].

Phát biểu bài toán như sau:

Có 12 đồng xu giống hệt nhau, trong đó có một đồng giả có khối lượng khác với 11 đồng còn lại, nhưng không biết nặng hơn hay nhẹ hơn. Sử dụng cân đĩa và không sử dụng thêm quả cân, bằng 3 lần cân, hãy chỉ ra đồng giả.

Thoạt nhìn, bài toán này khá giống với bài toán 9 đồng xu đầu tiên. Tuy nhiên, với yếu tố khác biệt là chúng ta không biết được đồng giả nhẹ hơn hay nặng hơn so với đồng thật. Và với yếu tố này, bài toán trở nên khó khăn hơn khá nhiều.

Trước khi bước sang phần lời giải, chúng tôi hi vọng độc giả hãy dành ra ít thời gian để thử sức với bài toán này để thấy được sự thú vị của nó. Một trong những khảo sát chi tiết đầu tiên của bài toán này độc giả có thể xem ở [2] bởi Richard Bellman, một trong những nhà toán học tiên phong về Quy hoạch động.

Và bây giờ, chúng tôi giới thiệu 3 cách giải khác nhau cho bài toán này cũng như mở rộng cho bài toán.

2.1. Cách giải logic

Chúng tôi đã sử dụng bài toán này ở các diễn đàn Toán học, các chuyên mục đố vui cũng như với bạn bè trong hơn 15 năm qua và đây là cách giải mà chúng tôi hay nhận được nhất. Vì bản chất cách giải này là chuỗi suy luận logic nên chúng tôi tạm gọi phương pháp này là cách giải logic.

Cách làm này như sau: Chia 12 đồng thành 3 nhóm và đặt tên cho các đồng tương ứng với các nhóm là $aaaa$, $bbbb$ và $cccc$.

Lần 1: Cân $aaaa$ và $bbbb$

Trường hợp 1. Nếu cân thăng bằng, ta suy ra 8 đồng $aaaa$ và $bbbb$ đều thật.

Lần 2: đặt 3 đồng bất ỳ trong 8 đồng này và 3 đồng trong 4 đồng còn lại, ví dụ aaa và ccc. Ở đây sẽ có 2 trường hợp:

Trường hợp 1.1. Nếu cân thăng bằng, suy ra đồng c còn lại giả. Ta cân lần 3 sẽ biết nặng nhẹ.

Trường hợp 1.2. Nếu cân lệch, ta biết đồng giả trong 3 đồng ccc, và ta biết được nặng hay nhẹ. Lần cuối đơn giản cân 2 đồng số 3 đồng ccc này với nhau. Nếu cân bằng, c còn lại giả (đã biết nặng nhẹ), nếu không cân bằng, cũng xác định được.

Trường hợp 2. Nếu cân lệch, ta suy ra 4 đồng $cccc$ đều thật. Không mất tính tổng quát, giả sử $aaaa < bbbb$.

Lần 2: cân $accc$ và $baaa$ (mấu chốt ở đây là tách nhóm a và b ra sao cho thành 1 bộ 1 đồng và 1 bộ 3 đồng). Có 3 trường hợp như sau:

Trường hợp 2.1. Nếu cân bằng, suy ra 3 đồng bbb còn lại là giả nặng, và với lần cuối ta sẽ xác định được.

Trường hợp 2.2. Nếu $accc < baaa$ thì hoặc đồng a này giả nhẹ, hoặc đồng b giả nặng. Lần cuối cân c và a hoặc b ta sẽ xác định được.

Trường hợp 2.3. Nếu $accc > baaa$ thì đồng giả trong 3 đồng aaa, và là giả nhẹ. Với lần cuối ta cũng xác định được.

Và như vậy, bài toán được giải quyết trọn vẹn với 3 lần cân.

2.2. Cách giải gán nhãn

Cách giải này theo ghi nhận của chúng tôi được đề xuất bởi Brian D. Bundy vào năm 1996 ở [4].

Trước khi đi vào phân tích cách giải này, chúng tôi nêu một đáp án ví dụ như sau: gán số từ 1 đến 12 cho 12 đồng và thực hiện 3 lần cân:

Lần 1: Cân (1, 2, 7, 10) và (3, 4, 6, 9)

Lần 2: Cân (1, 3, 8, 11) và (2, 5, 6, 7)

Lần 3: Cân (2, 3, 9, 12) và (1, 4, 5, 8)

Khi đó với kết quả 3 lần cân, cách làm này sẽ xác định được đồng nào là giả và giả nặng hay nhẹ!

Ví dụ nếu như ta có 3 kết quả là lần 1 bằng nhau, lần 2: bên phải nặng hơn, lần 3: bên trái nặng hơn, ta sẽ biết đồng giả là đồng 8 và đồng này nhẹ hơn.

Làm sao có được điều này? Ta thấy rằng mỗi lần cân sẽ có 3 khả năng, cân bằng (ký hiệu 0), bên trái nặng hơn (ký hiệu T) hoặc bên phải nặng hơn (ký hiệu P). Và ứng với 12 đồng thì ta có 24 khả năng là mỗi đồng là giả và giả nặng hay giả nhẹ. Do vậy, cách làm là tìm cách chia các quả cân sao cho mỗi bộ kết quả của 3 lần cân sẽ ứng với một đáp số duy nhất, ví dụ như kết quả TTP ta sẽ có tương ứng đáp số "đồng 1 giả nặng", kết quả TPT sẽ có đáp số "đồng 2 giả nặng" ... Cách làm này không những chỉ ra đồng giả, và giả nặng hay nhẹ mà còn chỉ ra cách xếp các quả cân như thế nào cho phù hợp.

Bây giờ ta cùng phân tích cách làm. Xét 2 nhận xét sau:

Nhận xét 1: Ta có 27 khả năng khác nhau của các lần cân ($3^3 = 27$) và 24 kết quả phân biệt. Ta loại bỏ trường hợp cùng đặt một đồng ở cùng 1 bên cân trong cả 3 lần cân (do đặt như vậy thì sẽ không cân đủ). Khi đó 3 trường hợp 000, TTT và PPP bị loại bỏ và ta còn lại 24 khả năng ứng với 24 đáp số!

Nhận xét 2: Ta thấy nếu kết quả $0PT$ ứng với đáp án "đồng 8 giả nhẹ" thì kết quả đối xứng là $0TP$, phải cho ra "đồng 8 giả nặng" do $0TP$ cho thấy đồng 8 (giả) xuất hiện ở 2 lần cân sau. Vì vậy ta có thể phân 24 khả năng thành 2 nhóm, mỗi nhóm ứng với 12 đồng xu.

Hai nhận xét trên chính là cơ sở để tìm ra cách gán: Ta ghi ra 12 phương án phân biệt và không chứa phương án đối xứng thành 12 cột, 3 dòng, mỗi dòng có đúng 4 0, 4 T và 4 P và không có cột nào có 000, TTT, hoặc PPP. Sau đó gán thứ tự từ 1 đến 12 ứng với 12 đồng.

T	T	T	T	P	P	P	P	0	0	0	0
0	0	0	T	T	T	T	P	P	P	P	0
T	P	0	P	0	T	P	0	T	P	0	T
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Ví dụ như sau (để tìm ra cách gán thỏa yêu cầu không khó nhưng cũng cần phải có chiến thuật, ở đây chúng tôi xin phép lược bớt và cách gán sau đây cũng chính là gợi ý):

Để chọn các đồng xu trong các lần cân, ta đặt theo từng dòng, nếu là T, ta đặt đồng xu bên trái và P, ta đặt bên phải. Khi đó nếu phương án ra đúng với thứ tự, sẽ là giả nặng và ngược lại ta xét đối xứng và có giả nhẹ. Với phương án như ví dụ ở trên, ta có:

Lần 1: (1, 2, 3, 4) và (5, 6, 7, 8)

Lần 2: (4, 5, 6, 7) và (8, 9, 10, 11)

Lần 3: (1, 6, 9, 12) và (2, 4, 7, 10)

Ta thấy đây là một cách khác sắp xếp các đồng xu khác với cách nêu ra đầu tiên. Thử xét vài ví dụ như sau:

- Nếu như kết quả là TTP, tra vào bảng đã lập ta thấy sẽ ứng với “4”, và vì vậy đây là “4 giả nặng”.

- Nếu kết quả là $P0T$, tra vào bảng ta thấy không có, vậy đó là giả nhẹ, và lấy đối xứng ta có $T0P$, ứng với đồng 2, vậy đây là “2 giả nhẹ”.

Và với cách làm này, ta có thể tổng quát lên với n lớn hơn 3. Các mở rộng khác của bài toán cũng có thể làm dựa trên cơ sở này. Tuy nhiên, nhược điểm là với n lớn, để tránh sai sót trong gán nhãn thường ta cần đến sự trợ giúp của máy tính.

2.3. Cách giải Jack Wert

Đây là cách giải yêu thích nhất của người viết bài này, theo ghi nhận của trang Cut The Knot thì lời giải được đưa ra bởi Jack Wert [5], do vậy chúng tôi dùng tên tác giả để gọi cho phương pháp này.

Về mặt ý tưởng, cách làm này khá giống như cách đầu tiên, nhưng được tác giả phát biểu ở hình thức dễ hiểu hơn và có thể tổng quát hóa lên với trường hợp $n > 3$ khá dễ dàng.

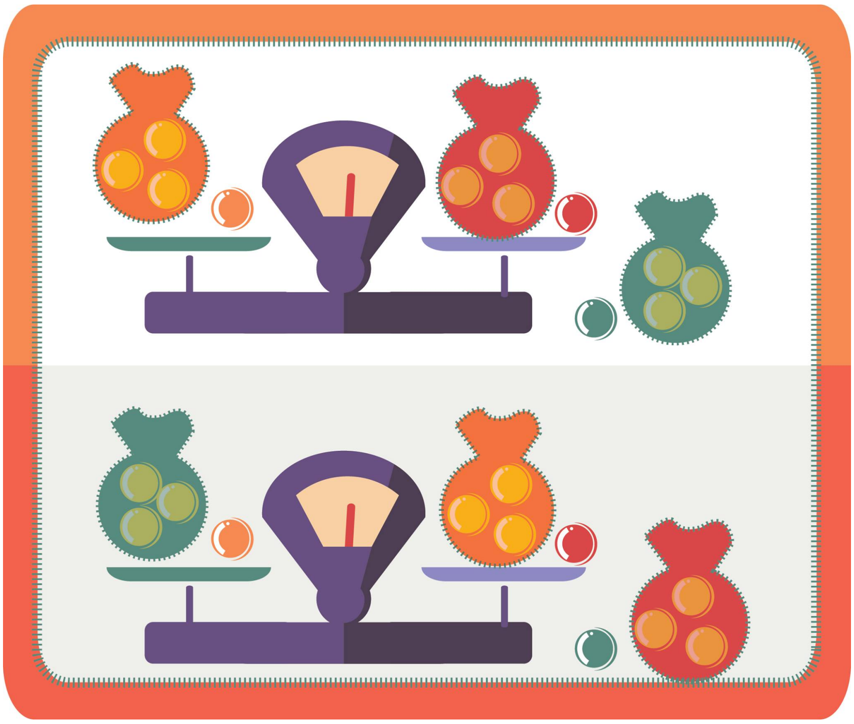
Cách làm của Jack Wert cho bài toán này như sau:

Chia 12 đồng thành 3 nhóm, mỗi nhóm 4 đồng và trong mỗi nhóm chia thành một "đống" 3 đồng và một "đống" 1 đồng lẻ (ví dụ như gói 3 đồng này vào một bao giấy và giả sử khối lượng bao bằng 0).

Lần 1: Đặt ở mỗi đĩa cân 2 nhóm đầu tiên và ghi nhận tình trạng cân.

Lần 2: Hoán đổi các "đống" lớn: "đống" ở cân bên trái qua cân bên phải, "đống" ở cân bên phải đặt ra ngoài và "đống" chưa cân đặt ở cân bên trái. Ghi nhận tình trạng cân.

Nếu tình trạng cân thay đổi: ta xác định được đống nào có chứa đồng giả, và giả nặng hay giả nhẹ. Với 1 lần cân còn lại, ta sẽ biết được đồng giả này. Nếu tình trạng cân không thay đổi: ta biết đồng giả sẽ ở vào một trong các đồng lẻ và với 1 lần cân, ta cũng xác định được đồng giả này và biết được giả nặng hay giả nhẹ. Một cách lý giải tuyệt đẹp mà không cần phải gán nhãn!



Bây giờ chúng ta hãy thử xem làm cách nào để mở rộng cách giải này cho n lớn hơn, ví dụ 1092 đồng với 7 lần cân: ta cũng chia thành 3 nhóm, mỗi nhóm gồm 364 đồng. Sau đó, trong mỗi nhóm, ta “gói” các đồng thành từng đống 243, 81, 27, 9, 3, 1 đồng (6 “đống”).

Lần 1: Đặt toàn bộ 6 đống của mỗi 2 nhóm lên cân. Ghi nhận tình trạng cân.

Lần 2: Hoán đổi đống lớn nhất (chứa 243 đồng) từ cân bên trái sang cân bên phải, từ cân bên phải ra ngoài và từ bên ngoài vào cân bên trái. Ghi nhận tình trạng cân.

Nếu tình trạng cân thay đổi, ta biết đống nào chứa đồng giả và nặng hay nhẹ tương ứng. Và ta tìm được đồng giả trong 243 đồng này sau 5 lần cân ($3^5 = 243$, do đã biết giả nặng hay giả nhẹ).

Nếu cân không thay đổi, hoán chuyển đến đống thứ 2 (đống chứa 81 đồng) và ghi nhận tình trạng cân. Nếu cân thay đổi, ta biết đồng giả ở đống nào cùng với tính nặng/nhẹ tương ứng, và tìm ra được đồng này sau 4 lần cân. Nếu cân lại không thay đổi tình trạng, ta lại tiếp tục hoán chuyển đống tiếp theo (27 đồng) và cứ như vậy cho đến đống cuối cùng, và ta luôn sử dụng tối đa 7 lần cân!

Bằng cách làm này, dễ thấy lời giải tổng quát với n lần cân, ta có thể xác định được đồng giả và là giả nặng hay giả nhẹ trong $(3^n - 3)/2$ đồng!

3. Nặng hơn hay nhẹ hơn?

Bài toán cân tiền thứ 3 này chúng tôi trích nguồn quen thuộc từ blog của Tanya Khovanova, là một biến thể khá thú vị (nhưng dễ hơn) của bài toán ở trên.

Có $N > 2$ đồng xu giống hệt nhau, trong đó có một đồng giả có khối lượng khác với các đồng còn lại, nhưng không biết nặng hơn hay nhẹ hơn. Sử dụng cân đĩa và không sử dụng thêm quả cân, hãy xác định số lần cân ít nhất để xác định đồng giả là nặng hơn hay nhẹ hơn so với các đồng khác mà không yêu cầu phải xác định cụ thể đồng giả này.

Sau đây là lời giải của bài toán được đăng bởi tác giả (Tanya Khovanova): Chỉ cần 2 lần cân là ta có thể xác định được đồng giả là nặng hơn hay nhẹ hơn so với các đồng còn lại.

Trường hợp $N = 3$, đơn giản ta chỉ so sánh từng cặp hai đồng xu với nhau.

Xét trường hợp $N = 4$. Ta cân lần đầu mỗi bên 2 đồng. Cân không thể cân bằng. Không mất tính tổng quát, giả sử cân bên trái nhẹ hơn. Lần 2 so sánh 2 đồng bất kỳ ở cân bên trái, nếu cân bằng, ta biết đồng giả ở nhóm còn lại và biết được là giả nặng. Nếu cân lệch, ta biết được đồng nhẹ hơn là giả nhẹ.

Như vậy, ta có thể tổng quát lên trường hợp $N = 3k$ và $N = 4k$ với cách làm tương tự.

Với N bất kỳ, ta có thể tách N ra làm 3 nhóm với số lượng a, a, và b sao cho $a \leq b \leq 2a$. Lần đầu ta cân 2 nhóm a, nếu cân thăng bằng, ta có $2a$ đồng đều thật, và cân lần 2 với b đồng mỗi bên. Nếu cân lệch, ta biết b đồng còn lại là thật và ta sẽ cân tiếp a đồng từ b với một trong 2 nhóm a đã cân.

Cách làm này, còn thiếu cho trường hợp $N = 5$, vì với $N = 5$ ta không thể tách ra thành 3 nhóm như yêu cầu của cách giải trên. Với $N = 5$, lần đầu ta cân mỗi bên 2 đồng. Nếu cân thăng bằng, ta cân lần cuối với một đồng bất kỳ trong 4 đồng này và đồng còn lại. Nếu cân lệch, ta làm như lần cân thứ 2 cho trường hợp $N = 4$. Và như vậy bài toán đã được giải quyết.

4. Bài toán 10 đồng xu

Ở bài toán này, chúng tôi giới thiệu một bài toán khá khó, và được giải quyết từ cách đây gần 20 năm (1997) bởi một nhà toán học Việt Nam quen thuộc với Epsilon ở các số trước: Giáo sư Vũ Hà Văn (bạn đọc có thể xem chi tiết hơn ở [3]).

Chúng tôi phát biểu bài toán này ở dạng đơn giản với 10 đồng xu như sau:

Cho 10 đồng xu, trong đó có một số đồng giả. Biết rằng các đồng thật nặng bằng nhau. Các đồng giả cũng đôi một nặng bằng nhau nhưng có khối lượng khác với đồng thật. Với một cân đĩa và không sử dụng thêm quả cân, bằng 3 lần cân hãy cho biết 10 đồng này liệu có phải cùng loại?

Phát biểu tổng quát hơn của bài toán này như sau:

Cho một tập gồm m đồng xu với tối đa 2 loại khối lượng khác nhau. Hãy xác định liệu tất cả các đồng này có cùng khối lượng bằng ít lần cân nhất.

Bạn đọc có thể tham khảo lời giải chi tiết hơn ở [3], trong mục này chúng tôi sử dụng lời giải sơ cấp và cụ thể trong trường hợp $N = 10$ này như sau:

Trước tiên, đánh số các đồng xu từ 1 đến 10. Dễ thấy, nếu như trong một lần cân bất kỳ, cân chênh lệch thì ta giải quyết được bài toán. Do vậy, giả sử rằng cân luôn cân bằng trong cả 3 lần cân.

Xét 2 nhóm: nhóm 1 chỉ gồm đồng 1, nhóm 2 gồm 2 đồng 2 và 3. Gọi a và b lần lượt là số đồng giả ở 2 nhóm này. Như vậy ta có $a = 0$ hoặc $a = 1$ và $b = 0$, hoặc $b = 1$, hoặc $b = 2$.

Lần 1: cân 3 đồng (1, 2, 3) và 3 đồng (4, 5, 6). Do cân cân bằng nên ta biết số đồng giả ở 3 đồng (4, 5, 6) là a + b.

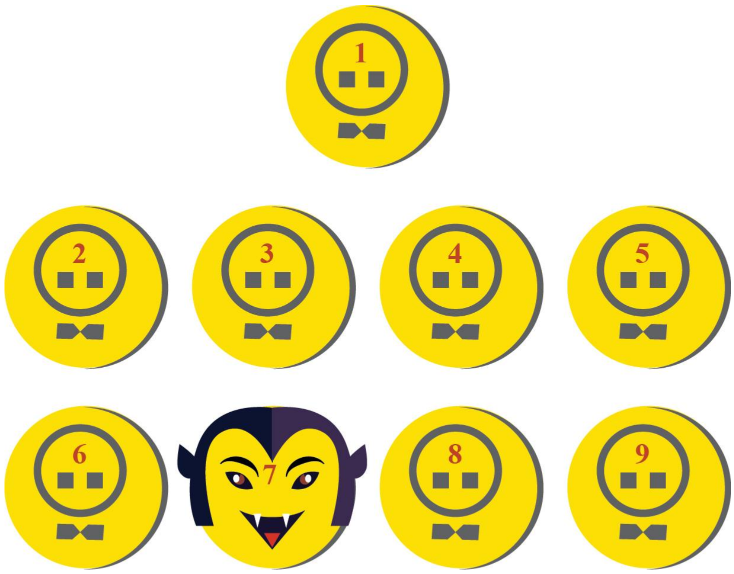
Lần 2: cân 4 đồng còn lại (7, 8, 9, 10) và 4 đồng (1, 4, 5, 6). Do cân cân bằng nên ta biết số đồng giả ở 4 đồng (7, 8, 9, 10) này là $2a + b$.

Lần 3: cân (1, 7, 8, 9, 10) và (2, 3, 4, 5, 6). Do cân cân bằng nên ta có $3a + b = a + 2b$, suy ra $2a = b$. Điều này nghĩa là hoặc $a = b = 0$ (nghĩa là tất cả các đồng đều thật) hoặc $a = 1$ và $b = 2$ (nghĩa là tất cả các đồng đều giả). Trong cả 2 tình huống, ta đều chỉ ra được tất cả các đồng này có cùng khối lượng với nhau hay không!

5. Bài toán 9 đồng xu

Chúng tôi bắt đầu và kết thúc cho chuyên mục này đều với các bài toán 9 đồng xu, 2 lần cân, và bài toán cuối cùng này như sau:

Có 9 đồng xu, trên mỗi đồng có ghi các con số từ 1 đến 9 cho biết khối lượng tương ứng của chúng là 1gr, 2gr, ... 9gr. Biết rằng có một đồng trong số này bị lỗi và có khối lượng nhẹ hơn khối lượng được quy định. Với một chiếc cân đĩa và không sử dụng thêm quả cân, liệu rằng với 2 lần cân, có thể chỉ ra đồng bị lỗi này?



Lời giải bài toán này khá đơn giản và chúng tôi xin dành cho độc giả. Chúng tôi cũng kết thúc chuyên mục tại đây và hẹn gặp lại trong số tới, với chuyên đề bài toán cân tiền với cân số.

Tài liệu tham khảo

[1] F. J. Dyson and R. C. Lyness, *Math. Gazette*, vol. 30, 1946.

[2] R. Bellman and B. Glass, "On various versions of the defective coin problem," *Information and Control*, vol. 4, pp. 118–131, 1961.

[3] D. N. Kozlov, V. H. Vu, "Coins and Cones," *Journal of Combinatorial Theory*, Series A, vol. 78, no. 1, pp 1–14, 1997.

[4] B. D. Bundy, "The Oddball Problem," *Mathematical Spectrum*, vol. 29, no. 1, pp 14–15, 1996/7.

[5] A. Bogomolny, "Odd Coin Problems: the 120 marble problem - five weighings from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles, " *www.cut-the-knot.org//blue//OddCoinProblems.shtml*, Accessed 09 October 2015.

XUNG QUANH BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRONG KỲ THI VMO 2014

Nguyễn Tiến Dũng - Hà Nội

Tóm tắt

Bài viết đưa ra một góc nhìn của tác giả về bài hình học số 4 trong kỳ VMO 2014 cũng như những khai thác xung quanh cấu hình của bài toán.

Bài hình học số 4 trong kỳ VMO 2014 có nội dung được đề cập trong [1] như sau:

Bài toán 1. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi I là trung điểm cung BC không chứa A. Trên AC lấy điểm K khác C sao cho $IK = IC$. Đường thẳng BK cắt (O) tại $D(D \neq B)$ và cắt đường thẳng AI tại E. Đường thẳng DI cắt đường thẳng AC tại F.*

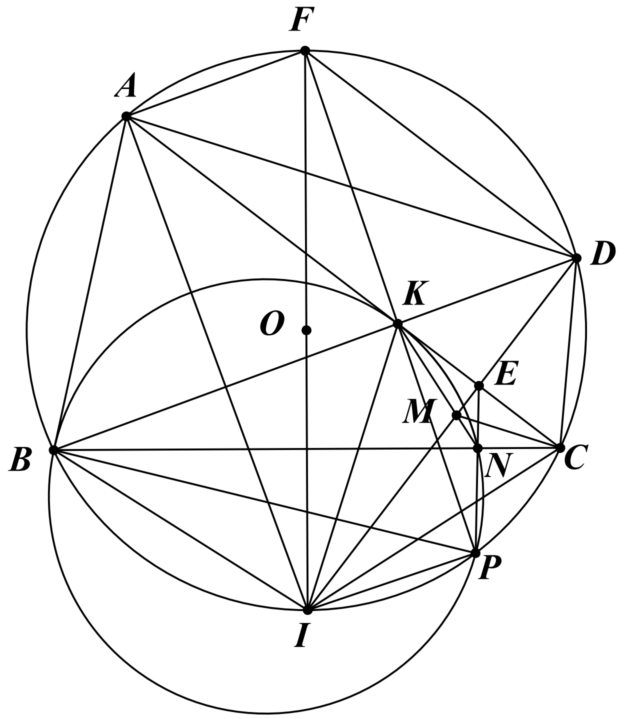
1. Chứng minh rằng $EF = \dfrac{BC}{2}$.

2. Trên DI lấy điểm M sao cho CM song song với AD. Đường thẳng KM cắt đường thẳng BC tại N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN cắt (O) tại $P(P \neq B)$. Chứng minh rằng đường thẳng PK đi qua trung điểm của đoạn thẳng AD.

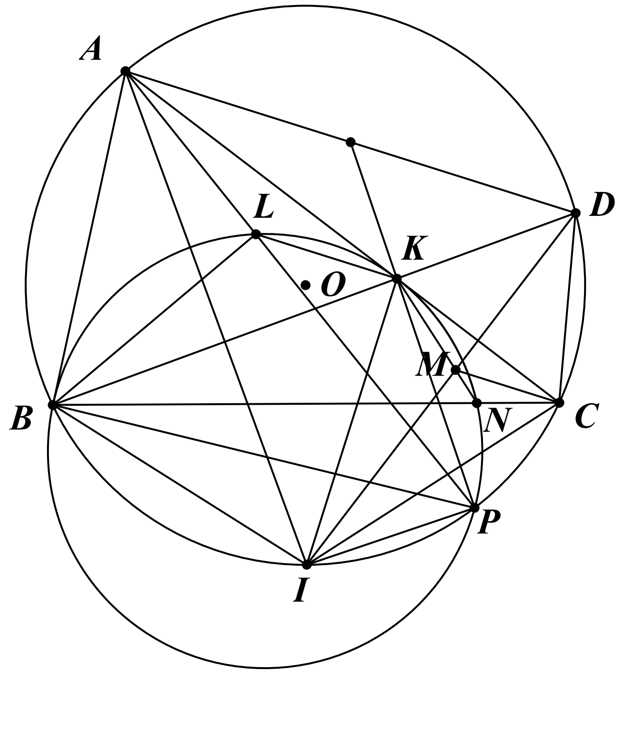
Có thể thấy rằng hai ý của bài toán hầu như không liên quan tới nhau, ý 2. mới là ý chính của bài toán. Vì vậy, đề bài được phát biểu gọn lại như sau

Bài toán 2. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi I là trung điểm cung BC không chứa A. Trên AC lấy điểm K khác C sao cho $IK = IC$. Đường thẳng BK cắt (O) tại $D(D \neq B)$. Trên DI lấy điểm M sao cho CM song song với AD. Đường thẳng KM cắt đường thẳng BC tại N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN cắt (O) tại P $(P \neq B)$. Chứng minh rằng đường thẳng PK đi qua trung điểm của đoạn thẳng AD.*

Lời giải thứ nhất. Do I là trung điểm cung BC không chứa A của đường tròn (O) nên $IB = IC = IK$. Ta thấy $\angle AKI = 180^\circ - \angle CKI = 180^\circ - \angle ICK = \angle ABI$ nên $\Delta AIB = \Delta AIK(g.c.g)$. Vì thế K đối xứng với B qua AI. Ta có $\angle DCK = \angle ABK = \angle AKB = \angle DKC$ nên dễ thấy DI là trung trực của đoạn CK. Chú ý đến tính đối xứng qua trục DI và $CM \parallel AD$ ta có $\angle MKC = \angle MCK = \angle DAC = \angle KBN$ nên AC là tiếp tuyến của đường tròn (BKN). Gọi E là giao của DI và AC, thế thì $\angle EKP = \angle KBP = \angle EIP$ nên tứ giác $EPIK$ nội tiếp, suy ra $\angle IPK = \angle IEK = 90^\circ$. PK cắt (O) tại $F(F \neq P)$. Chú ý rằng K là trực tâm của tam giác ADI nên ta dễ dàng chứng minh được $AFDK$ là hình bình hành. Do đó KF đi qua trung điểm AD. Từ đó ta có đpcm. □



Lời giải thứ hai. Trong lời giải thứ nhất, ta đã chứng minh được AC là tiếp tuyến của đường tròn (BKN). Từ đó, chú ý đến tính đối xứng qua AI, ta cũng có AB là tiếp tuyến của đường tròn (BKN). Gọi L là giao của AP và đường tròn $(BKN)(L \neq P)$. Vì$\angle KLP = \angle KBP = \angle DAP$ nên $KL \parallel AD$. PK cắt AD tại S. Bằng biến đổi góc đơn giản, ta thu được các cặp tam giác đồng dạng SAK và KPL, SDK và BPL. Chú ý rằng tứ giác $BPKL$ điều hòa ta có $\dfrac{SA}{SK} = \dfrac{KP}{KL} = \dfrac{BP}{BL} = \dfrac{SD}{SK}$ nên $SA = SD$. Suy ra đpcm. □

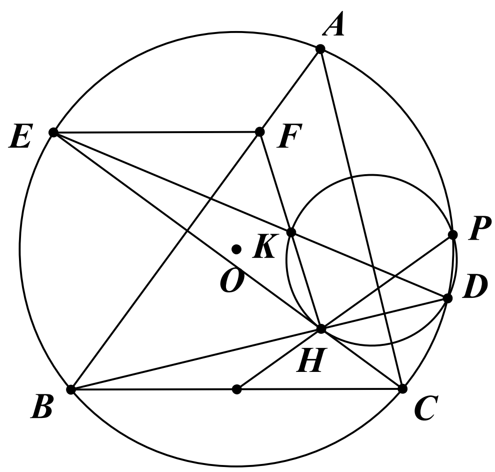


Nhận xét.

1. Trong lời giải thứ nhất, ta có $\angle KPN = \angle KBN = \angle DAC = \angle KIE = \angle KPE$ nên P, N, E thẳng hàng.

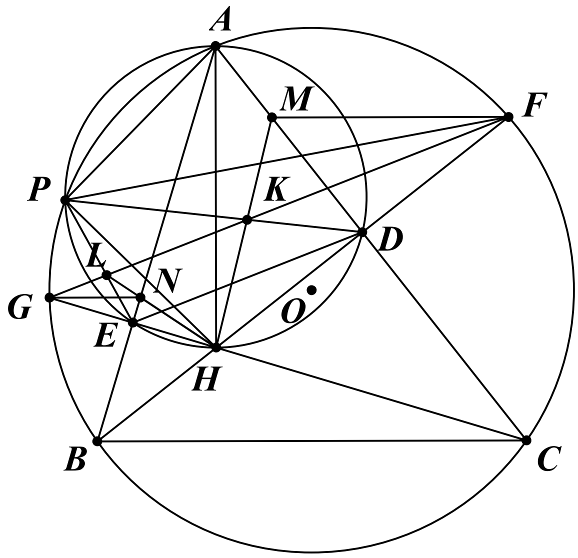
2. Việc phát biểu lại làm cho đề toán hay và có ý nghĩa hơn. Trên đây, tác giả đã trình bày hai lời giải thuần túy hình học cho bài toán. Lời giải thứ nhất là của tác giả. Lời giải thứ hai dựa trên ý tưởng sử dụng các kiến thức về tứ giác điều hòa và chùm điều hòa của thành viên diễn đàn Toán học Mathscope.org có nickname **vinhhai** (trong [3]), được tác giả chỉnh lí lại để có được lời giải thuần túy hình học. Chú ý rằng K là trực tâm của tam giác IAD, ta có thể phát biểu lại bài toán 2 như sau:

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao hạ từ B và C theo thứ tự cắt (O) tại D và E. Kẻ $EF \parallel BC (F \in AB)$. HF cắt DE tại K. Đường tròn (HKD) cắt (O) tại $P (P \neq D)$. Chứng minh rằng PH chia đôi BC.*



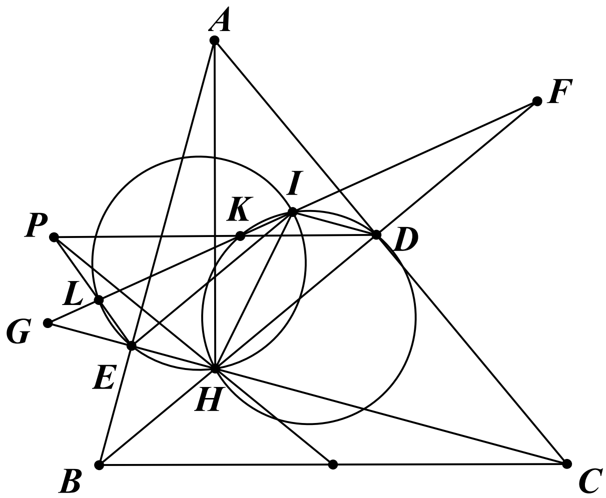
Từ nhận xét 1. trong bài toán 2 và bài toán 3, ta có thể đề xuất các bài toán sau:

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có trực tâm H. Các đường cao BD và CE theo thứ tự cắt (O) tại F và G. Kẻ $FM \parallel GN \parallel BC (M \in AC, N \in AB)$. HM và HN theo thứ tự cắt FG tại K và L. Chứng minh rằng DK và EL cắt nhau tại một điểm thuộc (O).*



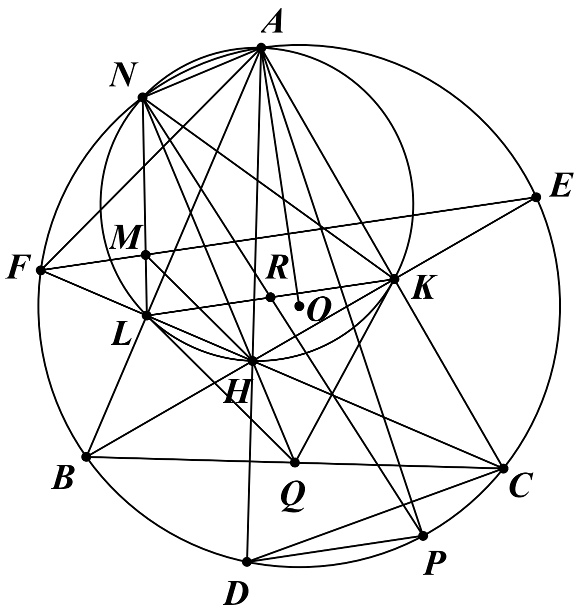
Lời giải. Dễ thấy tứ giác $ADHE$ nội tiếp đường tròn đường kính AH. Gọi P là giao của đường tròn đường kính AH với $(O)(P \neq A)$. Chú ý rằng AB là trung trực của GH và $GN \parallel BC$ ta có $\angle HLF = \angle LGH + \angle LHG = \angle FBC + \angle NGH = \angle HBC + \angle HCB = \angle BAC = 90^\circ - \angle ABF = \angle APH - \angle APF = \angle HPF$ nên tứ giác $HLPF$ nội tiếp. Từ đó, ta có $\angle LPH = \angle LFH = \angle EAH = \angle EPH$, vì thế P, E, L thẳng hàng. Chứng minh tương tự P, D, K thẳng hàng. Do đó DK, EL cắt nhau tại điểm P thuộc (O). □

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC có các đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Gọi F, G theo thứ tự là điểm đối xứng với H qua AC, AB. I là trung điểm FG. K, L theo thứ tự giao điểm khác I của đường tròn ngoại tiếp các tam giác HID, HIE với FG. DK, EL cắt nhau tại P. Chứng minh rằng PH chia đôi BC.*



Nếu nhìn nhận bài toán 5 dựa trên cấu hình của các bài toán 3 và 4 thì vấn đề trở nên rất đơn giản. Nhưng để có được một lời giải đẹp và trực tiếp cho bài toán thì không phải là điều dễ dàng. Tiếp tục khai thác, ta có bài toán sau:

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H, các đường cao BK, CL. AH, CH theo thứ tự cắt (O) tại D và F. Lấy điểm M sao cho hai tam giác MFH và HBC đồng dạng (M, A nằm cùng phía đối với KL). ML cắt (O) tại N. Kẻ $DP \parallel KL (P \in (O))$. Chứng minh rằng NP chia đôi KL.*



Lời giải. Dễ thấy $HM \perp AF, FM \parallel KL$. BH cắt (O) tại E thì KL là đường trung bình của tam giác HEF nên M thuộc EF. Từ đó, theo bài toán 4 dễ dàng suy ra N thuộc đường tròn đường kính AH. NH cắt BC tại Q thì Q là trung điểm của BC, QK và QL là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH. Theo tính chất quen thuộc thì $AO \perp KL$ nên $AO \perp DP$, suy ra $AD = AP$. Gọi R là trung điểm KL. Chú ý rằng NH là đường đối trung của tam giác NKL ta có $\angle ANR = \angle ANK + \angle KNR = \angle ALK + \angle LNH = \angle ACB + \angle BAD = \angle ACD = \angle ANP$ nên N, R, P thẳng hàng. Vậy NP chia đôi KL. □

Từ cấu hình bài toán 4 và bài toán trong [4], ta thu được bài toán hay sau:

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao hạ từ B, C của tam giác ABC theo thứ tự cắt đường tròn (O) tại D và E. DE theo thứ tự cắt AC và AB tại M và N. Kẻ $DP \parallel EQ \parallel BC (P \in AC, Q \in AB)$. Chứng minh rằng:*
1. Đường thẳng nối trung điểm MQ và NP đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác ABC.
2. Trực tâm các tam giác ABC, AMQ, ANP thẳng hàng.

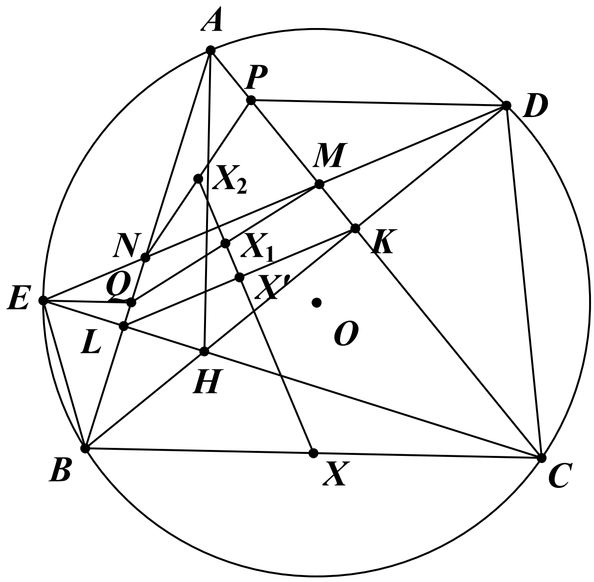
Lời giải. Để giải bài toán này ta cần sử dụng đến bổ đề ERIQ (Equal Ratios In Quadrilateral) được phát biểu như sau:

Bổ đề ERIQ. Cho hai bộ ba điểm thẳng hàng A_1, A_2, A_3 và B_1, B_2, B_3 sao cho $\dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}} = \dfrac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_1B_3}} = k$. Nếu C_1, C_2, C_3 theo thứ tự chia A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 theo cùng một tỷ số thì C_1, C_2, C_3 thẳng hàng và $\dfrac{\overline{C_1C_2}}{\overline{C_1C_3}} = k$.

Bổ đề ERIQ là một kết quả đã trở nên quen thuộc với nhiều bạn đọc, có thể tìm thấy một số cách chứng minh trong các tài liệu khác nhau (chẳng hạn trong [2]), xin không trình bày ở đây.

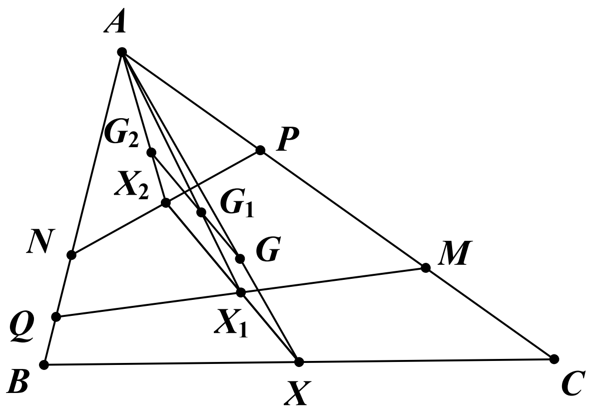
Trở lại bài toán,

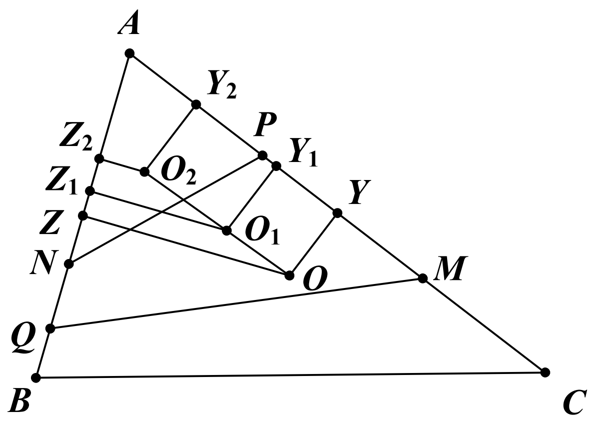
1. Chứng minh đường thẳng nối trung điểm MQ và NP đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác ABC.



Các đường cao BK, CL của tam giác ABC cắt nhau tại H. Dễ thấy $KL \parallel DE$ nên ta có $\angle CMD = \angle AMN = \angle ABC = \angle BQE$, từ đó $\Delta CDM \sim \Delta BEQ$. Chứng minh tương tự ta có $\Delta CDP \sim \Delta BEN$. Do đó $\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{BN}} = \dfrac{\overline{CM}}{\overline{CP}} = k$ và $\dfrac{\overline{LQ}}{\overline{LN}} = \dfrac{\overline{KM}}{\overline{KP}}$. Gọi X, X', X_1, X_2 theo thứ tự là trung điểm BC, KL, MQ, NP. Theo bổ đề ERIQ, ta có X', X_1, X_2 thẳng hàng; X, X_1, X_2 thẳng hàng và $\dfrac{\overline{XX_1}}{\overline{XX_2}} = k$. Từ đó với chú ý rằng XX' đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác ABC ta có đpcm.

2. Chứng minh trực tâm các tam giác ABC, AMQ, ANP thẳng hàng.





Gọi G, G_1, G_2 theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ABC, AMQ, ANP. Ta có $\dfrac{\overline{AG}}{\overline{AX}} = \dfrac{\overline{AG_1}}{\overline{AX_1}} = \dfrac{\overline{AG_2}}{\overline{AX_2}} = \dfrac{2}{3}$ nên theo định lý Thales G, G_1, G_2 thẳng hàng và $\dfrac{\overline{GG_1}}{\overline{GG_2}} = k$.

Gọi Y, Y_1, Y_2 theo thứ tự là hình chiếu của O, O_1, O_2 trên AC; Z, Z_1, Z_2 theo thứ tự là hình chiếu của O, O_1, O_2 trên AB. Ta có $\overline{YY_1} = \overline{AY_1} - \overline{AY} = \dfrac{1}{2}(\overline{AM} - \overline{AC}) = \dfrac{1}{2}\overline{CM}$ và $\overline{YY_2} = \overline{AY_2} - \overline{AY} = \dfrac{1}{2}(\overline{AP} - \overline{AC}) = \dfrac{1}{2}\overline{CP}$ nên $\dfrac{\overline{YY_1}}{\overline{YY_2}} = \dfrac{\overline{CM}}{\overline{CP}} = k$. Chứng minh tương tự ta có $\dfrac{\overline{ZZ_1}}{\overline{ZZ_2}} = k$. Chú ý rằng $OY \parallel O_1Y_1 \parallel O_2Y_2$ và $OZ \parallel O_1Z_1 \parallel O_2Z_2$, theo định lý Thales, ta có O, O_1, O_2 thẳng hàng và $\dfrac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}} = k$. Gọi H_1, H_2 theo thứ tự là trực tâm các tam giác AMQ, ANP thì $\dfrac{\overline{HG}}{\overline{HO}} = \dfrac{\overline{H_1G_1}}{\overline{H_1O_1}} = \dfrac{\overline{H_2G_2}}{\overline{H_2O_2}} = \dfrac{2}{3}$. Chú ý rằng $\dfrac{\overline{GG_1}}{\overline{GG_2}} = \dfrac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}} = k$, theo bổ đề ERIQ thì H, H_1, H_2 thẳng hàng (đpcm). □

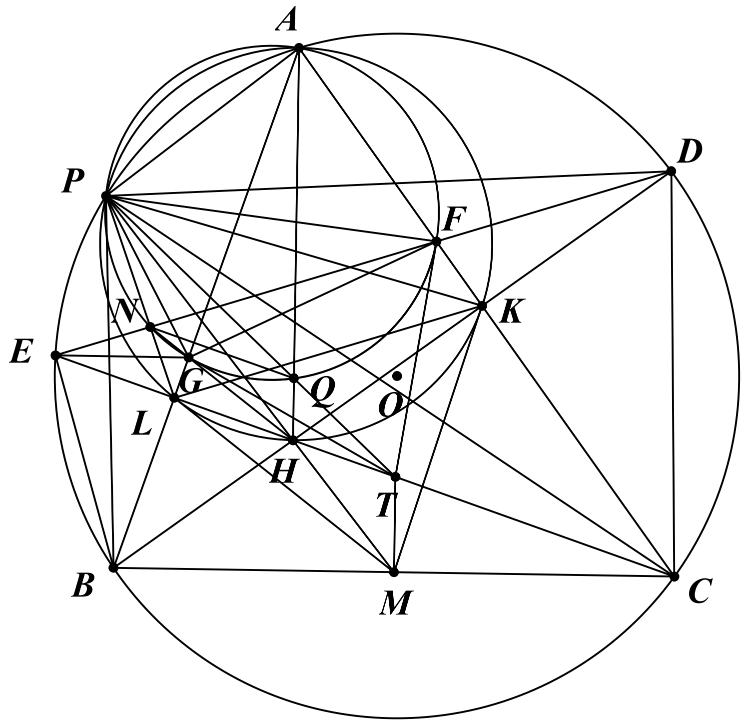
Nhận xét. Bài toán được giải dựa trên những ý tưởng của Nguyễn Văn Linh (trong [2]) và Kostas Vittas (trong [4]). Ta cũng chứng minh được trực tâm của bốn tam giác ABC, AMQ, ANP, AKL thẳng hàng. Một cách tổng quát, ta có kết quả sau: Các điểm chia các đoạn thẳng nối trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AMQ, ANP, AKL theo cùng một tỷ số thì thẳng hàng.

Từ bài toán 7, ta có thể đề xuất bài toán sau:

Bài toán 8. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao hạ từ B, C của tam giác ABC theo thứ tự cắt đường tròn (O) tại D và E. DE theo thứ tự cắt AC và AB tại M và N. Kẻ $DP \parallel EQ \parallel BC (P \in AC, Q \in AB)$. Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm các đoạn MQ, NP và đường thẳng nối tâm đường tròn Euler của các tam giác AMQ, ANP cắt nhau tại một điểm thuộc đường thẳng Euler của tam giác ABC.*

Giản lược các yếu tố trong bài toán 7, tác giả đã tìm ra bài toán hình học thú vị sau:

Bài toán 9. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H. BH, CH theo thứ tự cắt (O) tại D và E. DE cắt AC tại F. Kẻ $EG \parallel BC (G \in AB)$. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại F, G của đường tròn ngoại tiếp tam giác AFG cắt nhau tại một điểm thuộc CE.*

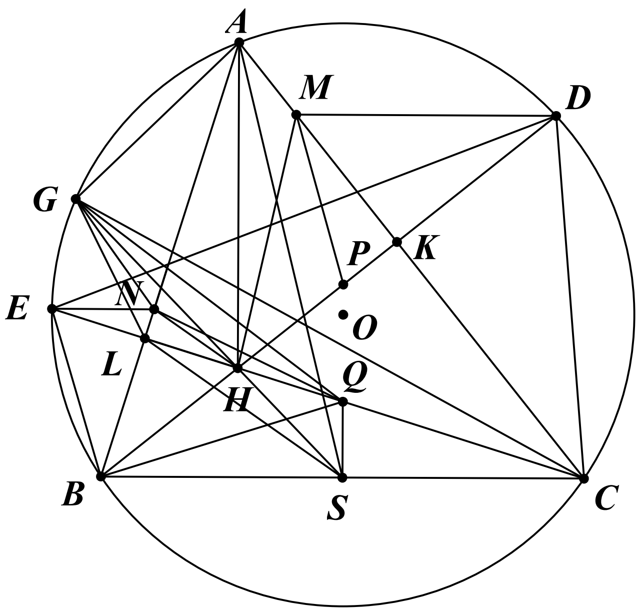


Lời giải. Gọi BK, CL là các đường cao của tam giác ABC. Đường tròn (AKL) cắt (O) tại P khác A. Tương tự bài toán 8, ta chứng minh được hai tam giác BEG và CDF đồng dạng có EL, DK là các đường cao tương ứng nên $\dfrac{LB}{LG} = \dfrac{KC}{KF}$. Chú ý rằng hai tam giác PBL và PCK đồng dạng, ta có hai tam giác PLG và PKF đồng dạng suy ra hai tam giác PLK và PGF đồng dạng. Từ đó tứ giác $APGF$ nội tiếp. Tiếp tuyến tại F, G của đường tròn (AFG) cắt nhau tại T. Tiếp tuyến tại K, L của đường tròn (AKL) cắt nhau tại trung điểm M của BC. Dễ thấy P, H, M thẳng hàng. PL cắt DE tại N. Ta có $\angle NPH = \angle LAH = \angle ECB = \angle NDH$ nên tứ giác $NHDP$ nội tiếp. Từ các cặp tam giác đồng dạng PLG và PKF, LGH và KFD dễ thấy hai tam giác PGH và PFD đồng dạng. Chú ý rằng tứ giác $NHDP$ nội tiếp ta có $\angle PHG = \angle PDF = \angle PHN$ nên N, G, H thẳng hàng. PT cắt đường tròn (AFG) tại Q khác P. Do hai tam giác PLK và PGF đồng dạng nên ta có các cặp tam giác đồng dạng PLM và PGT, PLH và PGQ. Từ đó$\angle GAQ = \angle GPQ = \angle LPH = \angle LAH$ nên Q thuộc AH. Chú ý rằng $KL \parallel DE$, ta có $\angle AFN = \angle AKL = 180° - \angle APN$ nên tứ giác $APNF$ nội tiếp. Ta thấy $\angle FNQ = \angle FAQ = \angle DBC = \angle FEC$ do vậy $NQ \parallel CE$. Vì $\angle PNG = \angle PGT = \angle PLM$ nên $NH \parallel LM$. Ta có $\dfrac{PN}{PL} = \dfrac{PH}{PM} = \dfrac{PQ}{PT}$ suy ra $NQ \parallel LT$. Từ đó $LT \parallel NQ \parallel CE$ nên T thuộc CE (đpcm). □

Nhận xét.
1. Đây là một bài toán hay bởi cách phát biểu giản đơn và tính không cân xứng của các yếu tố trong giả thiết bài toán. Lời giải trên được hoàn thiện với sự cộng tác của thầy Trần Quang Hùng – giáo viên Trường THPT Chuyên KHTN, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội.
2. Trong lời giải trên, ta chứng minh được $\dfrac{PH}{PM} = \dfrac{PQ}{PT}$ nên $HQ \parallel MT$. Chú ý rằng Q thuộc AH nên ta có $MT \perp BC$, suy ra T thuộc trung trực của BC.
Khôi phục tính cân xứng của các yếu tố trong giả thiết bài toán 9, ta có thể đề xuất các bài toán sau:

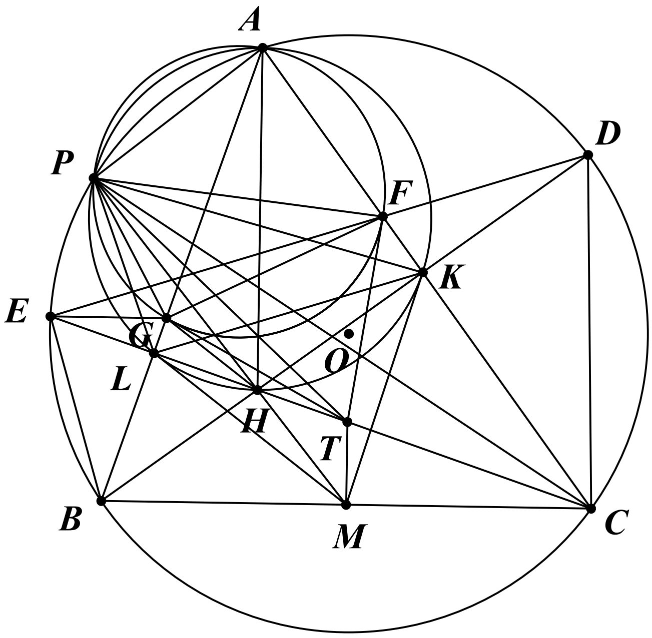
Bài toán 10. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao hạ từ B, C của tam giác ABC theo thứ tự cắt (O) tại D và E. DE theo thứ tự cắt AC và AB tại M và N. Kẻ $DP \parallel EQ \parallel BC (P \in AC, Q \in AB)$. Tiếp tuyến tại M, Q của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMQ cắt nhau tại S. Tiếp tuyến tại N, P của đường tròn ngoại tiếp tam giác ANP cắt nhau tại T. Chứng minh rằng ST vuông góc với BC.*

Bài toán 11. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H. BH, CH theo thứ tự cắt (O) tại D và E. Kẻ $DM \parallel EN \parallel BC (M \in AC, N \in AB)$. Trung trực của BC theo thứ tự cắt BH, CH tại P và Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác HMP và HNQ cắt nhau tại một điểm thuộc (O).*



Lời giải. Gọi BK, CL là các đường cao của tam giác ABC. Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại G khác A. Gọi S là trung điểm của BC thì G, H, S thẳng hàng. Vì $\angle LGS = \angle LAH = \angle LCS$ nên tứ giác $CGLS$ nội tiếp. Vì $SC = SL$ nên GS là phân giác $\angle LGC$. Từ các cặp tam giác đồng dạng GLH và GSC, LHN và SCQ ta có hai tam giác GLN và GSQ đồng dạng. Suy ra hai tam giác GNQ và GLS đồng dạng. Do đó ta có $\angle NGQ = \angle LGS = \angle LAH = \angle NHL$ nên tứ giác $HNGQ$ nội tiếp hay đường tròn (HNQ) đi qua G thuộc (O). Chứng minh tương tự ta có đường tròn (HMP) cũng đi qua G. Từ đó ta có đpcm. □

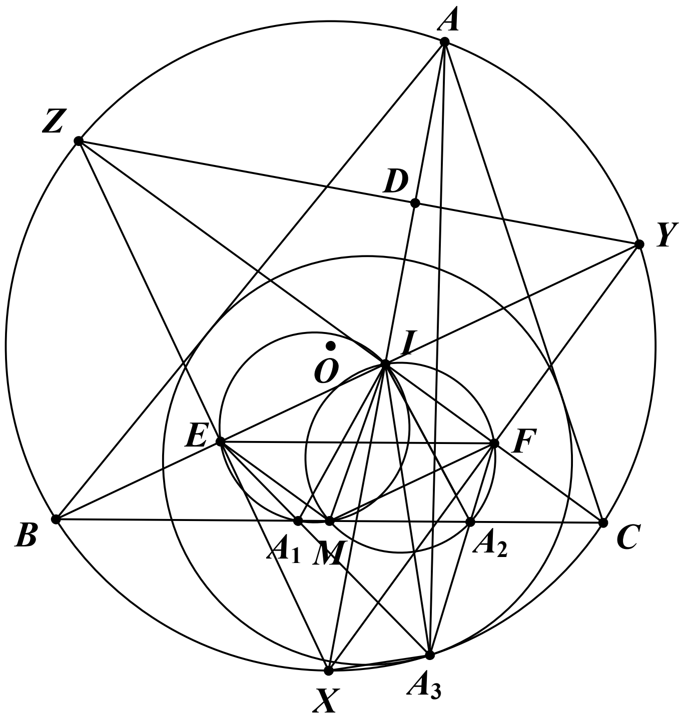
Nhận xét. Từ lời giải bài toán 11, chúng ta có một cách tiếp cận đơn giản hơn cho bài toán 9 như sau:



Lời giải thứ hai cho bài toán 9. Gọi BK, CL là các đường cao của tam giác ABC. Đường tròn (AKL) cắt (O) tại P khác A, ta chứng minh được tứ giác $APGF$ nội tiếp. Gọi M là trung điểm của BC thì P, H, M thẳng hàng. Trung trực của BC cắt CH tại T. Tương tự như chứng minh bài toán 11, ta có hai tam giác PGT và PLM đồng dạng. Chú ý rằng hai tam giác PGF và PLK đồng dạng, ta thấy hai tam giác MKL và TFG đồng dạng. Chú ý rằng MK, ML là tiếp tuyến của đường tròn (AKL), suy ra TF, TG là tiếp tuyến của đường tròn (AFG). Ta có đpcm. □

Ẩn giấu cấu hình về trực tâm thông qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác, chúng ta có thể đề xuất nhiều bài toán hay và khó. Chẳng hạn như:

Bài toán 12. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). D, E, F theo thứ tự là trung điểm của AI, BI, CI. M là trung điểm BC. A_1, A_2 theo thứ tự là giao điểm khác M của các đường tròn $(IEM), (IFM)$ với BC. EA_1, FA_2 cắt nhau tại A_3. B_3, C_3 xác định tương tự. Chứng minh rằng AA_3, BB_3, CC_3 đồng quy.*



Gợi ý. Gọi AI, BI, CI theo thứ tự cắt đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC tại X, Y, Z. Thế thì I là trực tâm của tam giác XYZ. Từ đó đưa về cấu hình bài toán 4, ta có kết quả EA_1 cắt FA_2 tại A_3 là giao điểm của (O) và đường tròn đường kính IX. Theo tính chất quen thuộc, A_3 là tiếp điểm của đường tròn mixtilinear nội tiếp ứng với góc A của tam giác ABC. Tương tự với các điểm B_3 và C_3, từ đó AA_3, BB_3, CC_3 đồng quy tại một điểm thuộc OI. □

Bài toán 13. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (O_a) tiếp xúc với AB, AC và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại S. D, E theo thứ tự là các giao điểm khác B, C của các đường tròn SIB và SIC với BC. Đường thẳng qua B vuông góc với AI cắt IE tại M, đường thẳng qua C vuông góc với AI cắt ID tại N. Lấy P, Q thuộc BC sao cho $IP \parallel AB, IQ \parallel AC$. Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm các đoạn MQ, NP chia đôi OI.*

Bài toán 14. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). AI cắt (O) tại D khác A. E, F theo thứ tự là trung điểm của IB và IC. DE, DF theo thứ tự cắt BC tại M và N. Đường thẳng qua I vuông góc với AI theo thứ tự cắt AB, AC tại K, L. Gọi P, Q theo thứ tự là giao điểm khác B, C của các đường tròn $(BIK), (CIL)$ với BC. IP cắt DF tại R, IQ cắt DE tại S. Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm các đoạn MR, NS và đường thẳng nối tâm đường tròn Euler của các tam giác DMR, DNS cắt nhau tại một điểm thuộc OI.*

Bài toán 15. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có I là giao điểm các đường phân giác. AI cắt (O) tại D khác A. E, F, M theo thứ tự là trung điểm của IB, IC và BC. Gọi H, K theo thứ tự là giao điểm của BC với DE và đường tròn $(IMF) (K \neq M)$. IK cắt DF tại L. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại H, L của đường tròn ngoại tiếp tam giác (DHL) cắt nhau tại một điểm thuộc CI.*

Như vậy, tác giả đã trình bày xong một góc nhìn của mình về bài toán hình học số 4 trong kỳ VMO 2014. Từ những cấu hình rất đơn giản, ta có thể đưa ra những khai thác rất thú vị thông qua những góc nhìn khác nhau.
Cuối cùng, tác giả xin gửi lời cảm ơn tới thầy Trần Quang Hùng – giáo viên Trường THPT Chuyên KHTN, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội, người đã đọc toàn bộ bài viết và đưa ra những ý kiến quý báu giúp bài viết được hoàn thiện hơn.

Tài liệu tham khảo

[1] Trần Nam Dũng, Lê Phúc Lữ và Phan Đức Minh. Đề thi chọn học sinh giọi cấp quốc gia THPT môn toán năm học 2013 – 2014, Lời giải chi tiết và bình luận. Diễn đàn Toán học Mathscope.org.

http://forum.mathscope.org/showthread.php?t=46403

[2] huynhcongbang. [VMO 2014] Bài 4 – Hình học phẳng. Mathscope.org.

http://forum.mathscope.org/showthread.php?t=46327

[3] Nguyễn Văn Linh. Định lý ERIQ và ứng dụng. Euclidean Geometry Blog.

https://nguyenvanlinh.wordpress.com/2015/03/02/eriq-theorem/

[4] shobber. Collinearity of orthocentres. Art of Problem Solving.

http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h97493p550605

MỐI LIÊN HỆ EUCLIDE, AFIN VÀ XẠ ẢNH QUA MỘT BÀI TOÁN TRONG SÁCH "CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN QUA CÁC KỲ THI OLYMPIC"

Nguyễn Ngọc Giang –TPHCM

Tóm tắt

Bài viết đưa ra các cách giải khác nhau cũng như những khám phá và phát triển của một bài toán. Qua đó, thể hiện mối quan hệ biện chứng giữa hình học Euclide, Afin và xạ ảnh.

1. Giới thiệu

Chương trình "Gặp gỡ toán học 2015" đã kết thúc tốt đẹp. Ngoài những hoạt động như dạy học, giao lưu thì việc cho ra đời cuốn sách "Các phương pháp giải toán qua các kỳ thi Olympic" cũng đã phần nào nói lên sự thành công của chương trình. Với nội dung phong phú, sách đã đề cập đến các phương pháp giải và phát triển tư duy dành cho các em học sinh giỏi. Trong các đề toán ra cho các em học sinh giỏi tôi đặc biệt chú trọng đến bài toán sau:

Bài toán 1. **([1], tr. 205).** *Cho tam giác ABC. Các điểm M, N thuộc BC. Các điểm P, Q theo thứ tự thuộc AC, AB. Đặt $O = MP \cap NQ$, $K = BO \cap NP$, $L = CO \cap MQ$. Chứng minh rằng: AO, BL, CK đồng quy.*

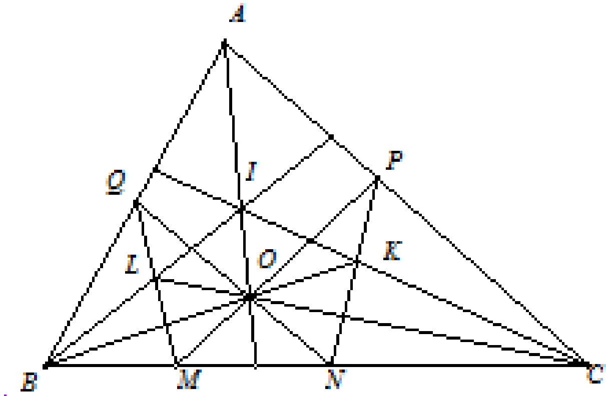
Đây là một bài toán hay và gợi lên nhiều suy nghĩ. Vì bài toán chỉ đề cập đến các khái niệm, các tính chất như "tam giác", "đồng quy", "giao điểm" nên bài toán là một bài toán của hình học xạ ảnh. Vì là một bài toán hình học xạ ảnh nên hiển nhiên nó là một bài toán hình học afin và cũng là một bài toán trong hình học Euclide.
Trong bài báo, chúng tôi sẽ đề cập đến mối quan hệ giữa toán sơ cấp và cao cấp qua bài toán. Mối quan hệ đó thể hiện một dạng tư duy rất hay đó là tư duy sáng tạo. Trong thuyết Giáo dục Bloom mới thì tư duy sáng tạo là tư duy cao nhất và khó nhất. Đây là dạng tư duy rất cần thiết không những cho Giáo dục mà còn cho toàn bộ mọi lĩnh vực khoa học và đời sống. Sáng tạo và sáng tạo hơn nữa đó là kim chỉ nam cho mọi hành động của con người trong thế kỉ XXI.

2. Các cách giải toán

2.1. Phương pháp chiếu xuyên tâm

Đặt $I = BL \cap CK, U = BO \cap MQ, V = CO \cap NP$. Ta có

$$\begin{aligned}
&B(ALOC) = (QLUM)\\
&= (MULQ) \text{ (theo tính chất tỷ số kép của hàng điểm)}\\
&= (PKVN) \text{ (xét phép chiếu xuyên tâm } O)\\
&= C(AKOB).
\end{aligned}$$



Áp dụng định lí: *Cho hai chùm s, a, b, c và s, a', b', c'. Khi đó $(sabc) = (sa'b'c')$ khi và chỉ khi $a \cap a'; b \cap b'; c \cap c'$ thẳng hàng.*
Với $s = BC, a = BA, a' = CA, b = BL, b' = CK, c = BO, c' = CO$ thì ta có A, I, O thẳng hàng. Vậy AO, BL, CK đồng quy. [1]
Ngoài cách giải này ta còn có thể giải bài toán bằng các phương pháp tọa độ. Phương pháp tọa độ có ưu điểm là phương pháp có tính chất thuật toán. Dù việc tính toán trong nhiều bài toán nhiều khi gặp khó khăn nhưng ngày nay ta đã có các phần mềm trợ giúp tính toán nên cách giải bằng phương pháp tọa độ vẫn là cách giải được ưa dùng.

2.2. Phương pháp tọa độ khối tâm thuần nhất

Tọa độ khối tâm thuần nhất (Homogeneous barycentric coordinates) là phương pháp tọa độ do Mobius tìm ra. Nội dung của phương pháp như sau. Cho tam giác ABC, điểm P bất kì có tọa độ là bộ ba các số $(u : v : w)$ hiểu theo nghĩa đó là hệ các khối tâm u tại A, v tại B, và w tại C sao cho điểm cân bằng của tam giác tại P. Các khối tâm tỉ lệ với diện tích tam giác PBC, PCA và PAB. Khi điểm P nằm ngoài tam giác, ta sử dụng diện tích có dấu của các tam giác định hướng. Các tọa độ khối tâm thuần nhất của P với tam giác tham chiếu ABC là bộ ba các số $(x : y : z)$ thỏa mãn

$$x : y : z = \Delta PBC : \Delta PCA : \Delta PAB.$$

Ví dụ: 1. Trọng tâm G của tam giác có tọa độ khối tâm thuần nhất là $G = (1 : 1 : 1)$.
2. Tâm đường tròn nội tiếp I có tọa độ khối tâm thuần nhất là $I = (a : b : c)$.
Sau đây là lời giải bài toán bằng phương pháp tọa độ khối tâm thuần nhất.
Ta kí hiệu phương trình đường thẳng XY có các thành phần tọa độ x, y, z là $XY = [x : y : z]$.
Phương trình đường thẳng MP có tọa độ là

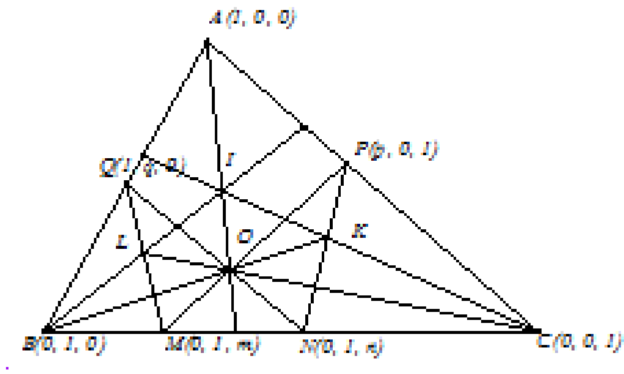
$$\left[\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & p \\ m & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right] = [1 : mp, -p].$$

Tương tự, phương trình đường thẳng NP có tọa độ là

$$[1 : np : -p].$$

Phương trình đường thẳng NQ có tọa độ là

$$\left[\begin{vmatrix} q & 0 \\ 1 & n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ n & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right] = [qn : -n : 1].$$



Tương tự, phương trình đường thẳng MQ có tọa độ là

$$[qm : -m : 1].$$

$O = MP \cap NQ$ nên tọa độ điểm O thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} nqx_1 - nx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + mpx_2 - px_3 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta có $O = (p(n-m) : npq + 1 : n(1 + mpq))$.
Phương trình đường thẳng AO có tọa độ là

$$\left[\begin{vmatrix} npq+1 & n(1+mpq) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} n(1+mpq) & p(n-m) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p(n-m) & npq+1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right]$$
$$= [0 : n(1+mpq) : -(npq+1)].$$

Phương trình đường thẳng BO có tọa độ là

$$\left[\begin{vmatrix} npq+1 & n(1+mpq) \\ 1 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} n(1+mpq) & p(n-m) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p(n-m) & npq+1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right]$$
$$= [-n(1+mpq) : 0 : p(n-m)].$$

Phương trình đường thẳng CO có tọa độ là

$$\left[\begin{vmatrix} npq+1 & n(1+mpq) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} n(1+mpq) & p(n-m) \\ 1 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p(n-m) & npq+1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right]$$
$$= [npq+1 : p(m-n) : 0].$$

$K = NP \cap BO$ nên tọa độ điểm K thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + npx_2 - px_3 = 0 \\ -n(1+mpq)x_1 + p(n-m)x_3 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta có

$$K = \big(np(n-m) : m(npq+1) : n^2(1+mpq)\big).$$

Phương trình đường thẳng CK có tọa độ là $[m(npq+1) : np(m-n) : 0]$.

$L = CO \cap MQ$ nên tọa độ điểm L thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} (npq+1)x_1 + p(m-n)x_2 = 0 \\ mqx_1 - mx_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta có

$$L = (p(n-m) : npq + 1 : m(1+mpq)).$$

Phương trình đường thẳng BL có tọa độ là

$$[-m(1+mpq) : 0 : p(n-m)]$$

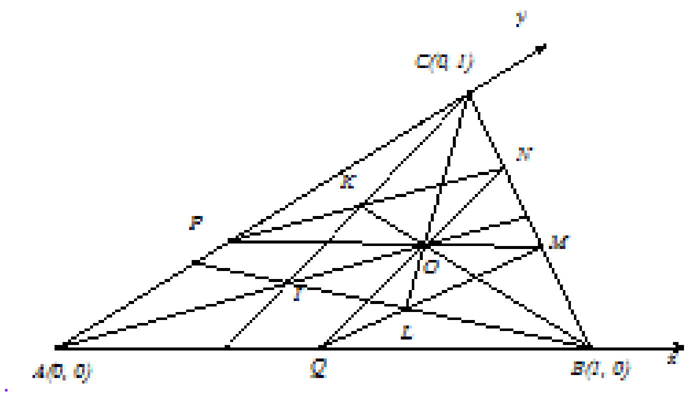
Xét định thức

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} m(npq+1) & np(m-n) & 0 \\ -m(1+mpq) & 0 & p(n-m) \\ 0 & n(1+mpq) & -(npq+1) \end{vmatrix} \\ &= m(npq+1).(-n(1+mpq)).p(n-m) + m(1+mpq).np(m-n).(-(npq+1)) \\ &= mnp(npq+1)(1+mpq)(n-m)(-1+1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vậy BL, CK, AI đồng quy tại một điểm.

2.3. Phương pháp tọa độ afin

Các tính toán trong cách giải này được trợ giúp bởi phần mềm Maple XVIII.



Xét mục tiêu afin $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$, ta có

$$A = (0;0), B = (1;0), C = (0;1).$$

Phương trình đường thẳng BC là

$$(BC) : x + y - 1 = 0.$$

$M, N \in BC$ nên $M = (m; 1-m), N = (n; 1-n)$.
$P \in AC$ nên tọa độ điểm P là

$$P = (0; p).$$

$Q \in AB$ nên tọa độ điểm Q là

$$Q = (q; 0).$$

Phương trình đường thẳng MQ là

$$\frac{x - x_M}{x_M - x_Q} = \frac{y - y_M}{y_M - y_Q}$$

hay

$$(MQ) : \frac{x - m}{m - q} - \frac{y - 1 + m}{1 - m} = 0.$$

Tương tự, phương trình đường thẳng MP là

$$\frac{x - m}{m} - \frac{y - 1 + m}{1 - m - p} = 0.$$

Phương trình đường thẳng NQ là

$$\frac{x - n}{n - q} - \frac{y - 1 + n}{1 - n} = 0.$$

Phương trình đường thẳng NP là

$$\frac{x - n}{n} - \frac{y - 1 + n}{1 - n - p} = 0.$$

Vì $O = MP \cap NQ$ nên tọa độ của điểm O thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x - m}{m} - \dfrac{y - 1 + m}{1 - m - p} = 0 \\ \dfrac{x - n}{n - q} - \dfrac{y - 1 + n}{1 - n} = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta có

$$O = \left(-\frac{m(np - nq - pq + q)}{mq - np + pq - m + n - q}; \frac{mnp - mnq - npq - mp + mq + nq + pq - q}{mq - np + pq - m + n - q} \right).$$

Phương trình đường thẳng CO là

$$\frac{x(mq - np + pq - m + n - q)}{m(np - nq - pq + q)} - \frac{y - 1}{1 - \frac{mnp - mnq - npq - mp + mq + nq + pq - q}{mq - np + pq - m + n - q}} = 0$$

Phương trình đường thẳng BO là

$$\frac{x - 1}{1 + \frac{m(np - nq - pq + q)}{mq - np + pq - m + n - q}} + \frac{y(mq - np + pq - m + n - q)}{mnp - mnq - npq - mp + mq + nq + pq - q} = 0.$$

$L = CO \cap MQ$, nên tọa độ điểm L là $L = (x_L; y_L)$ với

$$x_L = -\frac{(np - nq - pq + q)m^2}{m^2p - 2mnp + mnq + npq - m^2 + mn - nq}.$$

$$y_L = \frac{\left(m^2p - m^2q - mpq - mp + 2mq + pq - q\right)n}{m^2p - 2mnp + mnq + npq - m^2 + mn - nq}.$$

$K = BO \cap NP$, nên tọa độ điểm K là $K = (x_K; y_K)$ với

$$x_K = \frac{(mnp - mnq - mpq + mq - np + nq + pq - q)n}{mnp - 2mnq - mpq + n^2q + mn + 2mq - n^2 - np + pq - m + n - q}.$$

$$y_K = \frac{-\left(mn^2p - mn^2q - n^2pq - 2mnp + 2mnq + n^2q + 2npq + mp - mq - 2nq - pq + q\right)}{mnp - 2mnq - mpq + n^2q + mn + 2mq - n^2 - np + pq - m + n - q}.$$

Phương trình đường thẳng CK là

$$-\frac{x\left(mnp - 2mnq - mpq + n^2q + mn + 2mq - n^2 - np + pq - m + n - q\right)}{(mnp - mnq - mpq + mq - np + nq + pq - q)n} -$$
$$-\frac{y - 1}{1 + \frac{\left(mn^2p - mn^2q - n^2pq - 2mnp + 2mnq + n^2q + 2npq + mp - mq - 2nq - pq + q\right)}{mnp - 2mnq - mpq + n^2q + mn + 2mq - n^2 - np + pq - m + n - q}} = 0.$$

Phương trình đường thẳng BL là

$$\frac{x - 1}{1 + \frac{(np - nq - pq + q)m^2}{m^2p - 2mnp + mnq + npq - m^2 + mn - nq}}$$
$$+\frac{y\left(m^2p - 2mnp + mnq + npq - m^2 + mn - nq\right)}{(m^2p - m^2q - mpq - mp + 2mq + pq - q)n} = 0.$$

Phương trình đường thẳng AO là

$$AO = -\frac{\left(x + \frac{m(np - nq - pq + q}{mq - np + pq - m + n - q}\right)(mq - np + pq - m + n - q)}{m(np - nq - pq + q)}$$
$$-\frac{\left(y - \frac{mnp - mnq - npq - mp + mq + nq + pq - q}{mq - np + pq - m + n - q}\right)(mq - np + pq - m + n - q)}{mnp - mnq - npq - mp + mq + nq + pq - q} = 0.$$

$I = CK \cap BL$ nên tọa độ điểm $I = (x_I; y_I)$ là

$$x_I = -\Big((mnp - mnq - mpq + mq - np + nq + pq - q)mn\Big)\Big/\Big(m^2nq + m^2pq - mn^2p - mnpq$$
$$+n^2pq - m^2n - m^2p - m^2q + mn^2 + 2mnp - n^2q - npq + m^2 - mn + nq\Big)$$

$$y_I = \Big(n\big(m^2np - m^2nq - mnpq - m^2p + m^2q - mnp + 2mnq + mpq + npq + mp$$
$$-2mq - nq - pq + q\big)\Big)\Big/\Big(m^2nq + m^2pq - mn^2p - mnpq + n^2pq - m^2n - m^2p$$
$$-m^2q + mn^2 + 2mnp - n^2q - npq + m^2 - mn + nq\Big)$$

Xét hiệu $\Delta = (x_A - x_I)(y_O - y_I) - (y_A - y_I)(x_O - x_I)$.

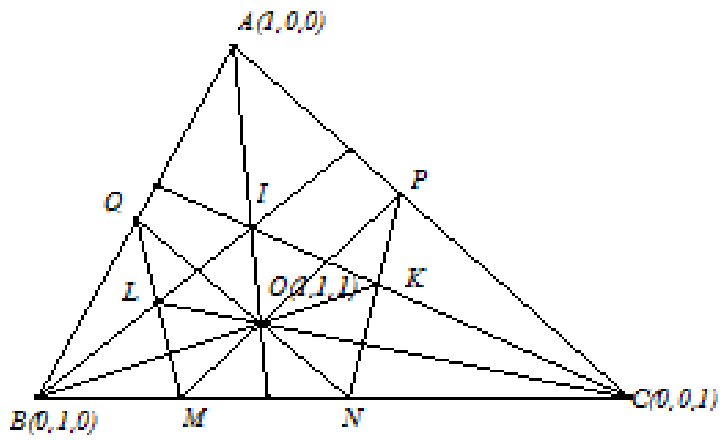
Ta có

$$\begin{aligned}
\Delta = \Big(&(mnp - mnq - mpq + mq - np + nq + pq - q)mn\Big(\frac{mnp - mnq - npq - mp + mq + nq + pq - q}{mq - np + pq - m + n - q}\\
&-(n(m^2np - m^2nq - mnpq - m^2p + m^2q - mnp + 2mnq + mpq + npq + mp - 2mq - nq - pq\\
&+q))/(m^2nq + m^2pq - mn^2p - mnpq + n^2pq - m^2n - m^2p - m^2q + mn^2 + 2mnp - n^2q - npq + m^2\\
&-mn + nq)))/(m^2nq + m^2pq - mn^2p - mnpq + n^2pq - m^2n - m^2p - m^2q + mn^2 + 2mnp - n^2q\\
&-npq + m^2 - mn + nq) + (n(m^2np - m^2nq - mnpq - m^2p + m^2q - mnp + 2mnq + mpq + npq\\
&+mp - 2mq - nq - pq + q)\Big(-\frac{m(np - nq - pq + q)}{mq - np + pq - m + n - q}\\
&+((mnp - mnq - mpq + mq - np + nq + pq - q)mn/(m^2nq + m^2pq - mn^2p - mnpq + n^2pq\\
&-m^2n - m^2p - m^2q + mn^2 + 2mnp - n^2q - npq + m^2 - mn + nq)))/(m^2nq + m^2pq - mn^2p\\
&-mnpq + n^2pq - m^2n - m^2p - m^2q + mn^2 + 2mnp - n^2q - npq + m^2 - mn + nq).
\end{aligned}$$

Đơn giản hóa Δ bằng lệnh simplify của Maple XVIII, ta được $\Delta = 0$.

Vậy AO, BL, CK đồng quy.

2.4. Phương pháp tọa độ xạ ảnh



Xét mục tiêu xạ ảnh $\{A, B, C; O)$. Ta có:

$$A = (1, 0, 0); B = (0, 1, 0); C = (0, 0, 1).$$

Phương trình đường thẳng AB là $x_3 = 0$.
Phương trình đường thẳng AC là $x_2 = 0$.
Phương trình đường thẳng BC là $x_1 = 0$.
Vì M thuộc BC nên $[M] = \lambda[B] + \mu[C]$ hay ta có hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vậy $M = (0, 1, m)$.
Tương tự, ta cũng có $N = (0, 1, n)$.
Phương trình đường thẳng MO có tọa độ là

$$\left[\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right] = [m-1, -m, 1].$$

Tương tự, phương trình đường thẳng NO là $[n-1, -n, 1]$.
$P = MO \cap AC$ nên tọa độ điểm P thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} (m-1)x_1 - mx_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Vậy $P = (-1, 0, m-1)$.
$Q = NO \cap AB$ nên tọa độ điểm Q thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} (n-1)x_1 - nx_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy $Q = (n, n-1, 0)$.
Phương trình đường thẳng MQ có tọa độ là

$$\left[\begin{vmatrix} 1 & m \\ n-1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ n & n-1 \end{vmatrix}\right] = [m(1-n), mn, -n].$$

Phương trình đường thẳng NP có tọa độ là

$$\left[\begin{vmatrix} 0 & m-1 \\ 1 & n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m-1 & -1 \\ n & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right] = [1-m, n, -1].$$

Phương trình đường thẳng BO là $x_1 - x_3 = 0$.
Phương trình đường thẳng CO là $x_1 - x_2 = 0$.
$K = BO \cap NP$ nên tọa độ điểm K thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} (1-m)x_1 + nx_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy $K = (n, m, n)$.
$L = CO \cap MQ$ nên tọa độ điểm L thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} m(1-n)x_1 + mnx_2 - nx_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Vậy $L = (n, n, m)$.
Đường thẳng BL có tọa độ là

$$\left[\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ n & m \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ m & n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ n & n \end{vmatrix}\right] = [m, 0, -n].$$

Đường thẳng CK có tọa độ là

$$\left[\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m & n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ n & n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ n & m \end{vmatrix}\right] = [-m, n, 0].$$

Đường thẳng AI có tọa độ là

$$\left[\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right] = [0, -1, 1]$$

Xét định thức

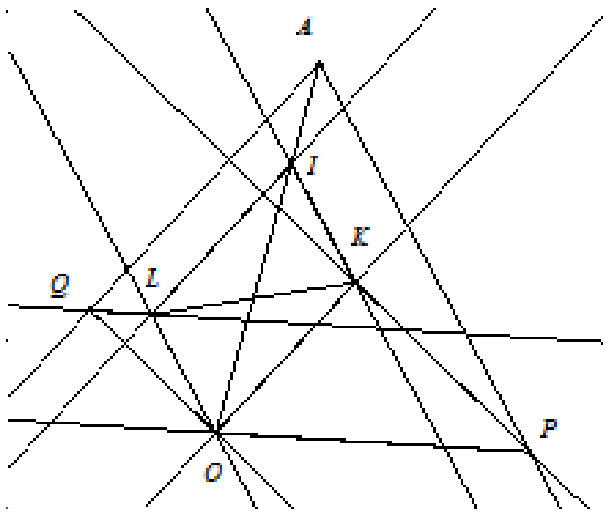
$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 0 & -n \\ -m & n & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = m.n - (-m).(-n) = 0.$$

Vậy AI, BL, CK đồng quy tại một điểm.

3. Tương tự hóa bài toán

Từ một bài toán xạ ảnh trong không gian xạ ảnh, bằng cách chọn các siêu phẳng khác nhau đóng vai trò siêu phẳng vô tận ta có thể có nhiều bài toán afin khác nhau mà các kết quả ta có thể suy ra từ những kết quả đã biết trong không gian xạ ảnh.
Bằng cách chọn BC là đường thẳng vô tận, ta được bài toán sau

Bài toán 2. *Cho hình bốn đỉnh $APOQ$. Đường thẳng qua Q song song với PO cắt đường thẳng qua O song song với AP tại L. Đường thẳng qua P song song với QO cắt đường thẳng qua O song song với AQ tại K. Dựng hình bình hành $OLIK$. Chứng minh rằng A, I, O thẳng hàng.*



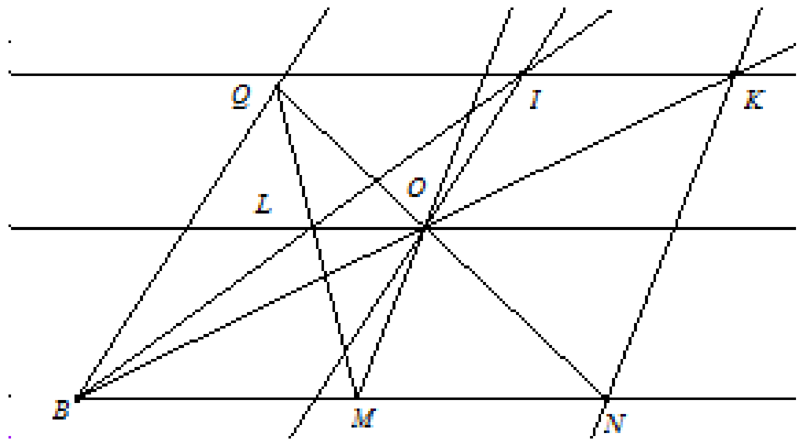
Bằng cách chọn đường thẳng AC làm đường thẳng vô tận, ta được bài toán sau

Bài toán 3. *Cho hai tia Bx, By. Trên Bx lấy hai điểm M, N và trên By lấy điểm Q. Gọi O là điểm trên QN. Đường thẳng qua N song song với MO cắt BO tại K. Đường thẳng qua O song song với Bx cắt QM tại L. Đường thẳng qua K song song với Bx cắt BL tại I. Chứng minh rằng $OI \parallel By$.*

4. Mở rộng bài toán

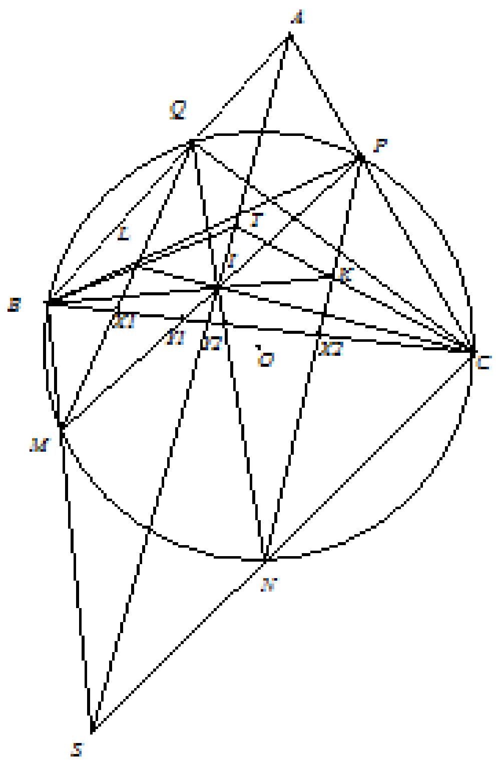
Từ bài toán 1, chúng tôi đã tổng quát hóa thành bài toán cho đường tròn. Ta được bài toán sau

Bài toán 4. *Cho 6 điểm M, B, Q, P, C, N nằm trên đường tròn. Gọi I là giao điểm của MP và NQ. L, K lần lượt là giao điểm của CI với MQ và BI với NP. Gọi T là giao điểm của BL và CK. Chứng minh rằng A, T, I thẳng hàng.*



Sau đây là một số cách giải của bài toán.

Chứng minh. **Cách 1 [2]**



Gọi $S = BM \cap CN$.
Áp dụng định lí Pascal cho lục giác $MBQPCN$ ta có A, I, S thẳng hàng.
Gọi X_1, X_2, Y_1, Y_2 lần lượt là giao điểm của BC với MQ, NP, MP, NQ.
Để chứng minh A, I, T thẳng hàng ta sẽ chứng minh $B(CATS) = C(BATS)$ tức là $(X_1QLM) = (X_2PKN)$ (1)
Ta có, áp dụng định lí Ménélaus cho tam giác QX_1Y_2 với L, I, C thẳng hàng

$$(X_1QLM) = \frac{LX_1}{LQ} : \frac{MX_1}{MQ} = \frac{IY_2}{IQ} . \frac{CX_1}{CY_2} . \frac{MQ}{MX_1}$$

Tương tự cho (X_2PKN).

Khi đó (1) tương đương với

$$\frac{IY_2}{IQ}.\frac{CX_1}{CY_2}.\frac{MQ}{MX_1}=\frac{IY_1}{IP}.\frac{BX_2}{BY_1}.\frac{NP}{NX_2}$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{MQ}{NP}.\frac{IP}{IQ}\right).\left(\frac{CX_1}{MX_1}:\frac{BX_2}{NX_2}\right)=\frac{IY_1}{BY_1}:\frac{IY_2}{CY_2}.$$

Chú ý $\dfrac{CX_1}{MX_1}=\dfrac{CQ}{MB};\dfrac{BX_2}{NX_2}=\dfrac{BP}{CN}.$
(1) tương đương với

$$\left(\frac{\sin\widehat{QIM}}{\sin\widehat{IMQ}}.\frac{\sin\widehat{INP}}{\sin\widehat{PIN}}\right).\left(\frac{CQ}{MB}.\frac{CN}{BP}\right)=\frac{IY_1}{BY_1}:\frac{IY_2}{CY_2}.\quad(2)$$

Áp dụng định lí sin cho tam giác IBY_1 và IBM ta có

$$\frac{IY_1}{BY_1}=\frac{\sin\widehat{IBC}}{\sin\widehat{BIM}}=\frac{\sin\widehat{IBC}}{MB.\frac{\sin\widehat{BMP}}{IB}}.$$

Tương tự cho $\dfrac{IY_2}{CY_2}.$
Vậy ta có

$$\frac{IY_1}{BY_1}:\frac{IY_2}{CY_2}=\frac{\sin\widehat{IBC}}{MB.\frac{\sin\widehat{BMP}}{IB}}:\frac{\sin\widehat{ICB}}{NC.\frac{\sin\widehat{CNQ}}{IC}}.\quad(3)$$

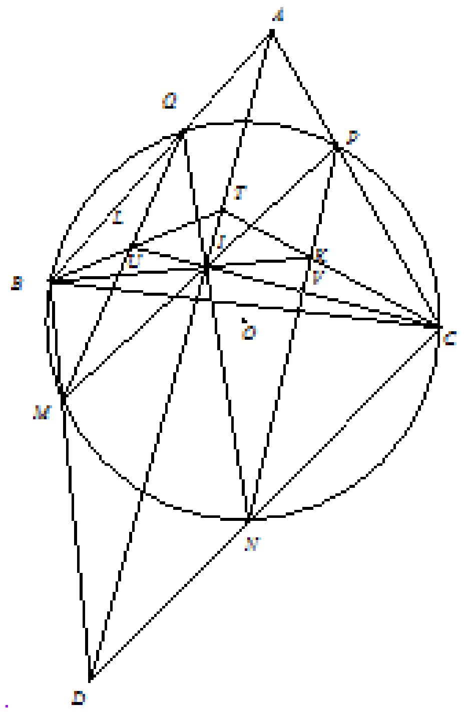
Từ (2), (3), ta cần chứng minh

$$\frac{CQ}{MB}.\frac{NC}{BP}=\frac{IY_1}{BY_1}.\frac{CY_2}{IY_2}=\frac{IB}{MB}.\frac{NC}{IC}.\frac{\sin\widehat{IBC}}{\sin\widehat{BMP}}.\frac{\sin\widehat{CNQ}}{\sin\widehat{ICB}}$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{IB}{\sin\widehat{ICB}}.\frac{\sin\widehat{IBC}}{IC}\right).\left(\frac{\sin\widehat{CNQ}}{\sin\widehat{BMP}}\right)=\frac{CQ}{BP}$$
$$\Leftrightarrow\frac{CQ}{\sin\widehat{CNQ}}=\frac{BP}{\sin\widehat{BMP}}\Leftrightarrow\frac{CQ}{\sin\widehat{QBC}}=\frac{BP}{\sin\widehat{BCP}}\Leftrightarrow\frac{BC}{\sin\widehat{BQC}}=\frac{BC}{\sin\widehat{BPC}}.$$

Điều này là hiển nhiên. Vậy, ta có điều phải chứng minh.
Cách 2 [3]
Gọi $D=BM\cap CN, U=BI\cap MQ$ và $V=CI\cap NP$.
Áp dụng định lí Pascal cho bộ 6 điểm B,Q,N,C,P,M nằm trên đường tròn (O) ta có $A=BQ\cap CP, I=QN\cap PM$ và $D=NC\cap MB$ nên A,I và D thẳng hàng.
Tiếp theo ta chứng minh T nằm trên đường thẳng AID bằng phương pháp tỉ số kép. Ta có

$B(ALID)=(QLUM)$
$=(MULQ)$ (theo tính chất tỷ số kép của hàng điểm)
$=(PKVN)$ (xét phép chiếu xuyên tâm I)
$=C(AKID)$.

Từ đó, suy ra BL và AK cắt nhau tại một điểm T trên AID hay A,T,I thẳng hàng. $\square$



Thực hiện phép chiếu xuyên tâm từ điểm O' nằm ngoài mặt phẳng tờ giấy xuống mặt phẳng không song song với mặt phẳng tờ giấy thế thì đường tròn không còn là đường tròn nữa mà trở thành thiết diện cônic (elip, hypebol, parabol). Từ bài toán 4 ta thu được bài toán sau

Bài toán 5. *Cho 6 điểm M, B, Q, P, C, N nằm trên thiết diện cônic. Gọi I là giao điểm của MP và NQ. L, K lần lượt là giao điểm của CI với MQ và BI với NP. Gọi T là giao điểm của BL và CK. Chứng minh rằng A, T, I thẳng hàng.*

Bài toán tổng quát của bài toán 5 là bài toán sau

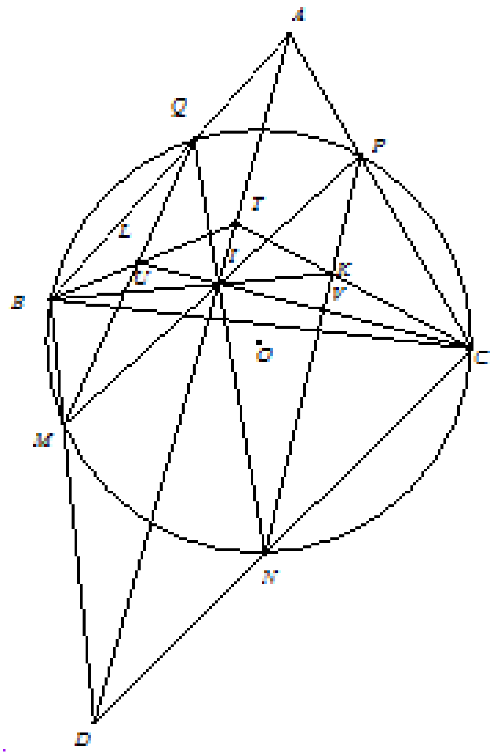
Bài toán 6. *Cho 6 điểm M, B, Q, P, C, N nằm trên cônic (S). Gọi I là giao điểm của MP và NQ. L, K lần lượt là giao điểm của CI với MQ và BI với NP. Gọi T là giao điểm của BL và CK. Chứng minh rằng A, T, I thẳng hàng.*

Để chứng minh bài toán 6, ta sử dụng cách chứng minh 2 của bài toán 4.

Chứng minh. Gọi $D = BM \cap CN, U = BI \cap MQ$ và $V = CI \cap NP$.
Áp dụng định lí Pascal cho bộ 6 điểm B, Q, N, C, P, M nằm trên cônic (S) ta có $A = BQ \cap CP, I = QN \cap PM$ và $D = NC \cap MB$ nên A, I và D thẳng hàng.
Tiếp theo ta chứng minh T nằm trên đường thẳng AID bằng phương pháp tỉ số kép. Ta có

$$\begin{aligned}
&B(ALID) = (QLUM) \\
&= (MULQ) \text{ (theo tính chất tỷ số kép của hàng điểm)} \\
&= (PKVN) \text{ (xét phép chiếu xuyên tâm } I\text{)} \\
&= C(AKID).
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra BL và AK cắt nhau tại một điểm T trên AID hay là A, T, I thẳng hàng. Vậy AI, BL, CK đồng quy. $\square$



5. Kết luận

Chúng ta vừa có một số khám phá thú vị từ một bài toán. Các cách giải khác nhau, các bài toán mở rộng đã mang đến cho chúng ta nhiều điều bổ ích. Bài viết này cần trao đổi gì thêm? Mong được sự chia sẻ của các bạn.

Tài liệu tham khảo

[1] Huỳnh Chí Hào (2015), "Hàng điểm điều hòa", Các phương pháp giải toán qua các kỳ thi Olympic (Trần Nam Dũng (chủ biên), Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quang Hùng, Lê Phúc Lữ, Nguyễn Tất Thu), Chương trình trọng điểm quốc gia phát triển toán học giai đoạn 2010-2020.

[2] Võ Duy Khánh, Diễn đàn T1K23-Huyền Thoại CHT.

[3] Nguyễn Chương Chí, Diễn đàn BÀI TOÁN HAY – LỜI GIẢI ĐẸP – ĐAM MÊ TOÁN HỌC

VỀ BÀI HÌNH HỌC THI IMO NĂM 2009 NGÀY THỨ HAI

Trần Quang Hùng – THPT chuyên KHTN, Hà Nội

Tóm tắt

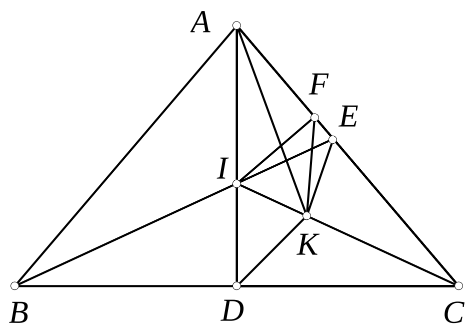
Bài viết xoay quanh bài toán hình học thi IMO năm 2009 ngày thứ hai với các mở rộng và khai thác đồng thời ứng dụng các mở rộng và khai thác đó với các công cụ hình học thuần túy.

1. Mở đầu

Trong kỳ thi IMO năm 2009 cả ngày thứ nhất và ngày thứ hai đều có các bài toán hình học. Trong khi bài toán hình học ngày thứ nhất là một bài toán lớn đã được khai thác rất nhiều với các mở rộng và ứng dụng thì bài hình học ở ngày thứ hai ít được chú ý hơn, nhưng thực ra đó cũng là một bài toán vô cùng thú vị và sâu sắc. Bài toán đó như sau

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC cân tại A. Phân giác các góc $\angle CAB$ và $\angle ABC$ cắt các cạnh BC và CA lần lượt tại D và E. Gọi K là tâm nội tiếp tam giác ADC. Giả sử rằng $\angle BEK = 45°$. Tìm tất cả giá trị có thể có của góc $\angle CAB$.*

Bài toán này được đề nghị bởi ba tác giả là **Jan Vonk**, **Peter Vandendriessche** từ nước Bỉ và **Hojoo Lee** từ nước Hàn Quốc. Bài toán được xếp vào vị trí thứ 4 được coi là bài toán dễ của ngày 2. Đây có thể coi là một bài toán tính góc rất đẹp mắt. Có rất nhiều lời giải được đề nghị trong [1]. Tôi xin giới thiệu lời giải tôi coi là đơn giản nhất lấy theo ý tưởng được đề nghị bởi nick name **BlackMax** trong [1]



Lời giải. Gọi I là giao của AD và BE cũng là tâm nội tiếp tam giác ABC. F là hình chiếu của I trên AC. Nếu F trùng E thì BE vừa là đường cao vừa là phân giác nên tam giác ABC đều. Trong trường hợp này dễ thấy $\angle BEK = 45°$ thỏa mãn đề bài.
Nếu F không trùng E. Dễ thấy F và D đối xứng nhau qua IC nên $\angle IFK = \angle IDK = 45° = \angle IEK$. Từ đó tứ giác $IFEK$ nội tiếp, ta suy ra $\angle IKE = 90°$ vậy tam giác IEK vuông cân hay

$KI = KE$. Vẫn từ tứ giác $IFEK$ nội tiếp nên FK là phân giác $\angle IFE$. Từ đó K là tâm bàng tiếp tam giác IAF mà $\angle IKE = 90^\circ$, ta suy ra $\angle IAE = 45^\circ$ hay tam giác ABC vuông cân. Trong trường hợp này cũng dễ thấy $\angle BEK = 45^\circ$ thỏa mãn đề bài. □

Nhận xét. Theo chúng tôi ý tưởng của lời giải trên là ngắn gọn và thuần túy hình học rất đẹp. Trong [1] còn rất nhiều lời giải tính toán khác. Điểm thú vị của bài toán này là góc $\angle BAC$ có thể nhận hai giá trị ứng với trường hợp tam giác đều và tam giác vuông cân cũng là hai tam giác đặc biệt nhất. Chúng ta thấy rằng trường hợp tam giác đều "tầm thường" hơn trường hợp tam giác vuông cân. Vì vậy ta có thể phát biểu thành một bài toán thuận như sau

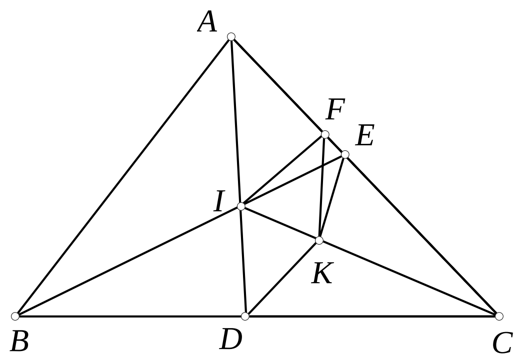
Bài toán 2. *Cho tam giác ABC vuông cân tại A với các phân giác AD, BE. K là tâm nội tiếp tam giác ADC. Chứng minh rằng $\angle BEK = 45^\circ$.*

Mặc dù trong trường hợp trên bài toán hoàn toàn không khó nhưng trên mô hình bài toán này lại có rất nhiều đặc điểm thú vị để khai thác.

2. Mở rộng và ứng dụng

Trong cách giải bài toán 1 ở trường hợp khi F không trùng E ta chú ý đến chi tiết thú vị là D và F đối xứng nhau qua IC. Nhờ đó ta có ngay một mở rộng thú vị sau

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC có phân giác AD, BE. K là tâm nội tiếp tam giác ADC. Giả sử $\angle BEK = \angle ADK$. Chứng minh rằng $CB = CA$ hoặc $DA = DC$.*



Lời giải. Gọi F là đối xứng của D qua IC. Nếu F trùng E dễ thấy IE, ID đối xứng nhau qua IC nên $CB = CA$.

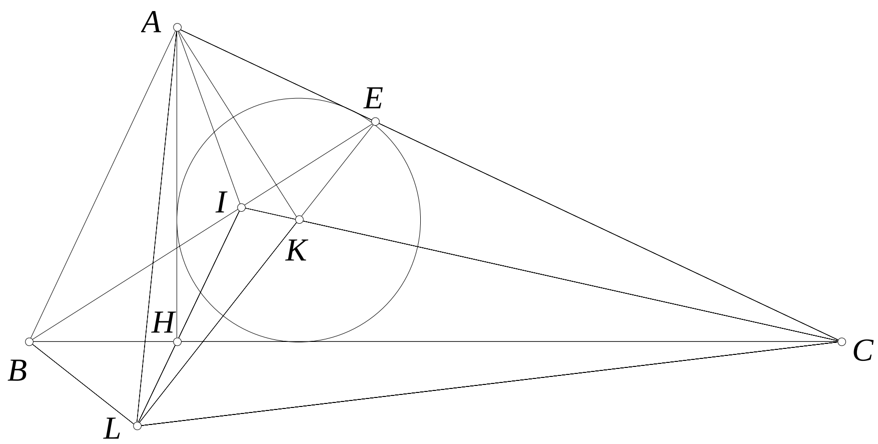
Nếu F không trùng E thì bốn điểm I, E, F, K thuộc một đường tròn. Nếu F nằm ngoài đoạn EC thì ta có $180^\circ = \angle IEK + \angle EKI + \angle KIE = \frac{1}{2}\angle ADC + \angle IFA + \angle CIE = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle A}{4} + \frac{\angle A}{2} + \angle C + \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = \frac{3\angle A}{4} + \angle B + \frac{3\angle C}{2}$. Ta suy ra $\angle A = 2\angle C$ hay $DA = DC$. Nếu F nằm trong đoạn EC ta cũng có biểu thức góc tương tự. Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Tác giả sử dụng ý tưởng lời giải của bài toán 1 để tìm ra mở rộng này tuy nhiên khi xem kỹ lại [1] thì mở rộng đó cũng đã xuất hiện trong [1]. Tuy nhiên lời giải trên khác hoàn toàn các lời giải trong [1]. Chúng ta cũng hoàn toàn có thể phát biểu thành một bài toán thuận như sau

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có phân giác AD, BE. K là tâm nội tiếp tam giác ADC. Giả sử tam giác DAC cân tại D. Chứng minh rằng tứ giác $BDKE$ nội tiếp.*

Khi phát biểu bài toán thuận như bài toán 2, ta có để ý rằng EK khi đó cũng đi qua điểm L đối xứng của I qua BC mặt khác khi đó dễ thấy $\angle BAL = 45° = \angle BEL$ nên tứ giác $BAEL$ nội tiếp. Ngay lập tức cho ta một câu hỏi là liệu ta có thể thay thế được tam giác vuông cân để dẫn tới một bài toán tổng quát trên tam giác vuông bất kỳ. Câu hỏi đó được giải quyết trọn vẹn trong bài toán sau

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường cao AH với H thuộc BC. I là tâm nội tiếp tam giác ABC. BI cắt CA tại E. K là tâm nội tiếp tam giác AHC. KE cắt IH tại L. Chứng minh rằng tứ giác $BAEL$ nội tiếp.*



Lời giải. Từ các hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta dễ chứng minh $CI.CK = CE.CH$ từ đó $\triangle CEK \sim \triangle CIH$ suy ra $\angle CEK = \angle CIH$ vậy tứ giác $CEIL$ nội tiếp. Từ đó ta có $\dfrac{IL.IE}{CL.CE} = \dfrac{IK}{KC}$ suy ra $\dfrac{IL}{CL} = \dfrac{IK}{KC}.\dfrac{CE}{IE}$. Ta sẽ chứng minh $\dfrac{IL}{CL} = \dfrac{IB}{AC}$ đẳng thức tương đương

$$\frac{IK}{KC}.\frac{CE}{IE} = \frac{IB}{AC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{CE}{CK} = \frac{IB}{AC}.\frac{IE}{IK} \text{ (Do } \triangle CEK \sim \triangle CIH)$$

$$\Leftrightarrow \frac{CI}{CH} = \frac{IB}{AC}.\frac{IE}{AI^2/CI} \text{ (Do } \triangle AIK \sim \triangle CIA)$$

$$\Leftrightarrow \frac{BC}{AC^2} = \frac{IB.IE}{AI^2.AC}$$

$$\Leftrightarrow BC.AI^2 = IB.IE.AC.$$

Đẳng thức cuối ta dễ kiểm tra nhờ các hệ thức lượng trong tam giác vuông. Vậy kết hợp $\angle BIL = \angle ACL$ suy ra $\triangle BIL \sim \triangle ACL$ suy ra $\angle LBI = \angle LAC$ nên tứ giác $BAEL$ nội tiếp. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Ta nhận thấy ngay một hệ qua đơn giản là từ $BAEL$ nội tiếp thì $\angle BLE = 90°$. Ta lại có $\angle ELC = \angle EIC = 45°$. Suy ra $\angle BLC = 90° + 45° = 135°$. Lại từ $\angle BLC = 135°$ ta dễ chứng minh tâm ngoại tiếp tam giác BLC là trung điểm cung $\widehat{BC}$ chứa A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

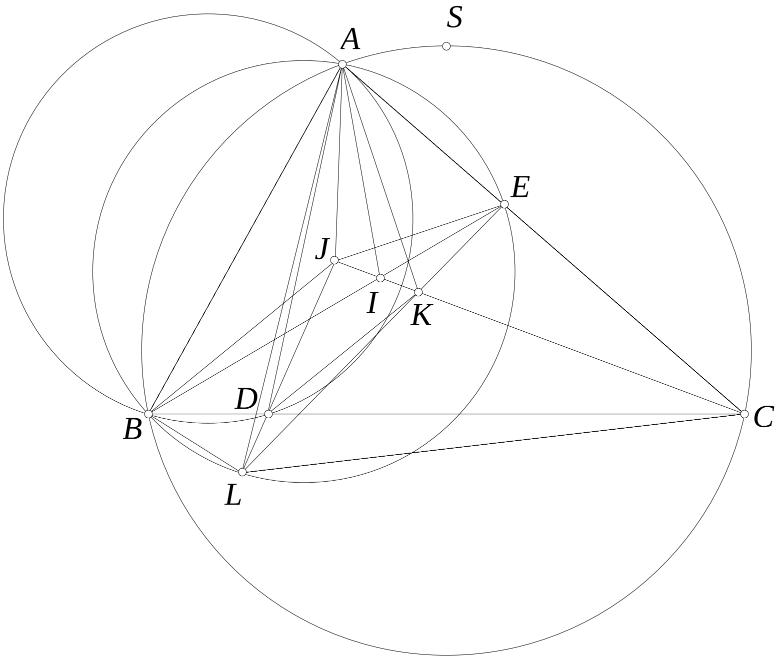
Ta có ngay một hệ quả rất đơn giản của bài toán này là bài toán sau

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC vuông tại A với đường cao AH và phân giác BE. K là tâm nội tiếp tam giác AHB. Giả sử $\angle BEK = 45^\circ$, chứng minh rằng tam giác ABC vuông cân.*

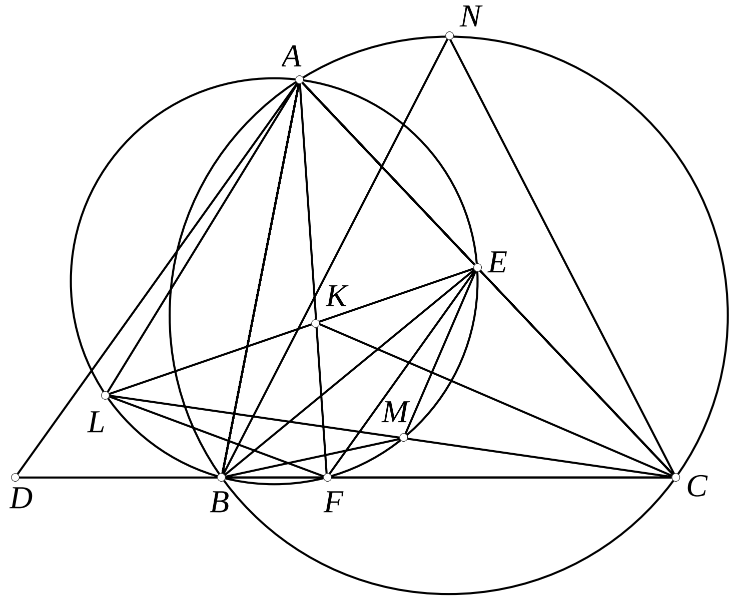
Lời giải. Gọi I là tâm nội tiếp tam giác ABC và EK cắt IH tại L. Theo bài trước thì tứ giác $BAEL$ nội tiếp nên $\angle BAL = \angle BEL = 45^\circ = \angle BAI$. Từ đó AL đi qua I hay A, H, L, I thẳng hàng, vậy tam giác ABC vuông cân. □

Ngay lập tức một câu hỏi lại được đặt ra là bài toán trên phát biểu cho tam giác vuông, vậy thì với một tam giác bất kỳ thì sao ? Ta có một mở rộng thú vị bài toán trong phần nhận xét cho tam giác bất kỳ như sau, bài toán tham khảo [2]

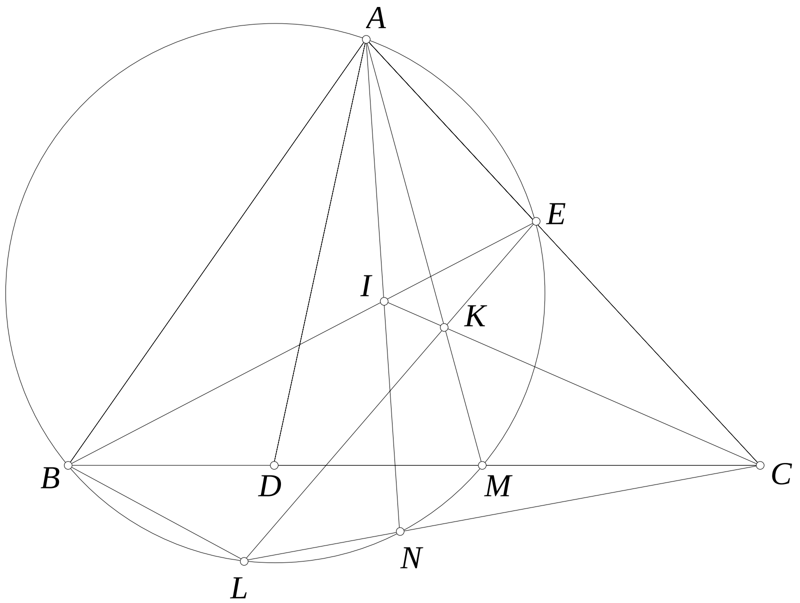
Bài toán 7. *Cho tam giác ABC có phân giác BE. Đường tròn qua A, B tiếp xúc AC cắt BC tại D khác B. K là tâm nội tiếp tam giác ADC. EK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại L. Chứng minh rằng tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác LBC nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*



Lời giải thứ nhất. Gọi I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AIE cắt CI tại J khác I. Ta thấy $CI.CJ = CE.CA$. Lại có $\triangle CKA \sim \triangle CIB$ nên $\dfrac{CK}{CI} = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{CD}{AC}$. Từ đó $CK.CJ = \dfrac{CK}{CI}.(CI.CJ) = CE.CD$ nên $\triangle CEK \sim \triangle CJD$ suy ra $\angle CEK = \angle CJD$. Ta định nghĩa lại điểm L là giao của DJ và KE vậy tứ giác $CEJL$ nội tiếp. Suy ra $\angle DLK = \angle KCE = \angle KCD$ suy ra tứ giác $DKCL$ nội tiếp. Cũng từ $\triangle CKA \sim \triangle CIB$ nên $\angle AKJ = \angle CIE = \angle CAJ$. Từ đó $JA^2 = JK.JC = JD.JL$ suy ra $\triangle JAD \sim \triangle JLA$ suy ra $\angle ALD = \angle JAD = \angle DAC - \angle JAC = \angle ABC - \angle AKJ = \angle ABC - \dfrac{1}{2}(\angle DAB + \angle ACB) = \dfrac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB)$. Suy ra $\angle ALE = \angle ALD + \angle DLE = \dfrac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB) + \dfrac{1}{2}\angle ACB = \dfrac{1}{2}\angle ABC = \angle ABE$. Từ đó tứ giác $ABLE$ nội tiếp. Từ đó dễ chứng minh $\angle BLC = 180^\circ - \dfrac{1}{2}\angle BAC$ nên tâm ngoại tiếp S của tam giác BLC là trung điểm $\widehat{BC}$ chứa A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh. □



Lời giải thứ hai. Gọi AK cắt BC tại F. Ta có $\angle FAC = \frac{1}{2}\angle DAC = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle CBE$ vậy suy ra tứ giác $AEFB$ nội tiếp. Do BE là phân giác $\angle ABC$ nên E là điểm chính giữa cung AF nên LE là phân giác $\angle ALB$ suy ra $\frac{LA}{LF} = \frac{KA}{KF} = \frac{CA}{CF}$. Gọi CL cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại L khác M. Dễ thấy các tam giác đồng dạng góc góc $\triangle CEM \sim \triangle CLA$ và $\triangle CBM \sim \triangle CLF$. Từ đó $\frac{ME}{MC} = \frac{LA}{CA} = \frac{LF}{CF} = \frac{MB}{MC}$ suy ra LC là phân giác $\angle BLE$ hay $\angle BLC = \angle CLE = \frac{1}{2}\angle BAE$. Gọi N là điểm chính giữa cung BC chứa A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $NB = NC$ và $\angle BNC = \angle BAC = 2\angle BLC$. Từ đó N là tâm ngoại tiếp tam giác BLC. $\square$



Lời giải thứ ba. Gọi I là tâm nội tiếp tam giác ABC. LC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại N khác L. AK cắt BC tại M. Dễ có $\angle AMB = \angle MAC + \angle ACB = \angle EBC +$

$\angle ACB = \angle AEB$ nên M cũng nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE. Ta chú ý C, K, I thẳng hàng, áp dụng định lý Pascal đảo cho bộ $\begin{pmatrix} E & N & M \\ A & B & L \end{pmatrix}$ suy ra A, I, N thẳng hàng. Từ đó $\angle ELC = \angle CAN = \frac{1}{2}\angle BAC$ vậy $\angle BLC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ nên tâm ngoại tiếp S của tam giác BLC là trung điểm $\widehat{BC}$ chứa A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. □

Nhận xét. Lời giải thứ nhất do tác giả đề nghị. Ý tưởng lời giải này dựa vào ý tưởng trong lời giải bài toán 5 cũng của tác giả. Lời giải thứ hai do bạn **Nguyễn Lê Phước** đề nghị. Lời giải thứ ba do bạn **Lê Thị Hải Linh** đề nghị. Các lời giải này phụ thuộc nhiều vào vị trí các điểm trên hình vẽ gốc, tuy vậy nó có nét đẹp đặc trưng của hình học thuần túy. Để tránh việc phụ thuộc hình vẽ các bạn có thể đưa vào các biến đổi góc định hướng tuy nhiên điều này cũng không thực sự cần thiết. Bài toán 5 và bài toán 7 là các bài toán tổng quát có nhiều giá trị ứng dụng, các bạn có thể làm các bài toán sau để ứng dụng các bài toán đó

Bài toán 8. *Cho tam giác ABC vuông tại A với đường cao AH. Phân giác BE, CF cắt nhau tại I. Gọi K, L là tâm nội tiếp các tam giác AHC, AHB. J đối xứng với I qua BC. Chứng minh rằng EK và FL cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC.*

Bài toán 9. *Cho tam giác ABC vuông tại A với đường cao AH. Phân giác BE, CF cắt nhau tại I. Gọi K, L là tâm nội tiếp các tam giác AHC, AHB. Chứng minh rằng EK, FL và IH đồng quy.*

Bài toán 10. *Cho tam giác ABC với đường cao AH. M, N thuộc BC sao cho $AM \perp AB, AN \perp AC$. I là tâm nội tiếp tam giác AMN. NI, MI cắt CA, AB lần lượt tại E, F. Gọi K, L là tâm nội tiếp tam giác AHM, AHN. Chứng minh rằng EK, FL và IH đồng quy.*

Bài toán 11. *Cho tam giác ABC với phân giác BE, CF. Đường tròn qua A, B tiếp xúc AC cắt BC tại M khác B. Đường tròn qua A, C tiếp xúc AB cắt BC tại N khác C. Gọi K, L là tâm nội tiếp các tam giác ACM, ABN. EK, FL lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE, ACF tại P, Q khác E, F. Chứng minh rằng P, Q, B, C cùng thuộc một đường tròn.*

Bài toán 12. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có phân giác AD, BE. K là tâm nội tiếp tam giác ADC. Gọi EK cắt AD tại L. LB cắt đường tròn nội tiếp tam giác ABE tại N khác B. Giả sử tam giác DAC cân tại D, chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác NBC nằm trên (O).*

Cuối cùng, tác giả xin gửi lời cảm ơn tới bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 đại học ngoại thương người đã đọc toàn bộ bài viết và đưa ra những góp ý giúp tác giả hoàn thiện bài viết này.

Tài liệu tham khảo

[1] IMO 2009, problem 4
http://artofproblemsolving.com/community/c6h289054p1562847

[2] Mỗi tuần một bài toán: Tuần 4 tháng 9 năm 2015
http://analgeomatica.blogspot.com/2015/09/moi-tuan-mot-bai-toan-tuan-4-thang-9.html

THUẬT TOÁN THAM LAM TRONG XÂY DỰNG CẤU HÌNH TỔ HỢP

Trần Minh Hiền
(THPT Chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Thuật toán tham lam là **tìm tối ưu địa phương ở mỗi bước đi** với hy vọng *tìm được tối ưu toàn cục*. Dĩ nhiên thuật toán tham lam không đảm bảo được tối ưu địa phương sẽ cho ta lời giải tối ưu toàn cục. Nhưng trong nhiều bài toán, việc này sẽ xảy ra. Ví dụ:"Cho trước một tập hợp S các đồng xu. Khi đó cần lấy ít nhất bao nhiêu đồng xu trong S để được tổng số tiền M cho trước. Khi $S = \{1, 5, 10, 25\}$, chúng ta có thể áp dụng thuật toán tham lam để xây dựng phương án tối ưu như sau:

- Thêm đồng xu x lớn nhất trong S sao cho $x \leq M$;
- Áp dụng lại thuật toán cho $M - x$.

Ví dụ, với $M = 91$, đầu tiên ta chọn 25 trong S, sau đó lại tiếp tục áp dụng thuật toán cho $91 - 25 = 66$. Khi đó ta lại tiếp tục chọn số 25.Tiếp tục áp dụng thuật toán cho $66 - 25 = 41$, ta chọn số 25. Lại áp dụng thuật toán cho $41 - 25 = 16$, ta sẽ chọn số 10. Lại tiếp tục áp dụng thuật toán cho $16 - 10 = 6$, thì ta chọn số 5. Và cuối cùng áp dụng thuật toán cho $6 - 5 = 1$, ta chọn số 1. Từ đó tập hợp tối ưu là $\{25, 25, 25, 10, 5, 1\}$. ***Tức là với tập $S = \{1, 5, 10, 25\}$ thuật toán tham lam cho ta phương án tối ưu. Tuy nhiên thuật toán tối ưu không phải lúc nào cũng cho ta phương án tối ưu. Ví dụ với $S = \{1, 3, 4\}$ và $M = 6$, thuật toán tham lam cho ta tập $\{1, 1, 4\}$, tuy nhiên phương án tối ưu là $\{3, 3\}$.***"

Dưới đây là một số bài toán minh họa.

Câu 1 (BMO 1998). Một đại lý vé tàu hỏa phân phối vé tàu hỏa cho 200 đại lý. Trong một ngày đặc biệt, có tất cả 3800 người ở 200 đại lý đến mua vé, mỗi người được mua một vé.

1. Chứng minh rằng có ít nhất 6 đại lý có cùng số người đến mua vé trong ngày hôm đó.
2. Ý trên không còn đúng nếu thay 6 bởi số 7.

Lời giải. 1. Gọi $s_1, s_2, \ldots, s_{200}$ là số người đến đại lý thứ nhất, đại lý thứ hai,. . ., đại lý thứ 200 mua vé tàu hỏa trong ngày đó. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_{200}$.

Đặt $S = s_1 + s_2 + \cdots + s_{200}$ thì $S = 3800$. Bây giờ ta sẽ tìm hiểu S **nhỏ nhất bao nhiêu khi điều kiện bài toán không thỏa,** tức không tồn tại dãy $s_i, s_{i+1}, s_{i+2}, \ldots, s_{i+5}$ nào mã $s_i = s_{i+1} = \ldots = s_{i+5}$. Rõ ràng S nhỏ nhất khi **ta lấy được càng nhiều số nhỏ, mỗi số nhỏ không lấy quá 5**. Do đó S nhỏ nhất khi

$$\begin{aligned}
&s_1 = s_2 = \ldots = s_5 = 1,\\
&s_6 = s_7 = \ldots = s_{10} = 2,\\
&\ldots\\
&s_{196} = s_{197} = \ldots = s_{200} = 40.
\end{aligned}$$

Nhưng khi đó thì tổng S sẽ đạt được

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{5\text{ số}}+\underbrace{2+2+\cdots+2}_{5\text{ số}}+\cdots+\underbrace{40+40+\cdots+40}_{5\text{ số}}=4100.$$

Do đó $S > 3800$, điều này mâu thuẫn. Điều đó chứng tỏ phải tồn tại 6 số hạng liên tiếp trong dãy đó bằng nhau. Hay có 6 đại lý có cùng số người đến mua vé trong ngày hôm đó.

2. Chúng ta xây dựng một ví dụ thỏa mãn cũng bằng thuật toán trên. Với mỗi $1 \leq i \leq 198$ thì

$$s_i = \left[\frac{i-1}{6}\right] + 1.$$

Khi đó $s_1 + s_2 + \cdots + s_{198} = 3366$. Khi đó chọn $s_{119} = s_{200} = 220$. Khi đó $S = 3800$ và rõ ràng không có 7 phần tử liên tiếp nào bằng nhau, tức không có 7 cửa hàng nào có cùng số người đến mua vé. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

□

Câu 2 (Iran 1997). Cho hai số nguyên dương m, k. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất các số nguyên dương $a_k > a_{k-1} > \ldots > a_1 \geq 0$ sao cho

$$m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{a_1}{1}$$

Tổng $\binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{a_1}{1}$ được gọi là khai triển Macaulay của m ứng với d.

Ví dụ khai triển Macaulay của 17 ứng với 3 là

$$\binom{5}{3} + \binom{4}{2} + \binom{1}{1} = 10 + 6 + 1 = 17,$$

trong khi đó khai triển Macaulay của 16 ứng với 3 là

$$\binom{5}{3} + \binom{4}{2} + \binom{0}{1} = 10 + 6 + 0 = 16.$$

Lời giải. 1. Đầu tiên ta chứng minh sự duy nhất. Giả sử m được biểu diễn bởi hai dãy $a_k, \ldots, a_1$ và $b_k, \ldots, b_1$. Khi đó trong hai dãy $a_1, \ldots, a_k$ và $\{b_1, \ldots, b_k\}$ (theo thứ tự) phải có ít nhất hai phần tử khác nhau. Ta gọi ví trí đầu tiên mà chúng khác nhau, không mất tính tổng quát là k, tức $a_k \neq b_k$. Giả sử $a_k > b_k$ mà không làm mất tính tổng quát của đề bài. Vì $b_1 < b_2 < \ldots < b_{k-1} < b_k$ là dãy số nguyên nên

$$b_{k-1} \leq b_k - 1,\ b_{k-2} \leq b_{k-1} - 1 \leq b_k - 2, \ldots, b_1 < b_k - k + 1.$$

Vì

$$m = \binom{b_k}{k} + \binom{b_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{b_1}{1}$$

nên

$$m \leq \binom{b_k}{k} + \binom{b_{k-1}-1}{k-1} + \cdots + \binom{b_k - k + 1}{1}.$$

Theo tính chất nhị thức

$$\binom{b_k}{k} + \binom{b_{k-1}-1}{k-1} + \cdots + \binom{b_k - k + 1}{1} < \binom{b_k + 1}{k+1}$$
$$\Rightarrow m < \binom{b_k + 1}{k}.$$

Vì $b_k < a_k$ nên $b_k + 1 \leq a_k$. Do đó

$$\binom{b_k + 1}{k} \leq \binom{a_k}{k}.$$

Dẫn đến

$$m < \binom{b_k + 1}{k} \leq \binom{a_k}{k} < \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{a_1}{1} \leq m$$

vô lý. Vậy điều phản chứng là sai.

2. Để chứng minh sự tồn tại, ta sử dụng thuật toán tham lam như sau: đầu tiên ta tìm số a_k **lớn nhất** sao cho
$$\binom{a_k}{k} \leq m.$$

Sau đó lại áp dụng thuật toán trên, thay vì cho m và k, thì bây giờ cho $m - \binom{a_k}{k}$ và $k - 1$.

Cứ tiếp tục quy trình này ta dựng được dãy thỏa mãn. Dãy $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ là dãy tăng dần vì, theo cách xây dựng nên

$$m < \binom{a_k + 1}{k} \Rightarrow m - \binom{a_k}{k} < \binom{a_k}{k-1}$$

do tính chất nhị thức $\binom{a_k + 1}{k} = \binom{a_k}{k} + \binom{a_k}{k-1}$. Nhưng lại theo cách dựng thì

$$\binom{a_{k-1}}{k-1} < m - \binom{a_k}{k} \Rightarrow \binom{a_{k-1}}{k-1} < \binom{a_k}{k-1} \Rightarrow a_{k-1} < a_k.$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

$\square$

Câu 3 (Russian 2005). Trong một bảng ô vuông kích thước $2 \times n$ (n là số nguyên dương không nhỏ hơn 2) người ta điền vào mỗi ô vuông một số thực dương sao cho tổng của hai số trên mỗi cột luôn bằng 1. Chứng minh rằng ta có thể chọn ra trên mỗi cột một số để tổng của các số được chọn trên mỗi dòng không vượt quá $\dfrac{n+1}{4}$.

Lời giải. • Do đề bài yêu cầu *tổng các số trên mỗi dòng không vượt quá* $\dfrac{n+1}{4}$, tức là yêu cầu tổng các số trên mỗi dòng càng nhỏ càng tốt. Từ đó ta nghĩ đến việc **chọn trên mỗi cột một số nhỏ nhất** thì khả năng thành công sẽ cao. Tuy nhiên nếu tất cả các số nhỏ hơn (trên mỗi cột) lại nằm trên cùng một dòng thì sao? Khi đó thuật toán tham lam này sẽ thất bại, thật vậy với minh họa

0.4	0.4	0.4	...	0.4
0.6	0.6	0.6	...	0.6

thì nếu ta chọn trên mỗi cột một số nhỏ nhất, khi đó ta chỉ chọn toàn số 0.4 ở dòng đầu tiên. Nhưng khi đó thì tổng các số ở dòng đầu tiên là $0.4n$, vượt khỏi $\dfrac{n+1}{4}$.

- Ta cần cải tiến thuật toán này một chút. Tức là chúng ta sẽ đảm bảo **cho cả hai dòng cùng thỏa điều kiện một lúc**. Tức là chúng ta mong muốn bằng cách nào đó phải chọn được ***đồng thời****các số nhỏ nhất có thể có ở dòng đầu tiên và các số nhỏ nhất có thể có ở dòng thứ hai*. Bằng cách thay đổi thứ tự các cột, ta có thể sắp xếp các số ở dòng thứ nhất theo thứ tự không giảm, thì vì tổng của hai số trên mỗi cột bằng 1, nên dẫn đến các số ở dòng thứ hai sẽ theo thứ tự không tăng. Gọi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số ở dòng thứ nhất mà $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$.

a_1	a_2	a_3	...	a_n
$1-a_1$	$1-a_2$	$1-a_3$	...	$1-a_n$

- Với sắp thứ tự này, *thì dòng thứ nhất ta sẽ chọn các số từ trái qua phải, còn dòng thứ hai ta sẽ chọn các số từ phải qua trái*. Bây giờ ta chọn i là **chỉ số lớn nhất** sao cho

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_i \leq \frac{n+1}{4}$$

(*tức là các số được chọn trên dòng đầu tiên thỏa mãn*). Bây giờ ta chỉ còn kiểm tra

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{4} &\geq (1-a_{i+1}) + (1-a_{i+2}) + \cdots + (1-a_n) \\ &= (n-i) - (a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_n)\end{aligned}$$

hay

$$a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_n \geq \frac{3n-1}{4} - i.$$

Vì $a_1 \leq a_2 \leq \ldots a_{i+1}$ nên

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{i+1}}{i+1} \leq a_{i+1}$$

và do $a_{i+1} \le a_{i+2} \le \ldots \le a_n$ nên

$$\frac{a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_n}{n-i} \ge a_{i+1}.$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_n}{n-i} \ge \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{i+1}}{i+1}$$

hay

$$a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_n \ge (n-i)\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{i+1}}{i+1} > (n-i)\frac{\frac{n+1}{4}}{i+1}$$

(bất đẳng thức cuối có được do i là chỉ số lớn nhất thỏa $a_1 + a_2 + \cdots + a_i \le \dfrac{n+1}{4}$). Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{n-i}{i+1} \cdot \frac{n+1}{4} \ge \frac{3n-1}{4} - i \Rightarrow (n-1)^2 \ge 4i(n-i-1).$$

Điều này có được do bất đẳng thức Cauchy

$$4i(n-i-1) \le 4 \cdot \frac{(i+n-i-1)^2}{4} = (n-1)^2.$$

Đến đây bài toán được chứng minh hoàn toàn. □

Câu 4 (IMO 2003). Cho A là một tập con chứa 101 phần tử của tập $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$. Chứng minh rằng tồn tại các phần tử $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ trong S sao cho các tập

$$A_j = \{x + t_j | x \in A\}, \quad j = 1, 2, \ldots, 100$$

rời nhau đôi một.

Lời giải.

- Ta mong muốn tìm một thuật toán xây dựng $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$. Giả sử trong tay ta đã có t_1, vậy thì t_2 phải được chọn sao cho (theo giả thiết)

$$x + t_1 \ne y + t_2, \forall x, y \in A \Rightarrow t_2 \ne t_1 + x - y, \forall x, y \in A.$$

Để đảm bảo dãy $\{t_i\}$ phân biệt thì ta sẽ xây dựng dãy $\{t_i\}$ tăng dần. Từ đó ta cần $t_2 \ne t_1 + |x-y|, \forall x, y \in A$ thì sẽ đảm bảo được tính tăng dần. Nhưng khi chọn được t_2 thì cũng phải chọn $t_3, \ldots, t_{100}$. Do đó chọn t_2 phải vừa đảm bảo "đủ xa", *tức khác tất cả các giá trị trước đó, như đã phân tích ở trên*, vừa đảm bảo "đủ gần", *để có thể xây dựng tiếp cho $t_3, \ldots, t_{100}$*. Từ đây ý tưởng xây dựng t_2 được hình thành:

  – Trên trục số ta biểu diễn các phần tử của S theo thứ tự tăng dần.

  – Chọn ngay $t_1 = 1 \in S$, và ta tô màu số t_1 và tất cả các số dạng: $\{t_1 + |x-y| = 1 + |x-y| | \forall x, y \in A\}$ trên trục số (các giá trị hiệu $|x-y|$ có thể trùng nhau với các cặp số (x, y) khác nhau trong A, nên ở bước này ta đánh dấu không quá $1 + \dbinom{101}{2} = 5051$ số, kể cả số $t_1 = 1$).

- Sau bước này, ta chọn t_2 là **số nhỏ nhất trên trục số mà chưa bị tô màu**. Tiếp tục ta lại tô màu số t_2 và các số trên trục số dạng: $\{t_2 + |x-y||x,y \in A\}$. Ở bước này có thể một vài số đã được tô màu ở bước trên. Khi đó trên trục số, sau bước này, có tối đa 2×5051 số trong S được tô màu. Với cách xây dựng này thì $t_2 > t_1$.
- Cứ tiếp tục thuật toán trên, sau khi xây dựng được các số $t_1, \ldots, t_{99}$ thì chúng ta đã tô màu tối đa 500049 phần tử trong S trên trục số. Vì $500049 < 1000000$ nên ta tiếp tục xây dựng được số t_{100} theo thuật toán trên. Vậy các số $t_1 < t_2 < \ldots < t_{100}$ được xây dựng.

- Bây giờ ta kiểm tra lại, với cách xây dựng $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ như thuật toán trên, các tập A_j, A_k sẽ rời nhau đôi một với mọi $1 \le j < k \le 100$. Thật vậy, giả sử ngược lại, tức tồn tại $x + t_j = y + t_k$ với $x, y \in A$ nào đó. Do cách xây dựng trên đảm bảo $t_k > t_j$. Do đó $x > y$. Điều này dẫn đến

$$t_k = t_j + x - y = t_j + |x-y|,$$

vô lý vì t_k được chọn ở bước thứ k thì phải khác tất cả các số đã được tô màu trên trục số: $\{t_i + |x-y| : \forall i = 1,2,\ldots,k-1\}$. Vậy $A_i \cap A_j = \emptyset$. Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

□

Câu 5. Cho A là tập hợp các số nguyên dương thỏa mãn: với mọi phần tử x, y thuộc A thì

$$|x-y| \ge \frac{xy}{30}.$$

Hỏi A chứa nhiều nhất bao nhiêu phần tử?

Lời giải. 1. Ta nhận thấy x, y không thể là số quá lớn. Bắt đầu với tập $A = \{1\}$, áp dụng *thuật toán tham lam*, mỗi lần chúng ta sẽ thử tìm phần tử nhỏ nhất tiếp theo có thể nằm trong A. Quá trình này ta thu được $A = \{1,2,3,4,5,6,8,11,18,45\}$ và sau quá trình này thì không thể thêm được phần tử nào vào A. Từ đó **dự đoán** A có nhiều nhất 10 phần tử.

2. Đặt $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Ta chứng minh $n \le 10$. Không mất tính tổng quát, giả sử $1 \le a_1 < a_2 \le \cdots < a_n$. Khi đó

$$a_{i+1} - a_i \ge \frac{a_{i+1}a_i}{30} \Rightarrow \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}} \ge \frac{1}{30}, \forall 1 \le i \le n-1.$$

Tổng tất cả các đánh giá trên với $i = 5, 6, \ldots, n-1$ ta được

$$\frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_n} \ge \frac{n-5}{30} \Rightarrow \frac{1}{a_5} \ge \frac{n-5}{30}.$$

Vì $a_i \ge i, \forall i = 5, \ldots, n$ nên từ đánh giá trên ta có

$$5 \le a_5 < \frac{30}{n-5} \Rightarrow n \le 10.$$

Từ đó bài toán được chứng minh hoàn toàn.

□

Câu 6 (IMO 2014). Một tập hợp các đường thẳng trong mặt phẳng gọi là "tốt" nếu không có hai đường thẳng nào trong chúng song song và không có ba đường thẳng nào trong chúng đồng quy. Tập hợp các đường thẳng "tốt" chia mặt phẳng thành các miền, với một số miền có diện tích hữu hạn gọi là miền hữu hạn. Chứng minh rằng với n đủ lớn, thì với bất kỳ tập hợp n đường thẳng "tốt" ta luôn có thể tô màu $\sqrt{n}$ đường thẳng màu xanh để không có miền hữu hạn nào có toàn bộ biên là màu xanh.

Lời giải. (Dựa theo lời giải của GS Nguyễn Tiến Dũng) Ta cũng thử làm theo kiểu thuật toán, tức là tìm thuật toán tô màu xanh các đường. Tại sao lại ra con số căn bậc hai, thì chút xíu nữa sẽ rõ. Thuật toán đơn giản như sau:

- Đầu tiên tô 2 đường tùy ý màu xanh (hiển nhiên là chỉ có 2 thôi thì chưa thể vây toàn bộ miền nào).

- Tiếp theo là chọn đường để tô: nếu chọn được thêm 1 đường để tô xanh (mà không phạm luật của bài) thì tô, còn đến khi không còn đường nào nữa thì dừng.

Giả là thuật toán dừng lại sau khi tô được k đường. Bây giờ phải chứng minh là $n \leq k^2$. Hay là ta chứng minh ngược lại: nếu $n > k^2$ thì tô tiếp được.

Nếu $n > k^2$ thì số đường còn lại chưa tô lớn hơn $k^2 - k = k(k-1)$, tức là lớn hơn 2 lần số điểm nút xanh (điểm nút xanh = điểm giao nhau của 2 đường xanh). Gọi 1 đường (trong số các đường còn lại đó) là **đường cấm** nếu như mà tô thêm đường đó màu xanh thì tạo miền bị chặn với biên toàn màu xanh. Bây giờ chỉ cần chứng minh là số đường bị cấm không vượt quá $k(k-1)$, khi đó sẽ dẫn đến có ít nhất 1 đường không bị cấm, có thể tô xanh. Để chứng minh điều đó, ta sẽ tìm cách lập một mối quan hệ giữa các đường bị cấm với các nút xanh, sao cho tất cả các đường cấm đều ứng với ít nhất 1 nút, và ngược lại thì mỗi nút ứng với không quá 2 đường cấm. Nếu có quan hệ như vậy thì số đường cấm không vượt quá 2 lần số nút). Quan hệ đó như thế nào?

Một quan hệ hiển nhiên là: một đường cấm thì tức là tạo ra ít nhất 1 **miền cấm** (miền có 1 cạnh biên trên đường đó, các cạnh còn lại đều xanh). Lấy miền cấm đó, và lấy 2 cái nút xanh là 2 đỉnh miền cấm đó mà kề sát đường cấm. 2 nút đó có thể trùng nhau nếu miền cấm là tam giác. Để phân biệt, thì thay vị đặt quan hệ với nút , ta sẽ đặt quan hệ với **đoạn cấm: gồm nút và cạnh xanh của miền cấm đi từ nút đó chạm vào đường cấm.** Như vậy, mỗi đường cấm ứng với ít nhất 2 đoạn cấm.

Ngược lại, mỗi nút cho nhiều nhất 4 đoạn cấm, vì từ mỗi nút chỉ có 4 nửa đường thẳng xanh, và trên mỗi nửa đường thẳng đó có nhiều nhất 1 đoạn cấm xuất phát từ nút (không thể có 2 đoạn cấm đè lên nhau cùng từ 1 nút xanh). Như vậy, đây là quan hệ mà theo 1 chiều thì ≥ 2, theo chiều ngược lại thì ≤ 4, và do đó số đường cấm ≤ 2 lần số nút xanh. □

Câu 7 (IMO 1983). Chứng minh rằng có thể chọn 2048 số nguyên dương phân biệt, tất cả các số đều nhỏ hơn hoặc bằng 100000, sao cho không có ba số hạng bất kỳ nào của tập đó tạo thành ba phần tử liên tiếp một cấp số cộng.

Lời giải.
- Ở đây có một trực giác là: số 100.000 dường như *không thích hợp* và quá lớn. Do đó làm chúng ta suy nghĩ **giải quyết bài toán với số nhỏ rồi mở rộng nó**. Chúng ta chắc chắn nên bắt đầu với việc xây dựng một dãy nhỏ bằng thuật toán **tham lam**.

- Bắt đầu với dãy $1, 2$. Khi đó

- 3 không thể thêm vào vì tạo thành cấp số cộng $1 \to 2 \to 3$;
- Chúng ta thêm 4, 5 vào dãy.
- 6 lại không thể thêm vào dãy được, vì tạo thành cấp số cộng $2 \to 4 \to 6$.
- 7 không thểm thêm vào dãy được vì tạo thành cấp số cộng $3 \to 5 \to 7$.
- 8 không thể thêm vào dãy được vì tạo thành cấp số cộng $2 \to 5 \to 8$.
- 9 không thể thêm vào dãy được vì tạo thành cấp số cộng $1 \to 5 \to 9$.
- Chúng ta thêm 10, 11, lại không thể thêm 12. Thêm được 13, 14, và cứ tiếp tục như vậy ta thêm vào được số tiếp theo gần nhất là 28,29.

1. Ta dừng lại phân tích khi có một số khoảng trống xuất hiện: $2 \to 4, 5 \to 10, 14 \to 28$. Tức là các số gấp 2 lần xuất hiện.
2. Ngoài ra còn có $4 \to 10 \to 28$, điều này viết lại $3^1 + 1 \to 3^2 + 1 \to 3^3 + 1$. Từ đó ta nhận thấy **số 3 này đóng vai trò quan trọng, đặc biệt là các lũy thừa của 3**. Điều này gợi ta đến việc xây dựng dãy số theo cơ số 3, nhưng trừ đi 1 từ mỗi số.

Do đó dãy của ta là

$$S = 1 + \{0_3, 1_3, 10_3, 11_3, 100_3, 101_3, 110_3, 111_3, 1000_3, \dots, 11111111111_3\}$$

gồm tất cả các số trong cơ số 3 chỉ gồm hai chữ số 0 và 1.

- Ta có $|S| = 2^{11} = 2048$ số.
- Phần tử lớn nhất trong S là $1 + 11111111111_3 < 100.000$;
- Gọi x, y, z là ba phần tử phân biệt tùy ý trong S, giả sử $x + y = 2z$. Do $2z$ chỉ gồm hai chữ số 0 và 2. Mà chỉ có sự phân tích duy nhất $0 + 0 = 0, 1 + 1 = 2$ nên x, y phải có chữ số 0 và 1 trùng nhau mọi vị trí, tức $x = y$, vô lý. Tức ba phần tử tùy của S không thể là ba phần tử liên tiếp của một cấp số cộng.

□

Câu 8. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, luôn có thể biểu diễn dưới dạng **duy nhất** thành tổng của một số lũy thừa phân biệt của 2.

Phân tích: Đầu tiên ta chứng minh sự biểu diện này có thể sự dụng thuật toán tham lam. Ta chọn lũy thừa lớn nhất, gọi là 2^k, sao cho $2^k \le n$. Nếu $n = 2^k$ thì bài toán kết thúc. Ngược lại, ta áp dụng thuật toán cho số $n - 2^k$. Chắc chắn là các lũy thừa của 2 sẽ phân biệt trong mỗi bước chọn, vì theo cách xây dựng cho 2^k $n < 2^{k+1}$, dẫn đến $n - 2^k < 2^k$. Do đó ở bước tiếp theo ta chọn được 2^{k-1}: $2^{k-1} \le n - 2^k$ thì $2^{k-1} < 2^k$. Tuy nhiên khi ta viết lời giải sẽ viết dưới dạng quy nạp.

Lời giải. Với $n = 1$, khi đó ta có $1 = 2^0$.
Giả sử bài toán đúng cho với mọi số n mà $1 \le n < 2^k$, với $k \ge 1$. Ta sẽ chứng minh bài toán đúng cho với mọi n mà $1 \le n < 2^{k+1}$. Như ta biết rằng trên khoảng $1 \le n < 2^k$, thì biểu diễn của n sẽ có số hạng lớn nhất là 2^{k-1}. Cộng thêm vào mỗi sự biểu diễn đó cho số 2^k, ta sẽ được sự biểu diễn cho mọi số n mà

$$1 + 2^k \le n < 2^k + 2^k = 2^{k+1}.$$

Ngoài ra $n = 2^k$ bản thân nó là một biểu diễn dưới lũy thừa của 2. Do đó, bài toán đúng cho với mọi $1 \leq n < 2^{k+1}$. Để chứng minh sự duy nhất, như theo hướng quy nạp, ta phải chứng tỏ với mỗi $2^k \leq n < 2^{k+1}$, ***phải có*** 2^k ***trong biểu diễn của nó***. Thật vậy, giả sử ngược lại, thì trong mỗi biểu diễn của n, thì tổng lớn nhất là

$$n \leq 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1 - 1 < n,$$

mâu thuẫn. □

Câu 9. Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các tập con phân biệt của $\{1, 2, \ldots, n\}$ và $|A_i| = 3, \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Chứng minh rằng ta có thể tô màu $\left[\dfrac{2n}{3}\right]$ phần tử của $\{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho mỗi tập A_i đều có ***ít nhất*** một phần tử được tô màu.

Phân tích: Ta sẽ thực hiện tô màu các phần tử trong $\{1, 2, \ldots, n\}$ theo thuật toán tham lam như sau: Mỗi bước, ta sẽ tô màu phần tử x thuộc càng nhiều tập càng tốt. Giả sử x thuộc vào các tập $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Đến bước thứ hai ta loại bỏ các phần tử thuộc vào các tập $A_1, A_2, \ldots, A_k$, rồi ta lại tiếp tục tô màu phần tử y thuộc càng nhiều tập còn lại càng tốt, cứ tiếp tục như vậy ta sẽ có điều phải chứng minh.

Lời giải. Gọi A là tập hợp các tập trong số các tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mà mỗi tập đều chưa có phần tử nào được tô màu sau khi thực hiện k ***lần thuật toán tham lam*** ở trên. Ta lưu ý rằng sau khi thực hiện k bước, thì tất cả các tập hợp trong A đều "rời nhau". Khi đó rõ ràng thuật toán sẽ dừng khi thực hiện tiếp $k + |A|$ bước (vì mỗi tập hợp trong A phải tô màu một phần tử, do các tập này rời nhau). Ta chú ý rằng:

- $k \leq \dfrac{n}{2}$ bởi vì mỗi bước thực hiện thuật toán, số tập hợp giảm đi ít nhất hai lần và trong k lần thực hiện thuật toán đầu tiên, ta luôn tập trung vào tô màu các phần tử thuộc vào ít nhất hai tập trở lên.

- $|A| \leq \dfrac{n-k}{3}$ bởi vì sau khi thực hiện thuật toán k lần, ta đã tô màu k phần tử, tức là đã loại khỏi ít nhất là k phần tử của $\{1, 2, \ldots, n\}$, còn lại nhiều nhất $n - k$ phần tử lại được chia thành các tập rời nhau kích thước 3.

Do đó

$$k + |A| \leq k + \frac{n-k}{3} = \frac{n}{3} + \frac{2k}{3} \leq \frac{n}{3} + \frac{n}{3} = \frac{2n}{3} \Rightarrow k \leq \frac{2n}{3}.$$

Vì k nguyên dương, chứng tỏ thuật toán sẽ kết thúc nếu ta thực hiện nhiều nhất là $\left[\dfrac{2n}{3}\right]$ lần. Bài toán được chứng minh. □

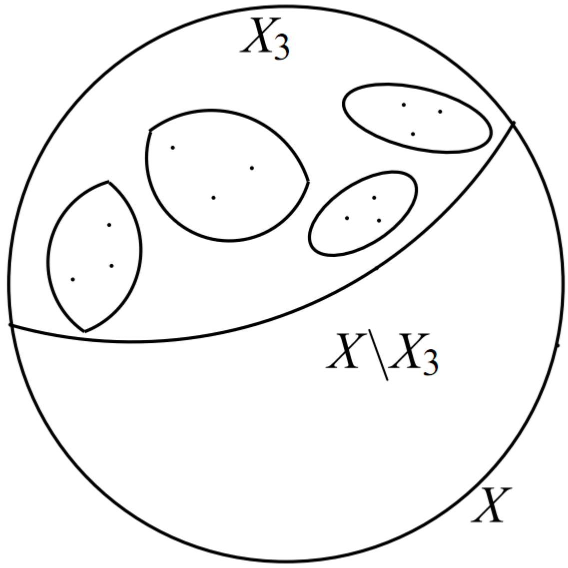
Câu 10 (China TST 2015). Cho X là một tập khác rỗng và $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là n tập con của X sao cho

1. $|A_i| \leq 3, \forall i = 1, 2, \ldots, n$;
2. Bất kỳ một phần tử nào của X cũng nằm trong ít nhất 4 tập trong số $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Chứng minh rằng có thể chọn $\left[\dfrac{3n}{7}\right]$ tập hợp trong số các tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mà hợp của chúng bằng X.

Lời giải. Kết luận bài toán yêu cầu chọn được một số tập hợp, hợp lại bằng X, do đó ta sẽ

1. *Chọn tập đầu tiên có 3 phần tử, giả sử $A_1, |A_1| = 3$. Sau đó, ta chọn tiếp tập A_2 mà $|A_2| = 3$ và $A_2 \cap A_1 = \emptyset$. Sau khi chọn được tập A_2, ta chọn tiếp tập A_3 mà $|A_3| = 3$ và $A_3 \cap A_1 = \emptyset, A_3 \cap A_2 = \emptyset$, cứ tiếp tục như vậy đến khi không thể chọn thêm được tập nào nữa vào trong hệ.* Trong tất cả cách cách lựa chọn các tập hợp trong $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ta chọn ra hệ tập hợp S_3 **cực đại**, giả sử $S_3 = \{A_1, A_2, \ldots, A_i\}$ $(i \leq n)$ (*tức là họ S_3 chứa nhiều tập hợp nhất có thể có*) mà $|A_t| = 3, \forall t = 1, 2, \ldots, i$ và $A_r \cap A_s = \emptyset, \forall 1 \leq r < s \leq i$ (điều này có nghĩa, mỗi lần bổ sung một tập hợp vào S_3 thì tập X_3 có số lượng phần tử tăng lên 3).



Đặt $X_3 = \bigcup\limits_{A_r \in S_3} A_r$. Do tính tối đại của tập S_3, nên với bất kỳ tập hợp A_j $(j > i)$ thì

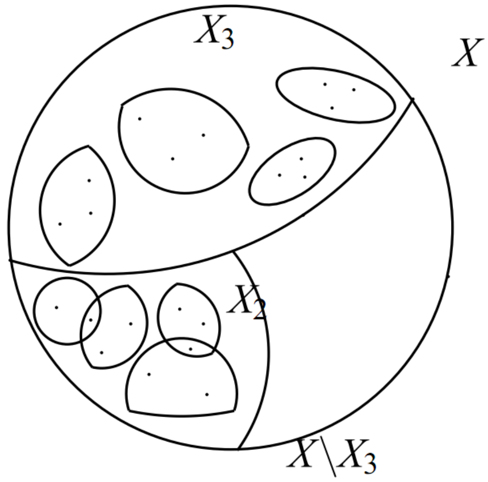
$$|A_j \cap (X \backslash X_3)| \leq 2$$

vì nếu không thì ta tiếp tục bổ sung A_j vào tập S_3, mâu thuẫn với tính tối đại của S_3. Và khi đó

$$|X_3| = 3i.$$

2. Bây giờ ta tiếp tục chọn họ S_2 **cực đại** chứa các tập A_j còn lại trong số $A_{i+1}, \ldots, A_n$, sao cho ***mỗi lần thêm một tập hợp vào họ S_2, thì số lượng phần tử trong hợp của chúng tăng lên 2***. Không mất tính tổng quát, giả sử

$$S_2 = \{A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_j\}$$



Đặt

$$X_2 = \bigcup_{A_r \in S_2} A_r \cap (X \backslash X_3)$$

thì theo cách xác định của S_2 ta có $|X_2| = 2j$ và theo tính tối đại của tập S_2 thì

$$|A_t \cap (X \backslash (X_2 \cup X_3))| \leq 1, \forall t = j + 1, \ldots, n.$$

3. Bây giờ ta tiếp tục chọn họ S_1 chứa các tập A_s còn lại trong số

$$A_{j+1}, A_{j+2} \ldots, A_n,$$

sao cho ***mỗi lần thêm một tập hợp vào họ S_1, thì số lượng phần tử trong hợp của chúng tăng lên 1*** và ***dĩ nhiên các tập hợp trong họ S_1 chứa hết tất cả các phần tử của*** $X \backslash (X_3 \cup X_2) = X_1$. Không mất tính tổng quát, giả sử

$$S_1 = \{A_{j+1}, A_{i+2}, \ldots, A_k\}.$$

4. Khi đó $|X| = |X_1| + |X_2| + |X_3| = 3i + 2j + k$, $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ và

$$|S_3| + |S_2| + |S_1| = i + j + k = m.$$

Ta cần chứng minh $m \leq \dfrac{3n}{7}$.

- Vì mỗi phần tử trong X_1 nằm trong ít nhất 4 tập hợp, nhưng do $|A_r \cap X_1| \leq 1, \forall r = j + 1, \ldots, n$ nên
$$n \geq i + j + 4k. \quad (1)$$
Mỗi phần tử trong $X_1 \cup X_2$ xuất hiện ít nhất trong 4 tập hợp, như do $|A_r| \cap (X_1 \cup X_2) \leq 2, \forall r = i + 1, \ldots, n$ nên
$$n \geq i + \frac{4(2j + k)}{2} = i + 4j + 2k. \quad (2)$$
Mỗi phần tử trong X xuất hiện ít nhất trong 4 tập hợp, và $|A_r \cap X| \leq 3, \forall r = 1, 2, \ldots, n$, do đó
$$n \geq \frac{4(3i + 2j + k)}{3}. \quad (3)$$

- Lấy $20 \times (1) + 12 \times (2) + 27 \times (3)$ ta có

$$59n \geq 140(i + j + k) = 140m \Rightarrow m \leq \frac{59n}{140} < \frac{3n}{7}.$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. □

Câu 11 (IMO 2014). Đồng xu được gọi là "may mắn" nếu giá trị của nó là $\frac{1}{n}(n \in \mathbb{Z}^+)$. Một bộ sưu tập các đồng xu "may mắn" có tổng giá trị không quá $99 + \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng có thể chia các đồng xu này vào 100 nhóm sao cho mỗi nhóm có giá trị không quá 1.

Lời giải. Ta chứng minh bài toán tổng quát hơn: "Giả sử tổng giá trị các đồng xu không quá $N - \frac{1}{2}$ và thì luôn có thể chia vào N nhóm sao cho mỗi nhóm có tổng giá trị không quá 1."
Giả sử bộ sưu tập có các đồng xu mệnh giá là

$$1, \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots, \frac{1}{m} \quad \text{(có thể có nhiều đồng xu cùng mệnh giá).}$$

Bước 1. *Ghép các đồng xu cùng mệnh giá*: Ta ghép các đồng xu có cùng mệnh giá lại thành một đồng xu mới (đồng xu mới vẫn là "may mắn") , cứ ghép như vậy cho tới khi nào không thể ghép thì dừng lại.
Chẳng hạn lúc đầu trong tay ta có tập các đồng xu may mắn sau

$$S = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right\}.$$

- Ta ghép hai đồng xu $\frac{1}{6}$ thành một đồng xu $\frac{1}{3}$, 2 đồng xu $\frac{1}{4}$ thành một đồng xu $\frac{1}{2}$. Khi đó ta có năm đồng xu $\frac{1}{3}$, bốn đồng xu $\frac{1}{2}$, và một đồng xu 1.
- Tiếp tục ghép năm đồng xu $\frac{1}{3}$ được một đồng xu 1, hai đồng xu $\frac{1}{3}$ và bốn đồng xu $\frac{1}{2}$ ghép lại thành hai đồng xu 1.
- Cuối cùng có
$$S' = \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 1; 1; 1\right\}$$
không ghép tiếp được, tổng không đổi so với S.

Kết thúc quá trình ghép các đồng xu ta có:

- Có p đồng xu mệnh giá 1.
- Nếu k chẵn thì còn lại nhiều nhất 1 đồng xu mệnh giá $\frac{1}{k}$ $(k > 1)$.
- Nếu k lẻ thì còn lại nhiều nhất $k - 1$ đồng xu mệnh giá $\frac{1}{k}$ $(k > 1)$.

Khi đó p đồng xu mệnh giá 1 ta chia về p nhóm và còn các đồng tiền mệnh giá khác 1 có tổng không quá $N - \frac{1}{2} - p$ ta chia vào $N - p$ nhóm như sau (với chú ý: với mỗi $k \in \mathbb{Z}^+$ thì đồng tiền mệnh giá $\frac{1}{2k}$ còn nhiều nhất là 1 đồng và đồng tiền mệnh giá $\frac{1}{2k-1}$ còn nhiều nhất là $(2k-1)-1$ đồng, trừ trường hợp $k = 1$).

Bước 2. *Chia các đồng tiền mệnh giá lớn hơn hoặc bằng* $\frac{1}{2(N-p)}$ *vào* $N - p$ *nhóm*. Với các đồng tiền mệnh giá $\frac{1}{2k}; \frac{1}{2k-1}, k = 1; 2; \ldots; N-p$ ta chia về nhóm G_k $(k = 1; 2; \ldots; N-p)$ thì tổng số tiền nhiều nhất của nhóm G_k là

$$(2k-2).\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} < 1.$$

Nếu vẫn còn các đồng tiền mệnh giá nhỏ hơn $\frac{1}{2(N-p)}$ thì tiến hành bước như sau:

Bước 3. Ta thấy rằng do tổng số tiền chia vào $N - p$ nhóm không lớn hơn $N - \frac{1}{2} - p$, nên tồn tại một nhóm có tổng số tiền nhỏ hơn hoặc bằng

$$\frac{1}{N-p} \cdot \left(N - p - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2(N-p)}.$$

- Ta lấy một đồng xu có mệnh giá nhỏ hơn $\frac{1}{2(N-p)}$ bỏ vào nhóm đó và nhóm đó có tổng số tiền không vượt quá 1.
- Vì số đồng tiền là hữu hạn nên sau một số lần thì kết thúc.

□

Ta kết thúc chuyên đề bằng một ví dụ, cho thấy thuật toán tham lam không cho ta được một tối ưu toàn cục, tuy nhiên giữa chúng vẫn xấp xỉ được với nhau

Câu 12 (IMO Shortlist 2014). Cho dãy số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$, chúng ta gọi "giá" của dãy số đã cho là đại lượng

$$\max_{1 \le i \le n} |x_1 + x_2 + \ldots + x_i|.$$

Cho trước số thực n, Dave và George muốn sắp xếp thành 1 dãy có "giá" nhỏ nhất. Chăm chỉ hơn nên Dave kiểm tra tất cả các cách có thể và tìm ra "giá" G nhỏ nhất. Theo một cách khác, George chọn x_1 sao cho $|x_1|$ nhỏ nhất, trong số các số còn lại anh ta chọn x_2 sao cho $|x_1 + x_2|$ nhỏ nhất, cứ tiếp tục như vậy đến bước thứ i anh ta chọn x_i trong số các số còn lại sao cho $|x_1 + x_2 + \ldots + x_i|$ nhỏ nhất, trong mỗi bước nếu có những số hạng bằng nhau thì anh ta chọn bất kì. Cuối cùng anh ta nhận được dãy "giá" D. Tìm hằng số c nhỏ nhất có thể sao cho với mỗi số nguyên dương n ta luôn có:

$$G \le cD.$$

Lời giải. Xét dãy số gồm các số thực: $1,\ 2,\ -1,\ -2$. Khi đó ta có sắp xếp của Dave và George như sau

$$\text{Dave}: -1,\ 2,\ -2,\ -1 \quad \text{hoặc} \quad 1,\ -2,\ 2,\ -1. \text{ Khi đó}: D = 1$$

$$\text{George}: 1,\ -1,\ 2,\ -2 \quad \text{hoặc} \quad 1,\ -1,\ 2,\ -2. \text{ Khi đó}: G = 2.$$

Từ đó ta thu được: $c \geq 2$. Ta sẽ chứng minh $c = 2$ là giá trị cần tìm, tức $G \leq 2D$. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là dãy số ban đầu, $d_1,\ d_2, \ldots, d_n$ và $g_1,\ g_2, \ldots, g_n$ là dãy mà Dave và George thu được. Đặt

$$M = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad S = |x_1 + x_2 + \ldots + x_n|.$$

Nhận xét: $D \geq S$ (hiển nhiên do cách xác định D). Giả sử $|d_i| = M$ ta có:

$$\begin{aligned} M = |d_i| &= |(d_1 + d_2 + \ldots + d_i) - (d_1 + d_2 + \ldots + d_{i-1})| \\ &\leq |d_1 + \ldots + d_i| + |d_1 + \ldots + d_{i-1}| \leq 2D. \end{aligned}$$

Do đó để chứng minh $G \leq 2D$ ta chỉ cần chứng minh

$$G \leq \max\{M, S\}.$$

Đặt $N = \max\{M, S\}$ ta sẽ chứng minh $G \leq N$. Đặt $h_i = g_1 + \ldots + g_i$. Khi đó

$$G \leq N \Leftrightarrow |h_i| \leq N,\ \forall i = \overline{1, n}.$$

Ta sẽ chứng minh: $|h_i| \leq N$ bằng quy nap. Với $i = 1$ ta có

$$|h_1| = |g_1| \leq M \leq N.$$

Giả sử $|h_{i-1}| \leq N$ ta sẽ chứng minh $|h_i| \leq N$. Ta có

$$|h_i| = |(g_1 + \ldots + g_{i-1}) + g_i| = |h_{i-1} + g_i|.$$

- Nếu trong các số $g_i,\ g_{i+1}, \ldots, g_n$ có 2 số khác dấu nhau, giả sử $j \geq i$ là chỉ số mà $h_{i-1}.g_j \leq 0$. Khi đó

$$|h_{i-1} + g_i| \leq \left|h_{i-1} + g_j\right| \leq \max\left\{|h_{i-1}|,\ \left|g_j\right|\right\} \leq N \Rightarrow |h_i| \leq N.$$

- Nếu các số $g_i,\ g_{i+1}, \ldots, g_n$ cùng dấu, không mất tổng quát giả sử chúng đều là các số dương. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} h_{i-1} \leq h_i \leq h_{i+1} \leq \ldots \leq h_n &\Rightarrow |h_i| \leq \max\{|h_{i-1}|,\ |h_n|\} \leq N \\ &\Rightarrow |h_i| \leq N \end{aligned}$$

  với $\forall i = \overline{1, n}$ tức là $G \leq N = \max\{M, S\} \leq 2D$.

  Vậy $c = 2$ là giá trị cần tìm.

□

Sau đây là một số bài toán để bài đọc có thể tham khảo, rèn luyện thêm.

Câu 13 (IMO Shortlist 2014). Cho n là số nguyên dương. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất thỏa mãn: cho trước các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_d$ có

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_d = n \text{ và } 0 \leq a_i \leq 1, \forall i = 1, 2, \ldots, d$$

thì luôn có thể chia d số này vào k nhóm (một số nhóm có thể là tập rỗng) sao cho tổng các phần tử trong mỗi nhóm không vượt quá 1.

Câu 14 (USA TST 2003). Với cặp số nguyên dương a và b với $0 < a < b < 1000$, tập $S \subset \{1, 2, \dots, 2003\}$ được gọi là "tập bỏ qua" cho (a, b) nếu với mọi cặp phần tử $s_1, s_2 \in S$ thì $|s_1 - s_2| \notin \{a, b\}$. Đặt $f(a, b)$ là tập có kích thước lớn nhất cho cặp (a, b). Xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm $f(x, y)$, với $0 < x < y < 1000$.

Câu 15. Chứng minh rằng với mỗi số hữu tỉ dương x, luôn có thể tìm được các số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2, \dots, a_n$ sao cho

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}.$$

Câu 16 (IMO Shortlist 2001). Một bộ ba phần tử các số nguyên không âm (x, y, z) với $x < y < z$ được gọi là "đẹp" nếu $\{z - y, y - x\} = \{a, b\}$ với $0 < a < b$ là các số nguyên dương cho trước. Chứng minh rằng tập hợp $\mathbb{N}$ có thể viết thành hợp rời nhau của các bộ ba "đẹp".

Câu 17. Cho dãy (a_n) gồm các số tự nhiên thỏa mãn: không tồn tại bộ chỉ số (i, j, k) mà $i < j < k$ thì $a_i < a_j < a_k$. Chứng minh rằng có thể phân hoạch dãy (a_n) thành hai dãy con tăng.

Tài liệu tham khảo

[1] Algorithms, Cody Johnson, Mathematical Reflection volume 4, 2015.

[2] Đề thi học sinh giỏi các nước trên trang Mathlinks.ro.

ĐỊNH ĐỀ BERTRAND

Lưu Bá Thắng
(Khoa Toán Tin, Đại học Sư Phạm Hà Nội)

Chúng ta biết rằng dãy các số nguyên tố $2, 3, 5, 7, \ldots$ là vô hạn. Để kiểm tra khoảng cách giữa hai số nguyên tố liên tiếp là không bị chặn, tức là với một số nguyên dương k tùy ý, luôn tồn tại hai số nguyên tố kề nhau có hiệu vượt quá k. Để chứng minh điều này, ta chỉ cần chỉ ra tồn tại k số tự nhiên liên tiếp không là số nguyên tố. Thật vậy, nếu ta đặt $N = 2.3.5.\ldots p$ là tích tất cả các số nguyên tố không vượt quá $k+2$ thì không số nào trong dãy gồm k số nguyên liên tiếp

$$N+2, N+3, \ldots, N+(k+1)$$

là số nguyên tố. Nhưng vẫn có chặn trên cho khoảng cách trong dãy các số nguyên tố. Năm 1845, Bertrand đưa ra giả thuyết, thường gọi là Định đề Bertrand (**Bertrand's postulate**):

Cho số nguyên dương $n \geq 1$, luôn có số nguyên tố p với $n < p \leq 2n$.

Bertrand đã chứng minh giả thuyết trên cho $n < 3000000$. Năm 1950, Tchebychev là người đầu tiên đưa ra một chứng minh bằng giải tích cho định đề trên. Năm 1932, Paul Erdős đã đưa ra một chứng minh đẹp cho Định đề Bertrand chỉ dùng các kiến thức Toán sơ cấp, khi ông mới 19 tuổi. Tư tưởng chính của Erdős trong việc chứng minh định đề Bertrand chính là việc ước lượng giá trị $\binom{2n}{n}$. Trong bài viết này, chúng tôi sẽ giới thiệu đến các bạn học sinh, sinh viên và các bạn trẻ yêu Toán chứng minh của Erdős cùng một vài số kết quả gần đây về vấn đề này.
Ta thấy rằng, với $n \geq 2$ thì

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n}. \tag{0.1}$$

Thật vậy, $\binom{2n}{n}$ là số hạng lớn nhất trong $2n$ số hạng $\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2n}, \binom{2n}{1}, \ldots, \binom{2n}{2n-1}$ của tổng

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = (1+1)^{2n} = 4^n.$$

Erdős đã chứng minh nếu không có số nguyên tố p sao cho $n < p \leq 2n$ thì chúng ta sẽ suy ra $\binom{2n}{n} < \frac{4^n}{2n}$ trừ một số giá trị n nhỏ. Điều này chứng minh được Định đề Bertrand cho số n đủ lớn. Đối với giá trị n nhỏ, Erdős sẽ kiểm tra trực tiếp.
Để chứng minh các ý tưởng trên, chúng ta cần một số bổ đề sau:

Bổ đề 2. *Định đề Bertrand đúng với $n < 4000$.*

Chứng minh. Để chứng minh điều này, ta không cần kiểm tra tất cả 4000 trường hợp mà chỉ cần kiểm tra,

$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503, 4001,$$

là dãy các số nguyên tố mà mỗi số đứng sau không vượt quá 2 lần số đứng ngay đằng trước nó. Do đó, mọi khoảng $\{m : n < m \leq 2n\}$ với $n < 4000$ đều chứa đựng một trong 14 số nguyên tố của dãy trên. □

Bổ đề 3 (**Định lý Legendre**). *Cho số nguyên tố p và số tự nhiên n. Ta kí hiệu $v_p(n)$ là số mũ lớn nhất của p sao cho $p^{v_p(n)} \mid n$, khi đó*

$$v_p(n!) = \sum_{i\geq 1}[\frac{n}{p^i}].$$

Chứng minh. Trước hết ta thấy tổng trên thực chất chỉ gồm hữu hạn số hạng vì với i đủ lớn thì $p^i > n$ nên $\left[\frac{n}{p^i}\right] = 0$. Mặt khác, trong tích $n!$ có đúng $\left[\frac{n}{p}\right]$ thừa số là bội của p. Do đó ta viết

$$n! = p^{[\frac{n}{p}]}\left[\frac{n}{p}\right]!q_1 \text{ trong đó } (q_1, p) = 1.$$

Tương tự,

$$\left[\frac{n}{p}\right]! = p^{\left[\frac{[\frac{n}{p}]}{p}\right]}\left[\frac{[\frac{n}{p}]}{p}\right]!q_2 \text{ trong đó } (q_2, p) = 1.$$

Dễ kiểm tra rằng $\left[\frac{[\frac{n}{p}]}{p}\right] = \left[\frac{n}{p^2}\right]$ nên

$$\left[\frac{n}{p}\right]! = p^{\left[\frac{n}{p^2}\right]}\left[\frac{n}{p^2}\right]!q_2.$$

Suy ra

$$n! = p^{\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]}\left[\frac{n}{p^2}\right]!q_1q_2 \text{ trong đó } (q_1, p) = 1.$$

Tiếp tục quá trình này ta thu được

$$n! = p^{\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots}A \text{ trong đó } (A, p) = 1.$$

Vậy số mũ của số nguyên tố p trong phân tích tiêu chuẩn của $n!$ là

$$v_p(n!) = \sum_{i\geqslant 1}\left[\frac{n}{p^i}\right] = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots.$$

□

Bổ đề 4. *Nếu* $p \mid \binom{2n}{n}$ *thì* $p^{v_p(\binom{2n}{n})} \leq 2n$.

Chứng minh. Đặt $r(p)$ là số tự nhiên thỏa mãn $p^{r(p)} \leq 2n \leq p^{r(p)+1}$. Ta có

$$\begin{aligned} v_p(\binom{2n}{n}) &= v_p((2n)!) - 2v_p(n!) \\ &= \sum_{i=1}^{r(p)} [\frac{2n}{p^i}] - 2\sum_{i=1}^{r(p)} [\frac{n}{p^i}] \\ &= \sum_{i=1}^{r(p)} ([\frac{2n}{p^i}] - 2[\frac{n}{p^i}]) \\ &\leq r(p), \end{aligned}$$

và do đó $p^{v_p(\binom{2n}{n})} \leq p^{r(p)} \leq 2n$. □

Từ Bổ đề trên ta thấy số nguyên tố $p > \sqrt{2n}$ xuất hiện trong sự phân tích của $\binom{2n}{n}$ nhiều nhất 1 lần. Hơn nữa, số nguyên tố p thỏa mãn $\frac{2n}{3} < p \leq n$ sẽ không là ước của $\binom{2n}{n}$ với $n \geq 3$.

Bổ đề 5. *Với mọi số thực* $x \geq 2$, *ta có*

$$\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1} \tag{0.2}$$

trong đó tích chạy qua tất cả các số nguyên tố p.

Chứng minh. □

Trước hết ta chú ý rằng nếu q là số nguyên tố lớn nhất thỏa mãn $q \leq x$ thì

$$\prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq q} p \text{ và } 4^{q-1} \leq 4^{x-1}.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $x = q$ là số nguyên tố bằng quy nạp. Với $q = 2$, (0.2) hiển nhiên đúng. Bây giờ ta xem xét (0.2) cho trường hợp số nguyên tố lẻ $q = 2m + 1$. Giả sử (0.2) đúng cho tất cả các số tự nhiên $x \leq 2m$. Cho $q = 2m + 1$, ta có

$$\prod_{p \leq 2m+1} p = \prod_{p \leq m+1} p \prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p.$$

Ta có

$$\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m}$$

vì $\dfrac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$ là số tự nhiên và tất cả các số nguyên tố ở vế trái là ước của tử số $(2m+1)!$ nhưng không phải là ước của mẫu số $m!(m+1)!$. Lại có

$$\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1} \text{ và } \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1}$$

nên $\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m}$. Do đó,

$$\prod_{p \leq 2m+1} p \leq 4^m \binom{2m+1}{m} \leq 4^m 2^{2m} = 4^{2m}.$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh Định đề Bertrand. Trước hết ta đánh giá $\binom{2n}{n}$. Từ (0.1) và Bổ đề 4, với $n \geq 3$, ta có

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} 2n \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2n}{3}} p \prod_{n < p \leq 2n} p,$$

hay

$$4^n \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}} \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2n}{3}} p \prod_{n < p \leq 2n} p.$$

Kết hợp với Bổ đề 0.2, ta được

$$4^n \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}} 4^{\frac{2n}{3}} \prod_{n < p \leq 2n} p,$$

hay

$$4^{\frac{n}{3}} \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}} \prod_{n < p \leq 2n} p. \tag{0.3}$$

Giả sử rằng tồn tại số nguyên dương n sao cho không có số nguyên tố p thỏa mãn $n < p \leq 2n$. Theo Bổ đề 2, ta suy ra $n \geq 4000$. Từ (0.3), ta có $\prod_{n<p\leq 2n} p = 1$ và

$$4^{\frac{n}{3}} \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}}, \tag{0.4}$$

hay

$$2^{2n} \leq (2n)^{3(1+\sqrt{2n})}. \tag{0.5}$$

Dùng bất đẳng thức $a + 1 < 2^a, a \geq 2$, ta có

$$2n = (\sqrt[6]{2n})^6 < ([\sqrt[6]{2n}] + 1)^6 < 2^{6[\sqrt[6]{2n}]} \leq 2^{6\sqrt[6]{2n}},$$

và do đó

$$2^{2n} \leq (2n)^{3(1+\sqrt{2n})} < 2^{\sqrt[6]{2n}(18+18\sqrt{2n})} < 2^{20\sqrt[6]{2n}\sqrt{2n}} = 2^{20(2n)^{2/3}}$$

với $n \geq 4000$. Suy ra $(2n)^{1/3} < 20$ hay $n < 4000$ (mâu thuẫn).

Vậy ta chứng minh xong Định đề Bertrand.

Từ cách chứng minh Định đề Bertrand của Erdős ở trên, chúng ta có thể chứng minh kết quả sau:

Hệ quả 1. *Có hằng số $c, C > 0$ sao cho với mọi số dương x, ta có*

$$\frac{c\ln x}{x} \le \pi(x) \le C\frac{\ln x}{x}$$

trong đó $\pi(x)$ là số các số nguyên tố không vượt quá x.

Việc chứng minh hệ quả trên như là một bài tập dành cho các bạn. Một định lý nổi tiếng về ước lượng hàm $\pi(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1$$

được chứng minh lần đầu tiên bởi Hadamard và de la Vallée-Poussin năm 1896 với công cụ từ giải tích phức. Dùng Định lý này, chúng ta cũng có thể chứng minh Định đề Bertrand. Câu chuyện về Định đề Bertrand vẫn chưa kết thúc khi có khá nhiều câu hỏi tương tự được đặt ra. Gần đây, năm 2006 El Bachraoui [2], đã đưa ra một chứng minh sơ cấp cho về việc luôn có số nguyên tố nằm giữa $2n$ và $3n$ với số nguyên dương $n > 1$. Một kết quả tương tự năm 2011 được Loo [5] đã được chứng minh cho việc luôn tồn tại số nguyên tố nằm giữa $3n$ và $4n$. Một câu hỏi đặt ra cho việc chứng minh bài toán tổng quát: Cho k, n là các số nguyên dương, $k \le n$ và $n > 1$, khi đó luôn tồn tại số nguyên tố nằm trong đoạn $[kn; (k+1)n]$. Nếu trả lời được câu hỏi này, chúng ta sẽ có lời giải cho một vấn đề rất nổi tiếng mà cho đến nay chưa có lời giải:

Giả thuyết. *Luôn tồn tại số nguyên tố giữa n^2 và $(n+1)^2$ với mọi số nguyên dương n?*

Sau đây là một số bài toán liên quan đến các vấn đề mà chúng tôi đề cập ở trên.

Bài tập 3 ([4]). *Cho số nguyên dương n, tập $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ có thể được chia thành các cặp*

$$\{a_1, b_1\}, \ldots, \{a_n, b_n\}$$

sao cho với mỗi $1 \le i \le n$, $a_i + b_i$ là số nguyên tố.

Chứng minh. Ta chứng minh quy nạp theo n. Với $n = 1$, kết quả là tầm thường. Với $n > 1$, đặt p là số nguyên tố thỏa mãn $2n < p \le 4n$. Từ $4n$ không là số nguyên tố nên $p = 2n + m$ với $1 \le m < 2n$ và m là số lẻ. Rõ ràng tập $\{m, \ldots, 2n\}$ được chia thành $\dfrac{2n-m+1}{2}$ cặp

$$\{(m, 2n), (m+1, 2n-1), \ldots, (n + \frac{m-1}{2}, n + \frac{m+1}{2}),$$

sao cho tổng của mỗi cặp là số nguyên tố p. Theo giả thiết quy nạp, rõ ràng tập $\{1, 2, \ldots, m-1\}$ được chia thành $\dfrac{m-1}{2}$ cặp sao cho tổng của mỗi cặp là số nguyên tố. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Bài tập 4. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k, luôn tồn tại dãy các số nguyên dương $\{a_1, a_2, ..., a_{2k}\}$ sao cho có thể chia chúng thành k cặp phân biệt mà tổng của mỗi cặp là số nguyên tố.*

Chứng minh. Chọn $a_i = i$, theo bài trên ta có điều phải chứng minh. □

Bài tập 5. *Cho p là số nguyên tố và*

$$n = a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \cdots + a_1 p + a_0$$

là sự khai triển của n trong cơ số p. Ký hiệu $s_p(n) = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_0$, chứng minh rằng

$$\nu_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p - 1}.$$

Chứng minh. Áp dụng Định lý Legrendre, ta có

$$\begin{aligned}
\upsilon_p(n!) &= \sum_{i \geq 1} [\frac{n}{p^i}] = [\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] \cdots + [\frac{n}{p^k}] \\
&= (a_k p^{k-1} + \cdots + a_2 p + a_1) + (a_k p^{k-2} + \cdots + a_2) + \cdots + a_k \\
&= a_1 + a_2(1 + p) + \cdots + a_k(p^{k-1} + \cdots + p + 1) \\
&= \frac{n - s_p(n)}{p - 1}.
\end{aligned}$$

□

Từ bài tập trên, ta thấy rằng với mọi số nguyên dương n thì $s_p(n) \geq 1$ nên chúng ta luôn có bất đẳng thức: Với mọi số nguyên dương n

$$\nu_p(n!) \leq \frac{n - 1}{p - 1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $n = p^r$.
Từ đó, áp dụng bất đẳng thức trên với $p = 2$, chúng ta cũng dễ dàng giải các bài toán sau:

Bài tập 6. *Với mọi số nguyên dương n, ta có $2^n \quad n!$*

Bài tập 7. *Với mọi số nguyên dương n, ta có $2^{n-1} \mid n!$ nếu và chỉ nếu n là lũy thừa của 2.*

Ngoài ra, bạn đọc có thể tham khảo [2, 5] cho các kết quả sau:

Bài tập 8. *Cho số nguyên dương $n \geq 2$. Chứng minh rằng luôn tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn*

$$n < p < \frac{3(n + 1)}{2}.$$

Bài tập 9. *Cho số nguyên dương $n \geq 3$. Chứng minh rằng luôn tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn*

$$n < p < \frac{4(n + 2)}{3}.$$

Bài tập 10. *Với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại số n_0 sao cho với mọi $n > n_0$ thì có ít nhất $(\frac{2}{3} - \varepsilon)\frac{n}{\log_2 n}$ số nguyên tố nằm giữa n và $2n$.*

Tài liệu tham khảo

[1] M. Aiger and Günter M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Chapter 2, Fourth Edition, Springer 2010.

[2] M. El Bachraoui, Primes in the Interval $[2n, 3n]$, Int. J. Contemp. Math. Sci., Vol 1, 2006, no 13, 617-621.

[3] P. Erdős, Beweis eines Satzes von Tschebyschef, *Acta Sci. Math.* 5 (1932), 194-198.

[4] L.E. Greenfield and S.J. Greenfield, Some Problems of Combinatorial Number Theory Related to Bertrand's Postulate, *J. Integer Sequences*, Vol 1, 1998.

[5] A. Loo, On the Primes in the Interval $[3n, 4n]$, Int. J. Contemp. Math. Sci., Vol 6, 2011, no 38, 1871-1882.

CHUỖI ĐIỀU HÒA

Kiều Đình Minh
(THPT Chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

1. Mở đầu

Chuỗi điều hoà

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

là một trong các chuỗi vô hạn nổi tiếng. Tổng riêng thứ n,

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

được gọi là số điều hoà. Dãy (H_n) được gọi là dãy số điều hoà (hay dãy điều hoà). Chuỗi có dạng

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m} = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \dots$$

với $m \in \mathbb{N}^*$ còn gọi là chuỗi điều hoà bậc m. Chuỗi điều hoà tổng quát là chuỗi có dạng $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{ak+b}$, với $a \neq 0, b$ là các số thực. Ngoài ra

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

gọi là chuỗi điều hoà đan dấu.
Trong các công trình nghiên cứu của nhiều nhà toán học đôi khi có liên quan đến chuỗi điều hoà và trong các kỳ thi học sinh giỏi chúng ta cũng hay bắt gặp nó ở các bài toán khó. Có nhiều hướng tìm hiểu khác nhau đối với chuỗi này chẳng hạn như bài toán về đánh giá, bài toán về giới hạn hay các bài toán về số học... Bài viết này chúng tôi sẽ trình bày một số kết quả cơ bản về chuỗi điều hoà cũng như các bài toán liên quan mà chúng ta thường gặp trong các kỳ thi Olympic.

2. Các bài toán đại số

Ví dụ 1. ***(Đồng nhất thức Catalan)*** *Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Chứng minh. Biến đổi vế trái ta có

$$\begin{aligned} VT &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) = VP. \end{aligned}$$

□

Đây là một đồng nhất thức khá đơn giản, tuy nhiên lại có nhiều ứng dụng khi giải toán. Chúng ta sẽ bắt gặp điều này trong phần sau.

Ví dụ 2. *Với $n \in \mathbb{N}^*$, cho*

$$H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n};\ T_n = H_1+H_2+\ldots+H_n;\ U_n = \frac{T_1}{2}+\frac{T_2}{3}+\ldots+\frac{T_n}{n+1}$$

Chứng minh rằng

$$T_n = (n+1)H_{n+1}-(n+1) \text{ và } U_n = (n+2)H_{n+1}-(2n+2).$$

Chứng minh. Ta có:

$$\begin{aligned} T_n &= 1+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{n}{1}+\frac{n-1}{2}+\frac{n-2}{3}+\ldots+\frac{1}{n} = \left(\frac{n+1}{1}-1\right)+\left(\frac{n+1}{2}-1\right)+\ldots+\left(\frac{n+1}{n}-1\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-n \\ &= (n+1)H_n-n = (n+1)H_{n+1}-(n+1) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{T_1}{2}+\frac{T_2}{3}+\ldots+\frac{T_n}{n+1} = (H_2-1)+(H_3-1)+\ldots+(H_{n+1}-1) \\ &= H_2+H_3+\ldots+H_{n+1}-n = -H_1+T_n+H_{n+1}-n \\ &= (n+2)H_{n+1}-(2n+2) \end{aligned}.$$

Vậy bài toán được chứng minh. □

Ví dụ 3. ***(Canada MO 1998, Albania BMO TST 2014)*** *Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right) > \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

Chứng minh. Ta giải bài toán này theo hai cách sau:
Lời giải 1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i} > \frac{2n+1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i} > \frac{2n}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} > \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) \qquad (*)$$

Ta có
$$VT(*) > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} > \frac{1}{n}.\frac{n}{2} > VP(*).$$
Vậy bài toán được chứng minh.
Lời giải 2. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$n\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right) > (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right). \qquad (**)$$
Ta sẽ chứng minh $(**)$ bằng quy nạp.
Thật vậy với $n=2$ thì trở thành $\frac{8}{3} > \frac{9}{4}$ (đúng).
Giả sử $(*)$ đúng với $n = k \geq 2$, tức là
$$k\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k-1}\right) > (k+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k}\right).$$
Ta có
$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k-1}\right)+\frac{k+1}{2k+1} &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k-1}\right)+\frac{1}{2}+\frac{k+1}{2k+1}\\ &> \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2}+\frac{k+1}{2k+1}\\ &> \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{k+1}{2k+2}+\frac{1}{2k+1}\\ &> \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{k+2}{2k+2}.\end{aligned}$$
Do đó
$$\begin{aligned}(k+1)\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+1}\right) &= k\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k-1}\right)+\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k-1}\right)+\frac{k+1}{2k+1}\\ &> k\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{k+2}{2k+2}\\ &> (k+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{k+2}{2k+2}\\ &= (k+2)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k+2}\right).\end{aligned}$$
Theo nguyên lý quy nạp thì $(**)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. □

Ví dụ 4. ***(USA MO 1995)*** *Cho $a_1, a_2, a_3 \ldots,$ là một dãy các số thực dương thoả mãn $\sum_{j=1}^{n} a_j \geq \sqrt{n}$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$, ta có*
$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 > \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

Chứng minh. Ta bắt đầu bằng chứng minh bất đẳng thức sau:
Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là dương và $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$ và nếu với mọi $k \leq n, a_1+a_2+\ldots+a_k \geq b_1+b_2+\ldots+b_k$, thì
$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \geq b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2 \qquad (*)$$

Sử dụng công thức khai triển Abel, ta có thể viết

$$\begin{aligned}a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n &= a_1(b_1-b_2)+(a_1+a_2)(b_2-b_3)+(a_1+a_2+a_3)(b_3-b_4)+\ldots+(a_1+a_2+\ldots+a_n)b_n\\ &\geq b_1(b_1-b_2)+(b_1+b_2)(b_2-b_3)+(b_1+b_2+b_3)(b_3-b_4)+\ldots+(b_1+b_2+\ldots+b_n)b_n\\ &= b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2\end{aligned}$$

Hay ta có (*) đúng.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có

$$\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)\geq (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\geq \left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)^2.$$

Trở lại bài toán, với chú ý $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}>\frac{1}{2\sqrt{n}}$. Chọn $b_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ thì $\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\geq\sqrt{n}=\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$ Từ $(*)$ suy ra

$$\sum_{j=1}^{n}a_j^2\geq\sum_{j=1}^{n}\left(\sqrt{j}-\sqrt{j-1}\right)^2>\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2\sqrt{j}}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

Vậy bài toán được chứng minh. □

Ví dụ 5. *Chứng minh đẳng thức*

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\binom{n}{n}.$$

Chứng minh. Dựa vào các đẳng thức

$$\begin{aligned}(1-x)^n &= \binom{n}{0}-\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}x^n\\ 1-(1-x)^n &= \binom{n}{1}x-\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}x^n\end{aligned}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}dx &= \int_0^1\left(\binom{n}{1}-\binom{n}{2}x+\binom{n}{3}x^2-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}x^{n-1}\right)dx\\ &= \binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\binom{n}{n}\end{aligned}$$

Mặt khác, đặt $y=1-x$ thì

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}dx &= \int_0^1\frac{1-y^n}{y}dy\\ &= \int_0^1\left(1+y+y^2+\ldots+y^{n-1}\right)dy\\ &= \left.\left(y+\frac{1}{2}y^2+\ldots+\frac{1}{n}y^n\right)\right|_0^1\\ &= 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\end{aligned}.$$

□

3. Các bài toán giải tích

Euler đã đưa ra công thức giải tích $H_n = \int\limits_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}dx$ *cho chuỗi điều hoà. Trong mục này chúng ta cùng tìm hiểu các bài toán giải tích liên quan đến chuỗi điều hoà và các bài toán liên quan đến hằng số Euler.*

Ví dụ 6. *Chứng minh rằng*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln(n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh. Có nhiều cách chứng minh bất đẳng thức này. Sau đây chúng tôi giới thiệu hai cách chứng minh cơ bản nhất.
Cách chứng minh thứ nhất: Sử dụng bất đẳng thức $\ln(1+x) < x, \forall x > 0$, ta có

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln(1+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1).$$

Cách chứng minh thứ hai: Xét hàm số $y = \frac{1}{x}$ trong đoạn $[1; n+1]$. Gọi S là diện tích hình thang cong được giới hạn bởi các đường $x = 1, x = n+1, y = 0, y = \frac{1}{x}$. Khi đó

$$S = \int\limits_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln x|_1^{n+1} = \ln(n+1) \tag{1}$$

Gọi A_i là các điểm với toạ độ $\left(i; \frac{1}{i}\right), i = 2, 3, \ldots, n$. Kí hiệu $A_1(1;0)$, $A_{n+1}(n+1;0)$. Gọi $B_i\left(i; \frac{1}{i-1}\right), i = 2, 3, \ldots, n+1$ và $B_1(1;1)$.
Gọi S_1 là diện tích của đa giác $A_1B_1B_2A_2B_3A_3 \ldots B_nA_nB_{n+1}A_{n+1}$. Khi đó

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \tag{2}$$

Do hàm số $y = \frac{1}{x}$ nghịch biến trên $[1; n+1]$ nên $S_1 > S$. Do đó từ (1), (2) suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét: Từ kết quả trên ta suy ra được

$$\lim\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = +\infty. \tag{$*$}$$

Kết quả (*) có khoảng gần 50 chứng minh (xem [2]). Tuy nhiên chủ yếu theo các hướng đánh giá trội, so sánh diện tích hình phẳng qua tích phân hay sử dụng hằng số Euler.

Ví dụ 7. *a) Chứng minh tồn tại giới hạn* $\lim\limits_{n\to+\infty}(H_n - \ln n) = \gamma$
b) Chứng minh rằng $\gamma < H_n + H_m - H_{nm} \leq 1, \forall n, m \in \mathbb{N}^*$
c) Tính gần đúng γ *với sai số chưa đến* $0,1$.

Chứng minh. a) Đặt $a_n = H_n - \ln(n+1),\ b_n = H_n - \ln n$ thì (a_n) tăng vì

$$a_n \geq a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{n} + \ln n - \ln(n+1) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \ln\frac{n+1}{n} \Leftrightarrow e \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

bất đẳng thức này đúng. Tương tự thì (b_n) giảm. Mặt khác $a_n < b_n$ và

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\ln\frac{n}{n+1}\right) = 0.$$

Do đó tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \gamma$.
b) Ta có

$$\begin{aligned} H_n + H_m - H_{nm} &= (H_n + H_m - H_n) - (H_{2n} - H_n) - (H_{3n} - H_{2n}) - \ldots - \left(H_{mn} - H_{(m-1)n}\right) \\ &\leq H_m - n.\frac{1}{2n} - n.\frac{1}{3n} - \ldots - n.\frac{1}{mn} = 1 \end{aligned}$$

Lại có

$$b_{mn} < b_n \Leftrightarrow H_{mn} - \ln(mn) \leq H_n - \ln n \Leftrightarrow H_n - H_{mn} + \ln(mn) - \ln n \geq 0. \qquad (*)$$

Vì

$$b_m > \gamma \Leftrightarrow H_m - \ln m > \gamma. \qquad (**)$$

Cộng $(*)$ và $(**)$ ta được

$$H_n - H_{mn} + \ln(mn) - \ln n + H_m - \ln m > \gamma \Leftrightarrow H_n + H_m - H_{mn} > \gamma.$$

c) lấy $n = 100$ tính được $a_n = 0,57;\ b_n = 0,58$. Suy ra $\gamma \approx 0,57$ □

Như vậy thì $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} = \gamma + \ln n + \varepsilon_n, \varepsilon_n \to 0$ khi $n \to +\infty$ và γ được gọi là hằng số Euler – Mascheroni. Chú ý rằng $\gamma = \lim(H_n - \ln n) = \int\limits_1^{+\infty}\left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right)dx = 0,5772156649\ldots$. Cho đến nay người ta vẫn chưa biết rằng γ là số hữu tỷ hay số vô tỷ. Tuy nhiên thì hằng số này có vai trò rất quan trọng trong toán học.

Ví dụ 8. ***(Trường đông Toán học 2013)*** *Cho dãy số* (a_n) *xác định bởi* $a_1 = \frac{3}{2}$ *và*

$$a_{n+1} = a_n - \frac{3n+2}{2n(n+1)(2n+1)}, n = 1, 2, \ldots$$

Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Chứng minh. Ta có đồng nhất

$$\frac{3k+2}{2k(k+1)(2k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2k+1}.$$

Do đó

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Suy ra

$$a_n = H_{2n} - H_{n-1} = (\gamma + \ln 2n + \varepsilon_{2n}) - (\gamma + \ln(n-1) + \varepsilon_{n-1}) = \ln \frac{2n}{n-1} + (\varepsilon_{2n} - \varepsilon_{n-1}) \to \ln 2,$$

khi $n \to +\infty$. □

Chú ý: Có thể sử dụng bất đẳng thức $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$ và định lý giới hạn kẹp để suy ra $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ln 2$.

Ví dụ 9. *Giả sử $x_n \in (0; 1)$ là nghiệm của phương trình*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \ldots + \frac{1}{x-n} = 0.$$

Chứng minh dãy (x_n) hội tụ. Tìm giới hạn đó.

Chứng minh. Đặt $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \ldots + \frac{1}{x-n}$, thì $f_n(x_n) = 0$.
Ta thấy $0 < x_n < 1$ nên

$$f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + \frac{1}{x_n - n - 1} = \frac{1}{x_n - n - 1} < 0.$$

Trong khi đó $f_{n+1}(0^+) > 0$. Theo tính chất của hàm liên tục, trên khoảng $(0; x_n)$ có ít nhất một nghiệm của $f_{n+1}(x)$, nghiệm đó chính là x_{n+1} . Suy ra $x_{n+1} < x_n$, tức là dãy (x_n) giảm. Do dãy này bị chặn dưới bởi 0 nên nó hội tụ. Ta chứng minh giới hạn đó bằng 0.
Giả sử $\lim x_n = a > 0$. Khi đó, do dãy (x_n) giảm nên ta có $x_n \geq a, \forall n$.
Do

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{n} \to +\infty$$

khi $n \to +\infty$ nên tồn tại N sao cho với mọi $n \geq N$ ta có

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{n} > \frac{1}{a}.$$

Khi đó với $n \geq N$ thì

$$0 = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n - 1} + \ldots + \frac{1}{x_n - n} < \frac{1}{x_n} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} + \ldots + \frac{1}{-n} < \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0.$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ phải có $\lim x_n = 0$. □

Ví dụ 10. *Tồn tại hay không hai đa thức $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ thoả mãn*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh. Giả sử tồn tại hai đa thức $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ thoả mãn yêu cầu bài toán. Vì $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = +\infty$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, suy ra $\deg f > \deg g$. Gọi a_0, b_0 lần lượt là hệ số dẫn đầu của $f(x), g(x)$ thì

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{xg(x)} = \left[\begin{array}{l} +\infty \\ \dfrac{a_0}{b_0} \end{array}\right. \tag{1}$$

Mặt khác với $N > 0$ tuỳ ý, ta có

$$\begin{aligned}
0 &\le \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N}\right) + \left(\frac{1}{N+1} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right] \\
&\le \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N}\right) + \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{N+1} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \\
&\le 0 + \lim_{n\to+\infty}\frac{n-N}{n(N+1)} \le \frac{1}{N}
\end{aligned}$$

Do đó

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = 0 \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra mâu thuẫn. Vậy không tồn tại đa thức $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ thoả mãn yêu cầu bài toán. □

4. Các bài toán số học

Ví dụ 11. ***(Brazil MO 1983)*** *Chứng minh rằng*

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

không là số nguyên với mọi $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Chứng minh. Kí hiệu k là số tự nhiên thoả mãn $2^k \le n < 2^{k+1}$ và M là tích tất cả các số lẻ không vượt quá n. Khi đó

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Suy ra

$$2^{k-1}.M.H_n = 2^{k-1}M + 2^{k-2}M + 2^{k-1}.\frac{M}{3} + \ldots + \frac{M}{2^2} + \ldots + \frac{2^{k-1}M}{n} \notin \mathbb{Z}.$$

Vậy $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ không thể là một số nguyên. □

Ví dụ 12. ***(IMO 1979)*** *Cho* $p, q \in \mathbb{N}$ *sao cho*

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Chứng minh rằng p *chia hết cho* 1979.

Chứng minh. Áp dụng đồng nhất thức Catalan ta có

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \ldots + \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \ldots + \frac{1}{1319} + \frac{1}{6601} + \ldots + \frac{1}{1319}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{660} + \frac{1}{1319}\right) + \left(\frac{1}{661} + \frac{1}{1318}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{1319} + \frac{1}{660}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1979}{660.1319} + \frac{1979}{661.1318} + \ldots + \frac{1979}{1319.660}\right] = 1979.\frac{A}{B}
\end{aligned}$$

Ở đây B là tích của các số nguyên không vượt quá 1319.
Do 1979 là số nguyên tố, vì vậy $1979|p$. □

Ví dụ 13. *Cho* $p > 3$ *là một số nguyên tố, m và là các số nguyên nguyên tố cùng nhau sao cho*

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Chứng minh rằng m chia hết cho p

Chứng minh. Chú ý rằng

$$((p-1)!)^2.\frac{m}{n} = ((p-1)!)^2\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

là một số nguyên. Cũng chú ý rằng

$$\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{p-1}\right\}$$

là một hệ thặng dư đầy đủ modulo p. Theo định lý Wilson, ta có

$$\begin{aligned}
((p-1)!)^2\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^2}\right) &\equiv (-1)^2\left[1^2 + 2^2 + \ldots + (p-1)^2\right] \\
&\equiv \frac{(p-1)p(2p-3)}{6} \equiv 0 (\bmod p)
\end{aligned}$$

Do $p \geq 5$ và $\gcd(6, p) = 1$. Vì vậy p chia hết $\dfrac{((p-1)!)^2 m}{n}$.
Do $\gcd((p-1)!, p) = 1$, ta phải có $p|m$. □

Ví dụ 14. ***(Định lý Wolstenholme)*** *Cho* $p > 3$ *là số nguyên tố. Chứng minh rằng*

$$p^2|(p-1)!\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1}\right).$$

Chứng minh. Đặt

$$S = (p-1)!\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1}\right)$$

thì

$$2S = (p-1)!\sum_{i=1}^{p-1}\left[\frac{1}{i} + \frac{1}{p-i}\right] = (p-1)!\sum_{i=1}^{p-1}\frac{p}{i(p-i)} = p.T$$

ở đây $T = (p-1)!\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i(p-i)}$.

Do $2S$ là một số nguyên và p là số nguyên tố cùng nhau với các mẫu số của các số hạng trong T, bản thân T là một số nguyên. Do $p > 3, \gcd(p,2) = 1$ và p phải chia hết S. Ta cần chỉ ra p cũng chia hết T. Theo bài toán trên, ta có

$$T \equiv (p-1)!\sum_{i=1}^{p-1}\left(-\frac{1}{i^2}\right) \equiv (p-1)!\frac{m}{n} \equiv 0(\operatorname{mod} p)$$

do $p|m$ và $\gcd(m,n) = 1$. □

Ví dụ 15. ***(Định lý Euclide)** Chứng minh rằng có vô hạn số nguyên tố*

Chứng minh. Định lý này có khoảng gần 20 chứng minh và chứng minh sau là của Euler.
Giả sử có hữu hạn số nguyên tố $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$. Đặt

$$N = \prod_{i=1}^{m}\left(1 + \frac{1}{p_i} + \ldots + \frac{1}{p_i^k} + \ldots\right) = \prod_{i=1}^{m}\frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}}.$$

Mặt khác, bằng khai triển và sử dụng phân tích chuẩn tắc của các số nguyên dương, ta được

$$N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

Suy ra

$$\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \to +\infty \Rightarrow \prod_{i=1}^{m}\frac{p_i}{p_i - 1} \to +\infty.$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ điều giả sử là sai. Vậy tập các số nguyên tố là vô hạn. □

Nhận xét: Ta có

$$\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{\prod_{i=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)} \to +\infty \Rightarrow \prod_{i=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \to 0,$$

suy ra $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{p_i} = +\infty$.

Paul Erdós cũng đã đưa ra hai chứng minh rất đẹp cho sự phân kỳ của chuỗi $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{p_i}$ (xem [2]).

Ngày nay có nhiều hướng nghiên cứu liên quan đến chuỗi điều hoà, chẳng hạn như: Nghiên cứu các cách chứng minh sự phân kỳ của chuỗi, mở rộng hằng số Euler và các đồng nhất thức, mở rộng định lý Wolstenholme, bài toán về sự phân bố số nguyên tố, số P- adic,...

Hy vọng bạn đọc sẽ tìm thấy những đi ều bổ ích khi đọc bài viết này và tự tìm tòi thêm những vấn đề nêu trên. Vì bài viết được hoàn thành trong thời gian ngắn và sự hiểu biết của bản thân tác giả có hạn nên không tránh khỏi thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được sự góp ý chân thành từ bạn đọc để bài viết được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng chúng tôi xin nêu một số bài toán liên quan đến chuỗi điều hòa để cung cấp thêm tư liệu cho bạn đọc.

1. **(IMO SL 1989)** Chứng minh rằng

$$1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\ldots+\frac{1}{478}+\frac{1}{479}-\frac{2}{480}=2\sum_{k=0}^{159}\frac{641}{(161+k)(480-k)}$$

2. **(Canada MO 1973)** Chứng minh rằng

$$n+H_1+H_2+H_3+\ldots+H_{n-1}=nH_n, \forall n\geq 2$$

3. **(Rom Math Magazine, July 1998)** Cho

$$A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{2011.2012},\ B=\frac{1}{1007.2012}+\frac{1}{1008.2011}+\ldots+\frac{1}{2012.1007}.$$

Tính $\dfrac{A}{B}$.

4. **(IMC, Senior Individual Contest 2013)** Cho biểu thức

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

bắt đầu từ ngoặc đơn thứ hai, tổng bên trong nhận được khi ta bỏ đi hạng tử đầu tiên của tổng trong ngoặc đơn phía trước. Tính giá trị của biểu thức khi $n=2013$.

5. **(APMO 1997)** Cho

$$S=1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{1993006}}$$

ở đây các mẫu số chứa tổng riêng của dãy các nghịch đảo của số tam giác. Chứng minh rằng $S>1001$.

6. **(T2/198 THTT)** Đặt $k_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có

$$\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{3k_2^2}+\frac{1}{5k_3^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)k_n^2}<2$$

7. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số không âm sao cho $a_1 a_2 \ldots a_k \geq \dfrac{1}{(2k)!}, \forall k$. Chứng minh rằng
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

8. **(IMO SL 1978)** Cho $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ là một hàm đơn ánh. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi(k)}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

9. **(Germany MO 1980)** Chứng minh rằng với các số tuỳ ý $n, k \in \mathbb{N}$ lớn hơn 1, ta có bất đẳng thức $\displaystyle\sum_{j=2}^{n^k} \frac{1}{j} > k \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}$

10. Chứng minh các đẳng thức:

a) $\dfrac{\binom{n}{1}}{1.2} - \dfrac{\binom{n}{2}}{2.3} + \dfrac{\binom{n}{3}}{3.4} + \ldots + (-1)^{n+1} \dfrac{\binom{n}{n}}{n(n+1)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n+1}$

b) $\dfrac{\binom{n}{0}}{1^2} - \dfrac{\binom{n}{1}}{2^2} + \dfrac{\binom{n}{2}}{3^2} + \ldots + (-1)^n \dfrac{\binom{n}{n}}{(n+1)^2} = \dfrac{1}{n+1}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}\right).$

11. Tính giới hạn $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}.$

12. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + \dfrac{(-1)^n}{n+1}, n \geq 1.$

a) Chứng minh rằng $u_{2n} = H_{2n} - H_n, \forall n \geq 1.$

b) Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

13. Tìm giới hạn của dãy $a_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{1^2 + 2^2} + \ldots + \dfrac{1}{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}, n \geq 1.$

14. Cho dãy số (a_n) có giới hạn $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = a$. Chứng minh rằng
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_1}{n+1} + \frac{a_2}{n+2} + \ldots + \frac{a_n}{2n}\right) = a \ln 2.$$

15. **(Olympic 30/4/2015)** Cho dãy số $u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n+1}}}{n+1} + \dfrac{e^{\frac{1}{n+2}}}{n+2} + \ldots + \dfrac{e^{\frac{1}{2n}}}{2n}, \forall n \geq 1$. Tìm $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n.$

16. Dãy số (x_n) thoả mãn điều kiện $|x_n - x_m| > \dfrac{1}{n}, \forall n, m \in \mathbb{N}^*; n < m$. Chứng minh dãy đã cho không bị chặn.

17. **(PTNK TST 2015)** Cho dãy $(x_n) : x_n = \dfrac{1}{n\cos n}, n \geq 1$. Tìm giới hạn
$$\lim \frac{x_1 + x_3 + \ldots + x_{2n-1}}{x_2 + x_4 + \ldots + x_{2n}}.$$

18. Chứng minh rằng dãy (R_n) xác định bởi
$$R_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{24n}\right)$$
hội tụ tới γ

19. **(VN TST 1999)** Cho dãy số thực dương $(u_n)_{n=1}^{\infty}$. Với mỗi số nguyên dương n, giả sử k_n là số nguyên dương nhỏ nhất thoả mãn $\displaystyle\sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{i} \geq \sum_{i=1}^{n} u_i$. Chứng minh rằng dãy $\left(\dfrac{k_{n+1}}{k_n}\right)$ có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.

20. **(ITOT, Junior A – Level, Fall 2013)** Số $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n}$ được biểu diễn dưới dạng một phân số tối giản. Giả sử $3n + 1$ là một số nguyên tố. Chứng minh rằng tử số của phân số này là một bội của $3n + 1$.

21. Chứng minh rằng $H(m,n) = \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m+1} + \ldots + \dfrac{1}{n} \notin \mathbb{Z}, 1 \leq m < n$

22. **(IMO SL 1979)** Chứng minh rằng không có số nguyên $a \geq 1, n \geq 1$ sao cho
$$1 + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a} + \ldots + \frac{1}{1+na} \in \mathbb{Z}.$$

23. **(ARML 2002)** Cho a là số nguyên sao cho $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{23} = \dfrac{a}{23!}$. Tìm phần dư khi a chia cho 13.

24. **(Bulgaria MO 2004)** Với mỗi $n \in \mathbb{Z}^+$, tổng $1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ được viết dưới dạng $\dfrac{p_n}{q_n}$ với $(p_n, q_n) = 1$.
a) Chứng minh rằng 3 không chia hết p_{67}
b) Tìm tất cả $n \in \mathbb{Z}^+$ sao cho 3 chia hết p_n.

25. **(AMM E1408)** Tìm $v_2(A)$, với A là tử số của $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \ldots + \dfrac{1}{2k-1}, k \geq 1$.

26. Cho $p \geq 5$ là một số nguyên tố. Chứng minh rằng nếu $1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{p} = \dfrac{a}{b}$ thì $p^4 | (ap - b)$.

27. Cho p là số nguyên tố lẻ. Đặt
$$\frac{a}{(p-1)!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}.$$
Chứng minh rằng $a \equiv \dfrac{2 - 2^p}{p} \pmod p$

28. Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{8\notin n}\frac{1}{n}$ là hội tụ. Ở đây $8\notin n$ tức là n không chứa chữ số 8 trong biểu diễn thập phân

29. **(VN TST 2005)** Một số nguyên dương được gọi là " số Kim cương 2005" nếu trong biểu diễn thập phân của nó có 2005 số 9 đứng cạnh nhau liên tiếp. Dãy $(a_n), n = 1, 2, 3, \dots$ là dãy tăng ngặt các số nguyên dương thoả mãn $a_n < nC$ (C là hằng số thực dương nào đó). Chứng minh rằng dãy số $(a_n), n = 1, 2, 3, \dots$ chứa vô hạn "số Kim cương 2005".

30. **(VN TST 1998)** Cho số nguyên dương $m > 3$. Giả sử $p_1, p_2, \dots, p_k$ là tất cả các số nguyên tố không vượt quá m. Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}\right) > \ln(\ln m)$

31. **(APMO 2006)** Cho $p \geq 5$ là một số nguyên tố và r là số các cách đặt p quân cờ đam trên bàn cờ $p \times p$ ô sao cho tất cả các quân cờ không cùng một hàng (nhưng có thể cùng cột). Chứng minh rằng r chia hết cho p^5.

32. **(Ibero American 2005)** Cho $p > 3$ là một số nguyên tố. Chứng minh rằng nếu $\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i^p} = \frac{n}{m}$ với $(n, m) = 1$ thì $p^3|n$.

33. Cho p là số nguyên tố lẻ. Đặt $T(p,k) = \sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i^k}, k \in \mathbb{N}^*$. Xét số dư của $T(p,k)$ khi chia cho p.

34. **(Canada MO 1973)** Cho $m > 1$ là một số nguyên dương. Chứng minh rằng $\frac{1}{m}$ là tổng của các số hạng liên tiếp trong chuỗi $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(j+1)}$.

35. Chứng minh rằng $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sigma(n!)}{n!} = +\infty$

36. **(Brazil MO 1992)** Đặt $d(n) = \sum_{0<d|n} 1$. Chứng minh với mọi số tự nhiên $n > 1$, ta có

$$\sum_{2\leq i\leq n}\frac{1}{i} \leq \sum\frac{d(i)}{n} \leq \sum_{1\leq i\leq n}\frac{1}{i}$$

37. Cho hàm $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thoả mãn $f(1) = 1$, với mọi $k \in \left[3^{d-1}; 3^d\right), d \geq 1$ thì $f(k) = kf(d)$. Đặt $x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}$. Chứng minh rằng dãy (x_n) không bị chặn.

38. **(USA MO 2010)** Cho $q = \frac{3p-5}{2}$ với p là một số nguyên tố lẻ, và đặt

$$S_q = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{5.6.7} + \dots + \frac{1}{q(q+1)(q+2)}.$$

Chứng minh rằng nếu $\frac{1}{p} - 2S_q = \frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}$, thì $m - n$ chia hết cho p.

39. Cho dãy (a_n) tăng ngặt gồm các số nguyên dương thoả mãn dãy $(a_{n+1} - a_n)$ bị chặn. Chứng minh rằng tập các ước nguyên tố của dãy (a_n) là vô hạn.

40. a) Chứng minh với mọi số nguyên tố $p > 3$ thì $\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 \left(\bmod p^3\right)$

    b) Chứng minh với mọi số nguyên tố $p > 3$ thì $\binom{ap}{bp} \equiv \binom{a}{b} \left(\bmod p^3\right);\ a, b \in \mathbb{N}^*$.

    c) Chứng minh với p là một số nguyên tố và $n = p^l, l \geq 2$ thì $\binom{2n-1}{n-1} \equiv \binom{2p-1}{p-1} \left(\bmod p^4\right)$

41. **(Argentina MO 2014)** Một số nguyên $n \geq 3$ được gọi là "Đặc biệt" nếu nó không chia hết $(n-1)!\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right)$. Tìm tất cả các số "Đặc biệt" trong khoảng $[10; 100]$.

42. Cho $p > 3$ là một số nguyên tố, thế thì $\sum_{k=1}^{p-1} H_k \equiv -\frac{p^3}{3} B_{p-3} - p + 1 \left(\bmod p^4\right)$ Trong đó B_n là các số Bernoulli được xác định bởi

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6} \text{ và } B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k, n \geq 1$$

Tài liệu tham khảo

[1] T. -W. Leung, "Harmonic Series," *Mathematical Excalibur*, vol. 15, no. 16, 2011.

[2] S. J. Kifowit and T. A. Stamps. "The Harmonic Series Diverges Again and Again," *AMATYC Review*, 2006.

SỐ DƯ CỦA $A.a^x + Bx$

Yimin Ge, Vienna, Áo
(Người dịch: Nguyễn Tất Thu, Đồng Nai)

1. Mở đầu

Trong thời gian gần đây, một số vấn đề của lý thuyết số đã trở nên phổ biến trong các kì thi. Cụ thể là vấn đề tìm số dư của $a^x + bx$ theo modulo của số nguyên dương m. Trong bài viết này, chúng tôi đưa ra bài toán tổng quát cho các bài toán trên.

Chúng ta sẽ bắt đầu với một định lí cơ bản về sự tồn tại thặng dư bậc hai. Mặc dù trong bài toán này ta không cần đến nó, nhưng ý tưởng chứng minh định lí đó có thể áp dụng trong nhiều vấn đề và chúng tôi sẽ sử dụng nó trong suốt bài viết này.

Định lý 1. *Cho p là số nguyên tố lẻ, k là số nguyên dương và a là một số nguyên không chia hết cho p. Khi đó a là thặng dư bậc hai theo modulo p^k khi và chỉ khi a là thặng dư bậc hai theo modulo p.*

Chứng minh. Ta thấy nếu a là thặng dư bậc hai theo modulo p^k thì hiển nhiên a là thặng dư bậc hai theo modulo p. Do đó, ta chỉ cần chứng minh a là thặng dư bậc hai theo modulo p^k với a là thặng dư bậc hai theo modulo p. Ta chứng minh vấn đề này bằng cách quy nạp theo k.

Giả sử a là thặng dư bậc hai theo modulo p^k, ta chứng minh a là thặng dư bậc hai theo modulo p^{k+1}. Thật vậy:

Vì a là thặng dư bậc hai theo modulo p^k nên tồn tại số tự nhiên x sao cho

$$x^2 \equiv a \pmod{p^k}$$

hay là tồn tại số nguyên l sao cho

$$x^2 = a + l.p^k$$

với x không chia hết cho p.
Đặt $x' = x + y.p^k$, với y là một số nguyên. Ta chứng minh tồn tại số nguyên y sao cho

$$x'^2 \equiv a \pmod{p^{k+1}}.$$

Ta có

$$x'^2 = \left(x + y.p^k\right)^2 = x^2+2xyp^k+y^2p^{2k} = a+(l+2xy)p^k+y^2p^{2k} \equiv a+(l+2xy).p^k \pmod{p^{k+1}}.$$

Ta chứng minh tồn tại y sao cho

$$l + 2xy \equiv 0 \pmod{p}.$$

Rõ ràng đây là phương trình đồng dư tuyến tính và $(2x, p) = 1$ nên phương trình luôn có nghiệm nguyên y.
Vậy định lí được chứng minh. □

Ý tưởng quan trọng trong chứng minh trên là một kĩ thuật rất hữu ích: Sử dụng giả thiết quy nạp theo modulo m, ta xây dựng một nghiệm mới x' theo modulo m' dựa vào nghiệm x theo modulo m bằng cách thêm vào biến mới y. Chú ý rằng x' vẫn bất biến theo modulo m khi y thay đổi. Nó còn được dùng để chứng minh các vấn đề khác khi chọn những giá trị y thích hợp.

Bài toán sau xuất hiện trong kí thi Olympic Brazil năm 2005.

Bài toán 1. ***(Brazil 2005)*** *Cho các số nguyên dương a, b và c. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương x sao cho*

$$a^x + x \equiv b \pmod{c}.$$

Một trường hợp đặc biệt của bài toán trên xuất hiện trong đề IMO Shortlist năm 2006.

Bài toán 2. ***(IMO Shortlist 2006)*** *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n luôn tồn tại số nguyên dương m sao cho n là ước của $2^m + m$.*

Một bài toán tương tự đã được đưa ra trong kì thi USA TST năm 2007.

Bài toán 3. ***(USA TST 2007)*** *Tồn tại hay không các số nguyên dương a, b sao cho a không là ước của $b^n - n$ với mọi số nguyên dương n.*

Tất cả các bài toán được được tổng quát thành bài toán sau

Định lý 2. *Cho A, a, B là các số nguyên và M là số nguyên dương. Khi đó, điều kiện cần và đủ để với mọi số nguyên C, luôn tồn tại số nguyên dương x sao cho*

$$A.a^x + Bx \equiv C \pmod{M}$$

là $\gcd(B, M) = 1$.

Lưu ý: Ta có thể phát biểu định li trên theo một cách khác là

$$\{A.a^x + Bx \mod m | x \in \mathbb{Z}^+\} = \{0, 1, \ldots, M-1\} \text{ khi và chỉ khi } \gcd(M, B) = 1.$$

Chứng minh. Ta chứng minh điều kiện cần: Giả sử $(M, B) > 1$, gọi p là một ước nguyên tố chung của M và B. Khi đó, nếu $p | Aa$ thì ta chọn $C = 1$, ngược lại ta chọn $C = 0$. Khi đó, phương trình $A.a^x + Bx \equiv C \pmod{p}$ không có nghiệm x.

Chứng minh điều kiện đủ: Ta có thể chứng minh theo hai cách sau:

Cách 1. Giả sử $(B, M) = 1$. Gọi C là một số nguyên bất kì và đặt $M = mn$ với $m, n \in \mathbb{Z}^+$ sao cho mỗi ước nguyên tố của n là ước của a và $\gcd(a, m) = \gcd(n, m) = 1$ (điều này có nghĩa là nếu $a = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}.m'$ và $M = p_1^{\beta_1}.p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}.m$ với $p_i \nmid m', m$ thì ta chọn $n = p_1^{\beta_1}.p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}$). Khi đó $n | a^x$ với x đủ lớn. Ta có

$$A.a^x + Bx \equiv C \pmod{M} \Leftrightarrow \begin{cases} A.a^x + Bx \equiv C \pmod{m} \\ A.a^x + Bx \equiv C \pmod{m} \end{cases}.$$

Từ $(B, n) = 1$, suy ra tồn tại số nguyên dương B' sao cho $BB' \equiv 1 \pmod{n}$. Khi đó, với x đủ lớn thỏa mãn $x \equiv B'C \pmod{n}$ thỏa mãn phương trình

$$A.a^x + Bx \equiv C \pmod{n}. \tag{1}$$

Đặt $x = yn + B'C$, ta chứng minh tồn tại số nguyên dương y đủ lớn thỏa mãn

$$A.a^x + Bx \equiv C \pmod{m}. \tag{2}$$

Điều này tương đương với

$$\begin{aligned} & A.a^{ny+B'C} + B(ny + B'C) \equiv C \pmod{m} \\ \Leftrightarrow\ & A.a^{B'C}.a^{ny} + (Bn)y + (BB'C - C) \equiv 0 \pmod{m} \\ & c.e^y + by + t \equiv 0 \pmod{m} \end{aligned} \tag{3}$$

với $c = A.a^{B'C}, e = a^n, b = Bn, t = BB'C - C$. Rõ ràng $\gcd(e, m) = \gcd(b, m) = 1$.
Đặt $f(y) = ce^y + by + t$. Bây giờ ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp theo m.

Với $m = 1$ thì (3) hiển nhiên đúng. Giả sử $m > 1$ và bài toán đúng với mọi $m' < m$. Gọi p là ước nguyên tố lớn nhất của m và giả sử $m = p^k.p_1^{k_1}.p_2^{k_2}.\dots.p_r^{k_r}$. Đặt $m' = p^{k-1}.p_1^{k_1}.p_2^{k_2}.\dots.p_r^{k_r}$. Khi đó, tồn tại số nguyên dương y để

$$f(y) \equiv 0 \pmod{m'}$$

hay tồn tại số nguyên l sao cho $f(y) = lm'$. Ta chọn

$$y' = y + z.(p-1)p^{k-1}\prod_{i=1}^{r}(p_i - 1)p_i^{k_i}$$

với z là một số nguyên dương. Ta chứng minh tồn tại z sao cho $f(y') \equiv 0 \pmod{m}$. Ta có

$$\begin{aligned} f\left(y'\right) &= ce^{y+z(p-1)p^{k-1}\prod_{i=1}^{r}(p_i-1)p_i^{k_i}} + b\left(y + z(p-1)p^{k-1}\prod_{i=1}^{r}(p_i - 1)p_i^{k_i}\right) + t \\ &= ce^y.e^{z(p-1)p^{k-1}\prod_{i=1}^{r}(p_i-1)p_i^{k_i}} + by + t + zb(p-1)p^{k-1}\prod_{i=1}^{r}(p_i - 1)p_i^{k_i} \\ &\equiv (ce^y + by + t) + zb(p-1)p^{k-1}\prod_{i=1}^{r}(p_i - 1)p_i^{k_i} \\ &\equiv lm' + z.nm'(p-1)\prod_{i=1}^{r}(p_i - 1) \pmod{m} \end{aligned}$$

(ở trên ta đã sử dụng $e^{z(p-1)p^{k-1}\prod_{i=1}^{r}(p_i-1)p_i^{k_i}} \equiv 1 \pmod{m}$ theo định lí Euler's).

Do đó, ta chứng minh

$$lm' + zbm'(p-1)\prod_{i=1}^{r}(p_i - 1) \equiv 0 \pmod{m}$$

có nghiệm nguyên dương z, tức là phương trình

$$l + zb(p-1)\prod_{i=1}^{r}(p_i - 1) \equiv 0 \pmod{p}$$

có nghiệm nguyên dương z.

Điều này luôn đúng do đây là phương trình đồng dư tuyến tính và $\gcd(b(p-1)\prod_{i=1}^{r}(p_i-1), p) = 1$. Do vậy bước quy nạp được hoàn tất.

Ở trên ta đã chứng minh được tồn tại số nguyên dương y sao cho $f(y) \equiv 0 \pmod{m}$ hay tồn tại x thỏa mãn (2). Chúng ta cần chứng minh có thể chọn y lớn tùy ý thỏa mãn (3). Điều này luôn thực hiện được vì nếu y thỏa $f(y) \equiv 0 \pmod{m}$ thì $y + \lambda.m.\phi(m)$ với $\lambda \in \mathbb{Z}^+$ cũng thỏa mãn.

Vậy định lí được chứng minh.

Cách 2. Giả sử $\gcd(B, M) = 1$ và C là một số nguyên bất kì. Ta có dãy $Aa^1, Aa^2, \ldots$ là dãy tuần hoàn xét theo modulo M. Gọi T là chu kì của dãy, tức là T là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho

$$A.a^{x+kT} \equiv A.a^x \pmod{M}$$

với mọi x đủ lớn.

Đặt $d = \gcd(T, M)$. Trước hết ta chứng minh $d < M$ với $M > 1$.
Vì $d|M$ nên $d \le M$. Giả sử $d = M$, khi đó $M|T$ nên $M \le T$. Tuy nhiên, T là chu kì của dãy Aa^i khi xét theo modulo M nên $T \le M$, do đó $T = M$. Suy ra tồn tại số nguyên dương X sao cho $A.a^X \equiv 0 \pmod{M}$ và như vậy $A.a^x \equiv 0 \pmod{M}$ với mọi $x \ge X$. Dẫn đến $T = 1$, nên $M = 1$.

Tiếp theo ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp theo M.

Với $M = 1$ là trường hợp tầm thường. Ta xét $M > 1$ và giả sử bài toán đúng với mọi $m < M$, dẫn đến bài toán cũng đúng với d. Tức là, tồn tại số nguyên dương x sao cho

$$A.a^x + Bx \equiv C \pmod{d}$$

hay $A.a^x + Bx = C + ld$ với l là số nguyên. Đặt $x' = x + kT$ với k là số nguyên dương. Ta có

$$\begin{aligned} A.a^{x'} + Bx' &= A.a^{x+kT} + B(x + kT) \\ &\equiv (A.a^x + Bx) + kBT \\ &= C + ld + kBT \pmod{M}. \end{aligned}$$

Tiếp theo ta chứng minh phương trình đồng dư

$$ld + kBT \equiv 0 \pmod{M}$$

có nghiệm nguyên dương k. Chia hai vế của phương trình đồng dư trên cho d ta được phương trình

$$l + kB\frac{T}{d} \equiv 0 \pmod{\frac{M}{d}}$$

Phương trình này luôn có nghiệm nguyên dương k vì $\gcd\left(B\frac{T}{d}, \frac{M}{d}\right) = 1$.
Vậy bài toán được chứng minh. □

BÀI TOÁN HAY LỜI GIẢI ĐẸP

Trần Nam Dũng
(Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG - TP.HCM)

LỜI GIỚI THIỆU

Chuyên mục này được lấy cảm hứng từ bài viết của thầy Nguyễn Duy Liên ở Epsilon số 3 về bài toán số 6 trong kỳ thi IMO 2001 với 5 cách giải khác nhau. Mục này sẽ để dành viết về những bài toán hay, lời giải đẹp và những câu chuyện thú vị xung quan những bài toán và lời giải đó.

Tên của chuyên mục được mượn từ tên của một nhóm những người yêu toán trên Facebook do anh Nguyễn Văn Lợi sáng lập "*Bài toán hay – Lời giải đẹp – Đam mê toán học*". Chuyên mục ghi nhận các đề cử của bạn đọc và sẽ chọn đăng mỗi kỳ 1, 2 bài toán.

Số này chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc về bài toán số 1 trong đề thi toán quốc tế năm 1993.

Bài toán 1. *(IMO 1993, bài toán 1) Cho $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ với $n > 1$. Chứng minh rằng $f(x)$ không thể phân tích thành tích của hai đa thức khác hằng với hệ số nguyên.*

Bài toán này tuy được đặt ở vị trí số 1, tức là được coi là bài dễ của ngày thứ nhất (và cũng là của cả kỳ thi) nhưng thực tế thì điểm trung bình của bài này thấp hơn nhiều so với các bài số 4, số 5 và xấp xỉ với bài 2 và bài 6. Gần một nửa thí sinh không làm được gì bà khoảng 20% thí sinh khác chỉ được 1 điểm (chắc là do ý tưởng phản chứng). Chính tình huống bài 1 khó đã lý giải vì sao điểm chuẩn năm 1993 rất thấp (11 cho huy chương đồng, 20 điểm cho huy chương bạc và 30 điểm cho huy chương vàng).

Trong chương trình chuyên toán phổ thông, không có nhiều công cụ để chứng minh tính bất khả quy của một đa thức với hệ số nguyên. Thực tế chúng ta chỉ có một tiêu chuẩn bất khả quy duy nhất (điều kiện đủ) là tiêu chuẩn Eisentein:

Tiêu chuẩn Eisenstein. *Cho đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x_{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho các điều kiện sau đây đồng thời xảy ra:*

i) *a_n không chia hết cho p.*

ii) *$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ chia hết cho p.*

iii) *a_0 không chia hết cho p^2.*

Khi đó $P(x)$ bất khả quy.

Ngoài ra, còn có một cách tiếp cận dùng đến nghiệm của đa thức, với ví dụ kinh điển sau:

Bài toán 2. *Chứng minh rằng đa thức $x^n + 4$ khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$ khi và chỉ khi n chia hết cho 4.*

Lời giải của bài toán IMO 1993, rất thú vị, dựa trên việc phân tích kỹ cách chứng minh tiêu chuẩn Eisenstein và lời giải bài toán 2 nói trên. Vì cả tiêu chuẩn Eisenstein và bài toán 2 đều rất nổi tiếng, nên chúng tôi nhắc lại chứng minh và lời giải mà chuyển sang luôn phần lời giải cho bài toán 1.

Cách 1. Ta không thể áp dụng trực tiếp tiêu chuẩn Eisenstein cho $p = 3$ vì $a_{n-1} = 5$ không chia hết cho 3 (và nếu áp dụng được như vậy thì đã không phải là đề thi toán quốc tế). Tuy nhiên, ta có thể dùng tư tưởng trong chứng minh tiêu chuẩn Eisenstein để giải quyết bài toán.

Cụ thể, lặp lại phép chứng minh tiêu chuẩn Eisenstein, ta có thể chứng minh được tiêu chuẩn Eisentein mở rộng như sau:

Cho đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x_{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Giả sử tồn tại số nguyên tố p và số nguyên dương k thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

1) *a_n không chia hết cho p.*

2) *a_0 chia hết cho p nhưng không chia hết cho p^2.*

3) *$a_1, a_2, \ldots, a_{n-k}$ chia hết cho p.*

Khi đó, nếu $P(x) = Q(x) \cdots S(x)$ với $Q(x), S(x)$ là các đa thức với hệ số nguyên thì một trong hai đa thức $Q(x), S(x)$ có bậc nhỏ hơn k.

Ở đây theo điều kiện đề bài thì $k = 2$. Do đó nếu $f(x)$ khả quy và $f(x) = Q(x) \cdots S(x)$ thì áp dụng tiêu chuẩn trên, ta suy ra một trong hai đa thức $Q(x)$ và $S(x)$ có bậc 1. Từ đó suy ra $f(x)$ có nghiệm hữu tỷ. Thế nhưng ta biết mọi nghiệm hữu tỷ của $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ đều phải là số nguyên (xem bài tập 2 ở mục 1), mà khi x nguyên thì $x^n + 5x^{n-1} + 3$ luôn là số lẻ, không thể bằng 0. Mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai, suy ra $f(x)$ bất khả quy. □

Cách 2. Giả sử $x_1, \ldots, x_n$ là các nghiệm phức của đa thức $x^n + 5x^{n-1} + 3$. Khi đó ta có $P(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3 = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$. Ta có với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$

$$x_i^{n-1}(x_i + 5) = -3, \quad \text{suy ra} \quad |x_i|^{n-1}|x_i + 5| = 3. \tag{1}$$

Giả sử $P(x) = Q(x) \cdot S(x)$ với $Q(x), S(x)$ là các đa thức với hệ số nguyên thì không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử

$$Q(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_k), \; S(x) = (x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n).$$

Ta có $x_1 x_2 \cdots x_k$ và $x_{k+1} \cdots x_n$ là các số nguyên có tích bằng 3. Không mất tính tổng quát, giả sử

$$|x_1 \cdots x_k| = 3 \;\; |x_{k+1} \cdots x_k| = 1. \qquad (2).$$

Trong (1) cho i chạy từ 1 đến k rồi nhân lại, chú ý đến (2) ta được

$$3^{n-1}|(x_1 + 5) \cdots (x_k + 5)| = 3^k.$$

Biểu thức trong dấu | | bằng $|Q(-5)|$ do đó là số nguyên dương, suy ra $k \geqslant n - 1$. Như vậy $S(x)$ là đa thức bậc nhất. Và đến đây ta lại áp dụng lý luận như ở phần cuối của các giải 1. □

Với cách giải đã áp dụng ở cách 2, ta có thể làm mạnh kết quả sau, là bài toán đã xuất hiện trong kỳ thi VMO 2014 (và cũng đã gây khó dễ cho nhiều thí sinh).

Bài toán 3. *(VMO 2014) Cho đa thức* $P(x) = (x^2 - 7x + 6)^{2n} + 13$, *trong đó* n *là một số nguyên dương. Chứng minh rằng* $P(x)$ *không thể biểu diễn dưới dạng tích của* $n + 1$ *đa thức khác hằng có hệ số nguyên.*

Lời giải chính thức của bài toán dựa vào các ý sau:

1) $P(x)$ không có nghiệm thực, do đó các thừa số của $P(x)$ có bậc chẵn.

2) $P(x)$ có bậc $4n$, do đó nếu $P(x)$ phân tích thành tích của $n + 1$ đa thức khác hằng với hệ số nguyên thì một trong các đa thức đó phải có bậc 2.

Tiếp theo dùng đến việc xér các tính chất số học của các hệ số và suy ra mâu thuẫn.

Tuy nhiên, nếu xem xét kỹ cách chứng minh và dùng ý tưởng của cách giải thứ hai thì ta có thể dễ dàng chứng minh được kết quả mạnh hơn như sau.

Bài toán 4. *Cho đa thức* $P(x) = (x^2 - 7x + 6)^{2n} + 13$, *trong đó* n *là một số nguyên dương. Chứng minh rằng* $P(x)$ *không thể biểu diễn dưới dạng tích của* 2 *đa thức khác hằng có hệ số nguyên.*

Bài tập này chúng tôi xin dành cho bạn đọc. Hãy đọc kỹ lại cách 2 của lời giải trên và chú ý thêm một chi tiết là nếu $Q(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên thì $Q(1) - Q(6)$ chia hết cho 5.

Như vậy bài toán 1 của IMO 1993 đã phát triển một đề tài kinh điển và đặt ra một hướng phát triển thú vị. Các vấn đề về đa thức bất khả quy luôn thú vị và khó. Và khi chúng ta vượt qua được một khó khăn, kho tàng phương pháp của chúng ta lại được trang bị một vũ khí mới. Có lẽ đó là điều khiến các đề thi IMO luôn được chờ đợi, đón nhận và bình phẩm một cách nhiệt tình.

CÁC VẤN ĐỀ CỔ ĐIỂN VÀ HIỆN ĐẠI

Trần Nam Dũng

(Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG - TP.HCM)

LỜI GIỚI THIỆU

Chuyên mục này dành cho các vấn đề cổ điển và hiện đại được trình bày dưới dạng các bài toán xâu chuỗi. Đó có thể là chuỗi các bài để giải bài toán đẳng chu, chứng minh đẳng thức Euler kỳ diệu $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$, một chuỗi bài toán vận trù ... Cách trình bày xuất phát từ những vấn đề đơn giản, dễ hiểu, những khái niệm mới sẽ được định nghĩa luôn trong bài để có thể đọc tương đối độc lập. Và mỗi một chuỗi bài sẽ nêu ra những vấn đề nhất định, có thể là giải quyết một bài toán kinh điển hay nêu ra những giả thuyết mới, những vấn đề mới. Lời giải và thảo luận về các bài toán sẽ được đăng ở số $N + 3$.

Trong số này, chúng tôi tiếp tục đăng phần cuối tóm tắt lời giải các bài toán đã đăng ở số 2 và bắt đầu đăng lời giải tóm tắt các bài toán đã đăng ở số 3.

Bất đẳng thức Schapiro (tiếp theo kỳ trước)

Ta đang nói về bất đẳng thức sau với $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực dương

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \geq \frac{n}{2}. \tag{1}$$

Khi cuộc thi diễn ra, các thí sinh đã giải quyết khá tốt các bài toán đề nghị ở mục 1, và Ban tổ chức đã quyết định bổ sung hai bài toán sau, thực chất là chứng minh một kết quả rất mạnh của V.Drinfeld về bất đẳng thức Schapiro (kết quả mạnh nhất cho các đánh giá dạng 1.9).

1.10. *a) Với mọi số nguyên dương n tồn tại số $q_n > 1$, sao cho với mọi số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thuộc đoạn $\left[\frac{1}{q_n}, q_n\right]$ bất đẳng thức (1) đúng.*

b) Tồn tại hay không số $q > 1$, sao cho với mọi số nguyên dương n và với mọi $x_i \in \left[\frac{1}{q}, q\right]$ bất đẳng thức (1) đúng.*

Chứng minh. a) Kết quả này thuộc về V.Cirtoaje [9]. Để cho gọn, ta đặt $y_k = x_k + x_{k+1}$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{x_1}{y_2} + \frac{x_2}{y_3} + \cdots + \frac{x_n}{y_1} \geq \frac{n}{2}.$$

Ta biến đổi nó một chút về dạng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2q_n^2 x_k - y_{k+1}}{y_{k+1}} \geq n(q_n^2 - 1),$$

Trong đó q_n là tham số sẽ được chúng ta chọn sau, sao cho tất cả các bất đẳng thức mà ta xét đúng. Vì

$$2q_n^2 x_k - y_{k+1} = (q_n^2 x_k - x_{k+1}) + (q_n^2 x_k - x_{k+2}) \geq 0,$$

nên theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2q_n^2 x_k - y_{k+1}}{y_{k+1}} \geq \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} 2q_n^2 x_k - y_{k+1}\right)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} (2q_n^2 x_k - y_{k+1}) y_{k+1}}.$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$A^2 = \left[\sum_{k=1}^{n} (2q_n^2 x_k - y_{k+1})\right]^2 \geq n(q_n^2 - 1) \sum_{k=1}^{n} (2q_n^2 x_k - y_{k+1}) y_{k+1} = n(q_n^2 - 1) B.$$

Vì $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k = 2 \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, ta có đẳng thức

$$\begin{aligned} A &= (q_n^2 - 1) \sum_{k=1}^{n} y_k, \\ B &= 2q_n^2 \sum_{k=1}^{n} x_k y_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = 2q_n^2 \sum_{k=1}^{n} y_k y_{k+1} - (q_n^2 + 1) \sum_{k=1}^{n} y_k^2. \end{aligned}$$

Từ đó ta chỉ còn cần chứng minh rằng

$$(q_n^2 - 1)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)^2 \geq n\left[2q_n^2 \sum_{k=1}^{n} y_k y_{k+1} - (q_n^2 + 1) \sum_{k=1}^{n} y_k^2\right]. \tag{2}$$

Biến đổi vế trái sử dụng đẳng thức

$$\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)^2 = n \sum_{k=1}^{n} y_k^2 - \sum_{i<k} (y_i - y_k)^2,$$

bất đẳng thức (2) có thể viết dưới dạng

$$n \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k+1})^2 \geq \left(1 - \frac{1}{q_n^2}\right) \sum_{i<k} (y_i - y_k)^2.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k+1})^2 &\geq \sum_{j=i}^{k-1} (y_j - y_{j+1})^2 \geq \frac{1}{k-j}\left[\sum_{j=i}^{k-1} (y_j - y_{j+1})\right] \\ &= \frac{1}{k-j}(y_i - y_k)^2 \geq \frac{1}{n-1}(y_i - y_k)^2. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{n(n-1)}{2}\sum_{k=1}^{n}(y_k-y_{k+1})^2 \geq \frac{1}{n-1}\sum_{i<k}(y_i-y_k)^2,$$

và ta có thể chọn $1-\dfrac{1}{q_n^2}=\dfrac{2}{(n-1)^2}$, tức là $q_n=\dfrac{n-1}{\sqrt{n^2-2n-1}}>1$.

Lưu ý. Khi n tăng thì các giá trị q_n tìm được dần đến 1.

b) Hiện chưa có câu trả lời. □

1.11. *Gọi $S=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là vế trái của bất đẳng thức Schapiro. Ký hiệu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số $\dfrac{x_2}{x_1}, \dfrac{x_3}{x_2}, \ldots, \dfrac{x_n}{x_{n-1}}, \dfrac{x_1}{x_n}$ xếp theo thứ tự tăng dần.*

a) Chứng minh rằng

$$S \geq \frac{1}{a_1(1+a_n)}+\frac{1}{a_2(1+a_{n-1})}+\cdots+\frac{1}{a_n(1+a_1)}.$$

b) Đặt $b_k=\begin{cases}\dfrac{1}{a_ka_{n+1-k}} & \text{nếu } a_ka_{n+1-k}\geq 1\\ \dfrac{2}{a_ka_{n+1-k}+\sqrt{a_ka_{n+1-k}}} & \text{nếu } a_ka_{n+1-k}<1\end{cases}$, *chứng minh rằng*

$$2S \geqslant b_1+b_2+\cdots+b_n.$$

c) Gọi g là hàm lồi lớn nhất không vượt quá các hàm e^{-x} và $2(e^x+e^{\frac{x}{2}})^{-1}$. Chứng minh rằng

$$2S \geqslant g[\ln(a_1a_n)]+g[\ln(a_2a_{n-1}))]+\cdots+g[\ln(a_na_1)] \geqslant n\cdot g(0).$$

d) Chứng minh rằng với mọi $\lambda>\dfrac{g(0)}{2}$ tồn tại số nguyên dương n và các số dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho $S\leqslant \lambda n$.

Chứng minh. a) Đặt $k_i=\dfrac{x_{i+1}}{x_i}$, khi đó

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{k_1(k_2+1)}+\frac{1}{k_2(k_3+1)}+\cdots+\frac{1}{k_n(k_1+1)}\\&\geq\frac{1}{a_1(a_n+1)}+\frac{1}{a_2(a_{n-1}+1)}+\cdots+\frac{1}{a_n(a_1+1)}.\end{aligned}$$

b) Bất đẳng thức đúng bởi vì

$$\frac{1}{a_i(a_{n+1-i}+1)}+\frac{1}{a_{n+1-i}(a_i+1)}=\frac{1+\frac{a_ia_{n+1-i}-1}{(1+a_i)(1+a_{n+1-i})}}{a_ia_{n+1-i}}\geq b_i,$$

trong đó bất đẳng thức cuối cùng đúng do $(1+a_i)(1+a_{n+1-i})\geq(1+\sqrt{a_ia_{n+1-i}})^2$.

c) Bất đẳng thức

$$2S \geqslant g[\ln(a_1a_n)]+g[\ln(a_2a_{n-1}))]+\cdots+g[\ln(a_na_1)],$$

đúng vì $g(x)$ nhỏ hơn cả e^{-x} và $2(e^{x}+e^{\frac{x}{2}})^{-1}$.

Còn bất đẳng thức

$$g[\ln(a_1a_n)] + g[\ln(a_2a_{n-1}))] + \cdots + g[\ln(a_na_1)] \geqslant n \cdot g(0),$$

đúng theo bất đẳng thức Jensen, vì g là hàm lồi.

d) Xem [2]. □

3.3. Các bất đẳng thức hữu dụng liên quan

Chứng minh các bất đẳng thức dưới đây với điều kiện tất cả các số x_k dương. Hãy kiểm tra rằng các hằng số được in đậm không thể thay thế bằng các số lớn hơn (với mỗi n).

2.1. *Bất đẳng thức Mordell.*

a) *Với mọi số không âm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ta có bất đẳng thức*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \geq \min\left\{\frac{n}{2}, 3\right\} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k(x_{k+1}+x_{k+2}).$$

b) *Hãy xác định với những giá trị không âm nào của $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bất đẳng thức Mordell trở thành đẳng thức.*

Chứng minh. Bất đẳng thức này được chứng minh trong [20].

a) Với $n = 3$ và $n = 5$, sau khi bỏ dấu ngoặc ta thu được bất đẳng thức

$$(n-1)(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 \geq 2n\sum_{i<k} a_ia_k. \tag{3}$$

Bất đẳng thức này dễ dàng chứng minh dựa vào bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho các số $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $(1, 1, \ldots, 1)$

$$n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2) \geq (a_1+a_2+\cdots+a_n)^2.$$

Tiếp theo ta chú ý rằng

$$\begin{aligned} n(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 &= n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2) + 2n\sum_{i<k} a_ia_k \\ &\geq (a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 + 2n\sum_{i<k} a_ia_k, \end{aligned}$$

từ đó suy ra (3). Với $n = 4$ ta cần kiểm tra bất đẳng thức

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 \geq 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4 + 2x_4x_1 + 4x_1x_3 + 4x_2x_4.$$

Khai triển và rút gọn các số hạng đồng dạng, ta thu được bất đẳng thức hiển nhiên

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \geq 2x_1x_3 + 2x_2x_4.$$

Bây giờ ta chuyển sang trường hợp $n \geqslant 6$. Hoán vị vòng quanh các số nếu cần, ta có thể giả sử rằng $x_3 \geqslant x_1$ và $x_3 \geqslant x_2$ ví dụ làm cho x_3 lớn nhất. Với $r = 1,\ 2$ hoặc 3 ta ký hiệu a_r là tổng tất cả các số x_k sao cho $k \equiv r \pmod 3$, $k \leqslant n$. Khi đó $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_1 + a_2 + a_3$ và theo bất đẳng thức (3) ta suy ra

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 &= (a_1 + a_2 + a_3)^2 \geq 3(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1)\\ &= 3 \sum_{i-k\neq 0 \pmod 3} x_ix_k.\end{aligned}$$

Đặt $A = \displaystyle\sum_{i-k\neq 0 \pmod 3} x_ix_k$ và $B = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k(x_{k+1} + x_{k+2})$ và kiểm tra rằng $A \geqslant B$.

Thật vậy, với $n \equiv 0 \pmod 3$ tất cả các số hạng của tổng B có trong tổng A. Với $n \equiv 0 \pmod 3$ trong tổng A so với tổng B chỉ thiếu số hạng x_nx_1. Nhưng số hạng này lại không vượt quá x_nx_3 là số hạng có trong A nhưng không có trong B, và cuối cùng, với $n \equiv 2 \pmod 3$ thì trong tổng A so với tổng B chỉ thiếu các số hạng $x_{n-1}x_1$ và x_nx_2. Nhưng những số hạng này tương ứng lại nhỏ hơn các số hạng $x_{n-1}x_3$ và x_nx_3.

Như vậy trong mọi trường hợp $A \geqslant B$. Do đó

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = (a_1 + a_2 + a_3)^2 \geq 3A \geq 3B = 3\sum_{k=1}^{n} x_k(x_{k+1} + x_{k+2}).$$

Tính tốt nhất của hằng số $\min\left\{\dfrac{n}{2}, 3\right\}$ là hiển nhiên. Với $n \leq 6$ ta có thể lấy tất cả các biến bằng 1 còn với $n \geq 6$, ta lấy $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ và $x_4 = x_5 = \cdots = x_n = 0$.

b) Trường hợp $n < 6$ hiển nhiên. Với $n = 6$ dấu bằng xảy ra khi $x_1 + x_4 = x_2 + x_5 = x_3 + x_6$. Với $n \geqslant 6$ dấu bằng xảy ra trên tập hợp có dạng $(t,\ 1,\ 1,\ 1-t,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ trong đó $t \in [0,\ 1]$ và các hoán vị vòng quanh của chúng. □

2.2. *Với mọi số không âm $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ hãy chứng minh bất đẳng thức*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \geq \min\left\{\frac{n}{3}, \frac{8}{3}\right\} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k(x_{k+1} + x_{k+2} + x_{k+3}).$$

Chứng minh. Bất đẳng thức này được chứng minh trong bài báo [20]. Ta bắt đầu từ $n \leqslant 8$.

Với $n = 4$ và $n = 7$ đây là trường hợp riêng của bất đẳng thức (3).

Với $n = 5$ bất đẳng thức tương đương với bất đẳng thức

$$\sum (x_k - 2x_{k+2} + x_{k+4})^2 \geq 0.$$

Với $n = 6$ sau khi bỏ dấu ngoặc và rút gọn ta thu được bất đẳng thức hiển nhiên

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_6^2 \geq 2x_1x_4 + 2x_2x_5 + 2x_3x_6.$$

Để chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp $n = 8$, ta phá ngoặc trong hệ quả của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \geq (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2,$$

để được

$$3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \geq 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4).$$

Suy ra

$$3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \geq 8(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4), \tag{4}$$

chính là bất đẳng thức cần chứng minh với $n = 8$. Để chứng minh trường hợp $n > 8$, ta cũng giả sử x4 lớn nhất rồi đặt a_r, $r = 0, 1, 2, 3$ là tổng các x_k với $k \equiv r \pmod 4$, $k \leqslant n$. Khi đó $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ và theo (3) ta có

$$\begin{aligned}3(x_1 + x_2 + \cdots x_4)^2 &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 \geq 8(a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4) \\ &\geq 8 \sum_{i-k \neq 0 \pmod 4} x_ix_k.\end{aligned}$$

Bây giờ đặt $A = \sum_{i-k\neq 0 \pmod 4} x_ix_k$ và $B = \sum_{k=1}^{n} x_k(x_{k+1} + x_{k+2} + x_{k+3})$, bằng lý luận hoàn toàn tương tự như trong bài 2.1 ta suy ra $A \geqslant B$ và từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

2.3. *a) Với $n \leqslant 8$ hãy chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3 + x_4} + \frac{x_2}{x_3 + x_4 + x_5} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1 + x_2} + \frac{x_n}{x_1 + x_2 + x_3} \geq \frac{n}{3}.$$

b) Bất đẳng thức trên còn đúng với giá trị nào khác của n hay không ?*

Chứng minh. a) Bất đẳng thức này được chứng minh trong bài báo [11], sử dụng phép biến đổi Fourier. Ta đưa ra cách chứng minh sơ cấp. Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2} + x_{k+3}} \geq \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k(x_{k+1} + x_{k+2} + x_{k+3})} \geq \frac{n}{3},$$

trong đó bất đẳng thức cuối cùng suy ra từ 2.2.

b) Chưa rõ câu trả lời. □

2.4. Chứng minh rằng với mọi $n \geqslant 4$, thì

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \geqslant 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1).$$

Chứng minh. Bài toán của B.Ginzburg [1, bài toán 187], được đề xuất cho đề thi toàn Liên Xô năm 1972. Bằng cách hoán vị vòng quanh các số, có thể giả sử $x_1 \leqslant x_2$. Đặt

$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,\ S_1 = x_1 + x_3 + \cdots,\ S_2 = x_2 + x_4 + \cdots$$

Khi đó $S_1^2 + S_2^2 \geq \dfrac{(S_1 + S_2)^2}{2} = \dfrac{S^2}{2}$, suy ra

$$\frac{S^2}{2} \geq S^2 - S_1^2 - S_2^2 = 2 \sum_{i-k\neq 0 \pmod 2} x_ix_k. \tag{5}$$

Nếu n chẵn thì tổng cuối cùng chứa tất cả các số hạng dạng $x_k x_{k+1}$, còn nếu n lẻ thì tổng này thiếu số hạng $x_n x_1$ nhưng lại có số hạng $x_n x_2$. Như vậy

$$\frac{S^2}{2} \geq 2(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1).$$

Ta có điều phải chứng minh. □

2.5. *Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k + x_{k+1}}.$$

Chứng minh. Xem lời giải bài toán 1.3. □

2.6. *Với mọi* $n \geq 4$, *thì*

$$\frac{x_1}{x_n + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_1} \geq 2.$$

Chứng minh. Đây là bài toán của A.Prokopiev, cuộc thi giữa các thành phố $1981 - 1982$, [4], công bố trong tạp chí Kvant, 1982, số 6, bài toán $M749$.

Ta gọi vế trái của bất đẳng thức là L_n. Với $n = 4$, ta có

$$L_4 = \frac{x_1 + x_3}{x_2 + x_4} + \frac{x_2 + x_4}{x_1 + x_3} = a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Với $n > 4$ ta lý luận bằng quy nạp. Vì bất đẳng thức là hoán vị vòng quanh nên ta có thể giả sử x_{n+1} nhỏ nhất trong tất cả các số. Khi đó bỏ đi số hạng cuối cùng của L_{n+1}, sau đó giảm hai số hạng khác, ta có

$$L_{n+1} \geq \frac{x_1}{x_{n+1} + x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_{n+1}} \geq \frac{x_1}{x_n + x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_1} = L_n.$$

Để chứng minh hằng số ở vế phải là tốt nhất, ta chọn $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = t, x_4 = t^2, \ldots,$ $x_n = t^{n-2}$ rồi cho $t \to 0$.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz như trong lời giải bài toán dưới đây, bạn đọc sẽ có thể tìm ra một lời giải khác bằng cách đưa về bất đẳng thức 2.4. □

2.7. *Chứng minh rằng với mọi* $n \geq 4$, *thì*

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_2 + x_3}{x_2 + x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1} + x_n}{x_{n-1} + x_1} + \frac{x_n + x_1}{x_n + x_2} \geq 4.$$

Chứng minh. Chúng tôi lấy đề bài này từ bài báo [10]. Đặt $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho bộ số $\left\{\frac{x_k + x_{k+1}}{x_k + x_{k+2}}\right\}$ và $\{(x_k + x_{k+1})(x_k + x_{k+2})\}$ ta được

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_2 + x_3}{x_2 + x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1} + x_n}{x_{n-1} + x_1} + \frac{x_n + x_1}{x_n + x_2} \geq \frac{4(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k + x_{k+1})(x_k + x_{k+2})}.$$

Như vậy, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần xác lập bất đẳng thức

$$S^2 \geq \sum_{k=1}^{n} (x_k + x_{k+1})(x_k + x_{k+2}) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} x_k x_{k+1} + \sum_{k=1}^{n} x_k x_{k+2},$$

Bất đẳng thức này đúng bằng cách phá ngoặc ở vế phải, vì với $n \geqslant 4$ thì các số hạng $x_k x_{k+1}$ và $x_k x_{k+2}$ với $k = 1, 2, \ldots, n$ là khác nhau.

Ta sẽ chứng tỏ hằng số 4 không thể thay thế bằng số lớn hơn. Thật vậy, đặt $x_k = a^{k-1}$ với $k = 1, 2, \ldots, n-1$ và $x_n = a^{n-2}$. Khi $a \to \infty$ thì $n-3$ số hạng đầu dần đến 0, còn các số hạng cuối dần đến $1, 2, 1$. □

2.8. *Chứng minh rằng với mọi $n \geqslant 6$, thì*

$$\frac{x_1}{x_n + x_3} + \frac{x_2}{x_1 + x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_1} + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_2} \geq 3.$$

Chứng minh. Chúng tôi lấy đề bài toán này từ bài báo [6]. Bài này cũng chứng minh bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy -Schwarz tương tự bài 2.7, sau đó áp dụng bất đẳng thức Mordell (bài toán 2.1).

Ta chứng tỏ rằng hằng số 3 không thể thay thế bằng số lớn hơn. Thật vậy, đặt $x_k = a^{k-1}$ với $k = 1, 2, \ldots, n-2$ và $x_{n-1} = x_n = 1$. Khi $a \to 0$ thì số hạng đầu và số hạng cuối dần đến 1, còn các số hạng khác dần đến 0. □

2.9. *Chứng minh rằng nếu $n \geq 6$, thì*

$$\frac{x_2 + x_3}{x_1 + x_4} + \frac{x_3 + x_4}{x_2 + x_5} + \cdots + \frac{x_n + x_1}{x_{n-1} + x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_n + x_3} \geq 6.$$

Chứng minh. Chúng tôi lấy đề bài toán này từ bài báo [5]. Ta chỉ cần cộng hai bất đẳng thức ở 2.8 lại (bất đẳng thức ở 2.8 và bất đẳng thức đó cho bộ số đảo ngược).

Ta chứng tỏ rằng hằng số 6 không thể thay thế bằng số lớn hơn. Thật vậy, đặt $x_k = a^{k-1}$ với $k = 1, 2, \ldots, n-2$ và $x_{n-1} = x_n = 1$. Khi $a \to 0$ thì bốn số hạng cuối cùng bằng $1, 2, 2, 1$ tương ứng, còn các số hạng khác dần đến 0. □

2.10. *Chứng minh rằng*

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_4} + \frac{x_2 + x_3}{x_2 + x_5} + \cdots + \frac{x_{2004} + x_1}{x_{2004} + x_3} \geq 6.$$

Chứng minh. Trong bài báo [19], khẳng định này được nêu ra dưới dạng giả thuyết. Chứng minh dưới đây thuộc về các thí sinh của cuộc thi P.Milosevic và M.Bukic.

Bất đẳng thức cần chứng minh là tổng của hai bất đẳng thức với $n = 2004$ - bất đẳng thức từ bài 2.8 và bất đẳng thức

$$\frac{x_1}{x_1 + x_4} + \frac{x_2}{x_2 + x_5} + \cdots + \frac{x_n}{x_n + x_3} \geq 3.$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức này. Với $n = 3m$ nó là tổng của ba bất đẳng thức

$$\frac{x_1}{x_1 + x_4} + \frac{x_4}{x_4 + x_7} + \cdots + \frac{x_{n-2}}{x_{n-2} + x_1} \geq 1,$$

$$\frac{x_2}{x_2+x_5}+\frac{x_5}{x_5+x_8}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_2}\geq 1,$$
$$\frac{x_3}{x_3+x_6}+\frac{x_6}{x_6+x_9}+\cdots+\frac{x_n}{x_n+x_3}\geq 1.$$

Mỗi bất đẳng thức này đều có dạng

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_m}\geq 1,$$

trong đó với $a_1a_2\cdots a_m=1$.

Bất đẳng thức này được chứng minh bằng quy nạp theo m. Cơ sở quy nạp $m=2$, thì

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}=\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+\frac{1}{a_1}}=1.$$

Để thực hiện bước quy nạp, ta chú ý rằng

$$\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq\frac{1}{1+bc}.$$

Ta chứng tỏ rằng hằng số 6 không thể thay được bằng một hằng số lớn hơn. Lấy các số $x_1=x_2=x_3=1$, $x_k=a^{n-k+1}$ với $k=4,5,\ldots,n$ thì khi $a\to 0$, số hạng thứ nhất và thứ hai dần đến 2, số hạng thứ ba và số hạng cuối cùng dần đến 1, các số hạng còn lại dần đến 0. $\square$

2.11. *Chứng minh rằng*

$$\frac{x_1}{x_n+x_4}+\frac{x_2}{x_1+x_5}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}+x_2}+\frac{x_n}{x_{n-1}+x_3}\geq 4,$$

trong đó n là số chẵn lớn hơn 7.

Chứng minh. Đây là chứng minh của A.Khrabrov. Đặt $S=x_1+x_2+\cdots+x_n$ và $T=\sum\limits_{i-k\neq 0 \pmod 2} x_ix_k$. Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho các bộ $\left\{\frac{x_k}{x_{k-1}+x_{k+3}}\right\}$ và $\{x_k(x_{k-1}+x_{k+3})\}$ ta thấy vế trái của bất đẳng thức trên sẽ không nhỏ hơn

$$\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1)+(x_1x_4+x_2x_5+\cdots+x_nx_3)}.$$

Như vậy chỉ cần chứng minh

$$S^2\geq 4(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1)+4(x_1x_4+x_2x_5+\cdots+x_nx_3).$$

Trong lời giải bài 2.4 ta đã chứng minh được $S^2\geqslant 4T$. Như vậy, chỉ cần chứng minh rằng

$$T\geq(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1)+(x_1x_4+x_2x_5+\cdots+x_nx_3). \tag{6}$$

Vì n chẵn nên mọi số hạng ở tổng bên phải đều chứa trong tổng bên trái.

Ta chứng tỏ hằng số 4 không thể thay bằng hằng số lớn hơn. Ta xét bộ số $x_k=a^{k-1}$ với $k=1,2,\ldots,n-3$ và $x_{n-2}=x_{n-1}=x_n=1$. Khi $a\to 0$ thì số hạng đầu tiên và 3 số hạng cuối cùng dần đến 1, các số hạng còn lại dần đến 0. $\square$

2.12. *Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{x_{k+1}^2 - x_{k+1}x_{k+2} + x_{k+2}^2} \geq \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Chứng minh. Chúng tôi lấy bài này từ bài báo [14].

Chú ý rằng $a^2 - ab + b^2 \leqslant \max\{a, b\}^2$.

Giả sử x_{i_1} là số lớn nhất trong các số $x_1, x_2, \ldots, x_n$, x_{i_2} là số lớn nhất trong hai số tiếp sau x_{i_1}, x_{i_3} là số lớn nhất trong hai số tiếp $x_{i_2}, \ldots$ Ta cứ xây dựng dãy số này cho đến khi gặp được chỉ số k sao cho số lớn nhất trong hai số tiếp sau x_{i_k} là x_{i_1}. Rõ ràng $k \geq \frac{n}{2}$ và vì vậy $k \geq \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{x_{k+1}^2 - x_{k+1}x_{k+2} + x_{k+2}^2} \geq \sum_{j=1}^{k} \frac{x_{i_j}^2}{x_{i_{j+1}}^2} \geq k.$$

Ở đánh giá cuối cùng ta dùng bất đẳng thức AM-GM.

Hằng số $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ không thể thay bằng hằng số lớn hơn vì nếu ta thay $x_k = 1$ với k lẻ và $x_k = 0$ với k chẵn thì vế trái sẽ bằng $\left[\frac{n+1}{2}\right]$. $\square$

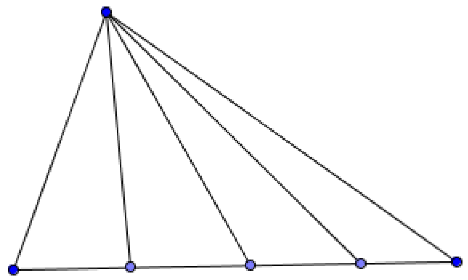
Phát triển tư duy tổ hợp qua các bài toán đếm

Đếm số đoạn thẳng, số tam giác, số hình vuông không phải để cho vui mà thực ra hình thành các tư duy tổ hợp rất quan trọng: Biết chia trường hợp, biết phân loại, biết dự đoán quy luật, biết tổng quát hóa, biết loại trừ ... Dưới đây là chuỗi các bài toán đếm dành cho các học sinh lớp lớn của tiểu học và các lớp Trung học cơ sở. Với những tư duy tổ hợp được hình thành ở mức độ trực giác, khi được trang bị các công cụ tổ hợp, học sinh sẽ dễ dàng hiểu nhanh, hiểu sâu các khái niệm và có khả năng áp dụng.

1. *Có 5 điểm nằm trên một đường thẳng. Hỏi có bao nhiêu điểm được tạo thành?*

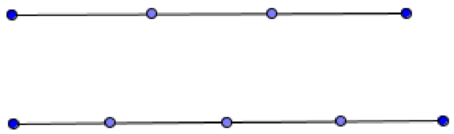
Đáp số. (10 điểm) Ta có thể đếm theo kiểu liệt kê, hoặc dùng tổng hợp chập 2 của 5 phần tử.

2. *Có 5 điểm nằm trên một đường thẳng và 1 điểm nằm ngoài đường thẳng đó. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành?*



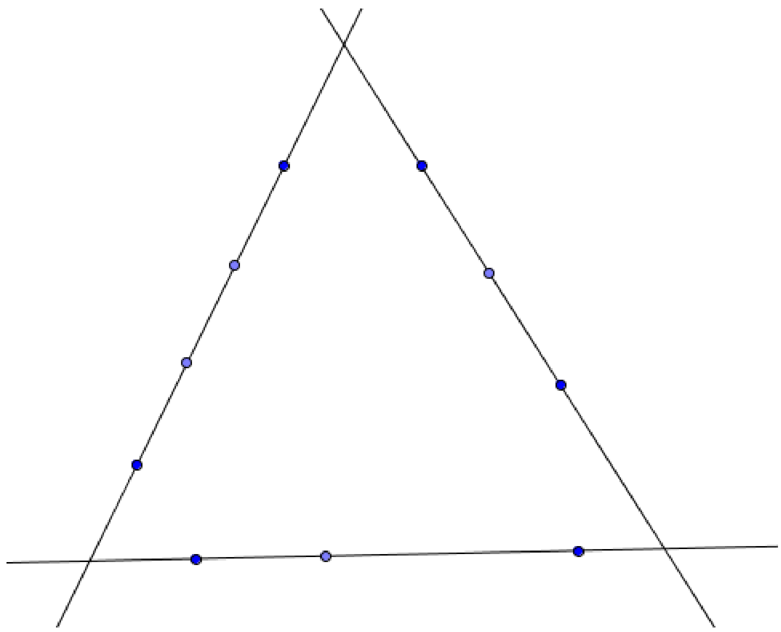
Đáp số. (10 tam giác) Một tam giác gồm 1 đỉnh và 1 cạnh đáy. Liên hệ với bài toán 1.

3. *Có* 4 *điểm trên* 1 *đường thẳng và* 5 *điểm trên một đường thẳng khác. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh tại các điểm đó?*



Đáp số. (70 tam giác) Có 2 loại tam giác: Loại 1 là đỉnh ở trên, đáy ở dưới và loại 2 là đáy ở dưới, đỉnh ở trên. Với loại 1 ta có 4 cách chọn đỉnh và 10 cách chọn đáy (liên hệ bài 2). Với loại 2 ta có 5 cách chọn đỉnh và 6 cách chọn đáy. Vậy có $4 \times 10 + 5 \times 6 = 70$ tam giác. Trong bài toán này ta đã làm quen với 2 quy tắc đếm quan trọng là quy tắc cộng (phân trường hợp) và quy tắc nhân (phân công đoạn).

4. *Trên* 3 *cạnh của một tam giác có tương ứng* $3,\ 4,\ 5$ *điểm. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh tại các điểm đó?*

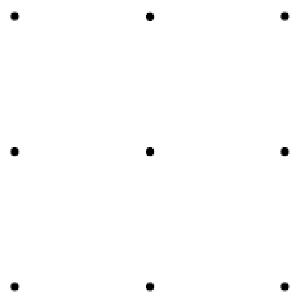


Đáp số. (114 tam giác) Có 4 loại tam giác: Loại $1, 2, 3$ là có cạnh nằm trên 1 trong 3 cạnh của tam giác và đỉnh nằm trên 1 trong 2 cạnh còn lại. Loại 4 là loại có 3 đỉnh nằm trên 3 cạnh. Ta tính thử loại 1 là loại có cạnh nằm trên cạnh bên bên trái. Có 6 cách chọn cạnh này và 6 cách chọn đỉnh còn lại, suy ra có $6 \times 6 = 36$ tam giác loại 1. Lý luận tương tự, với tam giác loại 2 có cạnh nằm trên cạnh bên bên phải, sẽ có 3 cách chọn cạnh và 7 cách chọn đỉnh và loại 3 cũng thế. Cuối cùng, có $4 \times 3 \times 3 = 36$ cách chọn tam giác loại 4. Vậy đáp số là

$$6 \times 6 + 3 \times 7 + 3 \times 7 + 4 \times 3 \times 3 = 114.$$

Ta cũng thể đếm bằng cách lấy C_{10}^3 (là số bộ 3 đỉnh lấy từ 10 đỉnh) trừ đi số các tam giác suy biến (là $4 + 1 + 1 = 6$) ta được kết quả là $120 - 6 = 114$.

5. *Có 9 điểm tạo thành 1 lưới vuông* 3×3. *Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh tại các điểm đã cho?*



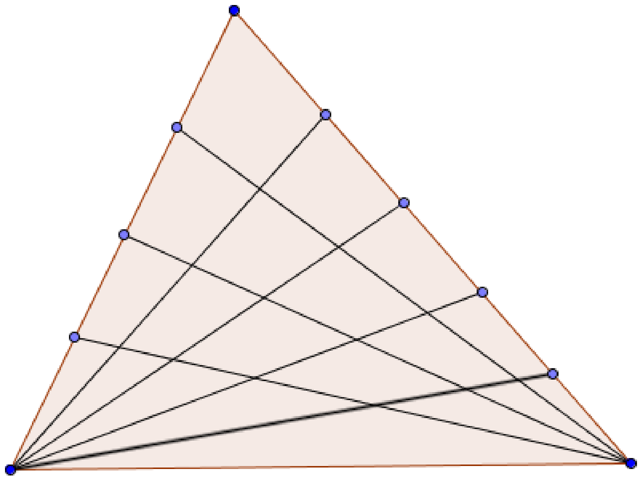
Đáp số. (76 tam giác)

Cách 1. Tương tự như bài 4, ta chia các tam giác làm 2 loại. Loại 1 là tam giác có 2 đỉnh nằm trên 1 đường ngang và đỉnh kia nằm ở một trong hai đường ngang còn lại. Loại 2 là loại có 3 đỉnh nằm trên 3 đường ngang. Có 3 cách chọn đường ngang chứa 2 đỉnh. Với mỗi đường ngang đã chọn, có 3 cách chọn 2 đỉnh. Có 6 cách chọn đỉnh còn lại. Vậy số tam giác loại 1 bằng $3 \times 3 \times 6 = 54$.

Với loại 2, rõ ràng số cách chọn ra ở mỗi hàng ngang 1 điểm bằng $3 \times 3 \times 3 = 27$. Tuy nhiên, trong số những cách chọn này có những cách chọn tạo ra tam giác suy biến. Dễ thấy có 5 tam giác suy biến như vậy. Vậy số tam giác loại 2 là $27 - 5 = 22$. Và tổng số tam giác cần tìm bằng $54 = 22 = 76$.

Cách 2. Đơn giản là $C_9^3 - 8 = 84 - 8 = 76$ (bạn đọc hãy thử giải thích lời giải này).

6. *Có bao nhiêu tam giác trong hình sau?*



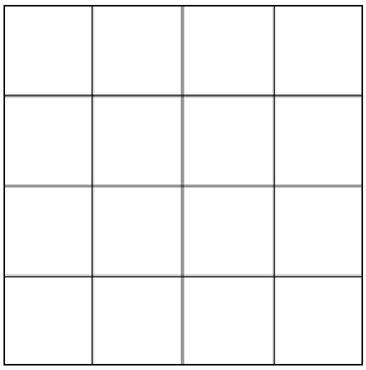
Đáp số. (90 tam giác) Ký hiệu hai đỉnh ở đáy là B, C(B bên trái, C bên phải). Ta thấy 1 tam giác bất kỳ phải nhận B hoặc C làm đỉnh.

Ta đếm số tam giác nhận B làm đỉnh. Khi đó hai đỉnh còn lại phải nằm trên 1 trong 4 đường thẳng kẻ từ C. Có 4 cách chọn đường thẳng đó. Trên mỗi đường thẳng có 6 đỉnh, do đó có 15 cách chọn 2 đỉnh. Suy ra số tam giác nhận B làm đỉnh bằng $4 \times 15 = 60$.

Tương tự, số tam giác có C làm đỉnh bằng $5 \times 10 = 50$.

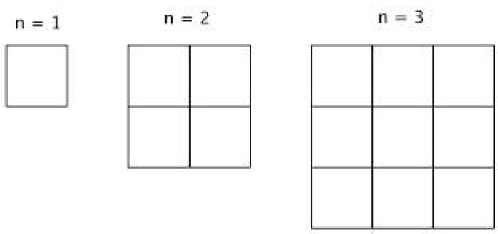
Trong số các tam giác này, có một số tam giác được đếm 2 lần, đó là những tam giác nhận cả B và C làm đỉnh. Có $5 \times 4 = 20$ tam giác như vậy (đỉnh có lại là giao của 5 đường thẳng kẻ từ B và 4 đường thẳng kẻ từ C). Suy ra có $60 + 50 - 20 = 90$ tam giác.

7. *Trong hình sau có bao nhiêu hình vuông?*



Đáp số. (30 hình vuông) Có 4 loại hình vuông: 1×1, 2×2, 3×3 và 4×4. Do đó đáp số là $16 + 9 + 4 + 1 = 30$.

8. *Trong các hình sau có tương ứng bao nhiêu hình chữ nhật?*

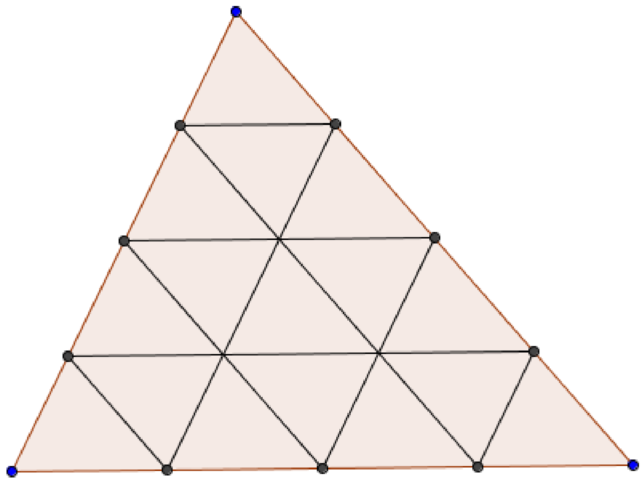


Đáp số. 1, 9, 36 hình vuông.

9. *Thử dự đoán xem trong hình ở bài 7 có bao nhiêu hình chữ nhật? Kiểm tra dự đoán của bạn bằng cách đếm trực tiếp.*

Đáp số. (100 hình).

10. *Có bao nhiêu hình bình hành trong hình sau?*



Đáp số. (45 hình)

11. *Vẽ 9 điểm trên mặt phẳng sao cho có đúng 74 tam giác có đỉnh tại các điểm này.*

Cách giải. Hãy vẽ làm sao có 10 tam giác suy biến!

Bộ các tổng đôi

K.Kokhas đề nghị cho Hội nghị mùa hè, cuộc thi toán giữa các thành phố 2002.

Giả sử ta có bộ các số thực $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (trong các số a_i có thể có những số bằng nhau). Bộ các tổng đôi là bộ các số có dạng $a_i + a_j$ với $i < j$. Ta ký hiệu bộ này là $A(2)$. Ví dụ với $A = \{1, 1, 2, 7\}$ thì $A(2) = \{2, 3, 3, 8, 8, 9\}$.

1. Từ các số a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ta có thể tạo thành 10 tổng đôi, ký hiệu chúng là $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. Chứng minh rằng nếu biết các số $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ (nhưng, dĩ nhiên, là không biết các số đó là tổng của những số nào), ta có thể xác định được các số $a_1, a_2, a_3, a_4, {}_a5$.

2. Biết rằng bộ số A có bộ các tổng đôi là $\{2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6\}$. Hãy tìm tổng bình phương các số của bộ A.

3. a) Nêu ví dụ hai bộ, mỗi bộ có 4 số (trong mỗi bộ cho phép có những số bằng nhau) có bộ các tổng đôi trùng nhau.

b) Giả sử $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 < b_6$ là bộ các tổng đôi của một bộ 4 số. Chứng minh rằng có một bộ bốn số nữa cùng có cùng bộ các tổng đôi.

4. Chứng minh rằng với $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$ tồn tại hai bộ n số thực có cùng bộ các tổng đôi.

5. Chứng minh rằng với mọi $n \neq 2k$, bộ gồm n số hoàn toàn được xác định bởi bộ các tổng đôi của nó.

6. a) Chỉ ra ví dụ ba bộ số (có nhiều hơn 2 số) có cùng bộ các tổng đôi.

b) Chứng minh rằng không tồn tại ba bộ 4 số có cùng bộ các tổng đôi.

c) Chứng minh rằng không tồn tại bốn bộ 8 số có cùng bộ các tổng đôi.

7. Học trò kém Sasha nghĩ ra 3 số thực và ghi lên bảng 3 tổng đôi, 3 tổng đôi với dấu trừ và tất cả các hiệu đôi một, tổng cộng là 12 số. Hỏi học trò giỏi Nadia có thể biết được trị tuyệt đối của các số mà Sasha nghĩ không?

8. Chứng minh rằng từ bộ $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ các số thực phân biệt, số các tổng phân biệt dạng $a_i + a_j$ có thể là mọi số nằm giữa $2n - 1$ và $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Tài liệu tham khảo

[1] Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, 1988.

[2] Дринфельд В. Г. Об одном циклическом неравенстве // Мат. заметки. 1971. Т. 9. № 2. С. 113–119.

[3] Курляндчик Л. Д., Файбусович А. История одного неравенства // Квант. 1991. № 4. С. 14–18.

[4] Толпыго А. К. Тысяча задач Международного математического Турнира городов. М.: МЦНМО, 2009.

[5] Чимэдцэрэн С. Нэгэн орчилт нийлбэр // Математикийн олимпиадын цуврал. 1999. Т. 22. (На монгольск. яз.).

[6] Чимэдцэрэн С., Адъяасурен В., Батболд С. Оценка в одной циклической сумме // Монгол улсын их сургууль, Эрдэм шинжилгээний бичиг. 2000. Т. 7 (168). С. 79–84.

[7] Bushell P. J. *Shapiro's Cyclic Sum* // Bull. London Math. Soc. 1994. Vol. 26. No 6. P. 564–574

[8] Bushell P. J., McLeod J. B. *Shapiro's cyclic inequality for even n* // J. Inequal. & Appl., 2002. Vol. 7(3). P. 331–348

[9] Cirtoaje V. Crux Mathematicorum. 2006. Vol. 32. No. 8. Problem 3195.

[10] Daykin D. E. *Inequalities for certain cyclic sums* // Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 1970/71. Vol. 17. P. 257–262.

[11] Diananda P. H. *Extensions of an inequality of H. S. Shapiro* // Amer. Math. Monthly 1959. Vol. 66. P. 489–491.

[12] Diananda P. H. *On a conjecture of L. J. Mordell regarding an inequality involoving quadratic forms* // J. London Math. Soc. 1961. Vol. 36. P. 185–192.

[13] Diananda P. H. *Inequalities for a class of cyclic and other sums* // J. London Math. Soc. 1962. Vol. 37. P. 424–431.

[14] [14] Diananda P. H. *Some cyclic and other inequalities* // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1962. Vol. 58. P. 425–427.

[15] Diananda P. H. *Some cyclic and other inequalities*, II // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1962. Vol. 58. P. 703–705.

[16] Diananda P. H. *On a cyclic sum* // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1963. Vol. 6. P. 11–13.

[17] Elbert A. On a cyclic inequality // Period. Math. Hungarica. 1973. Vol. 4. No 2–3. P. 163–168.

[18] Malcolm M. A. *A note on a conjecture of L. J. Mordell* // Math. Comp. 1971. Vol. 25. P. 375–377.

[19] Mitrinovic D. S., Pecaric J. E., Fink A. M. *Classical and new inequalities in analysis*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993. (Mathematics and its Applications (East European Series), Vol. 61).

[20] Mordell L. J. *On the inequality* $\sum_{r=1}^{n} \frac{x_r}{x_{r+1} + x_{r+2}} \geq \frac{n}{2}$ *and some others* // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1958. Vol. 22. P. 229–240.

[21] Nowosad P. *Isoperimetric eigenvalue problems in algebras* // Comm. Pure Appl. Math. 1968. Vol. 21. P. 401–465.

[22] Shapiro H. S., Northover F. H. Amer. Math. Monthly. 1956. Vol. 63. No 3. P. 191–192.

[23] Tanahashi K., Tomiyama J. Indecomposable positive maps in matrix algebras // Canad. Math. Bull. 1988. Vol. 31. No 3. P. 308–317.

[24] Troesch B. A. Full solution of Shapiro's cyclic inequality // Notices Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 39. No 4. P. 318.

[25] Vukmirovic J. A note on an inequality for the cyclic sums introduced by D. E. Daykin // Math. Balk. 1978. Vol. 8. P. 293–297.

[26] Yamagami S. Cyclic inequalities // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. Vol. 118. No 2. P. 521–527.

[27] Zulauf A. Note on a conjecture of L. J. Mordell // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1958. Vol. 22. P. 240–241.

[28] Zulauf A. Note on an Inequality // Math. Gazette. 1962. Vol. 46. No 355. P. 41–42.

KỲ THI TOÁN QUỐC TẾ FORMULA OF UNITY THE THIRD MILLENIUM

Ban Biên tập Epsilon

Kể từ số tạp chí thứ 5, Ban biên tập sẽ dành một chuyên mục để giới thiệu về các kỳ thi trong nước và thế giới. Số thứ 5 vừa rồi đã điểm qua một số đề thi, lời giải và bình luận cho đề chọn đội tuyển của một số trường chuyên lớn trong cả nước, chuẩn bị cho kỳ thi Học sinh giỏi toàn quốc sắp tới. Trong số lần này, chúng tôi sẽ tiếp tục giới thiệu về Formula of Unity - The Third Millennium, một kỳ thi trong khuôn khổ International Townament of the Towns (ITOT), kỳ thi Toán giữa các thành phố, được tổ chức vào giữa tháng 10 tại Hà Nội vừa qua. Về đề thi chính thức cũng như lời giải của ITOT, chúng tôi sẽ giới thiệu trong một số báo khác.

Đây cũng là bài cuối cùng của Epsilon số 6 kỳ này, hẹn gặp lại độc giả ở Epsilon số 7!

1. Đề thi dành cho Khối lớp R5

Bài 1. Peter, Basil và Anatoly góp tiền tiết kiệm để mua một quả bóng giá 9 đô la. Biết rằng, số tiền góp của mỗi người không nhiều hơn một nửa tổng số tiền góp của hai người còn lại. Hỏi Peter đã đóng góp bao nhiêu tiền?

Bài 2. Pauline viết hai số A và B lên bảng. Victoria xóa hai số A, B và viết tổng C và tích D của chúng. Sau đó, Pauline lại xoá hai số C và D, thay bởi tổng E và tích F của chúng. Biết rằng một trong hai số E và F là số lẻ. Hỏi đó là số nào?

Bài 3. Ta nói rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B nếu điểm của A cao hơn điểm của B trong phần lớn các bài kiểm tra. Sau 3 bài kiểm tra, thầy giáo nhận xét rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B, học sinh B học tốt hơn học sinh C và học sinh C lại học tốt hơn học sinh A. Liệu điều này có thể xảy ra không?

Bài 4. Nếu Leon bị điểm kém ở trường, cậu ta sẽ dành cả buổi tối để nói dối mẹ. Còn nếu ngược lại, cậu ta sẽ luôn nói thật. Leon có một cô em gái luôn được mẹ cho kẹo nếu như hôm đó cô bé không bị điểm kém. Một buổi tối, Leon nói với mẹ: "Hôm nay con bị nhiều điểm kém hơn em". Hỏi cô em gái của Leon có được mẹ cho kẹo hay không?

Bài 5. Một tờ lịch ma thuật chỉ đúng ngày tất cả các ngày chẵn của tháng và sai ngày vào tất cả các ngày lẻ. Hỏi số lớn nhất các ngày liên tiếp nhau được ghi cùng ngày trên lịch là bao nhiêu? Và ngày đó có thể là ngày nào trong tháng?

Bài 6. Có bao nhiêu số có biểu diễn thập phân gồm 10 chữ số khác nhau và có chứa đoạn 0123?

Bài 7. Hình vuông 8×8 được vẽ trên tờ giấy kẻ ô vuông dọc theo các đường kẻ. Alex cắt hình vuông 8×8 theo các đường kẻ thành 7 phần với chu vi bằng nhau. Hãy chỉ ra một cách cắt của Alex.

2. Đề thi dành cho Khối lớp R6

Bài 1. Có 14 người ngồi quanh một vòng tròn. Peter, Victoria, Anatoly và Genghis đang ngồi cạnh nhau theo thứ tự và các bạn có các đồng xu mệnh giá $1, 2, 5$ và 10 rúp. Một người bất kì có thể đưa một đồng xu của mình cho người ở bên trái hoặc bên phải của mình nếu có đúng 3 người ngồi giữa họ. Sau một lúc chuyển như vậy, các bạn Peter, Victoria, Anatoly và Gengis lại nhận được các đồng xu. Hỏi lúc này, bạn nào đang cầm đồng xu nào? Hãy chỉ ra tất cả các khả năng và chứng minh không còn trường hợp nào khác.

Bài 2. Pauline viết hai số A và B lên bảng. Victoria xóa hai số A, B và viết tổng C và tích D của chúng. Sau đó, Pauline lại xoá hai số C và D, thay bởi tổng E và tích F của chúng. Biết rằng một trong hai số E và F là số lẻ. Hỏi đó là số nào?

Bài 3. Ta nói rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B nếu điểm của A cao hơn điểm của B trong phần lớn các bài kiểm tra. Sau 3 bài kiểm tra, thầy giáo nhận xét rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B, học sinh B học tốt hơn học sinh C và học sinh C lại học tốt hơn học sinh A. Liệu điều này có thể xảy ra không?

Bài 4. Nếu Leon bị điểm kém ở trường, cậu ta sẽ dành cả buổi tối để nói dối mẹ. Còn nếu ngược lại, cậu ta sẽ luôn nói thật. Leon có một cô em gái luôn được mẹ cho kẹo nếu như hôm đó cô bé không bị điểm kém. Một buổi tối, Leon nói với mẹ: *"Hôm nay con bị nhiều điểm kém hơn em"*. Hỏi cô em gái của Leon có được mẹ cho kẹo hay không?

Bài 5. Một tờ lịch ma thuật chỉ đúng ngày tất cả các ngày chẵn của tháng và sai ngày vào tất cả các ngày lẻ. Hỏi số lớn nhất các ngày liên tiếp nhau được ghi cùng ngày trên lịch là bao nhiêu? Và ngày đó có thể là ngày nào trong tháng?

Bài 6. Có bao nhiêu số có biểu diễn thập phân gồm 10 chữ số khác nhau và có chứa đoạn 0123 hoặc đoạn 3210?

Bài 7. Hình vuông 8×8 được vẽ trên tờ giấy kẻ ô vuông dọc theo các đường kẻ. Alex cắt hình vuông 8×8 theo các đường kẻ thành 7 phần với chu vi bằng nhau. Hãy chỉ ra một cách cắt của Alex.

3. Đề thi dành cho Khối lớp R7

Bài 1. Một tờ lịch ma thuật chỉ đúng ngày tất cả các ngày chẵn của tháng và sai ngày vào tất cả các ngày lẻ. Hỏi số lớn nhất các ngày liên tiếp nhau được ghi cùng ngày trên lịch là bao nhiêu? Và ngày đó có thể là những ngày nào?

Bài 2. Hãy điền vào các ô của bảng vuông 5×5 các số nguyên dương phân biệt sao cho tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột là bằng nhau và nhỏ nhất có thể. Biết rằng, các số $1, 2, 3, 4, 2015$ đã được điền trước trên một đường chéo.

Bài 3. Hình vuông 8×8 được vẽ trên tờ giấy kẻ ô vuông dọc theo các đường kẻ. Alex cắt hình vuông 8×8 theo các đường kẻ thành 7 phần với chu vi bằng nhau. Hãy chỉ ra một cách cắt của Alex.

Bài 4. Có 27 con gián tham gia một cuộc chạy đua. Trong mỗi vòng sẽ có ba con gián chạy. Mỗi con gián chạy với tốc độ cố định, không đổi giữa các vòng đua, và tốc độ của các con gián là đôi một khác nhau. Sau mỗi vòng, người ta ghi lại thứ tự về đích của các con gián tham gia vòng đua đó. Hỏi 14 vòng đua có đủ để xác định chính xác theo thứ tự hai con gián chạy nhanh nhất không?

Bài 5. Ta nói rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B nếu điểm của A cao hơn điểm của B trong phần lớn các bài kiểm tra. Sau 3 bài kiểm tra, thầy giáo nhận xét rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B, học sinh B học tốt hơn học sinh C và học sinh C lại học tốt hơn học sinh A. Liệu điều này có thể xảy ra không?

Bài 6. Ta nói một số nguyên dương là đẹp nếu nó là tích các giai thừa của các số nguyên tố (không nhất thiết phải phân biệt). Ta gọi một số hữu tỉ dương là tốt nếu nó là tỉ số giữa hai số nguyên dương đẹp. Chứng minh rằng tất cả các số hữu tỉ dương đều tốt.

Bài 7. Ta gọi một số nguyên dương là đẹp nếu dãy các chữ số của nó tăng thực sự, ví dụ 1589 là số tăng còn 447 thì không. Hãy tìm số nhỏ nhất các số nguyên dương đẹp với tổng là 2015.

4. Đề thi dành cho Khối lớp R8

Bài 1. Hãy điền vào các ô của bảng vuông 5×5 các số nguyên dương phân biệt sao cho tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột là bằng nhau và nhỏ nhất có thể. Biết rằng, các số $1, 2, 3, 4, 2015$ đã được điền trước trên một đường chéo.

Bài 2. Có 27 con gián tham gia một cuộc chạy đua. Trong mỗi vòng sẽ có ba con gián chạy. Mỗi con gián chạy với tốc độ cố định, không đổi giữa các vòng đua, và tốc độ của các con gián là đôi một khác nhau. Sau mỗi vòng, người ta ghi lại thứ tự về đích của các con gián tham gia vòng đua đó. Hỏi 14 vòng đua có đủ để xác định chính xác theo thứ tự hai con gián chạy nhanh nhất không?

Bài 3. Hãy tìm một số nguyên dương sao cho tích các ước tự nhiên của nó là 1090.

Bài 4. John có 12 que gỗ với độ dài mỗi que là một số nguyên dương không vượt quá 56. Chứng minh rằng John có 3 que có thể tạo thành một tam giác.

Bài 5. Ta nói một số nguyên dương là đẹp nếu nó là tích các giai thừa của các số nguyên tố (không nhất thiết phải phân biệt). Ta gọi một số hữu tỉ dương là tốt nếu nó là tỉ số giữa hai số nguyên dương đẹp. Chứng minh rằng tất cả các số hữu tỉ dương đều tốt.

Bài 6. Cho tam giác ABC với $\angle B = 30^\circ, \angle C = 105^\circ$ và D là trung điểm đoạn thẳng BC. Tìm góc $\angle BAD$?

Bài 7. Ta nói rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B nếu điểm của A cao hơn điểm của B trong phần lớn các bài kiểm tra. Sau 3 bài kiểm tra, thầy giáo nhận xét rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B, học sinh B học tốt hơn học sinh C và học sinh C lại học tốt hơn học sinh A. Liệu điều này có thể xảy ra không?

5. Đề thi dành cho Khối lớp R9

Bài 1. Các đỉnh của một đa giác đều 12 cạnh được tô màu xanh và đỏ. Biết rằng trong 3 đỉnh bất kì tạo thành một tam giác đều, có ít nhất 2 đỉnh màu đỏ. Chứng minh rằng ta có thể chọn 4 đỉnh tạo thành một hình vuông với ít nhất 3 đỉnh đỏ.

Bài 2. Ta nói một số nguyên dương là đẹp nếu nó là tích các giai thừa của các số nguyên tố (không nhất thiết phải phân biệt). Ta gọi một số hữu tỉ dương là tốt nếu nó là tỉ số giữa hai số nguyên dương đẹp. Chứng minh rằng tất cả các số hữu tỉ dương đều tốt.

Bài 3. Có 27 con gián tham gia một cuộc chạy đua. Trong mỗi vòng sẽ có ba con gián chạy. Mỗi con gián chạy với tốc độ cố định, không đổi giữa các vòng đua, và tốc độ của các con gián là đôi một khác nhau. Sau mỗi vòng, người ta ghi lại thứ tự về đích của các con gián tham gia vòng đua đó. Hỏi 14 vòng đua có đủ để xác định chính xác theo thứ tự hai con gián chạy nhanh nhất không?

Bài 4. Cho tam giác ABC với $\angle B = 30^\circ, \angle C = 105^\circ$ và D là trung điểm đoạn thẳng BC. Tìm góc $\angle BAD$?

Bài 5. John có 12 que gỗ với độ dài mỗi que là một số nguyên dương không vượt quá 56. Chứng minh rằng John có 3 que có thể tạo thành một tam giác.

Bài 6. Hãy tìm một số nguyên dương sao cho tích các ước tự nhiên của nó là 1090.

Bài 7. Tất cả chúng ta đều biết $3^2 + 4^2 = 5^2$. Bên cạnh đó, không phải ai cũng biết rằng $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. Liệu có tồn tại hay không 2015 số nguyên dương liên tiếp sao cho tổng bình phương của 1008 số đầu tiên bằng tổng bình phương của 1007 số sau đó?

6. Đề thi dành cho Khối lớp R10

Bài 1. Hai chú thỏ Bugs và Roger cá cược xem ai nhanh hơn. Để xác định người chiến thắng, hai bạn quyết định tổ chức một cuộc thi. Mỗi bạn thỏ sẽ nhảy 50 mét theo một hướng và sau đó quay lại để nhảy ngược lại. Biết rằng, độ dài mỗi bước nhảy của Bugs là 50 cm và của Roger là 60cm, nhưng thỏ Bugs nhảy được 6 bước trong khi Roger chỉ nhảy được 5 bước. Hỏi ai sẽ giành được chiến thăng?

Bài 2. Với những giá trị nào của n thì ta có thể chia một hình vuông thành n hình chữ nhật đồng dạng sao cho có ít nhất hai trong số chúng là không bằng nhau?

Bài 3. Có tồn tại hay không các số nguyên dương a và b sao cho

$$lcm(a, b) = lcm(a + 2015, b + 2016)?$$

Ở đây, $lcm(a, b)$ được kí hiệu cho bội chung nhỏ nhất của hai số a và b.

Bài 4. Cho tam giác ABC với $\angle B = 30^\circ, \angle C = 105^\circ$ và D là trung điểm đoạn thẳng BC. Tìm góc $\angle BAD$?

Bài 5. Hãy điền vào các ô của bảng vuông 10×10 các số nguyên dương phân biệt sao cho tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột là bằng nhau và nhỏ nhất có thể. Biết rằng, các số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ và 2015 đã được điền trước trên một đường chéo.

Bài 6. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC và AC tại các điểm C_1, A_1 và B_1 tương ứng. Chứng minh rằng

$$\frac{AC}{AB_1} + \frac{CB}{CA_1} + \frac{BA}{BC_1} > 4.$$

Bài 7. Tất cả chúng ta đều biết $3^2 + 4^2 = 5^2$. Bên cạnh đó, không phải ai cũng biết rằng $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. Khẳng định sau đúng hay sai: Với mọi số nguyên dương k, có $2k + 1$ số nguyên dương liên tiếp sao cho tổng bình phương của $k + 1$ số đầu tiên bằng tổng bình phương của k số còn lại?

7. Đề thi dành cho Khối lớp R11

Bài 1. Hai chú thỏ Bugs và Roger cá cược xem ai nhanh hơn. Để xác định người chiến thắng, hai bạn quyết định tổ chức một cuộc thi. Mỗi bạn thỏ sẽ nhảy 50 mét theo một hướng và sau đó quay lại để nhảy ngược lại. Biết rằng, độ dài mỗi bước nhảy của Bugs là 50 cm và của Roger là 60cm, nhưng thỏ Bugs nhảy được 6 bước trong khi Roger chỉ nhảy được 5 bước. Hỏi ai sẽ giành được chiến thăng?

Bài 2. Với những giá trị nào của n thì ta có thể chia một hình vuông thành n hình chữ nhật đồng dạng sao cho có ít nhất hai trong số chúng là không bằng nhau?

Bài 3. Có tồn tại hay không các số nguyên dương a và b sao cho

$$lcm(a, b) = lcm(a + 2015, b + 2016)?$$

Ở đây, $lcm(a, b)$ được kí hiệu cho bội chung nhỏ nhất của hai số a và b.

Bài 4. Cho tam giác ABC với $\angle B = 30^\circ, \angle C = 105^\circ$ và D là trung điểm đoạn thẳng BC. Tìm góc $\angle BAD$?

Bài 5. Tại mỗi điểm có tọa độ nguyên trên mặt phẳng tọa độ trồng một cây với đường kính 10^{-6}. Một bác tiều phu đốn cây tại gốc tọa độ $(0, 0)$ và đứng trên gốc cây. Hỏi phần mặt phẳng mà anh ta nhìn thấy có bị giới hạn hay không? Ở đây, các cây được coi như là một cột hình trụ vô hạn với các trục chứa các điểm nguyên của mặt phẳng tọa độ.

Bài 6. Hãy chỉ ra một bộ 4 số dương không thể là bán kính của bốn hình cầu đôi một tiếp xúc nhau.

Bài 7. Tất cả chúng ta đều biết $3^2 + 4^2 = 5^2$. Bên cạnh đó, không phải ai cũng biết rằng $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. Khẳng định sau đúng hay sai: Với mọi số nguyên dương k, có $2k + 1$ số nguyên dương liên tiếp sao cho tổng bình phương của $k + 1$ số đầu tiên bằng tổng bình phương của k số còn lại?